

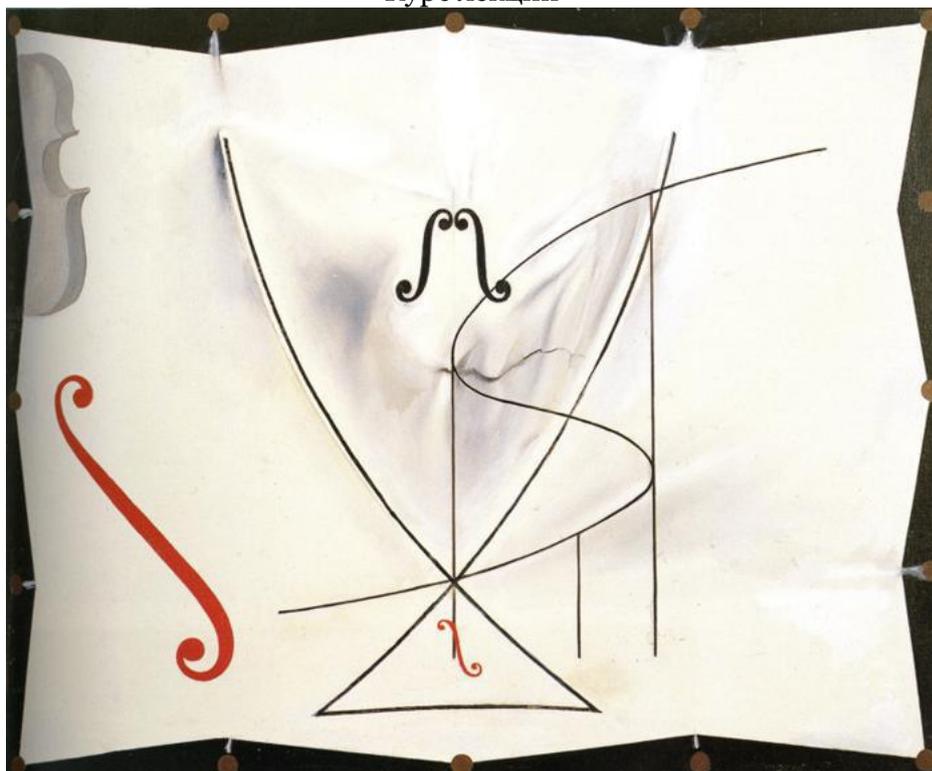
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Химический факультет

Междисциплинарный университет Бекмана

Профессор, д.х.н.  
И.Н. Бекман

## КАТАСТРОФЫ

Курс лекций



Последняя картина Сальвадора Дали "Ласточкин хвост" (масло)

Содержание

От автора

Предисловие

1. Элементы теории катастроф

2. Примеры теории катастроф

3. Катастрофы в математике

4. Катастрофы в развитии мира

5. Катастрофы в природе

6. Катастрофы в физике

7. Катастрофы в химии

8. Катастрофы в технике

9. Катастрофы на транспорте

10. Катастрофы на предприятиях ядерного топливного цикла

11. Катастрофы на АЭС

12. Биологические, экологические и медицинские катастрофы

13. Катастрофы в экономике

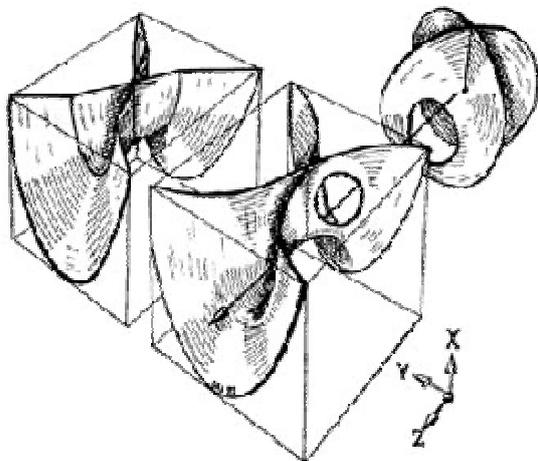
14. Революции, мятежи и восстания

15. Катастрофа личности

Заключение

## Аннотация

Предлагаемое учебное пособие - конспект лекций профессора МГУ И.Н. Бекмана, читаемых слушателям Междисциплинарного дистанционного университета по проблеме применения математической теории катастроф для качественного описания катастроф, происходящих в природе, технике, в обществе и личной жизни. В пособии изложены основные аспекты элементарной теории катастроф, под которой понимается раздел математики, занимающийся описанием динамических систем (теория бифуркаций дифференциальных уравнений, теория особенностей вещественнозначных гладких функций, топологическая динамика, и т.п.). Даны примеры поведения разрывных функций, которые в той или иной степени иллюстрируют катастрофы в реальных (природных, техногенных) системах. Основное внимание уделено перспективам использования теории катастроф в различных областях прикладной математики, физики, химии, техники, биологии, экологии, медицине, экономике, а также для предсказания общественных катаклизмов и революций.



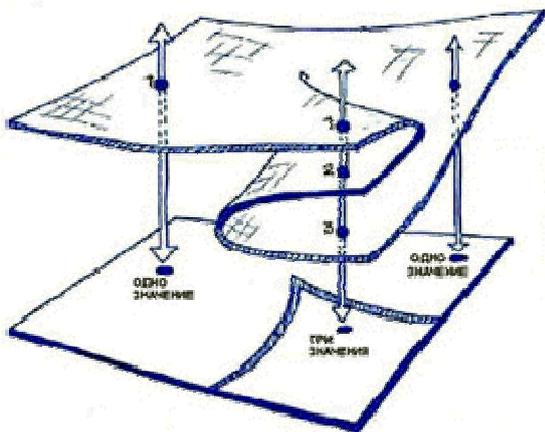
Учебное пособие предназначено для лиц, интересующихся применением теории катастроф и теории риска для развития таких современных наук, как анализ и управление сложными системами, синергетика, геометрия фракталов,

неравновесная термодинамика, информатика и кибернетика.

## ОТ АВТОРА

Мой конь Сатэра был авантюристом - хватал адреналин полно грудью. На Алтае он не просто спускался с горы, а летел вскачь, совершая эффектные прыжки через препятствия. Всё это ему (и мне, т.к. сидел на нём именно я) сходило с рук (или с копыт?). Но однажды, в запале, он решил перескочить в два прыжка пропасть. Попытка не удалась. Рухнули мы на 100 м вниз, шлёпнулись на дно стакана с вертикальными стенками и сильно побились. Без надежды на возврат в цивилизацию.

Вот там, выбираясь из-под Сатэры, и снимая с него седло, вспомнил я теорию катастроф. Математики в ней много, но не помогла она нам в реальном приключении. Ибо не теория это вовсе, а так - умонастроение. А настроение меняется: то ты, как пуганая ворона, куста боишься, то степным волком себя ощущаешь...



Конечно, я и сам виноват. Надо было прочесть Сатэре лекцию по теории катастроф, объяснить ему силу бифуркаций и аттракторов. Глядишь, был бы он осторожнее.

Теперь я исправился. Не поленился написать учебное пособие. Может, оно кого уберезёт от падения в пропасть, или от какой другой напасти.

Жаль - коня у меня нет. Не с кем проверить теорию на практике...

## Оглавление

ОТ АВТОРА.....	2
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
Лекция 1. Элементы теории катастроф.....	7
1.1 Устойчивость, бифуркации, нелинейные системы.....	7
1.2 Особенности, каустики, складки и сборки.....	10
1.3 Элементарные катастрофы.....	18
Лекция 2. ПРИМЕРЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ.....	25
2.1 Иллюстрации теории катастроф.....	25
2.2 Машина катастроф Зимана.....	27
2.3 Качалки.....	31
2.4 Механика конструкций.....	32
2.5 Геометрия жидкости.....	34
2.6 Оптика и теория рассеяния.....	34
2.7 Термодинамика и фазовые переходы.....	35
2.8 Биология и экология.....	38
2.9 Экономика.....	41
2.10 Психология.....	42
2.11 Социологическое моделирование.....	43

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Познание мира и математика идут рука об руку. Я сижу за рулём, время идёт монотонно, и расстояние от Москвы постепенно увеличивается, а до дачи уменьшается. Мне приятно, что в арифметике есть уравнение прямой, которое применимо для описания моей ситуации. Активность изотопа монотонно падает во времени, и в математике можно подыскать функцию (экспоненту), которая адекватно опишет эксперимент. День сменяется ночью, а зима летом, и в математике есть синусоида, и множество других периодических функций. Бери - не хочу...

Казалось бы, всё, что в жизни случается, можно количественно описать, используя современную математику.

Однако оказалось, что это не так. Совсем не так.

*Позавчера температура на улице была  $-5^{\circ}$ , вчера -  $-10^{\circ}$ , сегодня -  $-15^{\circ}$ . Сколько будет завтра? Математика:  $-20^{\circ}$ . Я выхожу на улице в шубе и валенках, а там -  $+3^{\circ}$ ! Снег растаял, кругом ручьи и я в поту. Катастрофа! Куда математика смотрела?! Не смогла!*

Мы одиннадцать лет исправно ходим в школу, думаем так будет вечно. И вдруг на тебе: я в армии во флоте, иду в Сирию, или в далёком городе, в институте, пишу с друзьями пулюку. Я еду в поезде: день-ночь, день-ночь, из окна дует, но я - в купе и вагон-ресторан есть. Увы! Рельсы кончились. Что дальше? Сидеть на месте, пешком идти, такси вызвать, или лучше корабль? Был холостым, стал женатым, не было детей, родились. Акции компании второй год постоянно растут, я вложил в них все свои средства, компания лопнула. Старился потихоньку, мемуары писать собрался, а тут инфаркт. И всё!

Катастрофа? Катастрофа!

Землетрясения, цунами, извержения вулканов, взрывы АЭС, падающие самолёты, переворачивающиеся корабли, сталкивающиеся автомобили, снежные лавины и сели... Продолжите сами список. Всё это - нарушения стабильности, постоянства, порядка. Нарушения резкие, иногда - мгновенные. Можем ли мы их предсказать или как-то избежать? Нет!

Нас давит страх неизвестности, гнетёт невозможность предсказать будущее. А знать его хочется. Тогда бы мы смогли управлять своей судьбой и судьбой мира. Без опоры на астрологов с их гороскопами и без опасности спадания в хаос.

А что ж математика? Она последние столетия надёжно предсказывала монотонное будущее, считая катастрофы-революции-мировые войны досадными недоразумениями, некоторыми флуктуациями (шумами) на устойчивой в целом картине. Дифференциальное исчисление утверждало, что все зависимости можно описывать непрерывными функциями, причём такими у которых малое изменение аргумента приводит к небольшим изменениям функции. Естественно, что никаких катастроф такая математика описать не могла.

Так продолжалось до конца 19-го века. Но в начале 20-го века ситуация стала меняться.

Математики постепенно занялись неустойчивыми моделями, приводящими к резкому нарушению равновесия. Появились работы, демонстрирующие, что неустойчивости столь же реальны, как и состояния гармонии. Оказалось, что любая система, развиваясь, проходит этапы перестройки, резкого изменения, сопровождающиеся перегруппировкой сил, переустройством равновесия. Эти этапы характеризуются временным преобладанием одной из сил, что приводит к хаосу, разрушающему предыдущие структуры; затем происходит гармонизация, равновесие восстанавливается, но уже в новом, качественно ином состоянии. Обнаружилось множество дифференциальных уравнений, которые вообще не имеют решения! К радости метеорологов математики доказали, что погоду в принципе предсказать невозможно. Как и любое другое будущее.

Одной из математических теорий, описывающих резкие переходы, является теория катастроф, которая зародилась в рамках теории динамических систем, как союз теории особенностей и динамики. Предмет её не определён, так что основоположники теории катастроф считали её умонастроением, а не теорией в обычном смысле. Таковой она и остаётся до сих пор.

Тем не менее, рассмотрение типичности, структурной устойчивости, способ решения задач математического анализа геометрическими методами оказалось полезным как для самой математики, так и для ряда её практических приложений.

Первые фундаментальные результаты в области динамических систем, относящиеся к теории катастроф, принадлежат французскому математику Анри Пуанкаре (1854-1912) (метод нормальных форм в теории дифференциальных уравнений), который изобрел топологию (раздел геометрии, который изучает общие свойства любых геометрических фигур) и доказал, что задача взаимодействия трёх тел не имеет решения. Он рассмотрел возможности нерегулярной динамики в детерминированных системах и показал, что незначительные изменения в начальных условиях могут приводить к совершенно непредсказуемым результатам. В его книге «Наука и метод» говорится: «В неустойчивых системах совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительные действия, которые мы не в состоянии предугадать... Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное».

Определённый вклад в теорию катастроф сделали А.М. Ляпунов (1857-1918) - структурная устойчивость, А.А. Андронов (1901-1952) - теория бифуркаций динамических систем и общая теория колебаний, тополог Х. Уитни (1907-1989) - особенности гладких отображений и др. Непосредственно теорию катастроф создали Рене Том (1923-2002) - теория особенностей и К. Зиман (1925-) - автор термина "теория катастроф", изобретатель машины катастроф, специалист в области геометрической топологии и теории сингулярности.

*Рене Фредери к Том (René Frédéric Thom) — французский математик. Основные направления научных интересов - алгебраическая топология, дифференциальная топология. Занимался теорией особенностей, где создал её раздел — теорию катастроф, которую он применял к различным вопросам — от лингвистики до объяснения формы цветков, при этом, в отличие от своих последователей (К.Зимана и др.), Том значительно более осторожен в своих предположениях.*

Теория катастроф, как наука, появилась в книге Рене Тома "Структурная устойчивость и морфогенез" (1972). Он использовал топологическую теорию динамических систем, ведущую начало от работ Пуанкаре, для моделирования разрывных изменений в явлениях природы, и особенно в биологии; он указал на важность в этих рассуждениях требования структурная устойчивость, или нечувствительности к малым возмущениям. Он также отметил, что при некоторых условиях из этого требования вытекает, что изучаемую систему можно описать локально посредством одной из семи стандартных форм - элементарных катастроф.

Бурное развитие теории катастроф в 1970-е — 1990-е годы связано с работами Дж. Боардмана, Е. Брискорна, Дж. Брюса, Дж. Мазера, Б. Мальгранжа, Т. Волла, В.И. Арнольда (1937-2010) и его учеников.

Популярность теории катастроф была вызвана заявлениями её апологетов, что по своей значимости теорию катастроф можно сравнить с изобретением математического анализа, и даже говорить о революции в математике.

Целью работ в этом направлении явилось построение динамических систем с иерархической организацией, обеспечивающей устойчивость, взаимодействие со средой и эволюцию. В случае построения конечного числа "элементарных" систем, из которых можно было бы по определённым законам строить более сложные системы и описывать переходы между ними ("катастрофы"), то был бы создан мощный метод анализа самых разнообразных явлений природы (развитие эмбриона, человеческий язык, форма облаков и т.п.). Преимуществом считалось то, что теория не требует подробных математических моделей и может описывать ситуации не "количественно", а "качественно", а её результаты и выводы иллюстрируются простыми геометрическими образами. Эту теорию стали применять ко всем нерешённым проблемам: устойчивость кораблей, психические явления, социальные и экономические процессы, химические реакции и т.д. и т.п.

Общественность возбудилась: неужели в нашем распоряжении появилась теория, с помощью которой возможно предсказание любых катастроф?

Реакция не заставила себя ждать: теорию подвергли резкой критике. Например, Г. Б. Колата опубликовал на эту тему статью под названием «*The Emperor Has No Clothes*» - «А король-то голый!». Математикам теория катастроф понравилась, т.к. она красива, но для инженеров и естествоиспытателей эта теория практически всегда. Например, в открытых системах, а также в большинстве закрытых систем, природные процессы протекают в соответствии с совершенно иными, нежели постулируемые теорией катастроф, закономерностями.

Да, к примеру, теория катастроф иллюстрирует, каким образом происходит разрушение моста при критических нагрузках, но беда в том, что, инженеры решили эту проблему задолго до появления этой теории. Устойчивость кораблей и множество других задач были решены и решаются без какого-либо участия теории катастроф. Вот когда они решены, тогда и появляется эта теория, объясняя некоторые аспекты происходящих явлений.

Теория катастроф не позволяет ни предсказывать, ни управлять реальными катастрофами. Пуанкаре умер от случайного аппендицита, Ляпунов застрелился, Тома - скончался от инфаркта. Своей жизнью они доказали бесполезность теории катастроф для практики.

Теория катастроф - это продолжение анализа и его развитие в собственных рамках (а не радикально новое направление или заменитель всех старых методов). Она применима лишь в ограниченной и очень специальной области. В подавляющем числе случаев - это чисто качественная теория.

Если в эксперименте получена некоторая зависимость, то к ней можно подогнать прямую, рассчитать параметры этой прямой, найти их ошибки, проверить гипотезу линейности и т.п. Ничего подобного сделать с черномыльской катастрофой, инфарктом или с превращением воды в лёд сделать не удастся. Ни к чему теорию катастроф вы не подгоните, никаких параметров рассчитать не получится, и никаких предсказаний развития событий теория катастроф не даст. Теория катастроф - мышление по аналогии.

*Если Вы после автомобильной аварии, в которой вам удалось прервать монотонный путь своего авто встречей со столбом, лежите в гипсе, и Вас утешает мысль, что в математике*

*есть функция, претерпевающая разрыв в неположенном месте, то Вам сюда, в теорию катастроф.*

В принципе, теория катастроф не является чисто качественной, но и количественной её пока не назовёшь.

Физика и химия извлекают из теории катастроф какую-то выгоду, поскольку они имеют дело с "простыми" системами неорганизованной сложности. Организованная сложность биологии представляется объектом изучения в ближайшем будущем, но здесь уже понадобится вся теория динамических систем (имеющая теорию катастроф лишь малой, хотя и существенной составляющей). Применение теории к анализу организованной сложности социальных систем - дело ещё более далёкого будущего.

Единственное направление, где теорию катастроф можно рассматривать, как нечто полезное для практики, это - образование. Надо же что-то краткое писать в зачётке: синергетика, кибернетика, теория катастроф, либо что-то ещё такое же умное...

*Понятно, что вопль студента, вылетающего из аудитории: "Спихнул катастрофы!", гораздо эффектней идентичной по смыслу фразе: "Сдал экзамен по теории особенностей вещественнозначных гладких функций и топологии динамических систем".*

В данном курсе лекций мы рассмотрим основные особенности теории катастроф, а затем попытаемся применить эту математику для описания реальных катастроф, аварий, революций, бунтов и других катаклизмов. Разовьём концепцию риска.

Может, что и получится.

## Лекция 1. Элементы теории катастроф

*The last straw breaks the camel's back.  
Последняя соломинка ломает спину верблюда.  
Последняя капля переполняет чашу.*



Теория катастроф - часть качественной теории сложных нелинейных систем. Её основой является теория особенностей гладких (дифференцируемых) отображений, сформировавшаяся на стыке топологии и математического анализа, и являющаяся обобщением задач на экстремум в математическом анализе. Элементарная теория катастроф сводит огромное многообразие ситуаций к небольшому числу стандартных схем, которые можно детально исследовать. Анализ качественного поведения нелинейных динамических систем при изменении описывающих их параметров, позволяет описывать состояния, далёкие от равновесия, а также предсказывать резкую смену этих состояний.

Теория катастроф - программа прогнозирования неустойчивости различных систем. Такое название она получила потому, что потеря устойчивости может быть катастрофична, даже если не приводит к гибели или разрушению системы, а лишь обуславливает переход к иной траектории развития.

В данном курсе лекций основное внимание уделено сложным динамическим системам, их анализу и управлению. Под сложными системами здесь понимаются нелинейные системы, свойства которых не сводимы к свойствам компонентов и проявляют вновь возникающие, или «эмерджентные» (*emerge* - возникать) черты.

Сложные динамические системы включают флуктуирующие, случайным образом изменяющиеся компоненты. Отдельные флуктуации или их сочетания в системе с обратной связью, усиливаясь, вызывают разрушение прежнего состояния системы ("катастрофа"). Случайные воздействия в момент перелома (в точке бифуркации) могут подтолкнуть систему на новый путь развития; после же выбора одного из возможных путей, траектории развития, действует однозначный детерминизм - развитие системы предсказуемо до следующей точки бифуркации. Так случайность и необходимость дополняют друг друга.

В далеком от равновесия состоянии системы на первый план выступают нелинейные соотношения, слабое внешнее воздействие может породить неожиданное, непредсказуемое поведение системы в целом. Иногда в состояниях, далеких от равновесия, очень слабые флуктуации или внешние возмущения могут усиливаться до огромных, скачкообразным образом разрушающих всю прежнюю структуру системы и переводящих её в иное состояние.

В этой лекции мы обсудим элементы, на которых базируется теория катастроф. Сама теория будет изложена в последующих лекциях.

Сначала дадим определения некоторых понятий.

**Катастрофа** с точки зрения теории систем — скачкообразное изменение, возникающее в виде внезапного отклика системы на плавное изменение внешних условий.

**Теория катастроф** — раздел математики, включающий в себя теорию бифуркаций, дифференциальных уравнений (динамических систем) и теорию особенностей гладких отображений.

**Теория бифуркаций динамических систем** — теория, изучающая изменения качественной картины разбиения фазового пространства, в зависимости от изменения параметра (или нескольких параметров).

**Бифуркация** — приобретение нового качества в движениях динамической системы при малом изменении её параметров. **Бифуркация** — раздвоение, разделение, разветвление чего-либо. Состояние процесса в динамической системе, при котором резко возрастают флуктуации, и выход из которого возможен по двум существенно различным трудно предсказуемым направлениям — хаотическому или упорядоченному.

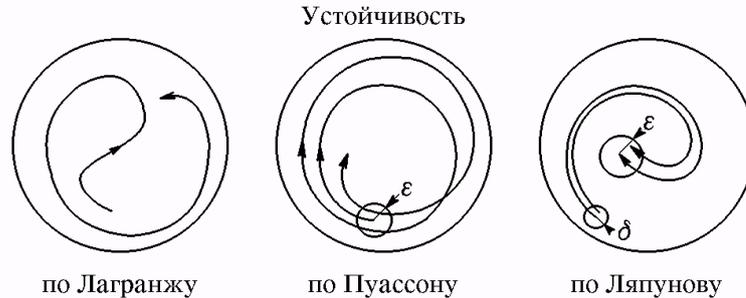
**Динамическая система** — математическая абстракция, предназначенная для описания и изучения эволюции систем во времени. Представляет собой математическую модель некоторого объекта, процесса или явления.

### 1.1 Устойчивость, бифуркации, нелинейные системы

При анализе поведения динамической системы в первую очередь обращают внимание на её устойчивость, т.е. на реакцию динамической системы на малое возмущение её состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать во времени, система неустойчива. Если же малые возмущения затухают со временем, система устойчива.

**Устойчивость** — способность системы сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий. В механике устойчивость характеризуется ответом на малое возмущение системы, находящейся в механическом равновесии. Различают асимптотическую устойчивость, устойчивость по Лагранжу, по Пуассону, по Ляпунову и др.

Решение дифференциального уравнения называется устойчивым, если поведение решений с близким начальным условием «не сильно отличается» от поведения исходного решения. Существуют различные критерии устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная и т.д.



**Рис. 1.** Устойчивости по Лагранжу (траектория остаётся в замкнутой области), по Пуассону (траектория многократно возвращается в  $\varepsilon$ -окрестность стартовой точки) и по Ляпунову (две близкие на старте траектории остаются близкими всегда).

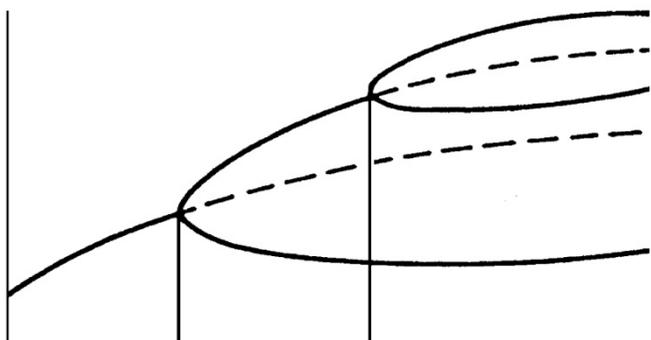
Теория катастроф в основном изучает статические неустойчивости, т.е. только те, которые исключительно связаны с действием потенциальной энергии.

**Потенциальная энергия** — функция координат, являющаяся слагаемым в лагранжиане системы, и описывающая взаимодействие элементов системы. Потенциальная энергия принимается равной нулю для некоторой конфигурации тел в пространстве, выбор которой определяется удобством дальнейших вычислений. Процесс выбора данной конфигурации называется нормировкой потенциальной энергии. Корректное определение потенциальной энергии может быть дано только в поле сил, работа которых зависит только от начального и конечного положения тела, но не от траектории его перемещения. Такие силы называются консервативными (потенциальными).

**Лагранжиан** в классической механике — разность между кинетической и потенциальной энергией.

**Консервативные силы** (потенциальные силы) — силы, работа которых не зависит от вида траектории, точки приложения этих сил и закона их движения и определяется только начальным и конечным положением этой точки. Это такие силы, работа которых по любой замкнутой траектории равна 0.

Понятие устойчивости необходимо для описания сложной, многокомпонентной системы, поскольку её развитие сопровождается потерей устойчивости некоторыми режимами её функционирования и рождением новых, устойчивых. Одни структуры гибнут, рождаются новые, которые видоизменяются, совершенствуются и затем вновь уступают место новым. Изменения могут накапливаться плавно, а могут происходить скачком в виде катастроф. При "фазовых переходах" формирование новых структур сопровождается потерей устойчивости (даже разрушением) предшествующих. Система переходит из одного режима функционирования в другой режим. Старый режим потерял устойчивость, возник новый устойчивый режим, который может наследовать некоторые свойства предыдущего, а может быть и резко отличным. В таких случаях говорят о бифуркациях динамических систем.



**Рис. 2.** Последовательность бифуркаций.

Теория бифуркаций — один из разделов теории гладких динамических систем. Бифуркация означает "раздвоение"; в этом смысле этот термин употребляется, например, в анатомии ("бифуркация бронха"). В математике он применяется для обозначения качественных изменений рассматриваемых объектов при изменении параметров, от которых эти объекты зависят. Термин катастрофа — синоним бифуркации, но более эмоционально окрашен.

В математике и физике существует понятие грубости (структурной устойчивости системы): при малом изменении параметра грубая система хоть и изменяет в деталях режим функционирования, но не принципиально. Для грубых систем переход через точку бифуркации означает смену одного структурно устойчивого режима на другой. При этом в точке бифуркации система не является грубой: малое изменение параметра в ту или иную сторону приводит к резким изменениям состояния.

*Грубость динамической системы - устойчивость структуры разбиения её фазового пространства на траектории по отношению к малым изменениям дифференциальных уравнений. Грубые системы могут быть весьма сложными и в пространстве параметров многомерной динамической системы могут существовать целые области негрубых систем.*

Возникновение диссипативных структур носит пороговый характер. Неравновесная термодинамика связала пороговый характер с неустойчивостью, показав, что новая структура появляется раскрытием неустойчивости в результате флуктуаций. Порядок - продукт флуктуации.

Неустойчивость и пороговый характер самоорганизации связаны с нелинейностью дифференциальных уравнений, описывающих систему. Напомним, что для линейных уравнений существует одно стационарное состояние, для нелинейных — несколько. Поэтому пороговый характер самоорганизации связан с переходом из одного стационарного состояния в другое. Потеря системой устойчивости, есть катастрофа, т.е. скачкообразное изменение, возникающее при плавном изменении внешних условий.

*Самоорганизация — процесс упорядочения элементов одного уровня в системе за счёт внутренних факторов, без внешнего специфического воздействия (изменение внешних условий может также быть стимулирующим воздействием). Результат — появление единицы следующего качественного уровня.*

В зависимости от того, линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями описывается динамическая система, её относят к линейной или нелинейной системе.

Для описания эволюции нелинейных систем во времени основным математическим аппаратом являются нелинейные дифференциальные уравнения. Они задают зависимость скорости изменения каждой переменной от значений самих переменных. Нелинейные уравнения, как правило, не решаются аналитически, поэтому для их исследования используют численные, компьютерные методы. Существует, однако, второй способ описания динамики нелинейных систем: с помощью итерационных уравнений, которые определяют закон изменения переменных в некоторые избранные, дискретные моменты времени. Такие уравнения называют отображениями.

*Отображение — закон, по которому каждому элементу некоторого заданного множества  $X$  ставится в соответствие вполне определённый элемент другого заданного множества  $Y$ .*

Проще всего представить себе такой способ описания в ситуации, когда в системе имеется некоторый ритм, например, период внешнего воздействия  $T$ . Тогда можно фиксировать дискретные значения переменных точно в соответствии с этим ритмом, т.е. в моменты времени  $T$ ,  $2T$ ,  $3T$  и т.д. Этот способ описания динамики не уступает по общности дифференциальным уравнениям, но гораздо проще для исследования. А. Пуанкаре предложил определённую процедуру, которая сопоставляет динамике в рамках дифференциальных уравнений некоторое отображение (метод сечений Пуанкаре, см. курс лекций И.Н. Бекмана Синергетика).

Линейные дифференциальные и разностные уравнения не приводят к хаосу, а нелинейные - могут приводить. Однако, нелинейность является необходимым, но не достаточным условием существования динамического (детерминированного) хаоса.

Для изучения динамики систем необходимо знать, каким именно образом новые решения уравнений "ответвляются" от известного решения. Ответ на такие вопросы даёт теория бифуркаций (разветвлений), т.е. возникновения нового решения при критическом значении параметра. Момент перехода (катастрофический скачок) зависит от свойств системы и уровня флуктуаций. В реальных условиях при углублении неравновесности в открытой системе возникает определённая последовательность бифуркаций, сопровождающаяся сменой структур. Состояние системы в момент бифуркации является неустойчивым и бесконечно малое воздействие может привести к выбору дальнейшего пути. Финальным состоянием эволюционирующих физических систем является состояние динамического хаоса.

При подходе управляющих параметров к бифуркационным значениям положения равновесия "бифурцируют" (рождаются или умирают). Знание геометрии типичных особенностей позволяет описывать происходящие при этом явления, например, скачкообразный переход системы к далёкому состоянию равновесия при плавном изменении параметров. Такие скачки способны разрушить систему (механическую, упругую, электрическую, биологическую, химическую и т. п.), откуда и название катастрофа. Каскад следующих друг за другом бифуркаций вводит систему в непредсказуемый режим; он ведёт к выбору между двумя решениями, затем четырьмя и т.д.; система начинает колебаться в хаотическом, турбулентном режиме последовательного удвоения возможных значений - впадает в хаос.

Теория катастроф - результат применения топологии к системам, которые обладают четырьмя основными свойствами: бимодальностью, разрывностью, гистерезисом и дивергенцией. В случае

бимодальности для системы характерно одно из двух (или более) состояний, а при разрывности между этими двумя состояниями оказывается сравнительно мало индивидов или наблюдений. Пример как бимодальности, так и разрывности даёт деление организмов на самцов и самок. Наличие случайных организмов неопределенного пола не создаёт препятствий для распознавания этих двух состояний, а теория предполагает такой разрыв между состояниями, что любой индивид может без труда быть отнесен лишь к одной из категорий. О разрывности говорят и тогда, когда малые изменения какой-либо переменной, в том числе времени, вызывают большие изменения в поведении или состоянии. Гистерезис проявляется в том, что система обладает чётко выраженной замедленной реакцией на некое воздействие, причём эта реакция идёт по одному пути, когда воздействие возрастает, и по другому, когда оно убывает. Характерной особенностью дивергенции является то, что близкие начальные условия эволюционируют к значительно удалённым друг от друга конечным состояниям. В приложениях таких моделей к динамике популяций, например, начальные условия чуть выше или чуть ниже вполне определенных порогов, часто расходятся к принципиально разным конечным состояниям.

Поскольку в точках катастроф даже незначительные движения могут повлиять на ход развития, то нужно определить, далеко ли от такой точки находится система. Формально для этого следует изучить зависимость системы от внешних параметров в математических моделях, однако нередко экспериментатор не знает, каким уравнением описывается развитие системы. Тем не менее, даже существуют признаки того, что изучаемая система находится вблизи точки катастрофы (флаги катастроф):

- наличие нескольких различных (устойчивых) состояний;
- существование неустойчивых состояний, из которых система выводится слабыми воздействиями;
- возможность быстрого изменения системы при малых изменениях внешних условий;
- необратимость системы (невозможность вернуться к прежним условиям);
- гистерезис.

## 1.2 Особенности, каустики, складки и сборки

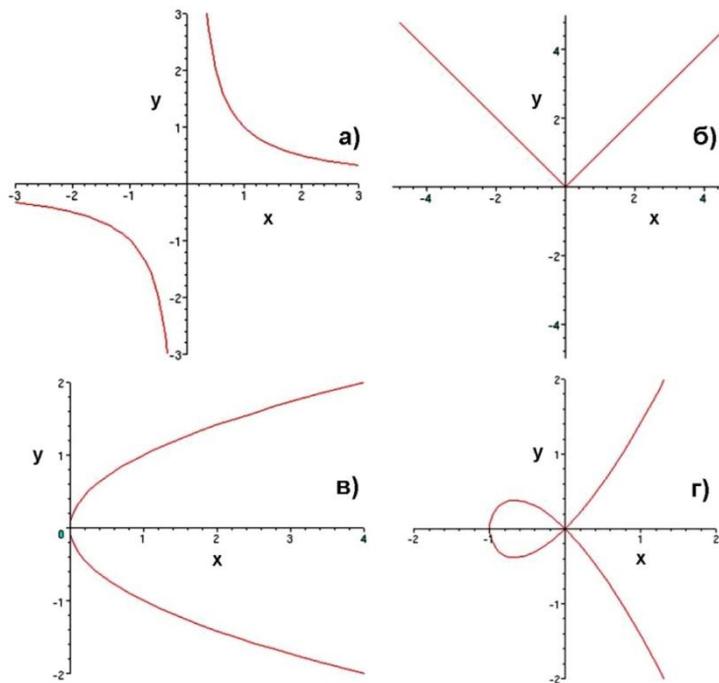
Теория катастроф, подводит стандартную и эффективную базу под описание качественных изменений в нелинейных уравнениях, описывающих далекие от равновесия системы. Эта катастроф определяет область существования различных структур и границы их устойчивости. Её задачей является получение нормальной формы исследуемого объекта (дифференциального уравнения или отображения) в окрестности «точки катастрофы» и построение на этой основе классификации объектов.

**Особенность (сингулярность)** — точка, в которой математический объект (обычно функция) не определён или имеет нерегулярное поведение (например, точка, в которой функция имеет разрыв или недифференцируема).

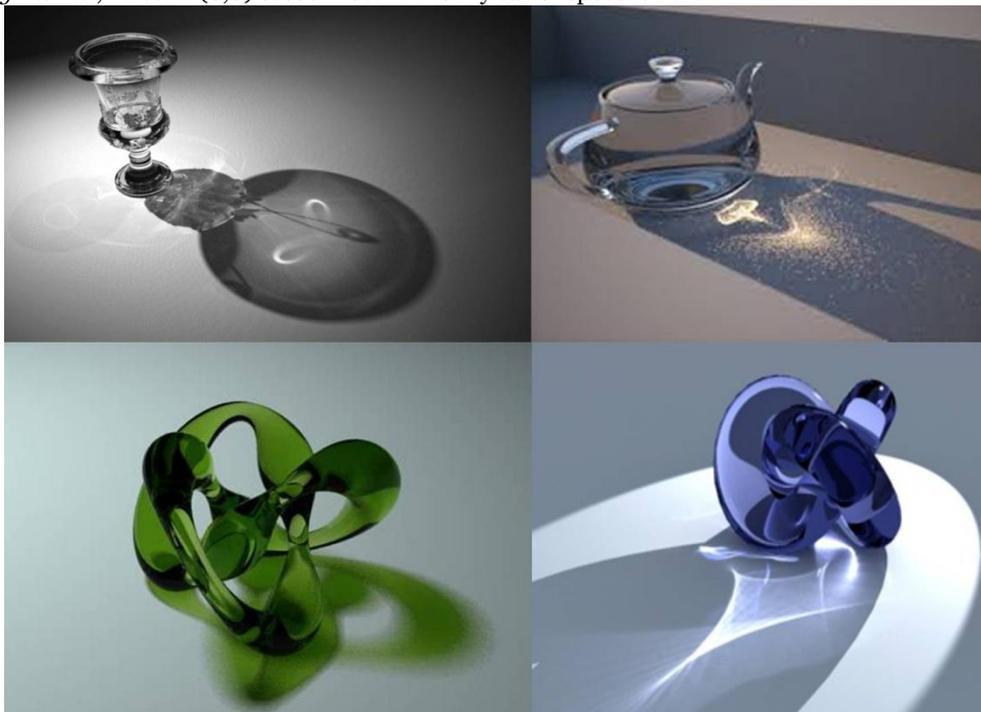
Теория катастроф позволяет свести огромное многообразие сложных ситуаций к небольшому числу точно изученных схем. Математические образы теории катастроф реализуются в волновых полях. Известны геометрические места точек, в которых происходит фокусировка волнового поля, называемые в оптике *каустиками*. При пересечении каустик происходит скачкообразное изменение состояния — меняется число лучей, приходящих в данную точку пространства. Каустики — геометрические места точек, в которых происходит заметная концентрация (фокусировка) волнового поля. С геометрической точки зрения каустики определяются как особенности некоторых отображений, осуществляемых семейством лучей. В каустики скачкообразное изменение состояния при пересечении выражается в изменении числа лучей, приходящих в данную точку пространства.

Каустика - линия или поверхность, вдоль которой концентрируются световые лучи. Это — поверхность, геометрическое место всех фокусов негеоцентрических пучков, т. е. пучков световых лучей, не сходящихся в одной точке. Каустики — это особые точки световых поверхностей, именно потому каустики легко заметить: в них резко возрастает интенсивность светового поля. Каждая точка каустики связана с распределением фронта световой волны; для сферической волны обе каустики сводятся к одной точке - фокусу. Каждая волновая поверхность имеет две каустики, а световые лучи являются касательными к каустикам.

**Каустика (жгутич)** — огибающая семейства лучей, не сходящихся в одной точке. Каустики в оптике — особые линии (в двумерном случае) и особые поверхности, вблизи которых резко возрастает интенсивность светового поля. Каустики возникают не только при распространении света, но и в ряде других волновых явлений.



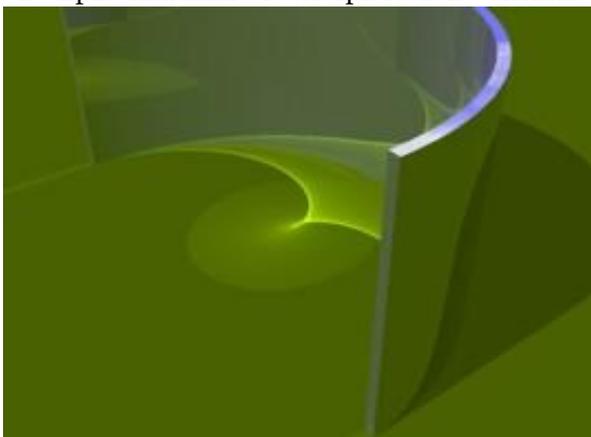
**Рис. 3.** Особенности в действительном анализе: а - функция  $f(x)=1/x$  имеет особую точку в нуле, где она стремится к положительной бесконечности справа и к отрицательной бесконечности — слева; б - функция  $g(x)=|x|$  имеет особенность в нуле, где она недифференцируема; в - график, определённый выражением  $y^2=x$ , имеет в нуле особенность — вертикальную касательную.; г- кривая, заданная уравнением  $y^2=x^3+x^2$ , имеет в  $(0,0)$  особенность — точку самопересечения.



**Рис. 4.** Каустики в стекле.

Каустика - огибающая семейства лучей, т. е. геометрическое место точек пересечения бесконечно близких лучей семейства. Образование каустики обусловлено криволинейностью волнового фронта (например, фронта отражённой или преломлённой волн), рефракцией лучей в неоднородных средах, анизотропией среды и т. п. Важная роль каустик в волновых задачах определяется тем, что они характеризуют семейство лучей в целом и позволяют составить глобальную качественную картину волнового поля. Каждый световой луч касается каустики, значит, проходит вдоль нее значительную часть своего пути, значит, “отдает” ей большую часть своей энергии. Линия, которая касается каждой прямой из некоторого семейства прямых, называется *огibaющей* этого семейства. Так что каустика является огибающей световых лучей. Можно сказать, что каустика это остов, на который нанизаны все световые лучи.

В приближении геометрической оптики интенсивность света на каустиках стремится к бесконечности, и потому каустики наблюдаются в виде ярких световых полос и пятен. Здесь каустики представляют собой линии и поверхности бесконечно малой толщины. В геометрическом плане каустика представляет собой эволюту волнового фронта; волновой фронт — эвольвенту каустики.



**Рис. 5.** Каустика отражения солнечных лучей от цилиндрического зеркала.

*Эволюта плоской кривой — множество центров кривизны линии.*

По отношению к своей эволюте любая кривая является эвольвентой. Если линии заданы

параметрическими уравнениями, то эволюта имеет уравнение:

$$\begin{aligned} X &= x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \\ Y &= y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \end{aligned} \quad (1)$$

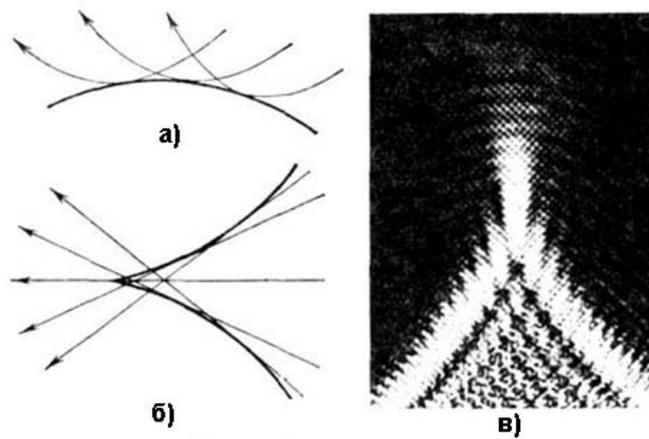


**Рис. 6.** Каустики в воде.



**Рис. 7.** Каустика разноцветная радуга (катастрофа складки).

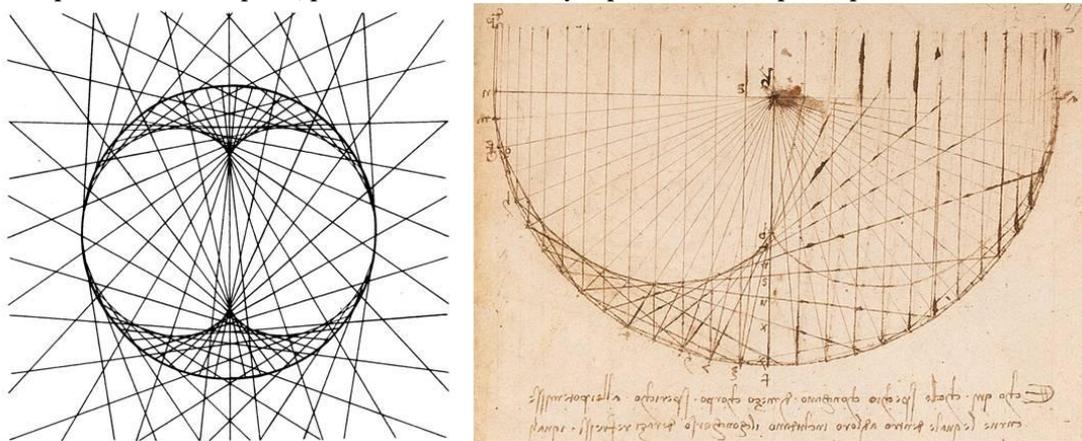
*Эвольвента плоской линии — это линия, по отношению к которой является эволютой. Иными словами, это кривая, нормаль в каждой точке которой является касательной к исходной кривой. Например, эвольвентой окружности является спиралевидная кривая. Эвольвенту пространственной кривой определяют как ортогональную траекторию касательных этой кривой.*



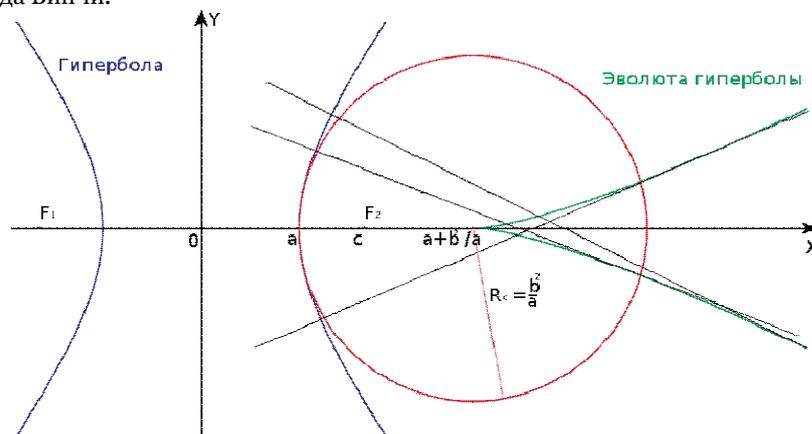
**Рис. 8.** Примеры каустик: а – простая каустика; б – каустика типа сборки; в - распределение интенсивности поля вблизи такой каустики.



**Рис. 9.** *D* каустики: отражение параллельных лучей от окружности. Возникающая здесь каустика – яркая линия с острием, расположенным между вершиной и центром зеркала.

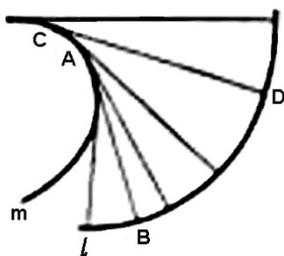


**Рис. 10.** Каустики: слева - отражение световых лучей от цилиндрического зеркала, справа - рисунок Леонардо да Винчи.



**Рис. 11.** Синим цветом показана гипербола. Зелёным цветом — эволюта правой ветви этой гиперболы (эволюта левой ветви вне рисунка). Красным цветом показан круг, соответствующий кривизне гиперболы в её вершине.

**Эволюта и эвольвента** понятия дифференциальной геометрии: множество  $m$  центров кривизны плоской кривой  $l$  называется эволютой этой кривой; кривая  $l$  по отношению к своей эволюте называется эвольвентой (рис. ). Эвольвента  $l$  кривой  $m$  может быть получена как траектория конца  $B$  нити  $AB$ , которая наматывается на линию  $m$  или разматывается с неё (этим построением эвольвенты и объясняется др. её назв. "развёртка"). Эволюта и эвольвента обладают следующими свойствами: 1) касательная  $CD$  в произвольной точке  $C$  эволюты является нормалью в соответствующей точке  $D$  эвольвенты (следовательно, эвольвента есть ортогональная траектория касательных кривой  $m$  является эвольвентой (поэтому у данной кривой бесконечно много эвольвент); 2) всякая ортогональная траектория касательных кривой  $m$  является эвольвентой (поэтому у данной кривой бесконечно много эвольвент); 3) разность радиусов кривизны  $AB$  и  $CD$  в точках  $B$  и  $D$  эвольвенты равна длине дуги  $AC$  эволюты; 4) эволюта является огибающей семейства нормалей эвольвенты.



**Рис. 12.** Эволюта - множество  $m$  центров кривизны плоской кривой  $l$ ;  $l$  - эвольвента кривой  $m$ .

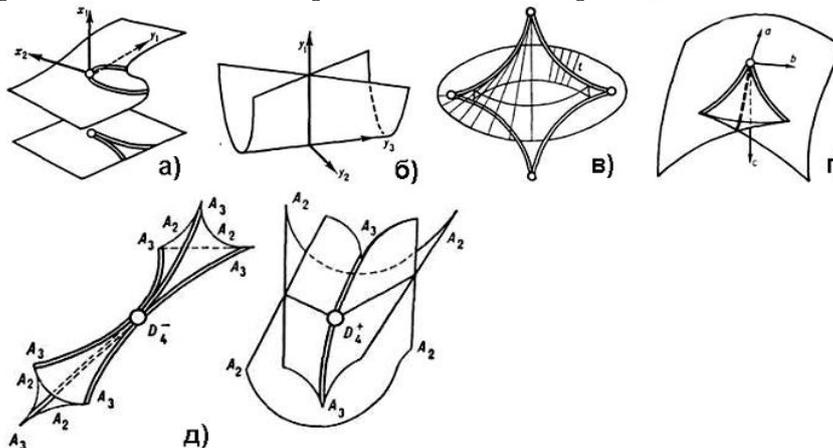
Каустики можно рассматривать как особенности отображения (катастрофы), осуществляемого семейством лучей, поэтому последовательная классификация каустик проводится на основе теории катастроф.

Коротко остановимся на роли особенностей в теории катастроф.

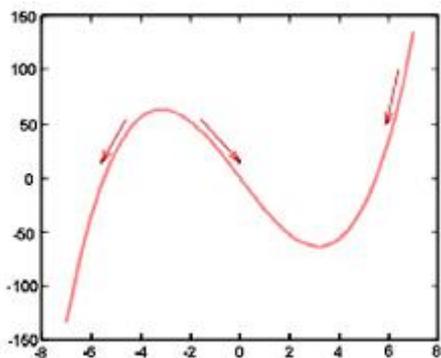
**Особенности** - нарушения гладкости функции при каких-то значениях аргументов. В таких точках значения функции могут изменяться скачкообразно (происходят бифуркации). В простейшем случае особенности гладких отображений представляют собой функции двух переменных  $F(x,y)$ , которые в трёхмерном пространстве изображаются некоторыми поверхностями над плоскостью  $XU$ . Если поверхность образует **складки** так, что перпендикуляры к плоскости  $XU$  пересекают ее два или более раза, то функция неоднозначна и может испытывать скачки.

Теория особенностей гладких отображений обобщает исследование экстремумов функций на случай нескольких функций любого числа переменных. **Критическая точка функции** - точка, в которой все первые частные производные равны нулю; критическая точка называется невырожденной, если определитель её матрицы отличен от нуля. У типичной функции все критические точки невырождены.

Гладкие фронты волн при движении в нелинейной среде или при отражении от препятствий образуют **складки**, и при этом возникают сложные пространственные структуры. Число видов таких структур конечно, их можно классифицировать и присвоить каждому их них образное название, например, "ласточкин хвост", "пирамида", "кошелёк" (рис. 13).



**Рис. 13.** Примеры бифуркационных диаграмм; а - сборка; б - зонт Уитни-Келли; в - каустика, имеющая 4 точки возврата; г - ласточкин хвост; д - пирамида и кошелёк.



Универсальность геометрии бифуркационных диаграмм позволяет использовать их для одновременного моделирования многих различных по своему физическому смыслу явлений.

**Рис. 14.** Потенциал в случае существования двух стационарных точек. Стрелками указано направление эволюции системы.

Проиллюстрируем механизм появления складок, сборок и др. геометрических фигур теории катастроф на простейшем примере системы, описываемой одним уравнением первого порядка.

Дана динамическая система

$$\frac{dC}{dt} = f(C) \quad (2)$$

где  $f(C)$  - нелинейная функция  $C$ .

Здесь  $C(t)$  - изменяющаяся во времени целевая функция (концентрация химического реагента, плотность популяции и т.п.);  $f(C)$  - потенциальная функция.

При  $dC/dt = f(C^*) = 0$  достигается стационарное состояние, при котором концентрация в стационарном состоянии  $C^*$  - не зависит от времени.

Пусть далее система немного отклонилась от состояния равновесия  $C^*$  и перешла в состояние

$$C = C^* + \xi \quad (\xi \ll x). \quad (3)$$

Если функция  $f(C)$  дифференцируема достаточное количество раз, вблизи  $C^*$ , то она допускает разложение в ряд Тейлора:

$$f(C) = f(C^*) + \xi \cdot d(C^*)/dC + \dots \quad (4)$$

Подставив это разложение в исходное уравнение для динамической системы (2), получим для скорости процесса в стационарном состоянии:

$$\frac{d(C^* + \xi)}{dt} = f(C^*) + \xi \frac{dC^*}{dC} + \dots \quad (5)$$

Обозначив  $\omega = \frac{dC^*}{dC}$  имеем:

$$\frac{dC^*}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = f(C^*) + \omega \xi \quad (6)$$

Ограничившись линейным членом разложения в правой части, получим линеаризованное уравнение:

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega \xi \quad (7)$$

решение которого

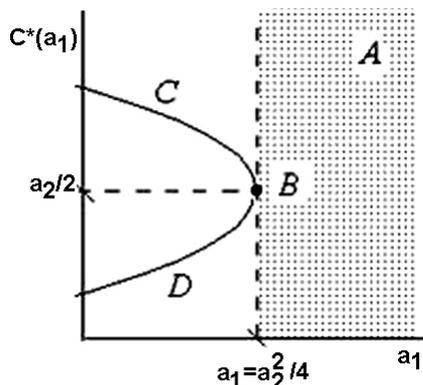
$$\xi(t) = A_0 e^{\omega t} \quad (8)$$

Если  $\omega < 0$ , то  $\xi(t) = A_0 e^{-L\xi t}$ , где  $|L| = \omega$ . Здесь с течением времени величина  $C$  уменьшается и стремится к своему стационарному значению: решение устойчиво. При  $\omega > 0$  отклонения от положения равновесия увеличиваются, и имеет место неустойчивое поведение системы. При  $\omega = 0$  величина  $\xi$  не изменяется со временем.

Таким образом, часто об устойчивости системы можно судить по знаку производной  $df(C^*)/dC$  - правой части линейного уравнения - вблизи стационарной точки. Идея использования линеаризованного уравнения принадлежит А.М. Ляпунову.

**Замечание.** Здесь рассмотрено только линеаризованное решение. Обычно анализ приходится проводить с учётом следующих членов разложения функции  $f(C)$ , поэтому для утверждения об устойчивости необходим дополнительный анализ.

Поскольку знак производной определяет характер устойчивости системы, то при одних значениях параметров система может быть устойчивой, а при других наступает переход от одного режима к другому, например, от устойчивого характера поведения к неустойчивому. Изменение характера поведения динамической системы на большом временном интервале при изменении значений управляющего параметра называют бифуркацией. Исследование системы начинают с нахождения условий стационарности, а затем анализируют выражение для  $C^*$ , как функцию параметров системы или одного какого-то параметра. Полезно нарисовать диаграмму зависимости  $C^*$  от этого параметра - бифуркационную диаграмму, которая покажет как изменяется качественный характер поведения системы по полю своих параметров.



**Рис. 15.** Зависимость стационарных значений искомой функции (например, концентрации вещества)  $C^*$  от управляющего параметра  $a_1$ .

Пусть для определённости потенциал задается полиномом 2-ой степени:

$$f(C) = a_1 - a_2 C + a_3 C^2 \quad (9)$$

причём  $a_3 = 1$ , так что  $f(C) = a_1 - a_2 C + C^2$

В этом случае возможны два стационарных состояния:

$$C_{12}^* = \frac{a_2}{2} \pm \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_1} \quad (10)$$

В качестве управляющего параметра выберем  $a_1$ . В этом случае бифуркационная диаграмма  $C(a_1)$  будет иметь вид параболы (рис. 15).

При  $a_1 > a_2^2/4$  стационарных состояний нет (область **A**). При  $a_1 = a_2^2/4$  имеется одно состояние, изображаемое точкой **B**. При  $a_1 < a_2^2/4$  таких состояний два. Им отвечают две ветви **C** и **D**.

Производная от  $f(C^*) = a_1 - a_2 C^* + C^{*2}$ :

$$\frac{df(C^*)}{dC} = 2C - a_2 \quad (11)$$

Подставив в это уравнение первое стационарное значение  $C = C_1^*$  (со знаком плюс) обнаружим, что производная  $df(C_1^*)/dC > 0$ , поэтому состояние ветви **C** - неустойчиво:  $C(t)$  - уменьшается во времени. Подставив в () при значении  $C = C_2^*$  (со знаком минус) обнаружим, что производная  $df(C_2^*)/dC$  отрицательна: система на ветви **D** развивается устойчиво и после некоторой флуктуации функция восстанавливает своё значение.

Как уже упоминалось, теория катастроф занимается проблемой устойчивости решений уравнений на поле параметров. В её рамках показано, что если полином  $f(C)$  имеет степень по  $C$  большую, чем 1, то бифуркационная диаграмма может иметь несколько ветвей. Например, в случае полинома третьей степени (рис. ) ветви **A** и **C** - устойчивы, а ветвь **B** неустойчивая. Это означает, что при плавном уменьшении параметра  $a$  от больших значений к малым, развитие системы будет идти по ветви **A** до точки **D**.

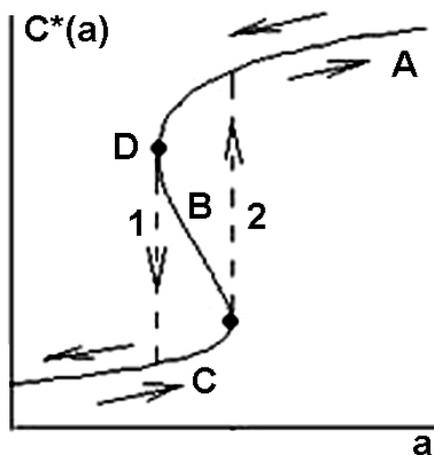


Рис. 16. Зависимость стационарной концентрации от параметра  $a$ .

Описание системы, претерпевающей бифуркации включает и детерминистический и вероятностные элементы, так как в окрестности точек бифуркации существенную роль играют флуктуации и именно они «выбирают» ветвь, которой далее будет следовать система. Для этих систем нельзя точно указать ход их эволюции - можно лишь предсказать вероятность возможных сценариев развития.

Если система управляется двумя параметрами, то возможны только два типа катастроф (рис. ): «складка» (*fold*) и «сборка» (*cusp*). Катастрофа первого типа - «складка» - характерна для триггерных систем. В катастрофе «сборка» есть как траектории без перескока, с плавным развитием, так и со скачком в развитии. Возможны и другие типы, но они легко нарушаются при незначительных шевелениях поверхности или направлениях проектирования на плоскость.

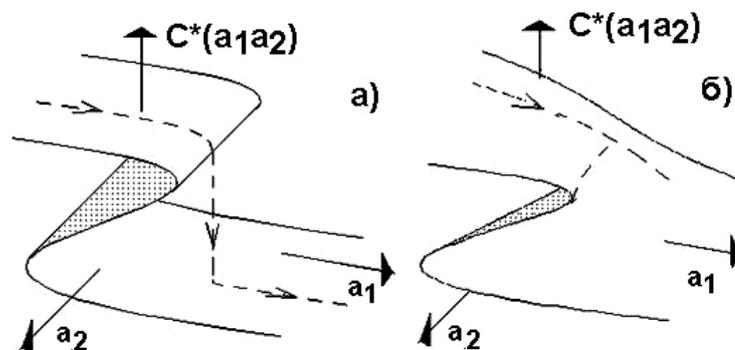
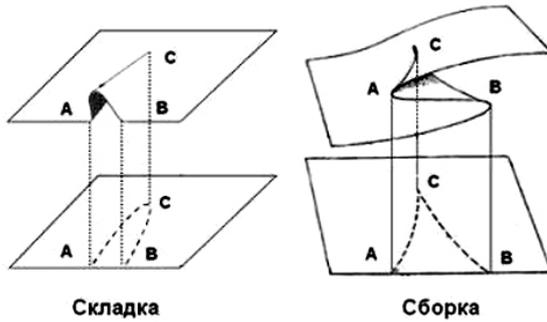


Рис. 17. Два вида катастроф: а - складка; б - сборка.

Особенность типа складки (сборки) функции состояния приводит к «катастрофе». Гладкость этой поверхности не гарантирует, что при плавном изменении одной переменной, две другие тоже меняются плавно. В самом деле, лыжник, подъезжающий к обрыву, движется по достаточно гладкой поверхности, и одна из его пространственных координат изменяется

достаточно гладко. Тем не менее, за обрывом одна из оставшихся координат должна измениться скачком — иначе лыжник оторвется от поверхности. Нечто подобное происходит и с водяным паром при охлаждении. В какой-то момент давление при фиксированном объёме не может больше меняться плавно, и падает скачком; происходит «катастрофа».



вид (потенциал):

$$f(C) = aC - \frac{C^3}{3}, \quad (12)$$

где  $f(C)$  и  $C$  – переменные;  $a$  – параметр; множитель  $1/3$  в первое слагаемое введён для упрощения преобразований.

Производная () имеет вид:

$$\frac{df}{dC} = a - C^2. \quad (13)$$

Уравнение (12) имеет два стационарных состояния:  $C_{1,2}^* = \pm\sqrt{a}$ . Линеаризуя (13) в окрестности стационарного состояния, найдём собственные значения  $L = \pm 2\sqrt{a}$ .

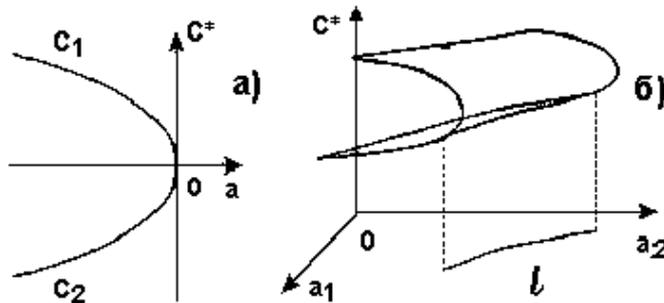
Поведение функция (12) определяется величиной параметра  $a$ . Если этот параметр положителен, то функция носит монотонный характер, её график – плавная монотонно возрастающая во времени кривая. Если параметр  $a$  уменьшается, то при нулевом его значении тип функции меняется. При нулевом значении параметра изменяется характер связи в системе и поведение системы (бифуркация). При отрицательной величине параметра  $a$ , функция, описываемая уравнением (12) представляет собой немонотонную функцию. Она имеет максимум и минимум при значениях  $C = \pm\sqrt{a}$ , т.е. связь между переменными в определенной окрестности начала координат не однозначна: одному значению переменной  $f(C)$  соответствует три разных по величине значения переменной  $C$ . Здесь при монотонном плавном изменении переменной  $f(C)$  переменная  $a$  изменяется скачкообразно. Это и есть катастрофа.

Таким образом,  $C_1^*$  – устойчивое состояние,  $C_2^*$  – неустойчивое. При  $a=0$  имеем  $C_1^*=C_2^*=0$ : и собственное значение в этой точке равно нулю. Бифуркация имеет коразмерность 1, так как выделяется одним условием  $L(a)=0$ . В области  $a<0$  все кривые подобны и имеют две критические точки; при  $a>0$  – кривые также подобны, но критических точек нет; точка  $a=0$  равная нулю, в пространстве управляющих параметров является *сепаратрисой*.

**Сепаратриса** - траектория динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаяся к седловому состоянию равновесия при времени  $t \rightarrow \infty$  (устойчивая сепаратриса) или при  $t \rightarrow -\infty$  (неустойчивая сепаратриса).

На рис. 19 изображена фазопараметрическая диаграмма системы (). Если бифуркация седло-узел происходит в двухпараметрической системе, то в фазопараметрическом пространстве ей соответствует особенность (катастрофа) типа складки вдоль линии  $l$  на плоскости параметров.

**Замечание** Для оценки «сложности» бифуркации вводится понятие «коразмерности». Коразмерность  $k$  совпадает с числом параметров, при независимой вариации которых эта бифуркация происходит. В системе происходит бифуркация коразмерности  $k$  (*codim k dimension – размерность*), если в ней выполняются  $k$  условий типа равенств. Значение  $k=0$  соответствует отсутствию бифуркации в данной точке.



**Рис. 19.** Фазометрическая диаграмма бифуркации седло-узел: а - с одним управляющим параметром. При  $a>0$  в системе нет устойчивых равновесий, при  $a<0$  в системе два равновесия, устойчивое и неустойчивое; б - бифуркации седло-узел с двумя управляющими параметрами (катастрофа типа складка).  $l$  - линия бифуркации на плоскости параметров  $a_1 a_2$ .

Если установлено, что между переменными, характеризующими поведение системы, связь описывается уравнением вида (12), то можно утверждать, что в системе возможно проявление неустойчивости. Если параметр  $a$  положителен, но выявлена тенденция его уменьшения, то можно считать, что система приближается к катастрофе. Следует продолжить изучение системы и выявить условия или возможные сроки наступления катастрофы, оценить ее вероятные последствия. Тип элементарной катастрофы, определяемой связью, которая описывается уравнением (12), носит название катастрофы складки, поскольку в пространстве трех координат – двух переменных и параметра  $a$  – поверхность, описываемая уравнением, имеет вид складки, начинающейся при  $a = 0$  и углубляющейся по мере дальнейшего уменьшения параметра.

Предсказать появление элементарных катастроф можно путём оценки возможности описания связей в системах уравнениями типа уравнений элементарных катастроф (12). На практике это может быть реализовано, если можно получить регрессионные уравнения связей в системах. Если по уравнению детерминации, уровню значимости регрессионное уравнение одной из катастроф превосходит регрессионное уравнение связи устойчивого характера, то следует считать катастрофу возможной и дать ее прогноз. *Флаги катастроф* представляют собой косвенные признаки, по которым можно судить о возможности наличия катастрофы в системе. Например, для экономических систем существует один флаг – *аномальная дисперсия*. Признаком всевозможного приближения катастрофы является нарастание дисперсии или размахов величин, характеризующих систему. Этот признак реализуется при статистическом регулировании качества продукции в серийном производстве.

### 1.3 Элементарные катастрофы

Теория катастроф анализирует критические точки потенциальной функции, т. е. точки, где не только первая производная функции равна нулю, но и равны нулю же производные более высокого порядка.

*Критическая точка – точка, где производная равна нулю, либо неопределена.*

Динамику развития критических точек изучают при помощи разложения потенциальной функции в рядах Тейлора посредством малых изменений входных параметров. Если точки роста складываются не просто в случайный узор, но формируют структурированную область стабильности, эти точки существуют как организующие центры для особых геометрических структур с низким уровнем катастрофичности, с высоким уровнем катастрофичности в окружающих их областях фазового пространства. Если потенциальная функция зависит от 3 или меньшего числа активных переменных (обычно одна-две), и 5 управляющих параметров (не более пяти), то в этом случае существует всего 7 обобщённых структур описанных геометрий бифуркаций, которые можно разложить в ряды Тейлора при помощи диффеоморфизма (гладкой трансформации, обращение которой также гладко). Эти семь элементарных типов катастроф известны под именами, которые им дал Рене Том: складка, сборка, ласточкин хвост, бабочка, гиперболическая омбилика, эллиптическая и параболическая омбилика. Все 7 канонических катастроф имеют свои образы в каустиках.

*Омбилика - точка округления (круговая точка), тип точек поверхности в дифференциальной геометрии; тип особенностей функций (катастроф) в теории катастроф.*

Для описания событий, происходящих вблизи бифуркационной границы удобно использовать системы самых простых уравнений, обычно – полиномиальных, которые описывают качественные особенности процесса. Такие системы называются *модельными* и активно используются в теории бифуркаций и в теории катастроф. Например, для системы, которая может быть описана одним автономным дифференциальным уравнением, модельная система имеет вид:

$$\frac{dC}{dt} = aC + F(C) \quad (14)$$

т.е. потенциал  $f(C) = aC + F(C)$ .

Условием вырождения (бифуркации) является  $a=0$ , т.е. отсутствие в правой части линейного члена. При нулевых значениях параметров в системе возникает вырождение, а при вариации параметров происходит бифуркация.

Рассмотрим основные свойства фундаментальных типов катастроф.

Начнём с потенциальные функции, имеющей одну активную переменную.

**1. Катастрофа типа складка** определяется потенциальной функцией имеет вид

$$f(C) = C^3 + aC \quad (15)$$

**Замечание.** Выше мы рассмотрели аналогичную функцию  $f(C, a) = \frac{C^3}{3} + aC$ . Иногда предпочитают иллюстрировать образование складки уравнением  $f(C, b) = -C^3 + C - b$ . Принципиально это дело не меняет: важно, чтобы  $C$  было в кубе (многочлен в потенциале третьей степени).

При отрицательных значениях параметра  $a$ , потенциальная функция  $U$  имеет два экстремума — один стабильный (устойчивое равновесие) и один нестабильный (неустойчивое равновесие). Если параметр  $a$  медленно изменяется, система может находиться в точке стабильного минимума. Но при  $a = 0$ , стабильные и нестабильные экстремумы встречаются и аннигилируют. Это — точка бифуркации. При  $a > 0$  не существует стабильного решения. Если физическая система проходит через точку бифуркации типа «свёртка», и поэтому параметр  $a$  достигает значения 0, стабильность решения при  $a < 0$  внезапно теряется, и система может осуществить внезапный переход в новое, весьма отличное от предыдущего состояние.

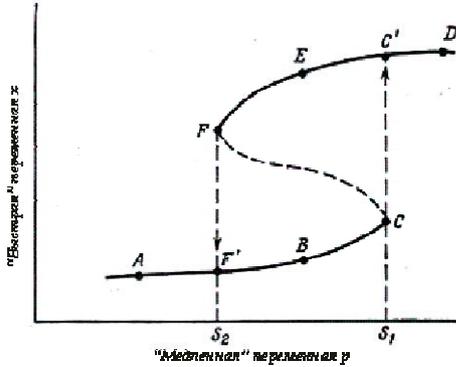


Рис. 20. Катастрофа типа складки.

Простая катастрофа «складка» хорошо иллюстрирует свойство бимодальности, представленное двумя ветвями складчатого многообразия, и свойство разрывности, представленное резкими скачками с одной ветви на другую, в особенностях  $S_1$  и  $S_2$ . Гистерезис иллюстрируется тем, что траектория системы при уменьшении  $b$  после пересечения особенности отличается от траектории, по которой движется система при увеличении  $b$ . Следует пожалуй отметить, что конкретная форма функции  $C(a)$  на

многообразии, не важна — лишь бы в проекциях  $C$  на  $b$  сохранялась особенность типа складки.

В катастрофе типа складка система сначала находится в точке  $A$  на нижней ветви складчатого многообразия. С ростом переменной  $b$  переменная  $C$  тоже возрастает, так что система переходит через точку  $B$  и достигает точки  $C$ . В данной точке переменная  $b$  пересекает особенность  $S_1$ , и система совершает «катастрофический» скачок на верхнюю ветвь многообразия в точку  $C'$ . Дальнейшее возрастание переменной  $b$  уводит систему далее за точку  $D$ . Если же переменная  $b$  начинает убывать, то система продолжает следовать вдоль верхней ветви многообразия через точку  $E$  к точке  $F$ . В этой точке переменная  $b$  пересекает особенность  $S_2$ , и система совершает «катастрофический» возврат на нижнюю ветвь многообразия в точку  $F'$ , после чего дальнейшие

изменения переменной  $b$  ведут систему либо к точке  $A$ , либо к точке  $B$  до тех пор, пока она вновь не пересечет особенность  $S_1$ .

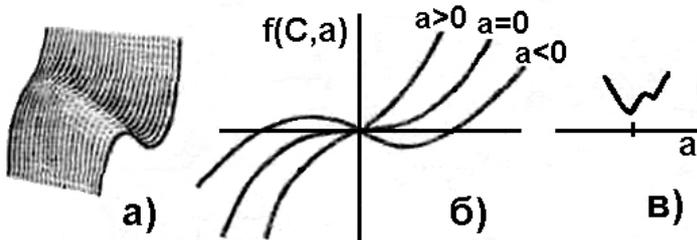


Рис. 21. Катастрофа складки: а — поверхность катастрофы; б — зависимость функции катастрофы от переменной состояния; в — сепаратриса.

При  $a > 0$  все кривые качественно подобны — они не имеют критических точек. Все кривые с  $a < 0$  также подобны и имеют две критические точки (рис. 21б). Точка  $a = 0$  в пространстве управляющих параметров является сепаратрисой (рис. 21в).

Катастрофа типа «складки» появляется в моделях, описывающих релаксационные колебания, «ждущие» режимы и триггерные системы (параметрическое переключение). Модели, имеющие «складки», используются при описании автоволновых процессов и диссипативных структур, в моделях нагруженных арок, диссипативных структур, моделях релаксации.

**2. Катастрофа типа сборки** - трёхкратное равновесие. Бифуркация имеет коразмерность 2 и

требует для своего описания как минимум двух параметров. Потенциальная функция - полином 4-ой степени:

$$f(C) = C^4 + aC^2 + bC \quad (16)$$

Производная от потенциала:

$$\frac{df}{dC} = 4C^3 + 2aC + b \quad (17)$$

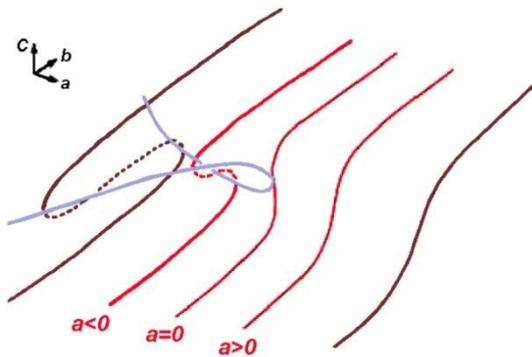
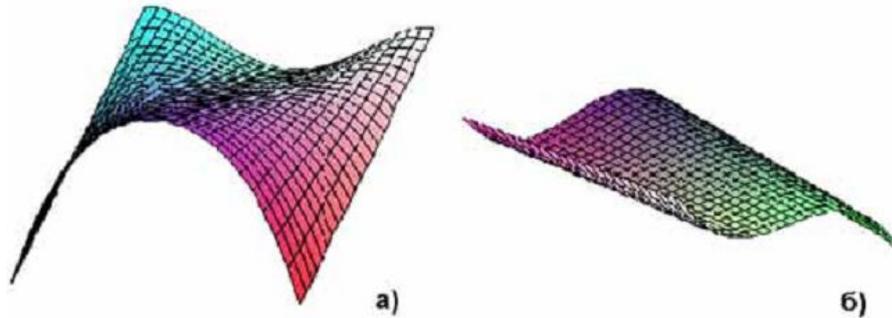


Рис. 22. Форма сборки в пространстве параметров  $(a, b)$  вблизи точки катастрофы, показывающая бифуркацию, разделяющую области с одним и двумя устойчивыми решениями.

**Замечание.** Для простоты анализа форму потенциала часто выбирают в виде:  $f(C,a,b) = (1/4)C^4 + (1/2)aC^2 + bC$ , производная которой  $\frac{df(C)}{dC} = C^3 + aC + b$  что на последующих рассуждениях не сказывается.

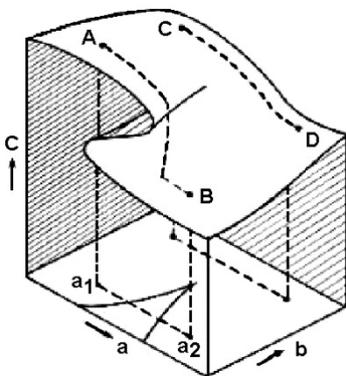


**Рис. 23.** Графики функций  $f(x;a,b) = \pm x^4 + ax + b$  и  $f = x^3 + ax + b = 0$ .

Функция катастрофы сборки зависит от одной переменной состояния,  $C$ , и двух управляющих параметров:  $a$  и  $b$ . Сепаратриса сборки разделяет плоскость управляющих параметров на две области с одной и тремя критическими точками, ее линии имеют дважды вырожденные точки, а точка пересечения вырождена трижды. Потенциальные функции соответствуют некоторым точкам плоскости управляющих параметров.

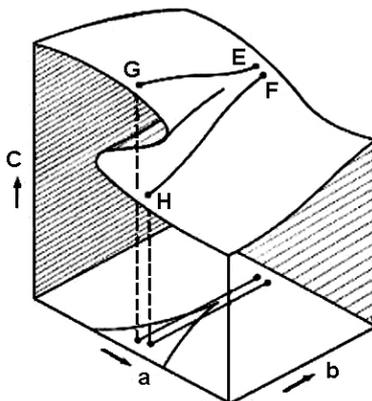
На рис. 22 представлена диаграмма катастрофы сборки, показывающая кривые (коричневые и красные) для  $C$ , удовлетворяющего уравнению  $df(C)/dC = 0$  и параметров  $(a,b)$ , где параметр  $b$  изменяется непрерывно, а для параметра  $a$  показаны только несколько разных значений. За пределами сборки (синяя линия) каждой точке  $(a,b)$  в пространстве параметров соответствует только одно решение  $C$ . Внутри же сборки существуют по два различных значения  $C$ , соответствующих локальным минимумам  $f(C)$  для каждой точки  $(a,b)$ , разделённые значением  $C$ , соответствующим локальному максимуму.

В трёхмерном виде сборка изображена на рис. 24. Здесь снова предполагается, что система описывается переменной  $C$ , которая зависит от двух переменных  $a$  и  $b$ . Благодаря наличию складки на поверхности, изображающей эту зависимость, поведение системы варьирует в соответствии со значениями  $a$  и  $b$ . Например, при изменении  $a$  от точки  $a_1$  к  $a_2$  система движется из точки  $A$ , пока не встретится с особенностью и не совершит «катастрофический» скачок на нижнюю часть поверхности, вдоль которой будет продолжать двигаться к точке  $B$ . С другой стороны, при движении системы от  $C$  к  $D$  то же самое изменение значений  $a$  не встречается с особенностью. Происходит или нет встреча с особенностью, зависит от относительных значений  $a$  и  $b$ .



**Рис. 24.** Изображение катастрофы «сборка».

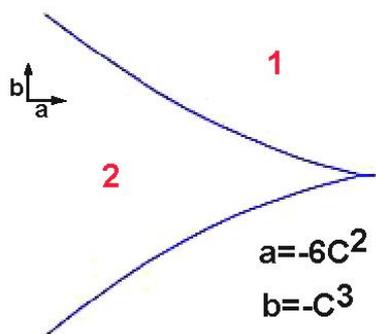
Диаграмма катастрофы «сборка» с точкой возврата, на которой показаны кривые (коричневые, красные) по переменной  $C$ , удовлетворяющие выражению для параметров  $(a, b)$ , кривые показаны для непрерывно изменяющегося параметра  $b$  при различных значениях параметра  $a$ . Вне геометрического места точек возврата (синяя область) для каждой точки  $(a, b)$  в фазовом пространстве существует только одно экстремальное значение переменной  $C$ . Внутри точек возврата существует два различных значения  $C$ , которые дают локальные минимумы функции  $f(C)$  для каждой пары  $(a, b)$ . При этом указанные значения разделены локальным максимумом.



**Рис. 25.** Иллюстрация дивергенции при сборке.

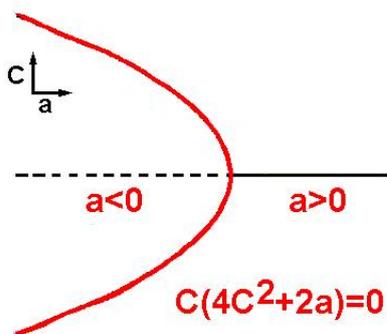
Катастрофа «сборка» хорошо иллюстрирует свойство дивергенции. На рис. 24 показаны траектории системы из двух близких состояний  $E$  и  $F$ . Если значение  $b$  уменьшается, система движется к точкам  $G$  и  $H$  соответственно. При одном и том же изменении параметра  $b$  и даже при том, что обе траектории могут

начинаться из сколь угодно близких точек, они приводят систему в весьма далекие друг от друга конечные состояния. Благодаря наличию складки, траектории из двух этих близких точек расходятся, причём траектория  $EG$  оказывается на верхнем, а траектория  $FH$  – на нижнем листе многообразия.



**Рис. 26.** Форма сборки в пространстве параметров  $(a, b)$  вблизи точки катастрофы, показывающая бифуркацию, разделяющую области с одним и двумя устойчивыми решениями.

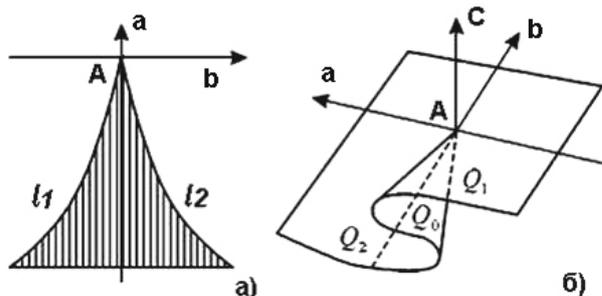
При  $a=0$  на пространстве  $b=0$  имеет место бифуркация типа «вилка». Форма точек возврата в фазовом пространстве  $(a, b)$  около точки катастрофы, показывающая геометрическое место бифуркаций типа «свёртка», которое разделяет область с двумя стабильными решениями и область с одним решением. Геометрия точек возврата обычна для бифуркации типа «свёртка» при добавлении в управляющее пространство нового параметра  $b$ . Изменяя параметры, можно найти, что имеется кривая (синяя) точек в пространстве  $(a, b)$ , на которой теряется стабильность, то есть на этой кривой стабильное решение может внезапно «перепрыгнуть» на альтернативное значение (также стабильное). Но в геометрии точек возврата кривая бифуркаций заворачивает назад, создавая вторую ветвь, на которой уже это второе решение теряет стабильность, а потому может совершить «прыжок» назад на исходное множество решений. При повторном увеличении значения параметра  $b$  и последующем уменьшении его, можно наблюдать гистерезис в поведении петель, поскольку система следует по одному решению, «перепрыгивает» на другое, следует по нему и «перепрыгивает» назад на исходное. Однако это возможно только в области в параметрическом пространстве при  $a < 0$ . Если значение параметра  $a$  увеличивается, петли гистерезиса становятся меньше и меньше, пока значение  $a$  не достигнет 0. В этой точке петли исчезают (катастрофа с точкой возврата), и появляется только одно стабильное решение.



**Рис. 27.** Бифуркация типа вилы при  $a=0$  на поверхности  $b=0$ .

Можно рассмотреть процесс изменения параметра  $a$  при неизменном значении  $b$ . В симметричном случае при  $b=0$  можно наблюдать бифуркацию типа «вилы» при уменьшающемся значении параметра  $a$  одно стабильное решение внезапно разделяется на два стабильных решения и одно неустойчивое. В это время физическая система проходит в область  $a < 0$  через точку возврата ( $a=0, b=0$ ) (это – пример спонтанного нарушения симметрии). Вдали от точки возврата не существует внезапных изменений в физической системе, поскольку при прохождении по кривой бифуркации свёртки происходит только то, что становится доступным второе альтернативное решение.

Бифуркация состоит в слиянии трех состояний равновесия – узлов  $Q_1, Q_2$  и седла  $Q_0$  между ними (рис. 6.8). Система имеет три особых точки. Линейный анализ показывает, что при  $a > 0$  и любом  $b$  система имеет единственное состояние равновесия  $Q_0$  с отрицательным собственным значением, то есть асимптотически устойчивое. При  $a < 0$  существует область значений  $b$  (заштрихованная область на бифуркационной диаграмме (рис.6.8a), где система имеет три состояния равновесия  $Q_1, Q_2$  и  $Q_0$ , причём  $Q_0$  - неустойчивое состояние равновесия, а  $Q_1, Q_2$  - устойчивые. Границы области бистабильности образованы линиями  $l_1$  и  $l_2$ , соответствующими бифуркациям седло-узел, на которых два из состояний равновесия сливаются и исчезают. Линии  $l_1$  и  $l_2$  сходятся в точке  $A$  ( $a=b=0$ ). Для уравнения ( ) в точке  $A$  фазовый портрет представляет собой седло. В фазопараметрическом пространстве (рис. 6.8б) имеет место структура, называемая сборкой. Верхний и нижний лист сборки соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а средний – неустойчивому. На ребрах сборки имеют место катастрофы типа складки.



**Рис. 28.** Бифуркация трехкратного равновесия (катастрофа – сборка):  $a$  – бифуркационная диаграмма,  $b$  – фазопараметрическая диаграмма.

**Замечание.** Важное различие катастроф типа складки и сборки состоит в том, что складка не описывает поведение системы на больших временах. Изображающая точка уходит из

рассматриваемой области фазового пространства, где справедлива формула (6.18). Катастрофа складки не локализуема.

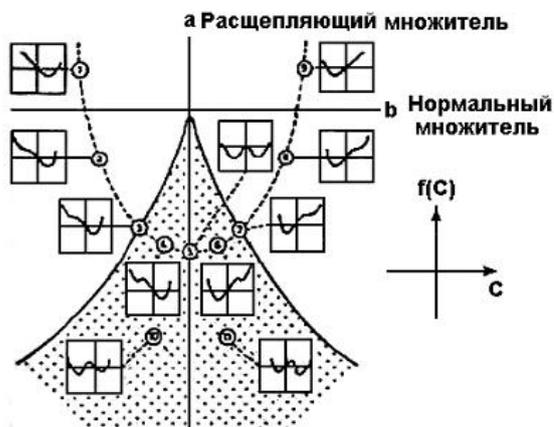


**Рис. 29.** Катастрофа сборки: Плоскость управляющих параметров.

На рис. 28 показана сепаратриса катастрофы сборки. Она разделяет плоскость управляющих параметров на две открытые области, представляющие функции с одной и тремя критическими точками. Линии сепаратрисы имеют дважды вырожденные точки, а точка пересечения — трижды вырождена. На рис. 29 изображены также потенциальные функции, соответствующие некоторым точкам плоскости управляющих параметров.

Вне сборки есть только один корень, и он всегда отвечает минимуму потенциала  $f(C, a)$ . Внутри области есть три действительных корня: один из них соответствует максимуму (неустойчивое состояние), и два — минимуму, что можно проверить, исследуя вторую производную функции  $f$ . Заштрихованная область на рис. является **областью катастроф**, а граница — бифуркационное множество, где локальный минимум исчезает. Как это происходит, можно увидеть на рис. 1, где в точках 3 и 7 на границе области исчезающие минимумы функции сливаются, образуя точку перегиба. Ось  $a_1$  (при  $a_1 < 0$  является конфликтной множеством, где существуют два минимума равной глубины. В случае сборки параметр  $a_1$  носит название «расщепляя множителя», а  $a_2$  — «нормального множителя». Основанием для выбора такого наименования является то обстоятельство, что именно величина  $a_1$  определяет, траектория будет лежать в области складки поверхности: если  $a_1 > 0$  поверхность однозначна, тогда как в случае  $a_1 < 0$  она двусмысленна: с изменением же параметра  $a_2$  переменная  $C$  меняется монотонно и непрерывно, за исключением прыжков в точках бифуркации.

**Рис. 30.** Управляющее многообразие сборки.



Модели, содержащие катастрофу типа сборки, используются в механике конструкций, при описании ряда колебательных режимов, в динамике квантовых систем. Модели с функцией сборки встречаются в механике конструкций, при описании многих колебательных режимов, в динамике квантовых систем. Они используются при изучении релаксационных автоколебаний малой амплитуды, колебательных режимов со смещением средней точки и диссипативных структур ступенчатого типа. Триггерные системы применяются для описания бистабильных режимов.

### 3. Катастрофа типа «Ласточкин хвост»



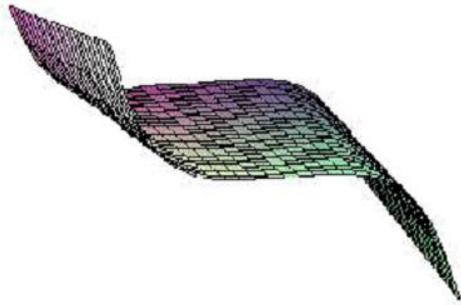
**Рис. 31.** Поверхность катастрофы "Ласточкин хвост".

Слияние четырех особых точек приводит к катастрофе типа «ласточкин хвост» (рис. 29) и «бабочка». Фазовое пространство при этом четырёхмерное. Потенциал задаётся полиномом:

$$f(C) = C^5 + aC^3 + bC^2 + cC \quad (18)$$

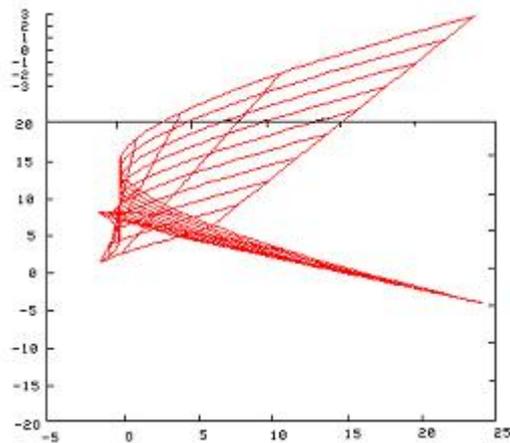
Критические точки определяются через приравненные к нулю производные: Критические точки:  $5C^4 + a + 2bC + 3C^2c = 0$ . 1. Дважды вырожденные:  $10C^3 + b + 3C = 0$ . 2.

Трижды вырожденные:  $10C_2+1=0$ . 3. Четырежды вырожденные:  $C=0$ . Функция  $f(C;0,0,0)$  имеет четырежды выраженную точку  $C=0$ .



**Рис. 32.** График функции  $f(x;a,b,c)=x^5+ax+bx^2+cx^3$ .

Управляющее пространство в данном типе катастроф является трёхмерным. Каскад бифуркаций в фазовом пространстве состоит из трёх поверхностей бифуркаций типа «свёртки», которые встречаются на двух кривых бифуркаций с точками возврата, которые в конечном итоге встречаются в одной точке, представляющей собой бифуркацию типа «ласточкин хвост».



По мере прохождения значений параметров по поверхностям областей бифуркаций типа «свёртка» пропадает один минимум и один максимум потенциальной функции. В области бифуркаций с точкой возврата два минимума и один максимум замещаются одним минимумом; за ними бифуркации типа «свёртка» исчезают. В точке ласточкиного хвоста два минимума и два максимума встречаются в одном значении переменной  $C$ . Для значений  $a>0$  за ласточкиным хвостом существует либо одна пара (минимум, максимум), либо не существует вообще никаких бифуркаций. Это зависит от значений параметров  $b$  и  $c$ . Две поверхности бифуркаций типа «свёртка» и две линии бифуркаций с точками возврата встречаются при  $a<0$ , а потому исчезают в самой точке ласточкиного хвоста, заменяясь одной поверхностью бифуркаций типа «свёртка».

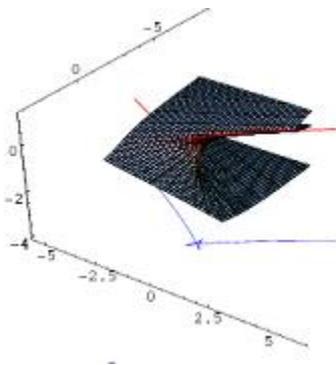
**Рис. 33.** Катастрофа ласточкин хвост.

#### 4. Катастрофа типа «Бабочка»

$$f(C)=C^6+aC^4+bC^3+cC^2+dC \quad (19)$$

В зависимости от значений параметров потенциальная функция может иметь три, два или один локальный минимум, причём все минимумы разделены областями с бифуркациями типа «свёртка». В точке с названием «бабочка» встречаются три различные пространства (трёхмерных плоскости) таких бифуркаций типа «свёртка», две поверхности бифуркаций с точками возврата и кривая бифуркаций типа «ласточкин хвост». Все эти бифуркации пропадают в одной точке и преобразуются в простую структуру с точкой возврата тогда, когда значение параметра  $a$  становится положительным.

Перейдём теперь к потенциальным функциям с двумя активными переменными. Омбилические катастрофы являются примерами катастроф второго порядка. Они, например, наблюдаются в оптике при отражении света от трёхмерных поверхностей. Сами по себе такие катастрофы тесно связаны с геометрией почти сферических поверхностей. Рене Том предложил рассматривать гиперболическую омбилическую катастрофу как разрушение волны, а эллиптическую омбилическую катастрофу – как процесс создания структур, похожих на волосной покров.



**Рис. 34.** Катастрофа бабочка

*Омбилика (омбилическая точка) – локально сферическая точка на трёхмерной поверхности. В таких точках обе главных кривизны равны, и каждый вектор касательной является основным направлением. Омбилические точки обычно появляются в виде изолированных точек в эллиптических областях поверхности, то есть таких, где*

*гауссова кривизна положительна. Сфера является единственной поверхностью, на которой каждая точка является омбиликой.*

#### 5. Гиперболическая омбилика

$$f(C_1,C_2)=C_1^3+C_2^3+aC_1C_2+bC_1+C_1C_2.$$

#### 6. Эллиптическая омбилика

$$f(C_1,C_2)=C_1^3/3-C_1C_2^2+a(C_1^2+C_2^2)+bC_1+cC_2.$$

#### 7. Параболическая омбилика

$$f(C_1, C_2) = C_1^3 C_2 + C_2^4 + a C_1^2 + b C_2^2 + c C_1 + d C_2.$$

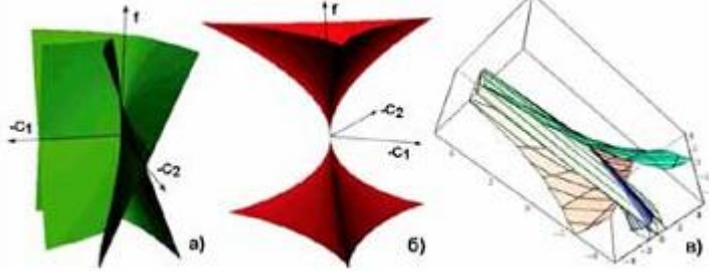


Рис. 35. Катастрофы типа омбилика: а - гиперболическая омбилика; б - эллиптическая омбилика; в - параболическая омбилика.

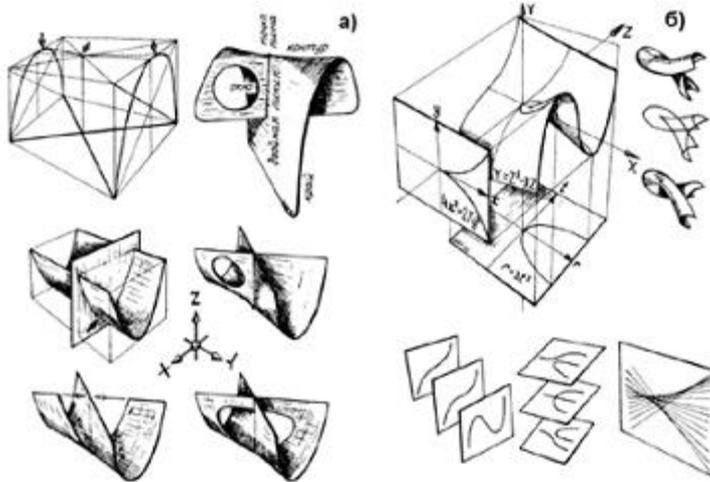


Рис. 36. а - зонтик Уитни; б - сборка Кэли.

Катастрофу **зонтик Уитни-Кэли** назвали так потому, что уравнению, задающему поверхность, удовлетворяет и отрицательная часть оси  $f$ - своего рода ручка зонтика.

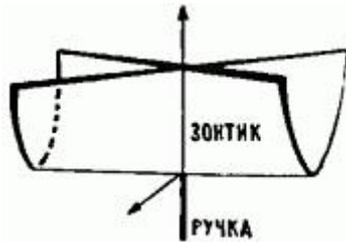


Рис. 37. Зонтик Уитли-Кэли.

## Лекция 2. ПРИМЕРЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Теория особенностей дифференцируемых отображений, получившая широкую известность под эффектным названием "теория катастроф", нашла применение в механике конструкций, метеорологии, аэро- и гидродинамике, оптике, теории кооперативных явлений, квантовой динамике, устойчивости кораблей, эмбриологии, социологии, лингвистике, экспериментальной психологии, экономике, геологии, теории элементарных частиц, а также в исследовании биений сердца, моделировании деятельности мозга, психических расстройств и т. п. Эта теория используется в исследовании возбуждения нервного волокна, перехода ламинарного течения в турбулентное, потери человеком самообладания, превращения жидкости в пар, деления биологических клеток, краха биржи и т.д. Теория катастроф подводит стандартную базу под описание качественных изменений в нелинейных уравнениях, моделирующих системы, далекие от равновесия. Она является основой анализа в теории бифуркаций, в теории переходов термодинамических систем в новые структурные состояния. В данной лекции мы опишем некоторые простые устройства, наглядно демонстрирующие эффект "катастрофы", и проиллюстрируем некоторые возможные направления применения теории катастроф. Строгий анализ практически важных ситуаций будет дан в последующих лекциях. Там же будут рассмотрены другие важные применения катастроф (аэродинамика, квантовая механика, лазерная физика, турбулентность и др.), которые оказались за рамками этой лекции.

Для прояснения некоторых деталей курса полезно ознакомиться с комиксом "[Тайны катастрофы](#)" И.Стюарта.

### 2.1 Иллюстрации теории катастроф

Некоторые аспекты теории катастроф можно иллюстрировать практически важными примерами. В данной лекции мы будем ориентироваться на элементарные катастрофы Тома, классификация которых представлена в табл.1 и 2.

Как уже упоминалось, различия в начальных условиях рожают огромную разницу конечных явлений, так что предсказание будущего становится невозможным; неожиданно возникающие свойства и поведение системы не могут быть поняты путём исследования её частей, при последовательных бифуркациях эволюция системы необратима и т.п. Необратимые процессы в открытой системе переводят её в хаос (как и в закрытой системе, в которой энтропия всегда растёт). В открытой системе, в отличие от закрытой, возможно возникновение новой системы с высоким уровнем организации, например, диссипативной структуры (бифуркация уменьшает энтропию - процесс, возможный только в открытой системе). Таким образом, система может претерпевать превращения: порядок I → беспорядок → порядок II).

Табл.1. Элементарные катастрофы Тома.

Тип катастрофы	$k$	Росток	Возмущение
$A_2$	1	$x^3$	$a_1x$
$A_{\pm 3}$	2	$\pm x^4$	$a_1x + a_2x^2$
$A_4$	3	$x^5$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
$A_{\pm 5}$	4	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$
$A_6$	5	$x^7$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$
$D_{-4}$	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
$D_{+4}$	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
$D_5$	4	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$
$D_{-6}$	5	$x^2y - y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$D_{+6}$	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$E_{\pm 6}$	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2$

В открытых системах могут наблюдаться сложные, длительные хаотичные переходные режимы, скрытый порядок которых невозможно выявить без знания его алгоритма. Возможность существования «ложного» хаоса иллюстрируется «возвращением Пуанкаре» (рис. 1): изображение, переведённое в цифровую форму, растягивается по диагонали, выходящие за пределы рамки участки отрезаются и вставляются вновь; после определенного числа таких преобразований распознаваемое изображение исчезает, а затем вновь возникает из казалось бы полного хаоса.

Табл. 2. Канонические формулы потенциала в теории катастроф.

$k$	$n$	Каноническая форма $f(x, a)$	Название
1	1	$x_1^3 - ax_1$	Складка
2	1	$x_1^4 + a_1 \frac{x_1^2}{2} + a_2 x_1$	Сборка
3	1	$\frac{x_1^5}{5} + a_1 \frac{x_1^3}{3} + a_2 \frac{x_1^2}{2} + a_3 x_1$	Ласточкин хвост
4	1	$\frac{x_1^6}{6} + a_4 \frac{x_1^4}{4} + a_1 \frac{x_1^3}{3} + a_2 \frac{x_1^2}{2} + a_3 x_1$	Бабочка
3	2	$x_1^3 + x_2^3 + a_3 x_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2$	Гиперболическая омбилическая точка
3	2	$x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + a_3(x_1^2 + x_2^2) - a_1 x_1 - a_2 x_2$	Эллиптическая омбилическая точка
4	2	$x_1^2 x_2 + x_2^4 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2 - a_1 x_1 - a_2 x_2$	Параболическая омбилическая точка
5	1	$x_1^7 + a_1 x_1^5 + a_2 x_1^4 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^2 + a_5 x_1$	Вигвам
5	2	$x_1^2 x_2 - x_2^5 + a_1 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2 + a_5 x_1$	Вторая эллиптическая омбилическая точка
5	2	$x_1^2 x_2 + x_2^5 + a_1 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2 + a_5 x_1$	Вторая гиперболическая омбилическая точка
5	2	$1 \pm (x_1^3 + x_2^4 + a_1 x_1 x_2^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2 + a_5 x_1)$	Символическая омбилическая точка

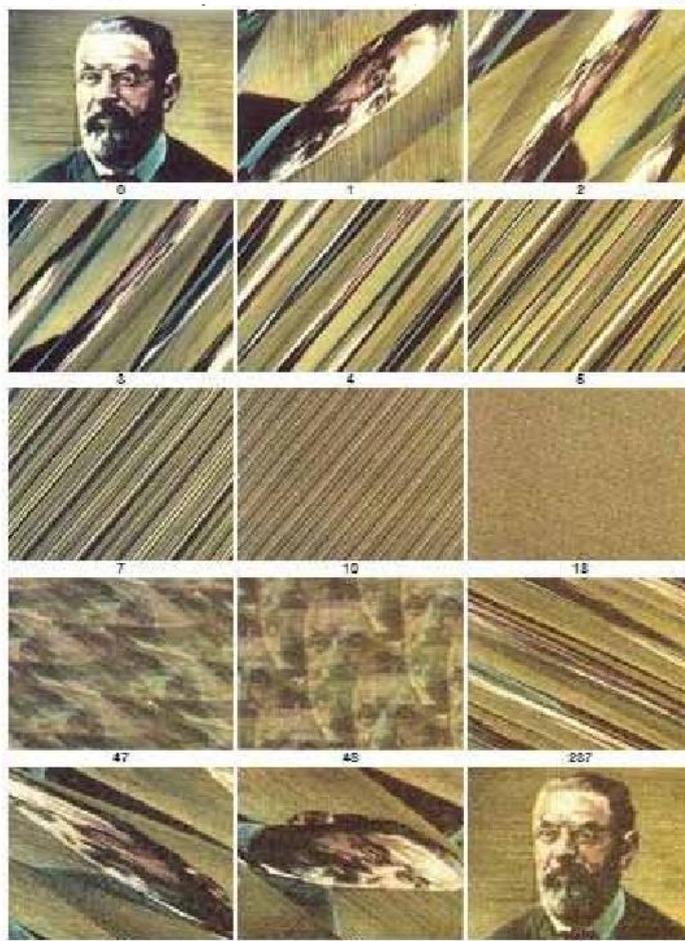


Рис. 1. Хаос, созданный применением геометрической операции растяжения.

Эффект растяжения иллюстрируют на примере портрета французского математика Анри Пуанкаре, основоположника теории динамических систем. Исходное изображение (*вверху слева*) было преобразовано в цифровую форму. Математическое преобразование растягивает изображение по диагонали, как будто оно нарисовано на резиновой поверхности. Там, где изображение вылезает за рамки исходного, оно обрезается и вставляется с другой стороны, как показано на кадре 1. (Номер кадра указывает на количество выполненных преобразований.) После

повторных применений преобразования разобрать лицо уже невозможно (кадры 2–4). В конечном счёте, появляется случайная комбинация цветов, дающая равномерное зелёное поле (кадры 10 и 18). Иногда случается так, что некоторые точки возвращаются к своему исходному положению, и тогда на короткое время проявляется исходное изображение (кадры 47–48, 239–241). При типичном хаотическом преобразовании такое возвращение осуществляется чрезвычайно редко. При наличии ничтожных фоновых флуктуаций время между возвращениями обычно столь велико, что вся информация об исходном изображении утрачивается.

Довольно часто катастрофы встречаются в восприятии; это связано с существованием двусмысленных, или "мультистабильных", фигур. Например, среди фигур, показанных на рис. 2а, четвёртая слева в верхнем ряду воспринимается с равной вероятностью как мужское лицо и как фигура девушки. Интересно, что если эта фигура включена в последовательность (верхний ряд на рис. 2а), то восприятие средних фигур сдвигается в зависимости от порядка, в котором эта последовательность рассматривается: в сторону мужчины, если фигуру рассматривать слева направо, и в сторону девушки в противном случае.

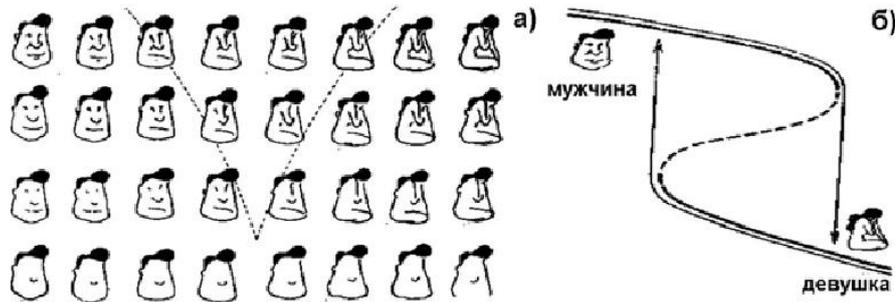
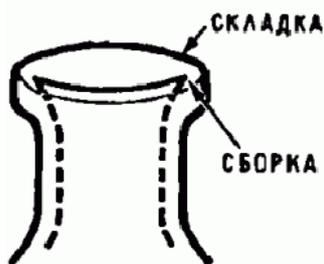


Рис. 2. Катастрофы в восприятии.



На рис. 2б представлено одномерное сечение катастрофы сборки с принципом промедления.

Рис. 3. Экспериментальное наблюдение сборки Уитни. На поверхности бутылки можно увидеть две сборки. Они устойчивы, в чём можно убедиться, покачивал бутылку.

Заметим, что отображения гладких поверхностей на плоскость часто встречаются в реальных ситуациях. Действительно, большинство окружающих нас тел ограничено гладкими поверхностями, при этом видимые контуры тел являются проекциями поверхностей, ограничивающих тела, на сетчатку глаза. Приглядываясь к окружающим нас телам, например, к лицам людей, можно изучить особенности видимых контуров. Например, точки сборки обнаруживаются в чертах людей там, где линия контура «исчезает» (рис. 4). При этом видно, что линия контура имеет касательную вплоть до точки сборки, но с приближением к этой точке кривизна линии растёт до бесконечности.

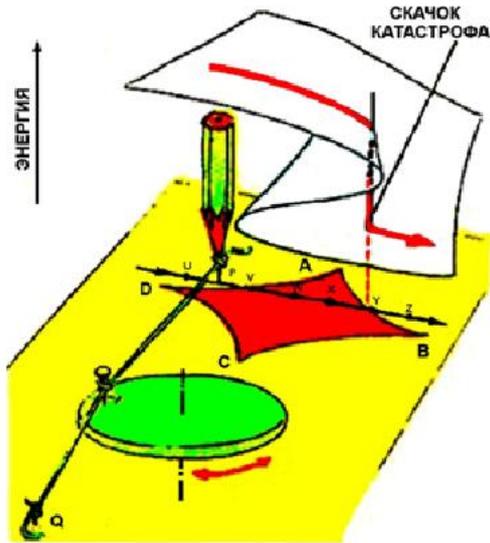


Рис. 4. Сборка и складка на лице человека.

## 2.2 Машина катастроф Зимана

Скачкообразный переход количества в качество, при котором непрерывно меняющиеся причины приводят к резким, прерывно меняющимся следствиям, т.е. когда ничтожное изменение начального состояния приводит к мгновенному, заранее непредсказуемому результату, наглядно демонстрирует "машину катастроф" Э.Зимана.

Эта машина состоит из диска, вращающегося вокруг вертикальной оси. К одной из точек на периферии диска прикреплены две резиновые нити. Свободный конец одной из нитей жёстко закреплен в точке  $Q$ , а свободный конец другой –  $P$  – может свободно перемещаться в плоскости, параллельной плоскости диска. Карандаш, прикрепленный к резинке в точке  $P$  рисует на бумаге, лежащей на дощечке. Перемещая карандаш, осуществляют вращение диска, так что состояние системы описывается положением карандаша и диска. Если  $P$  плавно перемещать вне ромбовидной области, диск будет плавно поворачиваться в ту или в другую сторону. Но когда  $P$  попадает в область  $ABCD$ , положение меняется. Предположим, точка  $P$  движется по линии  $UVWXYZ$  слева направо. При медленном движении точки диск плавно поворачивается. Но вот когда  $P$  выходит из ромба в точке  $Y$ , диск резко, скачком меняет угол поворота. Но когда  $P$  начинает перемещаться в обратном направлении по той же прямой, в точке  $Y$  никакого скачка не происходит! Он появляется на этот раз в точке  $V$ , там, где  $P$  выходит из ромба.



Таким образом, поведение диска не меняется на прямо противоположное, когда  $P$  проходит прежний путь  $ZYXWV$  в обратном направлении. Когда  $P$  попадает в любую точку, находящуюся вне ромбовидной области  $ABCD$ , у диска есть только одно положение устойчивого равновесия. Когда же  $P$  попадает внутрь этой области, устойчивых положений уже два.

Рис. 5. Машина катастроф Зимана.

Таким образом, при изменении положения карандаша (два внешних параметра), колесо поворачивается, плавно отслеживая изменение параметров, но в некоторых случаях меняет своё положение скачком. Такие скачки происходят при исключительных («бифуркационных») положениях карандаша: они образуют на листе бумаги «кривую катастроф» с четырьмя точками возврата. При пересечении кривой катастроф катастрофа (скачок колеса) может произойти, а может и не произойти, в

зависимости от предыстории.

Для математического анализа работы такого устройства используется трёхмерное пространство, в котором по вертикальной оси откладывается энергия равновесных положений диска  $X$ , а по горизонтальным осям – координаты точки  $P$ . Возникает поверхность со складкой, изображающая собой совокупность всех равновесных положений диска. Проекция складки на плоскость образует часть ромбовидной области, примыкающей к точке  $A$ . Когда  $P$  находится вне заштрихованной области, каждому её положению соответствует одно-единственное значение  $X$  и

одна-единственная точка на поверхности: состояние системы здесь описывается однозначной функцией. Но когда  $P$  оказывается внутри заштрихованной площади, одному положению  $P$  соответствуют три значения  $X$  на разных частях складки. Функция здесь перестает быть однозначной.

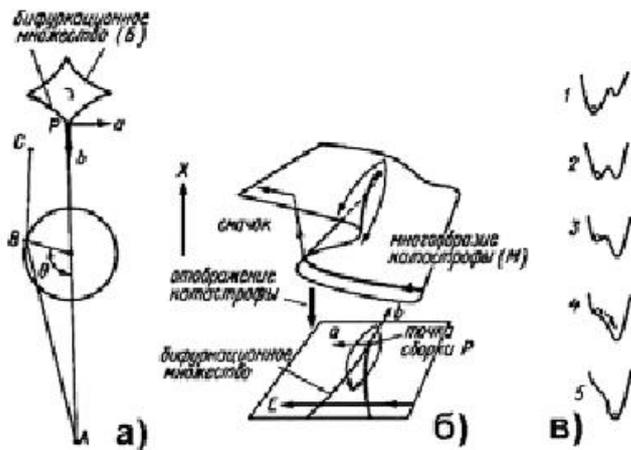


Рис. 6. а – машина Зимана; б – геометрия катастрофы сборки; в – графики функции потенциальной энергии  $U_{ab}$ .

Такая модель хорошо объясняет поведение диска. При движении  $P$  слева направо  $X$  движется вдоль гладкой поверхности до тех пор, пока не достигается край перегиба. Дальнейшее нарастание координаты приводит к резкому перескоку  $X$  с верхнего на нижний уровень – так называемая «катастрофа» Тома. При движении  $P$  в обратном направлении – справа налево –  $X$  перемещается плавно по нижней поверхности складки, пока не достигнет её края. Дальнейшее изменение координаты приводит снова к «катастрофе» – скачку с нижнего на верхний уровень. Эта простейшая модель, в которой энергия равновесия зависит всего от двух независимых переменных – координат точки  $P$ .

Состояние машины катастроф описывается тремя числами. Положение острия карандаша задаётся двумя координатами (они называются управляющими параметрами). Положение диска определяется ещё одним числом - углом поворота (внутренний параметр системы – управляемый параметр). Если все три числа заданы, и определены степени растяжения резинок, то определена потенциальная энергия всей системы. Диск поворачивается так, чтобы эту энергию минимизировать. При фиксированном положении карандаша потенциальная энергия – функция от положения диска, т. е. функция, заданная на окружности. Эта функция может иметь в зависимости от значений управляющих параметров один или несколько минимумов.

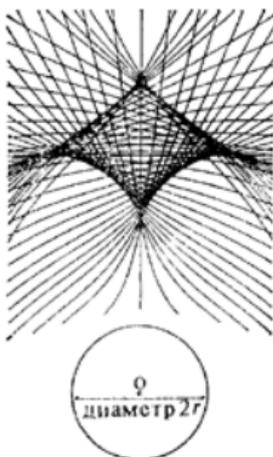
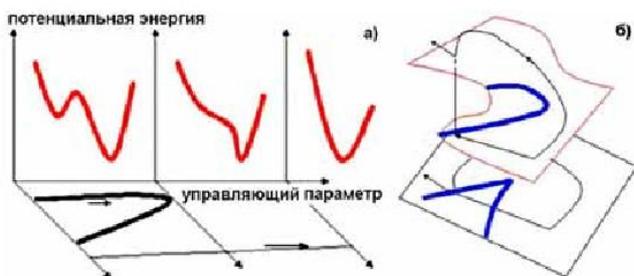


Рис. 7. Линии, рисуемые карандашом в машине катастроф.

Если при изменении управляющих параметров положение минимума меняется плавно, то скачка не происходит. Скачок происходит при тех значениях управляющих параметров, для которых локальный минимум исчезает, слившись с локальным максимумом; после скачка диск оказывается в положении, отвечающем другому локальному минимуму. Состояния, при которых диск находится в равновесии, образуют в трёхмерном пространстве состояний машины гладкую поверхность. Если проектировать эту поверхность на плоскость управляющих параметров вдоль оси внутреннего параметра, то получится следующая проекция (складка) – кривая катастроф. На рис. 8 ясно видно, почему переход управляющих параметров через линию катастроф иногда вызывает, а иногда не вызывает скачок (это зависит от того, какой части поверхности отвечает положение диска).

Пользуясь этим рисунком можно переходить с одного места поверхности равновесий на другое без скачков.



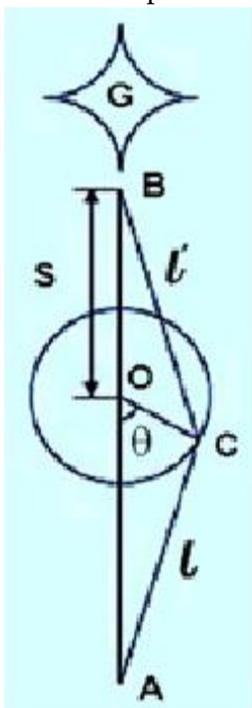
**Рис. 8.** а – потенциальная энергия машины катастроф; б – поверхность равновесий машины катастроф.

**Замечание.** Теория особенностей позволяет объяснить поведение машины и предсказать, в каких случаях «катастрофа» произойдет, а в каких нет.

Пространство состояний машины трехмерно (два внешних параметра определяют положение карандаша, один внутренний – угол поворота колеса). Потенциальная энергия системы является функцией этих трёх переменных (по углу она периодична). При фиксированных значениях внешних параметров система минимизирует потенциальную энергию (локально). Возникающая зависимость между значениями внутренних и внешних параметров изображается в трёхмерном пространстве двумерной *поверхностью равновесий*. Поверхность равновесий образована критическими точками потенциальной энергии, рассматриваемой как функция внутреннего параметра при фиксированных значениях внешних. Эти критические точки при всевозможных значениях внешних параметров образуют поверхность в пространстве-произведении. Поверхность равновесия машины Зимана гладкая и расположена общим образом относительно проектирования на плоскость внешних переменных. Отображение проектирования имеет особенностями *складки* и *сборки* Уитни (а именно, 4 точки сборки, проектирующиеся в точки возврата кривой катастроф).

Кривая катастроф - проекция на плоскость сборки Уитни. Хотя сама поверхность геометрически не видна, и представляет собой поверхность в абстрактном пространстве состояний системы, всё же проекция особенности этой поверхности может быть наглядно изображена в виде кривой катастроф в левой части дощечки. Невидимое обнаруживает себя в видимом.

Теория особенностей позволяет объяснить поведение машины и предсказать, в каких случаях «катастрофа» произойдёт, а в каких нет. Пространство состояний машины трехмерно (два внешних параметра определяют положение карандаша, один внутренний – угол поворота колеса). Потенциальная энергия системы является функцией этих трёх переменных (по углу она периодична) При фиксированных значениях внешних параметров система минимизирует потенциальную энергию (локально). Возникающая зависимость между значениями внутренних и внешних параметров изображается в трёхмерном пространстве двумерной *поверхностью равновесий*.



Поверхность равновесий образована критическими точками потенциальной энергии, рассматриваемой как функция внутреннего параметра при фиксированных значениях внешних. Эти критические точки при всевозможных значениях внешних параметров образуют поверхность в пространстве-произведении. Поверхность равновесия машины Зимана гладкая и расположена общим образом относительно проектирования на плоскость внешних переменных. Отображение проектирования имеет особенностями *складки* и *сборки* Уитни (а именно, 4 точки сборки, проектирующиеся в точки возврата кривой катастроф).

**Рис. 9.** К математической модели машины катастроф.

При подходе значений внешних параметров к кривой катастроф критические точки потенциальной энергии как функции на окружности перестраиваются. При пересечении кривой катастроф в её точке общего

положения сливаются две критические точки потенциальной энергии — локальный максимум и локальный минимум. Система, находящаяся в устойчивом состоянии равновесия в точке локального минимума потенциальной энергии, остаётся в нём до момента бифуркации. В этот момент критическая точка становится неустойчивой, и система скачком переходит в другое состояние равновесия (отвечающее другому минимуму потенциальной энергии). Таким образом, будет ли скачок при пересечении линии катастроф, зависит от того, в каком из локальных минимумов потенциальной энергии находилась система до пересечения. В точке возврата линии катастроф сливаются три «листа» поверхностиравновесий (два крайних отвечают локальным минимумам, а средний — локальному максимуму потенциальной энергии). Зная из теории Уитни, как эти листы переходят друг в друга вблизи точки сборки, легко прогнозировать скачки при различных путях обхода точек возврата кривой катастроф. При математическом описании действия машины катастроф возьмём в качестве единицы длины диаметр диска, так что длины нерастянутых резинок равны 1,  $OC=0,5$ ,  $OA=2$ . Начнём с определения положения карандаша  $P$ . Когда точка  $B$  перемещается вдоль оси, всегда имеется положение равновесия, отвечающее  $q=0$ . Точка  $P$  находится там, где это равновесие меняется с устойчивого (локальный минимум энергии) на неустойчивое (локальный максимум). Пусть  $l$  и  $l'$  — длины резинок в положении, когда диск повернут на угол  $q$ , близкий к 0, но не обязательно равный 0. Потенциальная энергия системы:

$$U_s(\theta) = \frac{k(l-1)^2}{2} + \frac{k(l'-1)^2}{2}, \quad (1)$$

где  $k$  — константа в законе Гука (модуль упругости резинок).

По теореме Пифагора

$$l^2 = (OA - OC \cos \theta)^2 + (OC \sin \theta)^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right)^2 \quad (2)$$

Будем полагать, что угол  $\theta$  мал и воспользуемся разложениями

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3), \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \quad (3)$$

Тогда

$$l^2 = \left[2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{2} \theta\right)^2 + O(\theta^4) = \frac{9}{4} + \theta^2 + O(\theta^4)$$

$$l = \frac{3}{2} + \frac{\theta^3}{3} + O(\theta^4). \quad (4)$$

Совершенно аналогично

$$l' = \left(S + \frac{1}{2}\right) - \frac{S\theta^2}{2(2S+1)} + O(\theta^4). \quad (5)$$

Выражение для потенциальной энергии имеет вид:

$$U_s(\theta) = \frac{k}{4} \left( \frac{1}{4} + \left(S - \frac{1}{2}\right)^2 + \theta^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{S(2S-1)}{2(2S+1)} \right) \right) + O(\theta^4) \quad (6)$$

**Лемма Морса:** В выражении для потенциальной энергии можно пренебречь членами порядка  $O(q^4)$ , если коэффициент при  $q^2$  отличен от нуля.

Основываясь на лемме Морса, можно сделать вывод, что потенциальная функция имеет минимум только тогда, когда множитель при квадратном члене положителен. Потенциальная энергия имеет максимум только тогда, когда коэффициент при квадратичном члене отрицателен. Условие изменения состояния равновесия определяется уравнением

$$\frac{1}{3} = \frac{S(2S-1)}{2(2S+1)}; \quad 6S^2 - 7S - 2 = 0; \quad S = \frac{7 + \sqrt{97}}{12} \approx 1,404071483. \quad (7)$$

Аналогичное рассуждение с заменой  $q=0$  на  $q=p$  позволяет определить положение верхнего клюва  $P'$  для которого

$$S = \frac{27 + \sqrt{489}}{20} \approx 2,46. \quad (8)$$

В более подробном анализе учитывается отброшенный ранее член с  $\theta^4$ . Тогда потенциальная энергия приобретает вид

$$U_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx, \quad (9)$$

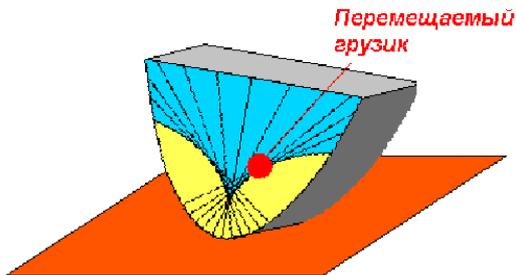
где величины  $a$  и  $b$  не имеют принципиального значения.

Это — катастрофа сборки.

### 2.3 Качалки

Рассмотрим простой пример физической системы, склонной к потере устойчивости – параболическую качалку. Простейшая качалка изготавливается путём вырезания двух кусков картона в форме параболы и скреплением их между собой (рис. 10). Прикрепим к ней грузик. Качалка наклонится и займёт некоторое положение равновесия. Если мы её толкнём, то она, либо займёт новое положение равновесия, либо вернётся в исходное. Если качалка находится в положении равновесия, то центр тяжести расположен точно по вертикали над точкой опоры. Когда качалка покоится на горизонтальной плоскости, эта плоскость будет касательной к параболе, так что центр тяжести лежит на соответствующей нормали (прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно к касательной). Некоторые из этих нормалей изображены на рис.10.

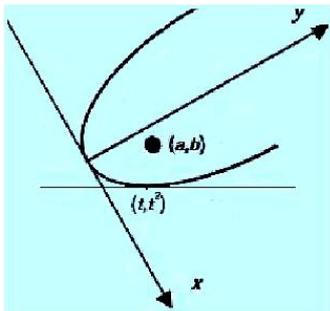
Где бы не располагался центр тяжести на нормали, построенной в заданной точке, центр тяжести окажется над этой точкой и качалка с опорой на эту точку будет находиться в равновесии. Однако при одних положениях центра тяжести на этой нормали качалка после малых отклонений будет возвращаться в положение равновесия (т.е. равновесие устойчиво), а при других она будет падать, как яйцо, поставленное на острый конец (равновесие неустойчиво).



**Рис. 10.** Параболическая качалка: управляющие параметры – координаты грузика, показанного красным кружком. Нанесены нормали – прямые, проходящие через точку касания перпендикулярно плоскости стола. При выходе из желтой области происходит “катастрофа” – скачкообразное изменение состояния.

Можно рассчитать, сколько положений равновесия имеет параболическая качалка при различных положениях грузика и определить, как будет меняться положение равновесия, если непрерывно менять положение грузика. В результате можно предсказать, когда малое изменение в положении центра тяжести приведёт к новому положению равновесия, лишь слегка отличающегося от первоначального, а когда оно приведёт к тому, что качалка начнёт катиться (катастрофа).

Параболическая качалка имеет один внутренний параметр  $\theta$  (угол между осью параболы и плоскостью стола) и два управляющих параметра  $a$  и  $b$ , задающих положения грузика. При фиксированных значениях управляющих параметров положения равновесия системы соответствуют критическим точкам потенциальной энергии  $V_{ab}(\theta)$ . Таким образом, задано двухпараметрическое семейство функций  $V_{ab}(x)$ , и задача состоит в описании деформации множества критических точек  $\Sigma = \{x | V_{ab}'(x) = 0\}$  функций семейства при изменении параметров  $(a, b)$ .



**Рис. 11.** Качалка и система координат, связанная с ней. В точке  $a, b$  сосредоточена основная масса.

Координаты центра масс –  $(a, b)$ ,  $a$  и  $b$  – переменные управления, т.е. параметры, с помощью которых можно менять состояние системы. Множество значений этих переменных образует пространство управления.

Рассмотрим поведение качалки при изменении положения центра масс (т.е. координат  $a, b$ ). Найдём уравнение касательной к точке  $(t, t^2)$  (рис. 11). Поскольку уравнение параболы  $y=x^2$ , то угловой

коэффициент прямой  $k=y'=2x$ . Поскольку касательная должна проходить через точку  $(t, t^2)$ , то

$$t^2 = kt + b = 2t^2 + b \quad (10)$$

следовательно,  $b = -t^2$

$$y = 2tx - t^2. \quad (11)$$

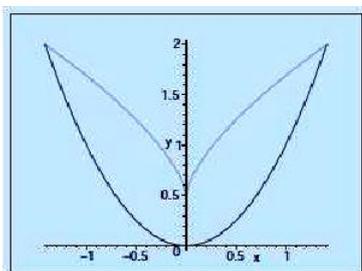
Расстояние от точки с координатами  $(a, b)$  до прямой  $y = 2tx - t^2$  определяется выражением

$$S^2 = \frac{b^2 + 2bt^2 + t^4 + 4a^2t^2 - 4at^3 - 4abt}{1 + 4t^2} = \frac{(b - 2at + t^2)^2}{1 + 4t^2} \quad (12)$$

Тогда потенциальная энергия качалки

$$U(t) = mgS(t) = mg \frac{b - at + t^2}{\sqrt{1 + 4t^2}} \quad (13)$$

**Рис. 12.** Линия кратных корней в задаче "качалка".



Состояния равновесия качалки соответствуют

экстремальным значениям потенциала. Для определения экстремумов продифференцируем потенциал и приравняем производную нулю.

$$\dot{U} = 2mg \frac{2t^3 + (1-2b)t - a}{(1+4t^2)^{3/2}} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, состояниям равновесия соответствуют корни уравнения  $2t^3 + (1-2b)t - a = 0$  (15)

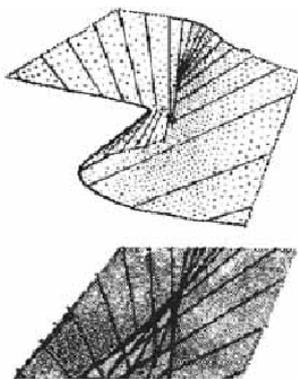
Найдём теперь уравнение нормали к точке касания  $(t, t^2)$ . Уравнение должно иметь вид

$$y = -\frac{x}{2t} + c \quad (16)$$

$$\left(-\frac{1-2b}{6}\right)^{1/2} \left(2\frac{1-2b}{3}\right) + a = 0. \quad \left(\frac{2b-1}{6}\right)^{1/2} \left(2\frac{2b-1}{3}\right) = a \quad (17)$$

$$2(2b-1)^3 = 27a^2. \quad (18)$$

Это уравнение аналогично уравнению для машины катастроф, т.е. описывает каноническую сборку Уитни.



**Рис. 13.** Поверхность катастрофы для качалки.

Математический аппарат качалки использован при описании устойчивости кораблей (эту проблему мы подробно обсудим в одной из следующих лекций).

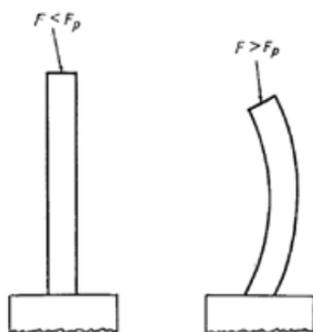
## 2.4 Механика конструкций

Изучение поведения статических конструкций под нагрузкой и их чувствительности к несовершенству тесно связано с теорией катастроф.

Задача описания поведения упругой конструкции, под воздействием увеличивающейся нагрузки внезапно, скачкообразно переходящей в другое положение (направление выгиба конструкции предсказать невозможно) имеет глубокие исторические корни. В 1744 г. Л.Эйлер использовал созданный им математический аппарат (вариационное исчисление) для определения равновесных состояний сжатой упругой колонны. В предположении о малости поперечных сечений он рассмотрел устойчивость прямолинейной формы равновесия вертикально расположенного линейно-упругого стержня, сжатого сжимающей силой (эластика Эйлера). Ж.Лагранж в 1788 г. доказал, что минимум полной потенциальной энергии системы является достаточным для устойчивости. Он получил решение этой задачи без ограничений на величину поперечных отклонений и показал, что её математическое описание приводит к нелинейному дифференциальному уравнению.

В настоящее время крупногабаритную техническую конструкцию описывают с помощью потенциальной функции, минимальное значение которой определяет её устойчивое состояние. С увеличением нагрузки на конструкцию (мост, здание и т.д.) потенциальная функция изменяется. Значительная нагрузка может привести к потере устойчивости конструкции (т.е. к её разрушению) вследствие нарушения локально устойчивого состояния. Равновесие, устойчивость и потеря устойчивости - основные вопросы, рассматриваемые теорией катастроф, методы которой позволяют определить чувствительность критической, или разрушающей нагрузки, как к несовершенству конструкции, так и к динамическому воздействию. Кроме того, они оказываются эффективными при изучении составных систем, для которых возможны различные формы разрушения. Результаты исследования технических конструкций очень важны для их возведения, эксплуатации и разрушения. Теория катастроф используется при рассмотрении систем (составленных из нескольких конструктивных элементов), способных к неожиданным формам разрушения и обладающих жёсткой чувствительностью к несовершенству, если между элементами существует сильная связь. Примером является разрушение опорного кронштейна.

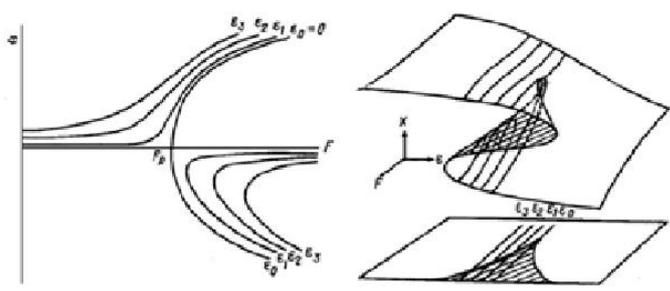
В качестве примера рассмотрим прогиб эйлера стержня под действием сжимающей нагрузки.



**Рис. 14.** Прогиб колонны при превышении критической нагрузки.

Пусть к одному концу идеального несжимаемого стержня приложена сила  $F$  (рис. 14), тогда если нагрузка (сила  $F$ ), действующая на стержень, невелика, стержень остаётся прямым; при очень большой

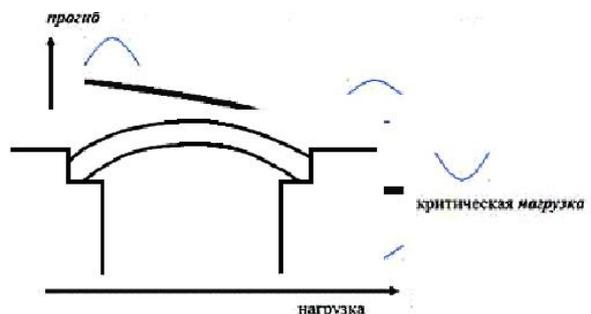
нагрузке  $F$  стержень сильно изгибается (предсказать, в какую именно сторону он изогнётся невозможно). Можно показать, что задача расчёта изгиба стержня в зависимости от силы  $F$  сводится к многообразию катастрофы сборки  $x^3+ax+b=0$ , так что устойчивость стержня вдоль кривых равновесия (рис. 15) определяется свойствами устойчивости катастрофы сборки.



**Рис. 15.** Зависимость равновесной конфигурации несовершенного стержня от прилагаемой нагрузки и параметра несовершенства.

Выгибание нагруженного эйлера стержня аналогично фазовому переходу 2-го рода. Переход к выгнутому состоянию является "мягким", т.к. состояния системы до и после изгиба связаны непрерывным образом.

Конструкции, демонстрирующие мягкий переход в изогнутое состояние, не разрушаются при превышении предельной нагрузки - они лишь умеренно изгибаются. Это позволяет сформулировать критерии определения пределов безопасных нагрузок и рассчитать максимальную несущую способность стержня.



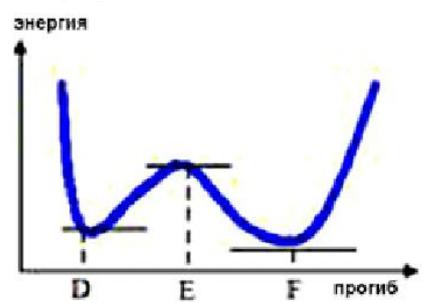
**Рис. 16.** Пологая арка - типичный элемент конструкции.

Работающие на сжатие балки - не единственные элементы конструкций. Для перекрытия мостовых пролетов эффективным является использование пологой арки (рис. 16). Если малые вертикальные нагрузки не вызывают деформации арки, то большие нагрузки приводят к

её разрушению. Можно показать, что разрушающаяся арка описывается с помощью катастрофы двойной сборки.

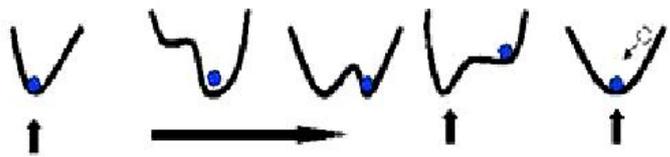
Рассмотрим проблему устойчивости конструкции на примере упругой пластмассовой линейки. Если положить линейку на две опоры и ставить по очереди небольшие грузики на середину линейки, в какой-то момент времени линейка выгнется и сбросит грузики. Происходит катастрофа (постепенное изменение нагрузки вызвало внезапный ответ системы).

Рассмотрим зависимость упругой энергии линейки от её прогиба для пяти значений приложенной нагрузки (рис. 17).



**Рис. 17.** Зависимость упругой энергии линейки от её прогиба.

Каждому возможному прогибу соответствует некоторая энергия. Состояние равновесия - это точки, которым на кривой зависимости энергии линейки от её прогиба соответствуют горизонтальные участки. При нулевой нагрузке зависимость имеет W-образную форму (рис. 17).



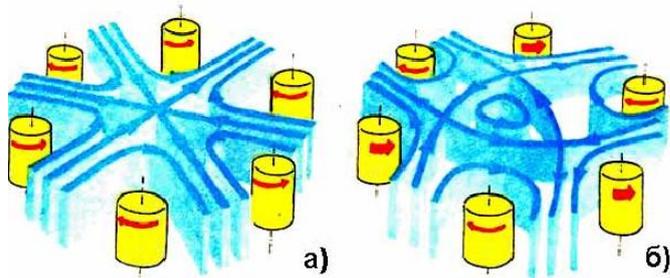
**Рис. 18.** Характер зависимости энергии от состояния.

Состояния, соответствующие точкам  $D$  и  $F$ , устойчивы, а состояние, соответствующее точке  $E$ , неустойчиво. Кривую можно разбить на три области: устойчивая, неустойчивая, устойчивая. Поэтому после того как линейка сбросила грузики, она прогнулась вниз, так как для прогиба вверх она должна преодолеть энергетический барьер, а дополнительного воздействия извне в рассматриваемом случае нет.

Так как нет внешнего воздействия, благодаря которому система может преодолеть энергетический барьер, то система подчиняется правилу запаздывания (или промедления). Линейка может прогнуться вверх, если на нее действует сила, направленная вверх (отрицательная нагрузка). Такое явление называется гистерезисом. Зная характер зависимости прогиба от нагрузки, можно объяснить, почему линейка внезапно изменила свою форму: изменилось ее состояние - оно перестало быть устойчивым - произошла катастрофа.

## 2.5 Геометрия жидкости

Известная модель, используемая для изучения перехода к хаосу в потоке жидкости включает в себя два вращающихся в противоположных направлениях эксцентрических цилиндра. С увеличением скорости вращения внутреннего цилиндра наблюдается переход от постоянной скорости к периодически изменяющейся, и затем – к аperiodическому режиму.



**Рис. 19.** Катастрофа в потоке жидкости.

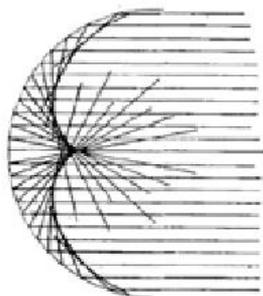
Интересно поведение двумерного потока, создаваемого шестью симметрично расположенными, вращающимися навстречу друг другу роликами. Линии тока получают такие, как показаны на рис.

19 а только в том случае, если скорость вращения всех роликов одинакова. Малейшее отклонение в скоростях вращения приводит к «катастрофе» – скачкообразному изменению картины линий тока. Так, если все ролики, вращающиеся против часовой стрелки, увеличат свою скорость, картина мгновенно перестроится и станет такой, как показано на рис. 19б.

## 2.6 Оптика и теория рассеяния

Как мы уже упоминали в первой лекции, важным явлением в геометрической оптике является образование каустик, т.е. резких ярких кривых, которых касаются световые лучи.

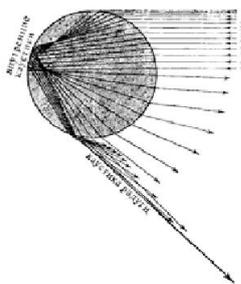
В результате отражения от криволинейной поверхности через некоторые точки трёхмерного пространства проходит два или более лучей. Вдоль огибающих (рис. 20) интенсивность света существенно выше, чем в окрестности точек, лежащих вне огибающей. Подобное усиление интенсивности в точках огибающей может сопровождаться локальным повышением температуры, достаточным для воспламенения бумаги или дерева. Такие огибающие называют каустиками.



**Рис. 20.** Огибающая лучей, отражённых от линейной поверхности, образует каустики.

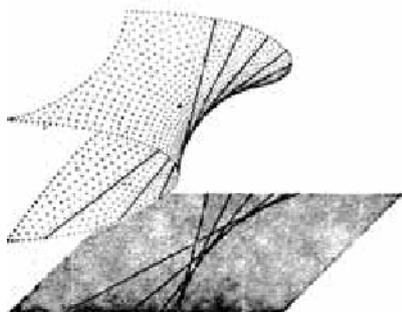
Каустика, образованная отражением параллельного пучка сферической поверхностью, выглядит подобно катастрофе сборки.

Рассмотрим пучок параллельных лучей в плоскости, встречающихся с кругом (рис. 21) и отражающихся от его "задней стенки" согласно закону отражения. Отражённые лучи имеют огибающую - кривую с остриём (каустика). Каустика возникает из-за того, что, будучи касательными к ней, образующие её лучи почти совпадают между собой, и потому в малой части пространства собирается больше лучей, чем где-либо ещё, что и приводит к большей яркости.



**Рис. 21.** Схема возникновения каустики типа радуга.

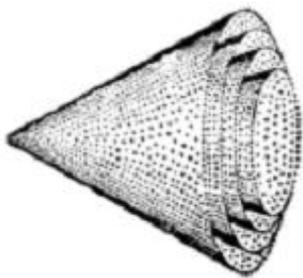
**Рис. 22.** Каустика радуги, отвечающая катастрофе складки.



Самой известной каустикой является радуга, которая может служить примером катастрофы складки. Для света данной длины волны лучи, выходящие из шаровой капельки дождя (после одного внутреннего отражения), имеют огибающую каустика (рис. 22), которая является гладкой и (в сечении плоскостью рисунка) почти прямолинейной уже на расстоянии нескольких диаметров от капельки. Эта каустика отвечает катастрофе складки (рис. 23). Каустика вращается вокруг прямой, идущей от капельки к солнцу, и результат оказывается таким, как если бы капелька излучала яркий конус света с осью, указывающей на солнце. С изменением длины волны меняется угол при вершине конуса (поскольку показатель преломления для разных длин волн разный), так что можно представлять себе капельку излучающий свет коаксиальными окрашенными конусами, как на рис. 24.

Наблюдатель с земли увидит лучи данного цвета лишь в определённых направлениях, отвечающих углу при вершине соответствующего конуса, и в результате он видит многоцветную

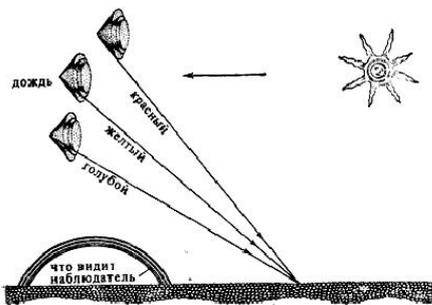
радугу.



круговую дугу радуги (рис. 24). Радуги, состоящие из более, чем одной дуги, являются результатом многократного отражения лучей.

**Рис. 23.** Капелька воды, излучающая свет коаксиальными окрашенными конусами.

Крайне высокая интенсивность, которой обладают различные цвета в различных избранных направлениях, определяемых каустиками складки, не даёт им вновь смешаться в белый цвет. Вот почему радуга ярче своего окружения, и ора или облако служат для нее тёмным фоном.



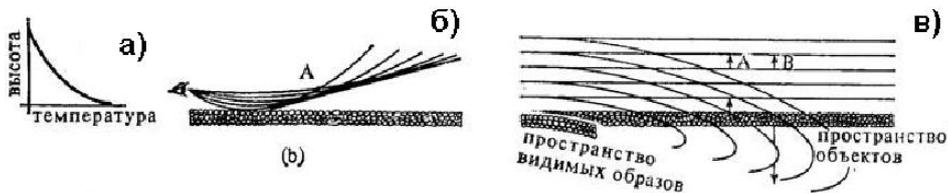
**Рис. 24.** Образование многоцветной дуги радуги.

Оптические катастрофы играют также роль в образовании некоторых типов миражей.

Миражи происходят, когда температурные градиенты в атмосфере искривляют лучи света. Если температура с высотой падает (рис. 26а), то световые лучи, попадающие в глаз наблюдателя, приходят туда по искривленным путям

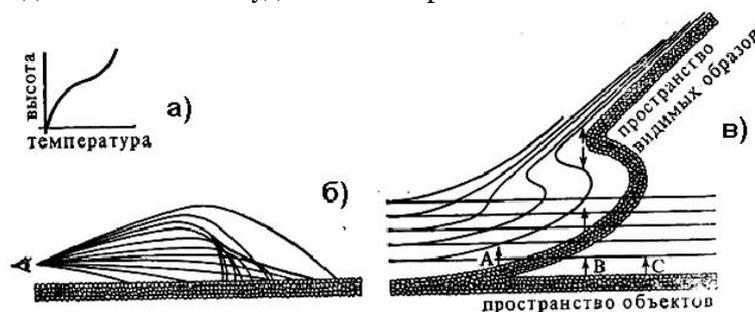
(рис. 26б).

Эти пути имеют огибающую типа складки. Многозначный характер соответствующего многообразия катастрофы, который проявляется видимым образом: для объекта, находящегося в точке А, два идущих от него луча попадают в глаз наблюдателя. Хороший способ сделать этот эффект графически наглядным состоит в том, чтобы деформировать действительное "пространство объектов" таким образом, чтобы все световые лучи стали прямыми, поскольку именно так глаз интерпретирует то, что видит; тем самым получается фиктивное "пространство образов" (рис. 26в). Для объекта в точке В будут две видимые копии в пространстве образов, нижняя из которых перевернута вверх ногами.



**Рис. 25.** Схема возникновения миража.

В случае, когда вместо складки появляется сборка, мы можем получить тройной мираж. При верхнем мираже температура должна иметь точку перегиба (рис. 26). Объект в точке А смещается немного вверх; объект в точке В смещается ещё больше и появляется трижды, причём средняя копия перевернута, а верхняя сильно сжата; объект в точке С смещается ещё выше и виден уже как один очень сильно удалённый образ.



**Рис. 26.** Схема возникновения тройного миража.

Хотя на рисунках и видны огибающие, они имеют смысл, только когда выбрано положение наблюдателя, т.е. это не физические каустики.

## 2.7 Термодинамика и фазовые переходы

Классическая теория фазовых переходов естественным образом укладывается в рамки элементарной теории катастроф.

Как известно, в термодинамических системах вблизи точек фазового перехода такие параметры, как давление, температура, термодинамические потенциалы, удельная теплоемкость и

т.п., испытывают разрывы и скачки, а внутри самих систем появляются крупномасштабные структуры, совершенно не мыслимые вдали от критических точек. Если взять для простоты физический газ в равновесном состоянии, то для него достаточно трёх макроскопических величин (температура, давление и объём). Эти величины не являются независимыми, потому что их связывают друг с другом уравнение состояния, которое описывает двухмерную поверхность в пространстве трёх параметров.

Скачкообразная перестройка структуры (катастрофа) характерна для всех фазовых переходов, например, переход жидкость-пар или жидкость-твёрдое вещество, которые демонстрируют ещё одну особенность катастрофы сборки. Резкий переход, описываемый классической сборкой с петлей гистерезиса, возможен и тут, когда перегретая жидкость взрывообразно испаряется (переохлажденная — мгновенно кристаллизуется), но обычно наблюдается постепенное испарение жидкости при сохранении постоянной температуры и давления до тех пор, пока не будет полностью завершен переход в новое состояние. В первом случае реализуется принцип максимального промедления, а в последнем — принцип Максвелла, который имеет место при высоком уровне “шума” (случайных внешних воздействий, порождающих флуктуации), не позволяющего осуществиться принципу максимального промедления.

**Принцип максимального промедления** - состояние системы определяется устойчивым (стабильным) или метастабильным минимумом до тех пор, пока он существует.

**Принцип Максвелла** - состояние системы определяется глобальным минимумом потенциальной функции.

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса, 1873 г.) устанавливает связь между давлением, объёмом и температурой:

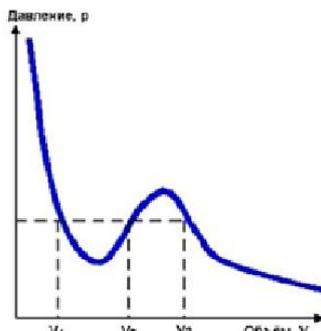
$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = nRT, \quad (19)$$

где  $p$  — давление,  $V_m$  — молярный объём  $T$  — абсолютная температура,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $n$  — число молей.

Это уравнение Ван-дер-Ваальса описывает поведение жидкости вблизи её критической точки. Уравнение было получено как соотношение между тремя параметрами  $V$ ,  $P$ ,  $T$  жидкости в окрестности ее критической точки:

$$pV^3 - (RT + pb)V^2 + aV - ab = 0, \quad (20)$$

где  $p$  — давление,  $V$  — объём газа,  $R$  — газовая постоянная,  $T$  — температура,  $a$  и  $b$  — постоянные для каждого газа величины.



Уравнение Ван-дер-Ваальса описывает критическое многообразие катастрофы сборки. Если зафиксировать некоторую точку в этом многообразии, то можно исследовать линейный отклик системы на малые возмущения.

**Рис. 27.** Кривая Ван-дер-Ваальса: функция  $F(x; a, b) = +x^4 + ax + bx^2$ , на базе которой строится поверхность, определяющая состояние системы газжидкость.

Уравнение катастрофы сборки  $A_{3:3}$ :

$$F(x; a, b) = +x^4 + ax + bx^2 \quad (21)$$

Разделим уравнение Ван-дер-Ваальса (20) на  $p$

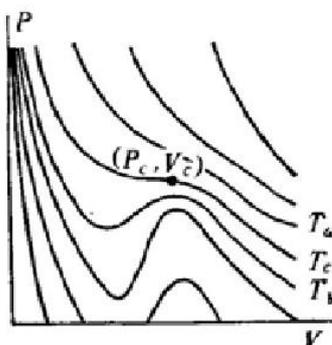
$$V^3 - (RT/p + b)V^2 + a/pV - ab/p = 0. \quad (22)$$

Переобозначив коэффициенты при  $V$  в (22), учитывая, что  $p$  прямопропорционально  $V$ , получим:

$$V^4 - BV^2 + AV - C = 0, \quad (23)$$

Кривая, описываемая уравнением (22) показана на рис. 27.

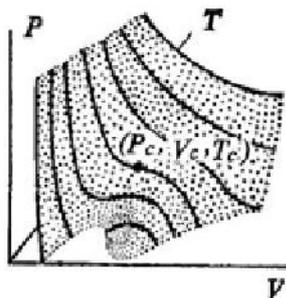
**Замечание.** Под критической точкой обычно понимают точку, где производная функция обращается в нуль. В термодинамике под ней понимают вырожденную критическую точку, которая является минимум (для энтропии - максимумом)



**Рис. 28.** Набор кривых Ван-дер-Ваальса при разных температурах.

Уравнение Ван дер Ваальса обычно представляют графически, рисуя графики  $P$  в зависимости от  $V$  при различных значениях  $T$  (рис. 28). Более наглядным является представление в виде поверхности (рис. 29), образованной точками  $P$ ,  $V$ ,  $T$ . Пусть

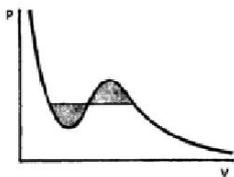
для рассматриваемого вещества понижается давление при постоянной температуре. Из рисунка видно, что может представиться несколько возможностей. - Если эта температура  $T_a > T_c$ , то объём плавно увеличивается. - Если температура в точности равна  $T_c$ , то  $V$  будет непрерывной функцией от  $P$ .



**Рис. 29.** Поверхность Ван дер Ваальса.

Если эта температура равна  $T_b < T_c$ , то имеются давления, при которых возможны несколько значений объёма, так что из уравнения нельзя получить объём как функцию от давления. Очевидно, что вещество, вынуждаемое следовать по кривой  $P-V$ , должно в некоторой точке произвести скачок.

Перед скачком вещество отвечает на малое уменьшение объёма значительно бóльшим увеличением давления, чем после скачка: трудносжимаемая жидкость внезапно становится легкосжимаемым газом.



**Рис. 30.** Условие выполнения правила Максвелла.

исходной кривой

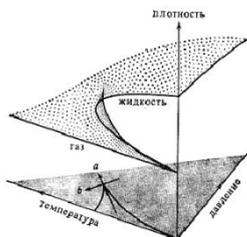
надо заменить горизонтальным отрезком прямой (рис. 35), так чтобы заштрихованные площади оказались равными.

Уравнение приобретает вид

$$x^3 + ax + b = 0, \quad (24)$$

где  $a$  и  $b$  константы, зависящие от температуры и давления.

Это - поверхность катастрофы сборки.

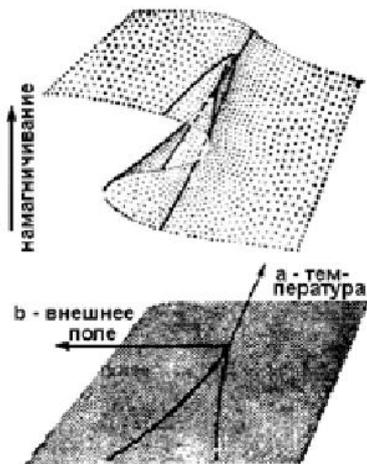


**Рис. 31.** Катастрофа в переходе жидкость-газ.

**Замечание.** Для описания фазовых переходов 1-рода используется аналогичная модель с потенциалом шестой степени.

Рассмотрим теперь явление ферромагнетизма.

Теория катастроф активно используется при описании процесса намагничивания ферромагнетика, остывающего ниже точки Кюри. Возникающая при этом спонтанная намагниченность образует ориентированные случайным образом крупные однородные области — домены, а при наличии достаточно сильного внешнего магнитного поля, вся намагниченность ориентируется по полю. Благодаря такому эффекту в горных породах фиксируется направление магнитного поля Земли, которое было в определенные моменты их становления. Так, в магматических породах, содержащих магнитные минералы, фиксируется момент их остывания ниже температуры Кюри, когда начинает проявляться ферромагнетизм.



**Рис. 32.** Поверхность катастроф для ферромагнетизма.

При разрушении породы естественными процессами, мельчайшие частички оказываются намагниченными. Они переносятся реками и, в конце концов, осаждаются на дно океанов, морей и озер. В процессе медленного оседания в спокойной воде магнитные частички ориентируются по магнитному полю Земли. Таким образом, в последовательно накапливающихся слоях осадков, так же как и в последовательных порциях изливающихся и застывающих вулканических лав, как на магнитной ленте записывается история изменения взаимной ориентации земного магнитного поля и данного участка земной поверхности. Анализ таких записей по всей Земле позволил обнаружить как изменения магнитного поля, включающие его “переворачивания”, когда северный полюс становится южным и наоборот, так и перемещения и развороты крупных участков поверхности Земли.

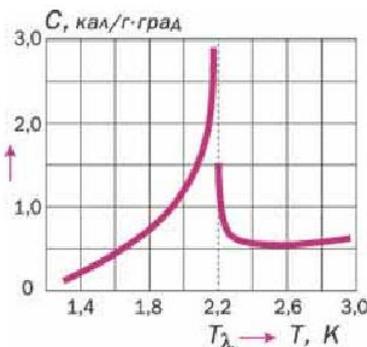
При температуре более высокой, чем некоторая температура  $T_c$ , вещество может быть парамагнитным, а при более низкой - ферромагнитным. Ферромагнитное вещество намагничено (обладает связанным с ним магнитным полем) даже в отсутствие внешнего поля.

Уравнение состояния  $x^3+ax+b=0$  характеризует поверхность сборки с точностью до диффеоморфизма с тождественной производной в точке Кюри. Термодинамический потенциал для фазового перехода второго рода с архетипом катастрофы сборки, управляется лишь двумя меняющимися связями (такими как  $P$  и  $T$ ). Уравнение состояния здесь также  $x^3+ax+b=0$ . Можно показать, что в результате теплового возбуждения система может преодолеть  $K$  обсуждаемым здесь явлениям относится переход вещества в сверхпроводящее состояние. Сверхпроводимость возникает при охлаждении материала ниже определенной температуры, которая называется критической  $T_k$ . Величина этой температуры у каждого сверхпроводника своя (рис. 33.). В этой точке электрическое сопротивление скачком падает до нуля.



**Рис. 33.** Зависимость сопротивления материала (металла или керамики) от температуры.

Сверхпроводимость можно наблюдать у гелия  $^4\text{He}$ . При понижении температуры жидкий  $\text{HeI}$  с нормальными свойствами переходит в сверхпроводящее состояние  $\text{HeII}$ . В момент сверхпроводящего перехода теплоемкость  $C$  гелия резко возрастает до огромной величины, а при дальнейшем охлаждении быстро уменьшается. График этой зависимости напоминает греческую букву  $\lambda$  (рис. 34).



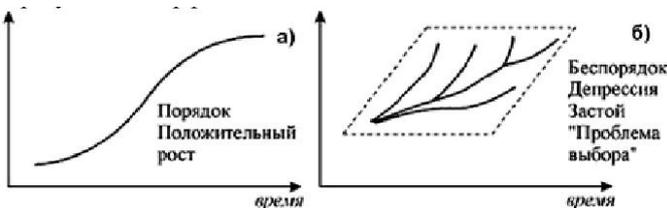
**Рис. 34.** Зависимость теплоёмкости от температуры при переходе гелия в сверхпроводящее состояние

## 2.8 Биология и экология

История развития животного мира на Земле часто интерпретируется, как эволюционное развитие, прерываемое серией катастроф.

Примером такого подхода является катастрофизм — система представлений об изменениях живого мира во времени под влиянием событий, приводящих к массовому вымиранию организмов. Теория катастроф происходит от древних мифов о потопах. Основываясь на смене видового состава живых организмов, Ж. Кювье пришёл к выводу, что в результате крупных катастроф планетного масштаба происходило вымирание живого на значительной части земной поверхности. Восстановление флоры и фауны происходило за счёт видов, пришедших из других небольших локальностей. Против идей Кювье середине XIX выступил Ч. Лайелла, сторонник эволюционного учения Ч. Дарвина. Представления о важной роли катастроф в эволюции живого возродились позже в виде неокатастрофизма.

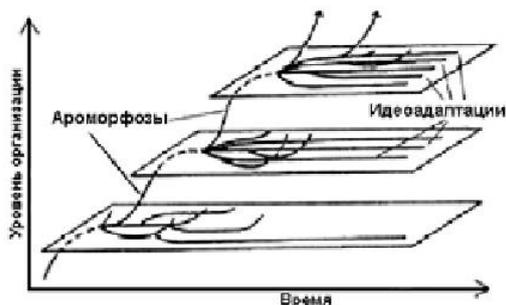
Известна целая группа эволюционных теорий, согласно которым видообразование происходит очень быстро — в течение нескольких поколений (**Сальтационизм** (*saltus* — скачок) — группа эволюционных теорий,. Процесс связан с появлением новых особей, резко отличающихся ирепродуктивно изолированных от представителей родительского вида. Сальтационизм позволяет объяснить такие явления, как неполнота палеонтологической летописи — отсутствие непрерывных рядов переходных ископаемых форм между видами и надвидовыми таксонами; резкое снижение конкуренто- и жизнеспособности у переходных форм по сравнению с исходным видом и др.



**Рис. 35.** Иллюстрация к понятиям «порядка» (а) и «беспорядка» (б).

Так, изучая наследование признаков у ослинника *Oenothera lamarckiana* Хуго де Фриз в 1901 г. наблюдал появление новых форм, морфологически резко отличающихся от родительских. На основании полученных результатов он сформулировал мутационную теорию, основным положением которой была внезапность появления новых, ранее не существующих видов в ходе единичных мутационных событий. В середине XX века Гольдшмидтом было сформулировано представление о системной мутации — это особый тип мутации, приводящий к появлению особей резко морфологически отличающихся от исходных форм и могущих дать начало новым видам. Системные мутации, возможно, связаны с изменением особых консервативных участков генома, ответственных за регуляцию морфогенеза.

Обычно в биологии в качестве «нормального», «стабильного» состояния рассматривается устойчивый рост (рис. 35а), для такого состояния системы разработана «нейтральная теория эволюции». Однако недавно молекулярная генетика прояснила роль стресса в эволюционном процессе.



**Рис. 36.** Развитие уровня организации биологических систем: ароморфоз и идеоадаптация.

Дело в том, что ни один устойчивый рост не может продолжаться вечно. Простейшее логистическое уравнение описывает ограничение роста, связанное с исчерпанием ресурса, как выход на стационар. На практике замедление роста в дальнейшем сопровождается депрессией, стагнацией, уменьшением характеристических показателей. В этой стадии система встает перед проблемой выбора другой стратегии жизни (другого ресурса). Если новый ресурс (новая жизненная стратегия) выбран правильно и действительно может обеспечить дальнейший активный рост, начинается новая стадия «устойчивого роста» типа А. Обе стадии А (ароморфоз) и В (идеоадаптации) являются «естественными» стадиями в развитии систем. В неблагоприятных условиях (на стадии беспорядка В) у микроорганизмов резко повышается скорость мутационного процесса. На дрозофилах было показано, что при стрессе у эукариот происходит скачкообразная реализация ранее накопленной, но скрытой генетической изменчивости, одновременно происходит ускорение процессов мутации.

Теория катастроф (модель катастрофы с ограничениями, применимая к областям, имеющим границы) позволила объяснить, почему пчелы встречаются либо как виды, для которых характерен одиночный образ жизни, либо как общественные насекомые, образующие очень большие группы. Здесь используется один из основных экологических принципов: виды с меньшей эффективностью использования ресурсов среди конкурирующих за ту же самую пищу вытесняются под давлением естественного отбора. Если пчела собирает мед с небольшого пространства, способна летать с большой скоростью и переносить большое количество нектара, то она предпочитает жить в одиночестве или в небольшом коллективе. Слабые пчелы с низкой эффективностью сбора нектара, вынужденные к тому же собирать мед с обширных площадей, т.е. тратить большое время на перелеты, вынуждены образовывать большие сообщества (несколько тысяч), которые оказываются конкурентоспособными благодаря разделению труда в улье. Математика медоносных пчел весьма интересна, и она стоит того, чтобы ей посвятить отдельную лекцию.

Перейдем теперь к рассмотрению проблемы роста популяции животных.

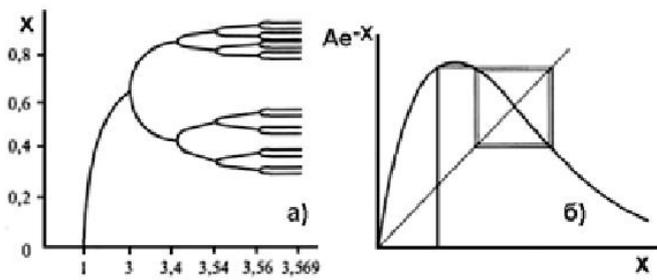
При углублении неравновесности в открытой системе возникает определенная последовательность бифуркаций, сопровождающаяся сменой структур. Состояние системы в момент бифуркации является неустойчивым и бесконечно малое воздействие может привести к выбору дальнейшего пути. Финальным состоянием эволюционирующих систем является состояние динамического хаоса.

Иллюстрацией перехода к нему является логистическое уравнение:

$$X_{n+1} = CX_n(1 - X_n) \quad (25)$$

Для наглядности рассмотрим биологическую трактовку этого уравнения: изолированно живёт популяция особей нормированной численностью  $X_n$ . Через год появляется потомство численностью  $X_{n+1}$ . Рост популяции описывается первым членом правой части уравнения —  $CX_n$ , где коэффициент  $C$  определяет скорость роста и является определяющим параметром. Убыль (за счёт перенаселенности, недостатка пищи и т.п.) определяется вторым, нелинейным членом —  $(CX_n)^2$ .

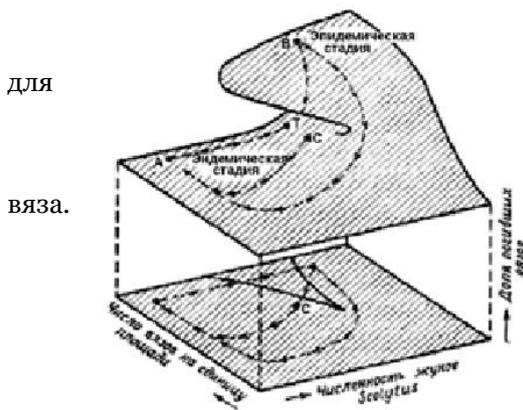
Линии показывают значения  $X_n$  при больших  $n$ . При  $C < 1$  популяция с ростом  $n$  вымирает. В области  $1 < C < 3$  численность популяции приближается к постоянному значению  $X_0 = 1 - 1/C$ . Это область стационарных решений. Затем в диапазоне  $3 < C < 3.57$  появляются бифуркации, разветвление кривых на две. Численность популяции колеблется между двумя значениями, лежащими на этих ветвях. Сначала популяция резко возрастает, на следующий год возникает перенаселенность и через год численность снова становится малой. Далее происходит перекрывание областей различных решений, и поведение системы становится хаотическим. Динамические переменные  $X_n$  принимают значения сильно зависящие от начальных. М.Фейгенбаум установил универсальные закономерности перехода к динамическому хаосу при удвоении периода, которые были экспериментально подтверждены для широкого класса механических, гидродинамических, химических и т.д. систем. Наряду с последовательностями удвоений периода (каскадами Фейгенбаума) имеются другие пути перехода к хаосу, когда, например, длительные периоды упорядоченного движения чередуются со вспышками беспорядка.



**Рис. 37.** Бифуркации в численности популяции: а – каскад удвоенных периода; б – колебания численности популяции в модели Мальтуса.

и их гибель, является гриб *Ceratocystis ulmi*, который переносится от дерева к дереву жуками-короедами рода *Scolytus*. После 1927 г. в Англии произошло несколько вспышек этого заболевания, когда оно, очевидно, переходило от эндемической стадии к эпидемической. Типичный путь развития эпидемии начинается в точке А, для которой характерно большое число вязов на единицу площади и низкая численность популяции жуков.

Если популяция жуков увеличивается (например, в мягкие зимы), этот путь пересекает складчатую особенность в точке Т и скачком переходит в точку В эпидемической стадии, которой характерны наличие агрессивного штамма и гибель значительной части зараженных деревьев.



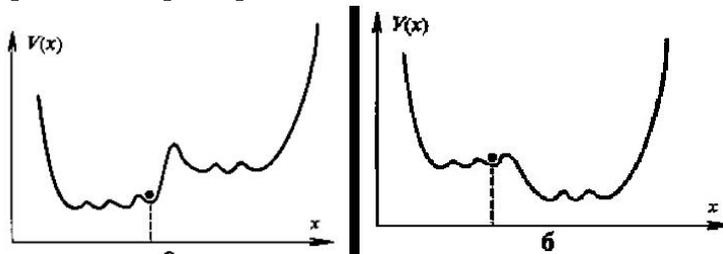
**Рис. 38.** Модель заболевания голландского вяза.

для  
вяза.

Из точки В система может двигаться двумя различными путями. Если в результате эпидемии или выборочной рубки число вязов на единицу площади существенно уменьшается и параллельно уменьшается численность жуков, то заболевание постепенно возвращается к эндемическому уровню. Если, однако,

вследствие соответствующей обработки или неблагоприятных условий популяция жуков резко сокращается прежде, чем существенно уменьшается численность вязов, то «путь» заболевания переходит через складку, совершая резкий переход в точку С эндемического уровня, причем скорость перехода зависит от размаха складки.

Перейдём теперь к проблемам экологии.



**Рис. 39.** Два типа потенциала: а - система устойчива; б - система неустойчива.

Экологическую обстановку можно представить в виде некоторой функции  $V(x)$ , или потенциала. В зависимости от его формы обстановка может обладать либо сравнительно большой (а), либо малой (б) устойчивостью. Здесь параметр  $x$  характеризует качество ситуации экологической точки зрения (например, среднее содержание вредных примесей в атмосфере). Пусть реализуемы только такие значения  $x$ , при которых некоторая функция (потенциал, рис. 44) принимает свое минимальное значение. Малые возмущения системы (малая загрязненность атмосферы) – устойчивое состояние находится в одной из точек локального минимума в нижней части графика.

Малые возмущения системы, обусловленные, например, деятельностью человека, могут лишь немного изменять загрязненность атмосферы – устойчивое состояние находится в одной из точек локального минимума в нижней части графика (система «сидит» в этой точке надежно). Перевод системы в опасное состояние – в соседний локальный минимум, соответствующий высокой загрязненности, – практически невозможен: нужен слишком большой толчок, заставляющий систему преодолеть высокий барьер, отделяющий точки минимума.

Однако при изменении условий (например, при накоплении отходов промышленного производства) характер зависимости потенциала от  $x$  может измениться. Тогда даже небольшой толчок может заставить систему «свалиться» в устойчивое состояние с высоким уровнем загрязненности атмосферы. Такой переход может совершиться очень быстро, в считанные годы.

## 2.9 Экономика

Надежды на то, что теория катастроф позволит определить механизм финансовых и экономических кризисов и банкротств не оправдались, но всё же этот подход позволил наглядно проиллюстрировать некоторые проблемы в экономике.

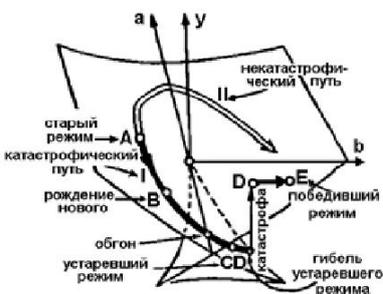
Катастрофические падения курсов акций на фондовых биржах можно описать моделью разрастающихся флуктуаций. Событие начинается с того, что приток нежелательной информации приводит к резкому падению цен акций всего нескольких крупных компаний. Этот сброс вызывает взрастающую панику среди брокеров, которые болезненно воспринимают любые колебания рынка, и к концу торгового дня лавинообразно катятся вниз цены акций многих тысяч иных, вполне благополучных компаний, а с ними и показатели всей биржи. Немаловажно и ожидание катастрофы (фактор самосбывающегося пророчества).

Введём функцию, характеризующую состояние экономики (например, величину дохода) в зависимости от какого-либо параметра (например, предприимчивость населения). Если экономика регулируется так, чтобы обеспечивать максимизацию функции, то система будет находиться в точке максимума *A* (рис.9) – оптимальное решение здесь единственно. По мере развития системы возникает побочный максимум *B* – новый локально-оптимальный, но вообще-то не наилучший режим. Он рождается вместе с близким локальным минимумом. Далее, побочный максимум обгоняет исходный (*C*). Начиная с этого момента, новый режим уже выгоднее старого. Но переход на него затруднён необходимостью резкого перескока - катастрофы. Отсюда вытекает правило: *При плавном переходе от одного локально-оптимального режима к другому необходимо временное ухудшение.*



**Рис. 40.** Сценарий глобальных перестроек в развивающейся системе. При плавном переходе от одного локально-оптимального режима к другому необходимо временное ухудшение.

В линейных системах малое изменение параметра в сторону лучшего режима улучшает положение. В отличие от этого, в стадии катастрофы, после достижения локального оптимума малые изменения управляющего параметра, направленные в сторону лучшего режима, не улучшают, а ухудшают ситуацию. И если, система стремится локально оптимизировать своё состояние, то она будет отвечать на недостаточно радикальные изменения возникновением сильных тенденций возврата к старому режиму. Этим объясняется неудача многих реформ. Наконец, в ходе дальнейшего развития системы исходное локально-оптимальное состояние вообще исчезает (*D*) и переход на далёкий от первоначального режим становится неизбежным (*E*).



**Рис. 41.** Ласточкин хвост: универсальный закон зависимости оптимальных значений от параметров.

Важно понимать, что движение от худшего состояния в сторону лучшего сразу же приводит к ухудшению. Скорость ухудшения при равномерном движении к лучшему состоянию увеличивается. По мере движения от худшего состояния к лучшему сопротивление системы растёт. Максимум сопротивления достигается раньше, чем самое плохое состояние, через которое нужно пройти для достижения лучшего. После прохождения максимума сопротивления состояние продолжает ухудшаться. По мере приближения к самому плохому состоянию сопротивление, начиная с некоторого момента, начинает уменьшаться и, как только самое плохое состояние пройдено, не только полностью исчезает сопротивление, но система начинает "притягиваться" к лучшему состоянию. Слабо развитая система может перейти в лучшее состояние почти без предварительного ухудшения, в то время как развитая система, в силу своей устойчивости, на такое непрерывное улучшение неспособна. Если, однако, систему удастся сразу, скачком, а не непрерывно, перевести из плохого устойчивого состояния в состояние, достаточно близкое к лучшему, то дальше она сама собой будет эволюционировать в сторону лучшего состояния.

Все возможные сценарии взаимодействия двух локально-оптимальных режимов даются универсальным законом  $y = x^4 + ax^2 + bx$  с параметрами  $a$  и  $b$ . На рис. 46 изображён график экстремального значения  $y$  как функции параметров  $a$  и  $b$ .

Сценарий перехода от одного состояния к другому изображается на графике путём I, заканчивающимся катастрофическим скачком. Однако к той же самой конечной цели можно

прийти без катастрофы, даже зайдя уже достаточно далеко по катастрофическому пути. Для этого надо вернуться назад и обойти разделяющую конкурирующие режимы точку с другой стороны (путь II).

## 2.10 Психология

Рассмотрение моделей поведения начнём с достаточно простой модели агрессивного поведения собаки. Эта модель предложена К.Зиманом, который основывался на работах психолога К. Лоренца. Согласно Лоренцу, конфликтными факторами, определяющими агрессивное поведение собаки, являются страх и ярость, степень интенсивности которых можно измерить. Поведение собаки Зиман описывает переменной  $x$  с диапазоном изменений от бегства до нападения и проходящей через нейтральное состояние. Предполагается, что зависимость агрессивности от ярости можно изобразить в виде монотонно возрастающей функции. Аналогично увеличение страха ведет к монотонному уменьшению агрессивности. При умеренном воздействии ( $a > 0$ ) собака будет проявлять плавное изменение отклика с испуга на злость в зависимости от того, как было проведено воздействие. Но более высокий уровень воздействия — это стресс, соответствующий переходу в область  $a < 0$ . В этом случае если собака изначально испугалась, она останется испуганной при увеличении уровня воздействия на неё, пока в конечном итоге она не достигнет точки возврата, где произойдёт спонтанный переход в режим злобы. При переходе в этот режим собака будет оставаться озлобленной даже в случае постепенного снижения воздействия на неё. Если собака испытывает только сильный страх, то наиболее вероятное её поведение будет бегство. Если собака испытывает только сильную злобу, то она будет нападать. Каким будет её поведение, если она одновременно испытывает и страх, и ярость? Однозначно предсказать поведение в этом случае нельзя: она может и нападать, и обращаться в бегство: нет каких-либо видимых признаков, по которым можно было бы судить об её поведении в следующий момент. Более того, при одних и тех же значениях показателей страха и ярости животное могло повести себя совершенно по-разному. В этом случае имеет место бимодальность в поведении. На основе этих закономерностей поведения, Зиман делает вывод, что зависимость поведения собаки от этих двух параметров (страха и ярости) можно изобразить трёхмерным рисунком катастрофы "сборка" (рис. 47). Катастрофы (резкие скачки в поведении) будут соответствовать в этом случае нападению и бегству собаки.

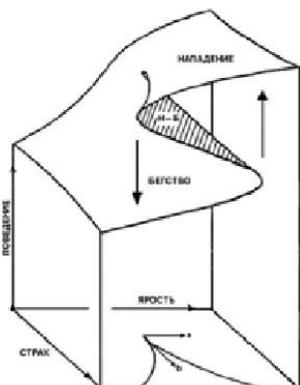
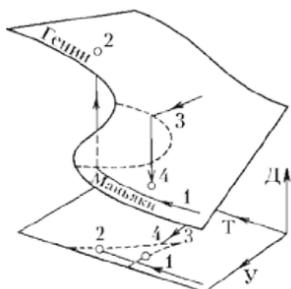


Рис. 42. Поверхность состояния собаки, характеризующая зависимость агрессивности собаки от «количества» гнева и страха. Подобные поверхности неоднозначны, то есть любому сочетанию переменных соответствует несколько положений — состояний собаки.

В том случае, когда страх и ярость возбуждаются одновременно, поведение собаки может «пойти» по верхней — агрессивной — или по нижней — «трусливой» — частям катастрофической складки, и её поведение будет полностью определяться с самого начала сделанным «выбором». Поэтому возбужденное животное скорее склонно броситься кусаться или обратиться в бегство, нежели пребывать в состоянии пассивной нейтральности. Катастрофа сборки иллюстрирует не только агрессивное, но и другие виды эмоционального поведения. Любое поведение определяется, в конечном счете, нейронной активностью мозга. Возможно, активность мозга на нейронном уровне удастся описать методами теории катастроф. Модель катастрофы сборки также годится для описания поведения особей, стоящих как выше, так и ниже в эволюционном развитии, чем собака. В частности, предложена модель агрессивного поведения тропических рыб по захвату территории для постройки убежища, а также модели эмоционального поведения человека в некоторых конфликтных ситуациях. Были попытки применить теорию катастроф для описания творческого процесса ученого.

Будем характеризовать творческую личность (например, учёного) тремя параметрами, называемыми «техника», «увлеченность», «достижения», между которыми существует некая зависимость, которую можно представить в виде поверхности в трёхмерном пространстве с координатами (Т, Д, У). При проектировании этой поверхности на плоскость (Т, У) вдоль оси Д возникает особенность — сборка. Рассмотрим достижения учёного в зависимости от его увлечённости и технической возможности. Если увлеченность невелика, то достижения монотонно и довольно медленно растут с техникой. Если увлеченность достаточно велика, то наступают качественно новые явления. В этом случае достижения с ростом техники могут расти скачком (такой скачок будет, например, если техника и увлеченность меняются вдоль кривой на рис. 48 в точке 2). Область высоких достижений, в которую мы при этом попадаем, обозначена словом «гении». С другой стороны, рост увлеченности, но подкреплённый соответствующим ростом техники, приводит к катастрофе (на кривой 3 в точке 4, рис. 43), при которой достижения скачком

падают, и мы попадаем в область обозначенную словом «маньяки». Интересно, что скачки из состояния «гений» в состояние «маньяк» и обратно происходят на разных линиях, так что при достаточно большой увлеченности гений и маньяк могут иметь равные увлеченности и техники, различаясь лишь достижениями (и предысторией).



**Рис. 43.** Геометрическое описание творчества учёного в координатах его достижений (Д), увлеченности (У) и владения техникой исследований (Т).

## 2.11 Социологическое моделирование

В социальной психологии теорию катастроф использовали в изучении социального поведения, социальной установки и т.д. Примером является исследование нарушений режима в тюрьме Гартри в 1972 г., проведенное Зиманом. Оказалось, что факторы, влияющие на беспорядки, могут быть разделены на две в основном независимые группы:

- Напряженность - чувство разочарования и безвыходности, бедственное положение;
- Разобщенность - взаимная отчужденность, отсутствие общения, разбиение на два лагеря.

При плавном ухудшении условий содержания заключенных количество протестных акций и насильственных действий против охраны и конвоя изменяется нерегулярным и скачкообразным образом. Функция, связывающая вероятность бунта с такими величинами, как средняя продолжительность ежедневной прогулки, калорийность суточного рациона, вероятность заключения в карцер, непрерывна и даже довольно гладкая. Но у нее есть особенности типа сборки, вблизи них и происходят «катастрофы».

С ростом напряженности повышается вероятность волнений, а увеличение разобщенности ведёт к тому, что волнения принимают характер более внезапных и яростных вспышек. Это заставляет подумать о катастрофе сборки (рис. 49). Система вначале "садится" по вертикали на многообразие катастрофы ("быстрый поток"), а затем подчиняется обратной связи ("медленный поток"). Из рис. 49 видно, что при низких значениях разобщенности система стремится к устойчивому положению умеренного волнения, но при высоком уровне разобщённости она совершает колебания внутри бифуркационного множества катастрофы сборки, прыгая попеременно с верхнего листа на нижний и обратно. Эта картина будет отчасти смазываться случайным шумом, но колебательный характер поведения, тем не менее, должен проявиться.



**Рис. 44.** Катастрофа тюремного бунта.