

**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Химический факультет**

Междисциплинарный университет Бекмана

**Профессор, д.х.н.
Бекман Игорь Николаевич**

СИНЕРГЕТИКА

Курс лекций

Москва, 2010

Аннотация

Учебное пособие "Синергетика" - конспект лекций профессора химического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова Бекмана Игоря Николаевича, читаемого слушателям Междисциплинарного университета. В курсе лекций изложен критический анализ опыта использования редуктивизма, системного анализа, синергетики и холизма в научном познании мира. Рассмотрены эффекты синергизма, повлиявшие на создание науки - синергетики. Проведено сравнение синергетики и кибернетики как междисциплинарных наук. Даны определения таких параметров, как порядок, беспорядок, хаос, детерминированный хаос, методы управления ими и процессы самоорганизации. Основное внимание уделено математическим основам синергетики, включая методы математической физики (линейные и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных), равновесную и неравновесную термодинамику, статистическую физику, динамику нестационарных процессов, геометрию фракталов и теорию катастроф. Значительная часть пособия посвящена практическому применению идей и методов синергетики в физике, химии, биологии, экологии, истории, социологии, политике, государственном управлении, экономике, образовании, культуре и искусстве. В заключительной части пособия исследуются перспективы использования синергетики для предсказания направлений будущего развития, в частности, возможность восстановления союза человека с природой на новых основаниях, в котором будет не только единство природы и человека, но также науки, культуры и общества.

Учебное пособие предназначено для широкого круга читателей, интересующихся новыми науками.

Содержание

Предисловие

1. Синергизм и синергетика
 2. Динамические системы
 3. Самоорганизующиеся системы
 4. Необратимая термодинамика
 5. Теория катастроф и революций
 6. Геометрия фракталов в синергетике
 7. Синергетика в физике
 8. Синергетика в химии
 9. Синергетика в биологии, экологии и медицине
 10. Синергетика и информатика
 11. Синергетика в теоретической истории
 12. Синергетика и культура
 13. Синергетика образования
 14. Синергетика в социологии, управлении и политике
 15. Синергетика в прогнозах будущего развития
- Заключение

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
Лекция 1. СИНЕРГИЗМ И СИНЕРГЕТИКА.....	6
1.1 Редуктивизм, системный анализ, холизм и синергетика.....	6
1.2 Неравновесная термодинамика	8
1.3 Синергетика и самоорганизующиеся системы.....	13
Лекция 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.....	18
2.1 Порядок и хаос	18
2.2 Виды сложных систем.....	21
2.3 Открытие детерминированного хаоса.....	24
2.4 Элементы теории динамических систем.....	26
2.5 Примеры динамических систем с детерминированным хаосом	35

ПРЕДИСЛОВИЕ

Синергетику можно рассматривать как новое междисциплинарное движение в современной науке, знаменующее собой становление нового взгляда человека на мир и на самого себя в этом мире.

Синергетика - это новый диалог человека с природой, новый синтез человеческого знания и мудрости.

Синергетика - новый подход к познанию кризисов, нестабильности и хаоса, к созданию средств управления ими.

*Е.Н. Князева, С.П. Курдюмов
Основания синергетики.*

*Режимы с обострением,
самоорганизация, темпомиры.*

В настоящее время в образовании царствует разделение науки на отдельные компоненты.



Это проявляется в существовании специализированных ВУЗов, факультетов, кафедр и лабораторий. Курсы лекций: "неорганическая химия", "сопротивление материалов", "педиатрия", "история искусств" слушают разные студенты. Чем весьма довольны.

Между тем границы между традиционными дисциплинами начинают стираться. Уже возникли центры по исследованию "сложной динамики", "нелинейных явлений" и других аспектов, которые не уточняют, какие явления - физики, химии, биологии, экономики или искусства - они рассматривают. На семинарах в этих центрах изучаются как метаморфозы растений и животных, так и проблемы физики плазмы, психологии

восприятия или социального поведения, математическая теория катастроф, революций и фазовых переходов, миграция народов и веществ и т.п.. Идеология изучаемых предметов строится на том факте, что процессы образования структур и самоорганизация развиваются в соответствии с небольшим числом сценариев, не зависящим от конкретной системы. Например, образование внутренних структур в лазере происходит в соответствии с законами, аналогичными конкуренции молекулярных видов на ранней эволюции жизни.

Важным направлением, в котором естественным образом сочетаются существующие в настоящее время науки, является синергетика, которая целенаправленно ищет правила, по которым возникает порядок в сложных системах. Предметами этой науки хаос и порядок, их конкуренция и существование, нелинейность и нестабильность, неустойчивые динамические системы и устойчивое развитие, самоорганизация сложных систем разного рода, трансформации в системах, эволюция границ раздела между системами во времени и пространстве.

Развитие наук всегда требовало усилий по подготовке специалистов, призванных внедрять в практику эти самые науки и развивать их более интенсивно. Новый университет дистанционного образования - Интерактивный междисциплинарный университет профессора Бекмана, БУМ, - готовит специалистов (энциклопедистов) владеющих техникой междисциплинарного мышления, способных преподавать междисциплинарные предметы и использовать полученные знания в управленческой деятельности.

Естественно, что синергетика, пытающаяся объединить различные науки в единую систему, является одной из основных дисциплин, преподаваемых в БУМ.

Предлагаемое здесь учебное пособие представляет собой конспект лекций по курсу "Синергетика", читаемых для слушателей БУМ в течение всего процесса обучения. Курс дополнен семинарами и практическими занятиями.

Предлагаемое учебное пособие состоит из двух частей. В первой (теоретической) части приведён критический анализ опыта использования редуктивизма, системного анализа, синергетики и холизма в научном познании мира. Рассмотрены эффекты синергизма, повлиявшие на создание науки - синергетики. Даны определения таких параметров, как порядок, беспорядок, хаос, детерминированный хаос, методы управления ими и процессы самоорганизации. Основное внимание уделено математическим основам синергетики, включая методы математической физики, неравновесную термодинамику, статистическую физику, динамику нестационарных процессов, геометрию фракталов и теорию катастроф. Вторая часть курса посвящена практическому применению идей и методов синергетики в физике, химии, биологии, экологии, истории, социологии, политике, управлении, экономике, образовании, культуре и искусстве. В

заключительной части пособия исследуются перспективы использования синергетики для предсказания направлений будущего развития, в частности, возможность восстановления союза человека с природой, в котором будет не только единство природы и человека, но также науки, культуры и общества.

Лекция 1. СИНЕРГИЗМ И СИНЕРГЕТИКА

*Целое это больше, чем сумма его частей
Аристотель «Метафизика»*

Древние натурфилософы рассматривали мир, как единое целое. Это было правильно, но сильно мешало развитию наук, т.к. найти описание сложных природных явлений и дать прогноз из развития оказалось непосильной задачей. Со временем осознали, что если нельзя объять необъятное, то можно расчленив его на части и даже частицы, после чего изучить каждую часть в отдельности, т.е. провести анализ. Анализ (аналитическая методология) стимулировал развитие наук, так что возникли многочисленные частные науки: физика, химия, биология и т.п., которые тут же начали делиться на более частные: неорганическая, органическая, физическая химия и т.п. Это деление продолжается и сейчас.

1.1 Редуктивизм, системный анализ, холизм и синергетика

Применение анализа при исследовании достаточно сложного объекта называется редукцией, под которой понимают упрощение, сведение сложного к более простому, обозримому, доступному для анализа и управления. С помощью анализа были решены конкретные проблемы, например, создана модель атома. Появился соблазн объяснения сложных явлений, исходя из законов, полученных при изучении простых систем. Например, предпринимались попытки свести биологические явления к химическим и физическим законам, или социологически – к биологическим.

Однако со временем учёные обнаружили, что и природа и общество сложны, а механистическая картина мира, которой они так долго и с таким успехом придерживались, отражает лишь жёсткие причинно-следственные связи и линейный характер зависимостей. Между тем, в нас и вокруг нас царит детерминированный, динамический по своей природе, хаос, управляемый к тому же нелинейными законами. Мало изучить влияние внешних сил на сложные системы, отработать способы управления ими, но и следует сформулировать законы организации внутренней структуры этих систем, законы их самоорганизации, саморазвития и самоуправления.

Требования века заставили перейти от анализа и редуктивизма к холизму, т.е. к философии цельности. Конечно, следует развивать междисциплинарные направления в науке, междисциплинарное образование и междисциплинарное мышление. Но этого мало! Объединение разных наук приводит к эффектам синергизма, т.е. к ситуациям, когда целое больше, чем простая сумма его частей. Следовательно, развитие наук следует вести в рамках синергетики, с учётом идей фрактальной геометрии (самоподобия), автоволновых процессов, случайностей и детерминированного хаоса.

Начнём с некоторых определений.

Редукционизм (*reductio* – возвращение, приведение обратно) – методологический принцип, согласно которому сложные явления могут быть полностью объяснены с помощью законов, собственных явлениям более простым (например, социологические явления объясняются биологическими или экономическими законами). Редукционизм абсолютизирует принцип редукции (сведения сложного к простому и высшего к низшему), игнорируя появление эмерджентных свойств в системах более высоких уровней организации. Хотя как таковая, обоснованная редукция может быть плодотворной (пример – планетарная модель атома).

Эмерджентность (*emergent* – возникающий, неожиданно появляющийся) в теории систем – наличие у какой-либо системы особых свойств, не присущих её подсистемам и блокам, а также сумме элементов, не связанных особыми системообразующими связями; несводимость свойств системы к сумме свойств её компонентов; синоним – «системный эффект». В биологии и экологии понятие эмерджентности можно выразить так: одно дерево – не лес, скопление отдельных клеток – не организм. Например, свойства биологического вида или биологической популяции не представляют собой свойства отдельных особей, понятия рождаемость, смертность неприменимы к отдельной особи, но применимы к популяции или виду в целом. В эволюционистике выражается как возникновение новых функциональных единиц системы, которые не сводятся к простым перестановкам уже имевшихся элементов. В почвоведении: эмерджентным свойством почвы является плодородие.

Анализ – процедура мысленного расчленения предмета на части в целях его дальнейшего изучения.

Системный анализ – метод познания, представляющий собой последовательность действий по установлению структурных связей между переменными или элементами исследуемой системы. Это методология решения сложной проблемы путём последовательной декомпозиции её на взаимосвязанные частные подпроблемы. Любой объект бесконечно сложный, поэтому задача упрощается выделением только тех элементов и связей, которые обеспечивают достижение цели. Системное исследование представляет собой процедуру

описания объекта, способа его функционирования и тенденций развития. Основная процедура – построение обобщенной модели, отображающей взаимосвязи реальной ситуации. Системный анализ применяется для решения задач, для которых отсутствуют стандартные решения, и которые, в принципе, не могут быть формализованы без использования методов системного анализа. Идеи системного анализа используются для управления. Полезность системного анализа обусловлена глубоким проникновением в суть проблемы, выявлением взаимосвязей, способствующих обнаружению нестандартных решений, в большей четкости формулирования целей, в большей эффективности распределения ресурсов. Ограниченность системного анализа обусловлена неизбежной неполнотой анализа (принцип непознаваемости), приближённой оценкой эффективности, отсутствием способов точного прогнозирования перспективы.

Холизм (Holos - целое, всё, всего) – учение о целостности нашего мира, о том, что все его элементы, живая и неживая природа – связаны как части единой большой системы – Бога, Мира, Вселенной. Исходная трактовка холизма более функциональна и близка к синергетике – все свойства некоей системы, будь то (физическая, биологическая, химическая, социальная, экономическая, психическая, языковая или любая другая система.) не могут быть определены или объяснены по свойствам отдельных составных частей. Вместо этого, наоборот, система как целое, определяет способ поведения своих частей.

Синергизм – совместное действие для достижения общей цели, основанное на принципе, что целое представляет нечто большее, чем сумма его частей. Синергизм означает превышение совокупным результатом суммы слагающих его факторов. Так, доходы от совместного использования ресурсов превышают сумму доходов от использования тех же ресурсов по отдельности. Данное понятие также называется синергетическим эффектом (эффектом $2+2=5$).

Синергетика (приставка со значением совместности и «деятельность»), или **теория сложных систем** – междисциплинарное направление науки, изучающее общие закономерности явлений и процессов в сложных неравновесных системах (физических, химических, биологических, экологических, социальных и других) на основе присущих им принципов самоорганизации. Синергетика является междисциплинарным подходом, поскольку принципы, управляющие процессами самоорганизации, представляются одними и теми же безотносительно природы систем, и для их описания должен быть пригоден общий математический аппарат.

Редукция предполагает, что сложные явления могут быть объяснены на основе законов, свойственных более простым системам. Сводя сложное к более простому, анализ игнорирует специфику более высоких уровней организации. Аналитический подход показал свою эффективность при решении многих задач теории и практики. Но чем глубже внедряли аналитику, тем больше усиливались технические науки и хирели гуманитарные. Начались кризисы: политические, экономические, экологические и т.п.

В стремлении противодействовать этому возникло учение о холизме. Холизм – философия цельности – направление в философии, рассматривающее мир как результат творческой эволюции, которая направляется нематериальным «фактором цельности». Основоположник – Ян Смэтс, студентом написавший книгу "Эволюция личности", которую, правда, не опубликовал. Но в 1926 г. у него вышла книга "Холизм и эволюция". Когда Альберт Эйнштейн прочитал эту книгу, он сделал следующий прогноз: в грядущем тысячелетии холизм, – раньше или позже, – станет главной концепцией естествознания.

Можно утверждать, что холизм – крайнее проявление философии синергетики и системного анализа.

Ян Смэтс (1870-1950) – основатель философии холизма - премьер-министр Южно-Африканского союза, командир отрядами буров во время Англо-бурской войны в Трансваале, командующий британской армией в Восточной Африке, во время второй мировой войны – британский фельдмаршал, соавтор устава Лиги Наций, активный проводник политики апартеида.

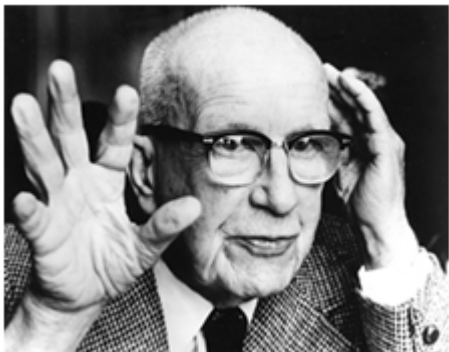
"Холизм не только созидателен, но и самосозидателен, и его конечные структуры гораздо более целостны, чем его первоначальные структуры". Я. Смэтс.

Три столетия научной революции качественно изменили картину окружающего нас мира, привели к доминированию аналитического подхода во всех областях человеческой деятельности: науке, технике, искусстве, морали. Целостный, гармоничный мир исчез. Но в середине 20-го века маятник пошёл в обратную сторону. Развитие общей теории сложных структур потребовало создания методологии рассмотрения сложных природных и общественных систем во всей их взаимосвязи. Началось



движение от анализа к синтезу. В методологию науки вошёл системный анализ, в котором нашлось место и синтезу. Синтез – соединение различных элементов объекта в единое целое (систему). Система – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство. Системный подход – направление методологии научного познания, в основе которого лежит рассмотрение объектов как систем в целостности выявленных в нём многообразных типов связей. К сожалению, быстро выяснилось, что для понимания и тем более управления современными эволюционными процессами в природе и обществе одного системного подхода мало. Надежды сейчас возлагаются на развитие идей холизма, как философии цельности.

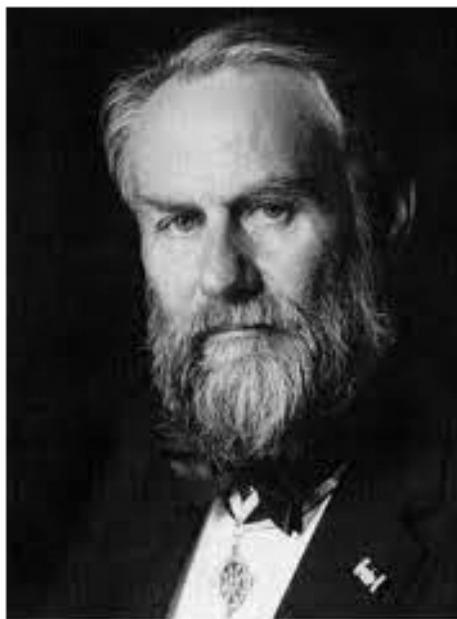
Между двумя крайностями: редуктивизмом и холизмом возникла промежуточная наука - синергетика, попытавшаяся установить связь между крайностями.



Ричард Фуллер (1895–1983) – автор термина синергетика: дизайнер, архитектор и изобретатель из США; не имея законченного образования, он получил множество почётных докторских научных степеней и полсотни международных премий. Основным его изобретением является лёгкий и прочный «геодезический купол» – пространственная стальная сетчатая оболочка из прямых стержней. Автор книг: "Синергетика: исследование геометрии мышления" (1975) и "Синергетика 2: дальнейшие исследования геометрии мышления" (1979), в которой высказана идея об упаковке шарами как основе организации пространства.

Под синергетикой Фуллер понимал геодезическую синергию, т.е. новую векторную геометрию, следствием которой и являются геодезические купола.

Определение термина «синергетика», близкое к современному пониманию (междисциплинарное научное направление, задачей которого является изучение природных



явлений и процессов на основе принципов самоорганизации систем), ввёл немецкий физик-теоретик Герман Хакен в 1977 г. в своей книге «Тайны природы. Синергетика – учение о взаимодействии». Именно он считается основателем науки синергетика. Согласно Хакену синергетика относится к направлению универсализма, занимающего промежуточное место между редукционизмом и холизмом. Синергетика не сводит поведение системы ни к её поведению на микроскопическом уровне (редукционизм), ни к её макроскопическому поведению (холизм), она пытается понять, как устанавливается и функционирует связь между этими двумя уровнями. Это удается ей благодаря понятию параметров порядка и принципу подчинения.

Хакен Герман (род. 12.07.1927) – немецкий физик-теоретик, основатель синергетики, директор Института теоретической физики и синергетики университета Штутгарда, автор книг: Синергетика, Тайны природы, Принципы работы головного мозга, Тайны восприятия, Квантополевая теория твёрдого тела, Лазерная светодинамика, Информация и самоорганизация и др.

1.2 Неравновесная термодинамика

Теоретическую поддержку синергизму в плане сбора разъятых анализом частей в единое целое, оказала термодинамика, точнее - неравновесная термодинамика, которую активно развивал Илья Пригожин. Именно неравновесная термодинамика нанесла первый мощный удар по механистическому мировоззрению (хотя и не привела к созданию синергетики).

Неравновесная термодинамика – раздел термодинамики, изучающий системы вне состояния термодинамического равновесия и необратимые процессы. Возникновение этой области знания связано главным образом с тем, что подавляющее большинство встречающихся в природе систем находятся вдали от термодинамического равновесия. Основоположник - Л. Онзагер.

Широкое распространение механистического мировоззрения совпало с расцветом машинной цивилизации. Наука трактовала вселенную как гигантский механизм. Лаплас утверждал: существо, способное охватить всю совокупность данных о состоянии Вселенной в

любой момент времени, способно не только точно предсказать будущее, но и до мельчайших подробностей восстановить прошлое. Необычайно быстрое развитие фабричной цивилизации с большими достижениями инженерной мысли подтвердило правильность представления о Вселенной как о гигантской машине. Однако начавшийся в 20-ом веке закат индустриальной цивилизации продемонстрировал ограниченность механистической модели реальности.

Следует отметить, что термодинамика ещё в начале XIX века поставила под сомнение вневременной характер механистической картины мира. «Если бы мир был гигантской машиной, — провозгласила термодинамика, — то такая машина неизбежно должна была бы остановиться, так как запас полезной энергии рано или поздно был бы исчерпан». Мировые часы не могли идти вечно, и время обрело новый смысл.

Вскоре последователи Дарвина выдвинули идею, противоположную мировоззрению равновесной термодинамики. По мнению дарвинистов, действительно возможно, что мировая машина, расходуя энергию и переходя из более организованного в менее организованное состояние, замедляет свой ход и даже останавливается, но биологические системы развиваются по восходящей линии, переходя из менее организованного в более организованное состояние. В начале XX в. Эйнштейн поместил наблюдателя внутрь системы. Мировая машина стала выглядеть по-разному в зависимости от того, где находится наблюдатель, но она оставалась детерминистической машиной. Хотя физики, работавшие в области квантовой механики, и в частности занимавшиеся соотношением неопределенности, предприняли массированное наступление на детерминистическую модель, механистическая парадигма устояла и поныне образует центральное ядро науки в целом. Задача синергетики - нанести очередной удар по детерминизму.



Пригожин Илья Романович (1917-2003) — бельгийский и американский физик и химик, нобелевский лауреат по химии (1977), основатель и директор Центра по изучению сложных квантовых систем (США); им доказано существование неравновесных термодинамических систем, которые, при определённых условиях, поглощая вещество и энергию из окружающего пространства, могут совершать качественный скачок к усложнению (диссипативные структуры). Причём такой скачок не предсказывают

классические законы термодинамики. Автор книг "Введение в термодинамику необратимых процессов", "Неравновесная статистическая механика", "Химическая термодинамика", "Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций", "Самоорганизация в неравновесных системах", "Порядок из хаоса", "Новый диалог человека с природой", "Познание сложного", "Молекулярная теория растворов", "Современная термодинамика" и др.

Развивая основы неравновесной термодинамики, Пригожин показал, что «универсальные законы» отнюдь не универсальны, а применимы лишь к локальным областям реальности. Его парадигма акцентирует внимание на таких аспектах, как разупорядоченность, неустойчивость, разнообразие, неравновесность, выражающиеся в нелинейных соотношениях, в которых малый сигнал на входе может вызвать сколь угодно сильный отклик на выходе, и темпоральности — повышенной чувствительности к ходу времени. Некоторые части Вселенной действительно могут действовать как механизмы. Таковы замкнутые системы, но они составляют лишь малую долю физической Вселенной. Большинство же систем, представляющих для нас интерес, открыты — они обмениваются энергией, веществом или информацией с окружающей средой. В мире господствуют не порядок, стабильность и равновесие, а, наоборот, неустойчивость и неравновесность, а порядок — лишь редкий частный случай.

Традиционная наука уделяет основное внимание устойчивости, порядку, однородности и равновесию. Она изучает главным образом замкнутые системы и линейные соотношения, в которых малый сигнал на входе вызывает равномерно во всей области определения малый отклик на выходе. Случайность не востребована в этой науке, оно — досадное недоразумение.

Школа Пригожина развивала классическую неравновесную термодинамику, основанную на фундаментальном предположении о локальном равновесии, которое предполагает, что равновесные термодинамические соотношения справедливы для термодинамических переменных, определенных в элементарном объеме. Считается, что рассматриваемая система может быть разделена в пространстве на множество элементарных ячеек, достаточно больших, чтобы рассматривать их как макроскопические системы, но и достаточно малых для того, чтобы состояние каждой из них было близко к состоянию равновесия. Данное предположение справедливо для широкого класса физических систем, что и определяет успех классической формулировки неравновесной термодинамики. Отметим, что предположение о локальном равновесии является грубым допущением для обширного класса систем и процессов. Примеры

включают в себя такие явления, как распространение ультразвука в газах, суспензии, растворы полимеров, гидродинамика фононов, ударные волны, разреженные газы и т.д. Способы преодоления этих недостатков мы рассмотрим в последующих лекциях данного курса.

Важным направлением неравновесной термодинамики является решение проблемы необратимости времени.

Напомним, что согласно традиционным представлениям, необратимость времени возникает не на фундаментальном уровне (где все элементарные процессы описываются обратимыми уравнениями Ньютона), а позднее – при усреднениях или учёте краевых и начальных условий. По мнению школы Пригожина, необратимость возникает на фундаментальном уровне вследствие конечной разрешающей способности прибора, с помощью которого производится наблюдение. Важно, что все системы содержат подсистемы, которые непрерывно флуктуируют. Иногда отдельная флуктуация или комбинация флуктуации может стать (в результате положительной обратной связи) настолько сильной, что существовавшая прежде организация не выдерживает и разрушается. В этот переломный момент (точка бифуркации) принципиально невозможно предсказать, в каком направлении будет происходить дальнейшее развитие: станет ли состояние системы хаотическим или она перейдёт на новый, более дифференцированный и более высокий уровень упорядоченности или организации (диссипативную структуру).

Бифуркация (*bifurcus* — «раздвоенный») — термин, употребляемый для обозначения всевозможных качественных перестроек или метаморфоз различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят. Изучением подобных систем занимается теория хаоса.

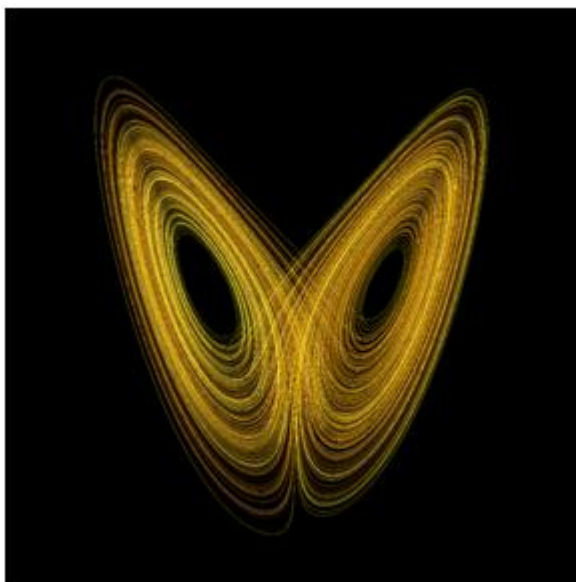


Рис.1 Фазовая диаграмма странного аттрактора Лоренца — пример нелинейной динамической системы.

Точка бифуркации — смена установившегося режима работы системы (термин из неравновесной термодинамики и синергетики), т.е. критическое состояние системы, при котором система становится неустойчивой относительно флуктуаций и возникает неопределенность: станет ли состояние системы хаотическим или она перейдет на новый, более дифференцированный и высокий уровень упорядоченности. Важный параметр в теории самоорганизации. Основным свойством точки бифуркации является непредсказуемость, т.к. обычно точка бифуркации имеет несколько веточек аттрактора (устойчивых режимов работы), по одному из которых пойдёт система. Однако заранее

невозможно предсказать, какой новый аттрактор займёт система. Кроме того, точка бифуркации носит кратковременный характер и разделяет более длительные устойчивые режимы системы.

Аттрактор (*attract* — привлекать, притягивать) — компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности. Аттрактором может являться притягивающая неподвижная точка (к примеру, в задаче о маятнике с трением о воздух), периодическая траектория (пример — самовозбуждающиеся колебания в контуре с положительной обратной связью), или некоторая ограниченная область с неустойчивыми траекториями внутри (как у странного аттрактора).

Теория бифуркаций динамических систем — это теория, которая изучает изменения качественной картины разбиения фазового пространства, в зависимости от изменения параметра (или нескольких параметров).

Динамическая система — математическая абстракция, предназначенная для описания и изучения эволюции систем во времени. Она может быть представлена как система, обладающая состоянием. При таком подходе, динамическая система описывает динамику некоторого процесса, а именно: процесс перехода системы из одного состояния в другое. Фазовое пространство системы — совокупность всех допустимых состояний динамической системы. Таким образом, динамическая система характеризуется своим начальным состоянием и законом, по которому система переходит из начального состояния в другое. Важнейшие понятия теории динамических систем — устойчивость (способность системы сколь угодно долго оставаться около положения равновесия или на заданном многообразии) и грубость (сохранение свойств при малых изменениях структуры динамической системы);

«грубая система — это такая, качественный характер движений которой не меняется при достаточно малом изменении параметров.

Диссипация энергии — переход части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и т. д.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном итоге — в тепло.

Диссипативные структуры — физические или химические структуры, для поддержания которых требуется больше энергии, чем для поддержания более простых структур, на смену которым они приходят. Это — устойчивые пространственно неоднородные структуры, возникающие в результате развития неустойчивостей в однородной неравновесной диссипативной среде.

Диссипативная система (*dissipatio* — «рассеиваю, разрушаю») — открытая система, оперирующая вдали от термодинамического равновесия, т.е. это устойчивое состояние, возникающее в неравновесной среде при условии диссипации (рассеивания) энергии, которая поступает извне. Диссипативная система — стационарная открытая система (неравновесная открытая система). Диссипативная система характеризуется спонтанным появлением сложной, зачастую хаотичной структуры. Отличительная особенность таких систем — несохранение объёма в фазовом пространстве, т.е. невыполнение теоремы Лиувилля. Примерами такой системы являются ячейки Бенара, лазеры, реакция Белоусова-Жаботинского и биологическая жизнь. Термин введён Пригожиным. Процесс «самоорганизации» происходит быстрее при наличии в системе внешних и внутренних «шумов», т.е. шумовые эффекты приводят к ускорению процесса «самоорганизации».

Идея Пригожина заключается в возможности спонтанного возникновения порядка и организации из беспорядка и хаоса в результате процесса самоорганизации. В состояниях, далеких от равновесия, происходят многие спонтанные, нередко весьма значительные перераспределения материи во времени и в пространстве. В таких состояниях очень слабые возмущения, или флуктуации, могут усиливаться до гигантских волн, разрушающих сложившуюся структуру, что объясняет всевозможные процессы качественного или резкого (не постепенного, не эволюционного) изменения. Эффекты, обнаруженные при изучении сильно неравновесных состояний и нелинейных процессов, в сочетании со сложными системами, наделёнными обратными связями, привели к созданию нового подхода, позволяющего установить связь фундаментальных наук с «периферийными» науками о жизни и понять некоторые социальные процессы.

В модели мира, построенной Ньютоном, любой момент времени в настоящем, прошлом и будущем был неотличим от любого другого момента времени. Планеты могли обращаться вокруг Солнца как вперед, так и назад по времени, ничего не изменяя в самих основах ньютоновской системы — идея обратимого времени.

После формулировки второго начала термодинамики внимание вновь было приковано к понятию времени. Дело в том, что согласно второму началу термодинамики запас энергии во Вселенной иссякает, а коль скоро мировая машина сбавляет обороты, неотвратно приближаясь к тепловой смерти, ни один момент времени не тождествен предшествующему. Ход событий во Вселенной невозможно повернуть вспять, дабы воспрепятствовать возрастанию энтропии. События в целом невозпроизводимы, а это означает, что время обладает направленностью, т.е. существует стрела времени. Вселенная стареет, время утрачивает обратимость и становится необратимым.

Второе начало термодинамики — физический принцип, накладывающий ограничение на направление процессов передачи тепла между телами. Оно запрещает вечные двигатели второго рода, показывая, что коэффициент полезного действия не может равняться единице, поскольку для кругового процесса температура холодильника не может равняться абсолютному нулю. Второе начало термодинамики является постулатом, не доказываемым в рамках термодинамики. Оно было создано на основе обобщения опытных фактов и получило многочисленные экспериментальные подтверждения.

Энтропия (поворот, превращение) — в естественных науках мера неупорядоченности системы, состоящей из многих элементов. В статистической физике — мера вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния; в теории информации — мера неопределённости какого-либо опыта (испытания), который может иметь разные исходы, а значит, и количество информации; в исторической науке, для экспликации феномена альтернативности истории (инвариантности и вариативности исторического процесса). Энтропия в информатике — степень неполноты, неопределённости знаний. Энтропия — мера неупорядоченности системы. Явление, обратное энтропии, именуется негэнтропией. Понятие энтропии впервые было введено Клаузиусом в термодинамике (1865).

Стрелы времени — метафорическое название эмпирических индикаторов направления времени. Понятие введено А.Эддингтоном. В проблеме необратимости используются три стрелы времени: термодинамическая стрела, указывающая то направление времени, в котором возрастает энтропия (беспорядок); космологическая стрела времени, в направлении

которой происходит расширение Вселенной, и психологическая стрела или направление времени, соответствующее нашему ощущению непреклонного хода времени, направление накопления поступающей информации. Известны и ещё три: стрела времени, связанная с тем "предпочтением", которое природа оказывает запаздывающим волнам перед опережающими, т.е. "волновая стрела"; стрела, проявляющаяся в процессе распада Ко-мезона - единственная анизотропия времени, которая наблюдается в физике элементарных частиц; квантовомеханическая стрела, связанная с процедурой измерения в квантовой механике.

Возникновение термодинамики привело естествознание к расколу в связи с проблемой времени. Более того, даже те, кто считал время необратимым, вскоре разделились на два лагеря. Если запас энергии в системе тает, то способность системы поддерживать организованные структуры ослабевает, поэтому высокоорганизованные структуры распадаются на менее организованные, которые в большей мере наделены случайными элементами. Однако именно организация наделяет систему присущим ей разнообразием. По мере того как иссякает запас энергии и возрастает энтропия, в системе нивелируются различия. Следовательно, второе начало термодинамики предсказывает всё более однородное будущее (прогноз с человеческой точки зрения пессимистический).

Обратимся теперь к проблемам, поднятым Дарвином и его последователями. Экспериментально доказано, что вопреки предсказаниям термодинамики, эволюция не приводит к понижению уровня организации и обеднению разнообразия форм. Наоборот, эволюция развивается в противоположном направлении: от простого к сложному, от низших форм жизни к высшим, от недифференцированных структур к дифференцированным. С человеческой точки зрения, такой прогноз весьма оптимистичен. Старая, Вселенная обретает все более тонкую организацию. Со временем уровень организации Вселенной неуклонно повышается.

Пригожин попытался примирить термодинамиков с дарвинистами: по его мнению, стрела времени проявляет себя лишь в сочетании со случайностью. Только в том случае, когда система ведёт себя достаточно случайным образом, в её описании возникает различие между прошлым и будущим и, следовательно, необратимость.

В механистической, науке исходным рубежом событий служат начальные условия. Атомы или частицы движутся по мировым линиям, или траекториям. Задав начальные условия, мы можем выпустить из исходной мировой точки траекторию как назад по времени — в прошлое, так и вперед по времени — в будущее. С совершенно иной ситуацией мы сталкиваемся при рассмотрении некоторых химических реакций, например в случае, когда две жидкости, слитые в один сосуд, диффундируют до тех пор, пока смесь не станет однородной, или гомогенной. Обратная диффузия, которая приводила к разделению смеси на исходные компоненты, никогда не наблюдается. В любой момент времени смесь отличается от той, которая была в сосуде в предыдущий момент и будет в следующий. Весь процесс ориентирован во времени.

В классической науке такие направленные во времени процессы считались аномалиями, курьезами, обязанными своим происхождением выбору весьма маловероятных начальных условий. Однако оказалось, что такого рода нестационарные односторонне направленные во времени процессы отнюдь не являются отклонениями от мира с обратимым временем. Справедливо обратное утверждение: редким явлением следует считать обратимое время, связанное с замкнутыми системами. Связанные с открытостью системы и случайностью, необратимые процессы порождают высокие уровни организации, например диссипативные структуры.

Энтропия — не просто безостановочное соскальзывание системы к состоянию, лишённому какой бы то ни было организации. При определенных условиях энтропия становится прародительницей порядка.

Подход школы Пригожина к проблеме времени — синтез, охватывающий наряду с обратимым и необратимое время и показывающий взаимосвязь того и другого времени не только на уровне макроскопических, но и на уровне микроскопических и субмикроскопических явлений. Подчеркивая, что необратимое время - характерная особенность большей части Вселенной, Пригожин подрывает самые основы классической динамики. Выбор между обратимостью и необратимостью не является выбором одной из двух равноправных альтернатив. Обратимость присуща замкнутым системам, необратимость — всей остальной части Вселенной.

Утверждение, что при неравновесных условиях энтропия может производить не деградацию, а порядок, организацию и, в конечном счёте, жизнь, противоречит традиционным представлениям классической термодинамики. Энтропия, как источник организации, утрачивает характер жесткой альтернативы, возникающей перед системами в процессе эволюции: в то время как одни системы вырождаются, другие развиваются по восходящей линии и достигают более высокого уровня организации. Такой объединяющий, а не взаимоисключающий подход позволяет биологии и физике сосуществовать, вместо того чтобы находиться в противоборстве.

Еще один синтез, достигнутый неравновесной термодинамикой — установление нового отношения между случайностью и необходимостью. В Ветхом завете утверждается, что всё происходящее в этом мире заранее предустановлено. Однако оказалось, в реальном мире

случайность и предопределённость действуют попеременно. Сейчас стирающий всякие различия, обезличивающий подход старого детерминизма сменился подчеркивающим различия эволюционным подходом, основанным на использовании детерминаций. Учёные признали сосуществование случайного и необходимого, связанных между собой отношением не подчинения, а равноправного партнерства во Вселенной, одновременно организующего и дезорганизующего себя. В окружающем нас мире действуют и детерминизм, и случайность, причём необходимость и случайность великолепно согласуются, дополняя друг друга.

Согласно теории изменения, проистекающей из понятия диссипативной структуры, когда на систему, находящуюся в сильно неравновесном состоянии, действуют, угрожая её структуре, флуктуации, наступает критический момент — система достигает точки бифуркации. В точке бифуркации принципиально невозможно предсказать, в какое состояние перейдет система. Случайность подталкивает то, что остаётся от системы, на новый путь развития, а после того как путь (один из многих возможных) выбран, вновь вступает в силу детерминизм — и так до следующей точки бифуркации.

Строгие методы моделирования качественных изменений позволяют по-новому взглянуть на понятие катастрофы (революции). Знание, каким образом иерархия неустойчивостей порождает структурные изменения, проясняет теорию организации. Пригожину принадлежит оригинальная трактовка некоторых психологических процессов, например инновационной деятельности, в которой он усматривал связь с «несредним» поведением, аналогичным возникающему в неравновесных условиях. Его теория полезна для изучения коллективного поведения. Она предостерегает против принятия генетических или социобиологических объяснений малопонятных сторон социального поведения. Многое из того, что обычно относят за счёт действия тайных биологических пружин, в действительности порождается не «эгоистичными» детерминистскими генами, а социальными взаимодействиями в неравновесных условиях.

Синергетика потребовала создание нового математического аппарата, отличного от традиционных методов математической физики. Если ранее полагали, что простые универсальные законы существуют, познаваемы, а их использование будет исключительно полезным; как бы ни были сложны уравнения, следующие из этих законов, сколько бы их ни было, их удастся решить. Детерминизм задавал уверенность в том, что можно, решив уравнения, заглянуть как угодно далеко в будущее и в прошлое. Очередную поддержку такой подход получил с внедрением компьютеров. Мощная вычислительная техника позволила решать системы из тысяч уравнений. Однако революционных прорывов не случилось, к тому же оказалось, что современная математика позволяет решить далеко не все задачи. Например, в теории динамического хаоса — важной области нелинейной науки — было показано, что даже для довольно простых детерминированных систем (в которых будущее однозначно определяется настоящим) существует горизонт прогноза, за который нельзя, какую бы мощную вычислительную технику и какие бы эффективные алгоритмы исследователи ни использовали. Кроме того, теория самоорганизованной критичности показывает, что для многих сложных иерархических систем типичны редкие катастрофические события. Поэтому определить необходимые параметры, опираясь на предысторию, для таких объектов достаточно сложно.

Системный анализ в свое время позволил продвинуться в изучении сложных систем. Но он хоть и системный, но анализ, т.е. способ выделения отдельных свойств и качеств. В то же время остро ощущается необходимость в системном, целостном представлении об объекте. С этой целью был создан системный синтез — составная часть синергетики. Он позволил прояснить каким образом происходит процесс самоорганизации в природе, и можно ли его как-то скопировать для развития компьютерных систем. Системный синтез облегчает выбор стратегии развития, позволяет перейти от баз данных к базам знаний, осуществить самоорганизацию в пространстве знаний и навыков.

1.3 Синергетика и самоорганизующиеся системы

Под синергизмом понимают совместное действие для достижения общей цели, основанное на принципе, что целое представляет нечто большее, чем сумма его частей. Синергизм означает превышение совокупным результатом суммы слагающих его факторов. Синергический эффект бывает как положительным ($2+2>4$), так и отрицательным, вредным ($2+2<4$). В медицине синергизм — объединенное действие двух лекарственных препаратов, которое оказывается сильнее, чем сумма действий этих двух лекарств, при их раздельном использовании. В политике синергизм — комбинированное воздействие на политические, социальные, экономические организации, институты, системы, при котором суммированный эффект превышает действие, совершаемое каждым компонентом в отдельности. Примерами синергизма являются: соединение двух и более кусков радиоактивного материала, при превышении критической массы дают выделение энергии, превосходящее излучение энергии простого суммирования отдельных кусков; знания и усилия нескольких человек можно организовывать таким образом, что они взаимно усиливаются;

прибыль после слияния двух компаний может превосходить сумму прибылей этих компаний до объединения; обмен идеями и т.п.

На синергизме и синергетических эффектах строится наука синергетика.

Синергетика – это теория самоорганизации в системах различной природы. Эта наука имеет дело с явлениями и процессами, в результате которых у системы – у целого – могут появиться свойства, которыми не обладает ни одна из частей. Поскольку речь идёт о выявлении и использовании общих закономерностей в различных областях, то этот подход предполагает междисциплинарность, которая означает сотрудничество в разработке синергетики представителей различных научных дисциплин.

Самоорганизующаяся система – динамическая адаптивная система, в которой запоминание информации (накопление опыта) выражается в изменении структуры системы.

Адаптивная система (самоприспосабливающаяся система) – система, автоматически изменяющая данные алгоритма своего функционирования и (иногда) свою структуру с целью сохранения или достижения оптимального состояния при изменении внешних условий.

Саморазвивающаяся система – динамическая система, самостоятельно выбирающая цели своего развития и критерии их достижения; изменяет свои параметры, структуру и другие характеристики в заданном направлении.

Обычно под синергетикой понимают энергию совместного действия. Это – междисциплинарное направление, которое занимается изучением систем, состоящих из многих подсистем различной природы (электронов, атомов, молекул, клеток, нейронов, механических элементов, органов животных, людей, транспортных средств и т.п.), и выявлением того, каким образом взаимодействие таких подсистем приводит к возникновению пространственных, временных или пространственно-временных структур в макроскопическом масштабе. Синергетика представляет собой новую обобщающую науку, изучающую основные законы самоорганизации сложных систем. В неё входят такие области, как нелинейная динамика, хаос, фракталы, катастрофы, бифуркации, волны, солитоны, полевые эффекты и т.д. Синергетика предоставляет язык, на котором могут общаться математики, физики, химии, биологи, психологи и др.

Синергетика изучает многовариантное и неоднозначное поведение многоэлементных структур, которые не деградируют к стандартному для замкнутых систем усреднению термодинамического типа, а развиваются вследствие открытости, притока энергии извне, нелинейности внутренних процессов, появления особых режимов с обострением и наличия более одного устойчивого состояния. К этим системам неприменимы ни второе начало термодинамики, ни теорема Пригожина о минимуме скорости производства энтропии; в них происходит образование новых структур и систем, в том числе и более сложных, чем исходные. В отдельных случаях образование новых структур имеет регулярный, волновой характер, и тогда они называются автоволновыми процессами.

К интересам синергетики относят явления, возникающие от совместного действия нескольких разных факторов, в то время, как каждый фактор в отдельности к этому явлению не приводит. Синергетику также можно определить как науку о самоорганизации, под которой понимают самопроизвольное усложнение формы, или структуры системы при медленном и плавном изменении её параметров (пример – ячейки Бенара). Иногда под синергетикой понимают науку о неожиданных явлениях, поскольку любое качественное изменение состояния системы производит впечатление неожиданного (хотя причина известна – неустойчивость). Анализ, вскрывающий причину неожиданного явления, и составляет предмет синергетики. Математический аппарат, используемый в синергетике, – теория динамических систем.

Как известно, природные системы устойчивы относительно внешних воздействий, обладают свойствами самообновляемости, самоусложнению, росту, развитию. Они характеризуются согласованностью всех составных частей. Напротив, для техногенных систем свойственны резкие ухудшения функционирования даже при сравнительно небольшом изменении внешних воздействий или ошибках в управлении. Поэтому желательно использовать опыт природы в деятельности человека. Отсюда вытекает одна из задач синергетики – выяснение законов возникновения упорядоченности, её развития и самоусложнения. Проблема оптимальной упорядоченности и организации важна при решении энергетических, экологических и других глобальных проблем.

Математический аппарат синергетики достаточно сложен, но всё же недостаточен для решения задач, стоящих перед этой наукой. Как известно, традиционная математическая физика использует линейные дифференциальные уравнения в частных производных, т.е. уравнений с неизвестными в первой степени. Системы таких уравнений описывают процессы, которые с увеличением интенсивности внешних воздействий претерпевают только количественные изменения, а новых качеств не возникает. Они применяются в квантовой механике, электродинамике, теории волн, сопротивлении материалов, теплопроводности и диффузии. Однако существуют явления, которые при интенсивном внешнем воздействии приобретают новые качества и начинают протекать по изменённому закону. Описываются они нелинейными уравнениями, решение которых аналитическими методами невозможно, а численными –

затруднительно. Поэтому одна из серьёзных задач синергетики — разработка адекватного математического аппарата, способного описывать эволюцию сложных систем.

Достаточно важно, что синергетика опирается на методы, применимые к различным наукам и изучает многокомпонентные системы безотносительно к их природе. Кроме того, она занимается многими областями, оказавшимися за пределами традиционных наук. Например, термодинамика и теория информации изучают статику, тогда как для синергетики основной интерес представляет динамика. Неравновесные фазовые переходы синергетических систем, включая колебания, пространственно-временные структуры и хаос, отличаются несравненно большим разнообразием, чем фазовые переходы систем, находящихся в состоянии теплового равновесия. В отличие от кибернетики, занимающейся разработкой алгоритмов и методов, позволяющих управлять системой так, чтобы та функционировала заданным образом, синергетика изучает самоорганизацию системы при произвольном изменении управляющих параметров. В отличие от теории динамических систем, которая игнорирует флуктуации в точках бифуркации, синергетика изучает стохастическую динамику во всей её полноте в подпространстве зависящих от времени управляющих параметров.

Важная особенность синергетических систем состоит в том, что ими можно управлять извне, изменяя действующие на системы факторы. Например, скорость роста клеток можно регулировать, обрабатывая клетки различными химическими веществами. Временная эволюция синергетических систем зависит от причин, которые не могут быть предсказаны с абсолютной точностью. Непредсказуемость поведения таких систем связана не только с неполнотой информации о состоянии из многочисленных подсистем и квантовыми флуктуациями, но и с тем, что их эволюция очень чувствительна к начальным условиям. Даже небольшое различие в начальных условиях коренным образом изменяет последующую эволюцию системы. В процессе временной эволюции синергетическая система, находящаяся в одном состоянии, переходит в новое состояние, при этом не все параметры состояния имеют одинаковое значение, и одни параметры состояния можно выразить через другие, в результате чего количество независимых переменных уменьшается. Синергетика - наука, направленная на согласованность взаимодействия частей при образовании структуры как единого целого.

Теория синергетики в основном состоит из нескольких частей:

1. Статистическая физика в приложении к описанию существенно неравновесных процессов, в рамках которой создаются кинетические модели, определяются параметры, необходимые для её описания, выявляются корреляции, крупномасштабные флуктуации, устанавливаются закономерности перехода в состояние равновесия.

2. Термодинамика открытых систем в приложении к изучению стационарных состояний, сохраняющих устойчивость в определённом диапазоне внешних условий, поиск условий самоорганизации, т.е. возникновения упорядоченных структур из неупорядоченных при диссипации энергии.

3. Теория динамического хаоса, исследующая сверхсложную, скрытую упорядоченность поведения наблюдаемой системы; например, явление турбулентности.

4. Теория катастроф, базирующаяся на нелинейных дифференциальных уравнениях, определяющих состояния далёкие от равновесия и зависящие от входящих параметров. С её помощью определяются границы устойчивости и изменения структуры состояний. Исследует поведение самоорганизующихся систем в терминах бифуркации, аттрактора, неустойчивости.

5. Теория фракталов, занимающаяся изучением сложных самоподобных структур, часто возникающих в результате самоорганизации; сам процесс самоорганизации также может быть фрактальным.

Математический аппарат синергетики скомбинирован из разных отраслей теоретической физики: нелинейной неравновесной термодинамики, теории катастроф, теории групп, тензорного анализа, дифференциальной топологии неравновесной статистической физики. Методология синергетики распространяется на многие науки: от физики твёрдого тела и лазерной техники и до биофизики и проблем искусственного интеллекта. Известны такие разделы синергетики, как лингвистическая синергетика и прогностика, семантическая синергетика и др.

Феномен появления упорядоченных структур трактуется синергетикой как всеобщий механизм наблюдаемого в природе направления эволюции: от элементарного и примитивного — к сложносоставному и более совершенному. С мировоззренческой точки зрения синергетику позиционируют как универсальную теорию эволюции, дающую единую основу для описания механизмов возникновения любых новаций, подобно тому, как некогда кибернетика определялась, как «универсальная теория управления», одинаково пригодная для описания любых операций регулирования и оптимизации: в природе, в технике, в обществе и т. д. Однако время показало, что всеобщий кибернетический подход оправдал далеко не все возлагавшиеся на него надежды. Аналогичным образом, и расширительное толкование применимости методов синергетики также подвергается критике.

Дело в том, что область исследований синергетики чётко не определена и вряд ли может быть ограничена, так как её интересы распространяются на все отрасли естествознания. Общим

признаком является рассмотрение динамики любых необратимых процессов и возникновения принципиальных новаций.

Синергетика находится на начальной стадии развития: неизвестно - станет ли она законченной наукой или постепенно свернётся, как это произошло с кибернетикой. Сейчас этим термином пользуются далеко не все учёные. Так, представители школы Пригожина, усилиями которых разрабатывалась математическая теория поведения диссипативных структур, и создавались мировоззренческие основания теории самоорганизации, как парадигмы универсального эволюционизма, никогда не используют термин «синергетика». О коллективных явлениях они не вспоминают, а предпочитают называть разработанную ими методологию «теорией диссипативных структур» или просто "неравновесной термодинамикой", подчёркивая преемственность своей школы пионерским работам Ларса Онзагера в области необратимых химических реакций.

Противники создания синергетики, как новой науки указывают на то, что неологизмы от слова "синергена" уже неоднократно использовались. Кроме того, термин синергетика имеет два разных значения: содействие и сотрудничество, что вредно при введении специальной науки. К тому же, многое из того, что стали относить к синергетике, давно принадлежит системному анализу.

Известно, что между поведением совершенно различных систем, изучаемых различными науками, существуют аналогии. Изучаемые синергетикой системы как раз и относятся к компетенции различных наук, причём одновременно другие науки привносят в синергетику свои идеи. В настоящее время назрела острая необходимость в создании особой науки, которая объединила бы науки, интересующиеся самоорганизацией систем. Но станет ли такой наукой синергетика? Это вопрос...

Синергетика претендует на то, что в её руках есть набор методов, универсально полезных при изучении самых разнообразных явлений самоорганизации. Более того, синергетики уверены в том, что они нацелены на изучение самоорганизации и только её, тогда как все остальные дисциплины рассматривают этот феномен лишь в ряду других явлений, относящихся к их предмету. Но если основной предмет синергизма - самоорганизация, то может быть и следует называть новую науку наукой о самоорганизации? Впрочем, возможно, что когда разовьётся теория самоорганизации, то её и будут называть синергетикой. Просто ради краткости.

Не менее сильную оппозицию синергетика встретила в среде физиков, химиков, биологов, занимающихся автоволновыми процессами. Учёные, работающие в этих областях, утверждают, что многие явления, которые синергетика стремится описать, давно известны, и описаны, в частности в теории автоволновых процессов. И что само введение новой терминологии лишь затемняет дело. Сторонников синергетики обвиняют в словесной эквилибристике, в попытках эксплуатировать модные тенденции к синтезу любой ценой.

Тем не менее, идеи Хакена были подхвачены с поразительной быстротой. Связано это с тем, что у многих учёных возник страх перед углубляющейся специализацией. Раздались призывы унифицировать язык науки. Поэтому лозунг синтеза знаний о природе, и призывы к кардинальному синтезу науки культуры, мгновенно подхватывались. Но после первых восторгов встал вопрос: а есть ли фундамент для нового объединения? И если есть, то насколько он основательный?

Синергетика, как наука, основывается на том, что синергетический подход хорошо работает при описании процессов, имеющих кооперативный, самосогласованный, "синергетический" характер. Важным успехом этой науки явился синтез в рамках синергетического подхода теории диссипативных структур (создана вне синергизма), с теорией фазовых переходов и квантовой генерации. В синергетическом подходе реализована дополнительность одних методов и теорий по отношению к другим. Например, в рамках исследования диссипативных структур оказалось, что макродинамические методы анализа системы и термодинамические способы ограничивают область применения друг друга.

В настоящее время происходит становление методологии новой науки. Удастся ли ей утвердиться в своих правах, покажет время.

При рассмотрении перспектив развития синергетики можно ожидать, что эта наука окажется полезной при дальнейшем развитии концепции устойчивого развития; решения проблемы гонки вооружений; разработке и внедрения новых технологий, например, глобальной системы телекоммуникаций, микромашин, нанотехнологий (создание микросхем, новых катализаторов и выращивание отдельных органов человека; освоение процессов самоорганизации и самоформирования различных структур на этих масштабах); в создании новых поколений вычислительных комплексов, в том числе - квантовых компьютеров; в развитии социальных организмов в постиндустриальную эпоху; в понимании возможности человека воспринимать информацию с помощью своих органов чувств и воздействовать на окружающее; в описании особенностей экономических кризисов, способов их предотвращения и путей выхода из них; в построении на основе методов и представлений нелинейной динамики модели исторических

процессов; в анализе системных механизмов демографических процессов; в математической психологии.

Ожидается, что синергетика окажется полезной в сфере изучения структур, связанных с возникновением упорядоченности в пространстве скоростей. Они активно исследуются в связи с задачами физики плазмы, с проектами управляемого термоядерного синтеза, астрофизическими проблемами, различными плазменными технологиями. Анализ этих задач требует кинетического описания вещества, совершенных алгоритмов, суперкомпьютеров. Лазеры, в которых выходящее излучение каким-то образом подаётся на вход, служат объектом моделирования и экспериментального исследования. Это моделирование требует привлечения одного из самых сложных объектов современной прикладной математики – дифференциальных уравнений с запаздыванием. Классические уравнения с запаздыванием, например уравнение Хатчинсона, при большом запаздывании трудно исследовать численно. Поэтому на передний план выходят асимптотические подходы, на которые можно опираться, исследуя модели. Возникла положительная обратная связь – оптоэлектроника; новые технологии требуют нового математического аппарата, а последний позволяет обнаруживать новые режимы генерации, которые находят практическое применение.

Одной из основных технологий постиндустриальной эпохи становятся методики прогноза. Прорыв в этой области связан с теорией самоорганизованной критичности, позволившей с единой точки зрения взглянуть на сложные системы, в которых возможны редкие катастрофические события. Это касается землетрясений и биржевых крахов, наводнений и инцидентов с хранением ядерного оружия, многих типов техногенных аварий и утечки конфиденциальной информации.

Перспективы синергетики связывают с возможностью обеспечения целеполагания, планирования, т.е. проектирования будущего.

Возможно, уже в этом веке возникнет новая мета-наука, объединяющая гуманитарные и естественнонаучные знания, и может быть это будет синергетика.

Лекция 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Синергетика — короткое название теории сложных систем, в первую очередь — динамических (упорядоченных или в той или иной мере хаотических).

В мире есть порядок и упорядоченные структуры, есть беспорядок и случайные явления, есть хаос, т.е. беспорядок в абсолюте. Есть и детерминированный хаос, т.е. беспорядок, в той или иной мере упорядоченный, со случайными процессами, которые частично предопределены и даже закономерны.

Интерес к динамическому хаосу связан с тем, что это явление встречается в нелинейных системах самой различной физической природы и может найти ряд важных практических приложений. Хаотические колебания могут возникать в строго детерминированных системах, но обладают рядом свойств, делающих их похожими на случайные колебания. Образуя новый класс сложных, широкополосных сигналов, легко реализуемых в электронных схемах, они претендуют в радиотехнике на роль переносчиков информации для систем скрытной связи.

В этой лекции мы на качественном уровне рассмотрим особенности детерминированного хаоса применительно к динамическим (диссипативным) системам.

2.1 Порядок и хаос

В природе и обществе непрерывно происходит борьба порядка и хаоса.

Порядок — гармоничное, ожидаемое, предсказуемое состояние или расположение чего-либо.

Упорядоченность — характеристика структуры, обозначающая степень взаимной согласованности её элементов.

В этой лекции порядок (детерминизм) будет означать возможность однозначного предсказания состояния системы в любой момент времени, исходя из начальных условий.

Хаос — аperiodическое детерминированное поведение динамической системы, очень чувствительное к начальным условиям. Бесконечно малое возмущение граничных условий для хаотической динамической системы приводит к конечному изменению траектории в фазовом пространстве

Фазовая траектория — траектория перемещения точки, отображающей состояние динамической системы, в фазовом пространстве.

Мы будем считать, что хаос — предельный случай беспорядка. Далее хаос для нас будет означать полную непредсказуемость системы, нерегулярность движения, неповторяемость траекторий.

Таким образом, порядок — это чёткая, подчиняющаяся определенному порядку смена событий в окружающем нас пространстве и во времени. В теории динамических систем под порядком понимают детерминированный процесс, т.е. процесс, каждый шаг которого предопределен некоторыми закономерностями, которые хорошо известны, так что со 100% вероятностью предсказать эволюцию системы.

Хаотический процесс случаен — управлять им нельзя. Предсказать развитие такого процесса невозможно, можно лишь ставить вопрос о вероятности того или иного варианта его эволюции. Примерами хаотических процессов являются: метание шарика в рулетке, броуновское движение частицы под случайными ударами «соседей», беспорядочные вихри турбулентности, образующиеся при течении жидкости с достаточно большой скоростью, поезда, идущие, когда хотят и куда хотят.

Важным видом хаоса является белый шум (шумовой хаос или дробный шум).

Шум — беспорядочные колебания различной физической природы, отличающиеся сложностью временной и спектральной структуры. Может быть стационарным и нестационарным.

Белый шум — стационарный шум, спектральные составляющие которого равномерно распределены по всему диапазону задействованных частот. Примером белого шума является шум близкого водопада. Название получил от белого света, содержащего электромагнитные волны частот всего видимого диапазона электромагнитного излучения.

Следует различать случайные и хаотические движения. Первый термин относится к ситуациям, когда действующие силы неизвестны или известны только некоторые статистические характеристики параметров. Термин «хаотический» применяется в тех детерминированных задачах, где отсутствуют случайные или непредсказуемые силы или параметры, и траектории движений которых обнаруживают сильную зависимость от начальных условий.

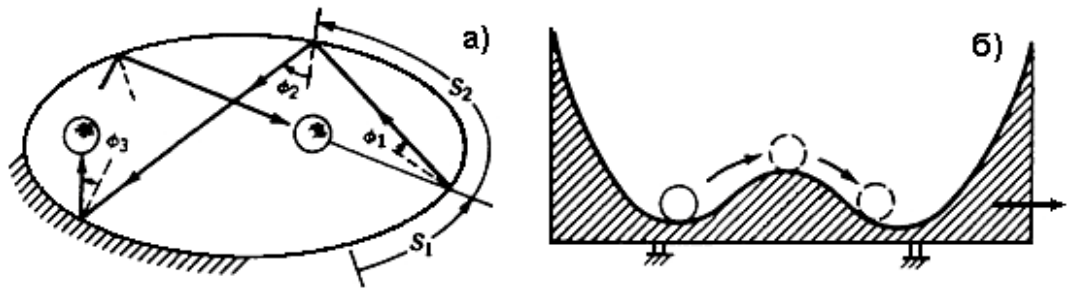


Рис. 2. а — Движение шарика после нескольких соударений с бортами бильярдного стола эллиптической формы. Это движение можно описать дискретным набором чисел (s_i, j_i) , называемым отображением; **б** — движение частицы в паре потенциальных ям под действием периодического возбуждения. При определённых условиях частица периодически перескакивает слева (L) направо (R) и обратно: LRLR... или LLRLLR... и т.д. При других условиях перескоки хаотичны, т.е. последовательность символов L и R неупорядочена.

Классическими примерами хаоса являются азартные игры. Однако азартные игры - недетерминированный процесс, поскольку в них много случайностей. Хотя теория хаотических динамических систем и использует методы теории вероятности, но не является частью математической статистики. Хаос — некоторый случайный процесс, наблюдаемый в динамических системах, не подверженных влиянию шумов или каких-либо случайных сил.

Оказалось, что многие вполне детерминированные системы могут обладать хаотическим непредсказуемым поведением. "Случайный" процесс оказывается решением одного или нескольких простых, дифференциальных уравнений. Отсюда возникает проблема непредсказуемости долговременного поведения детерминированных хаотических систем и необходимости использования статистического описания (однако вне рамок математической статистики!).

На рис.2 показаны два примера механических систем, динамика которых хаотична. Первый пример - эксперимент с шаром, который ударяется и отскакивает от сторон эллиптического бильярдного стола. Если соударения упругие, то энергия сохраняется, но для эллиптических столов шар блуждает по столу, никогда не повторяя свою траекторию. Другой эксперимент - шар в потенциале, состоящем из двух ям. Если стол, на котором стоит прибор не колеблется, то такой шар имеет два состояния равновесия. Однако, если стол колеблется, совершая периодическое движение достаточно большой амплитуды, шар начинает беспорядочно перепрыгивать из одной ямы в другую; таким образом, периодическое воздействие на оно частоте вызывает неупорядоченный отклик с широким спектром частот. Возбуждение непрерывного спектра частот, расположенного ниже частоты воздействия, является одной их особенностей хаотических колебаний (рис. 3).

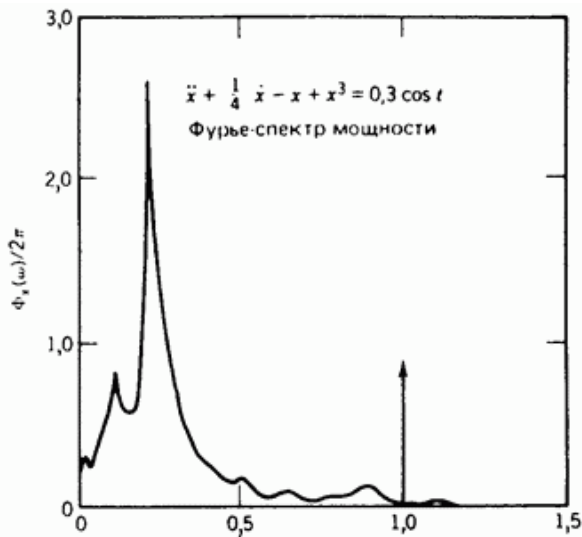


Рис. 3. Спектр мощности (преобразование Фурье) хаотического движения в паре потенциальных ям.

Другое свойство хаотических систем - потеря информации о начальных условиях. Пусть координата измерена с точностью Δx , а скорость - с точностью Δv . Разделим плоскость координата-скорость (фазовую плоскость) на ячейки площадью

$\Delta x \Delta v$ (рис. 4). Если начальные условия заданы точно, то система находится где-то в заштрихованной области на фазовой плоскости. Но если система хаотична, то эта неопределённость со временем растёт, увеличиваясь до размера $N(t)$ ячеек (рис. 2б). Увеличение неопределённости, описываемое законом

$$N \approx N_0 e^{ht}, \quad (1)$$

является вторым характерным свойством хаотических систем. Постоянная h связана с энтропией (теория информации) и показателем Ляпунова (мера скорости разбегания близких траекторий системы).

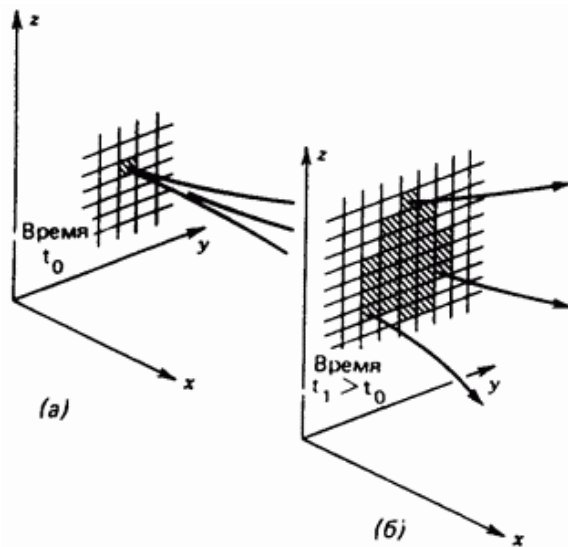


Рис. 4. Иллюстрация увеличения неопределённости, или потери информации в динамической системе. Заштрихованный квадрат в момент времени $t=t_0$ показывает неопределённость знания начальных условий.

Между крайностями: порядком и хаосом располагается обширная область детерминированного (в какой-то мере упорядоченного) хаоса. *Детерминированный хаос* относится к ограниченной случайности, им можно управлять и даже прогнозировать на короткие промежутки времени вперёд.

Напомним, что принцип детерминизма гласит: если мы знаем текущее состояние какой-либо системы и законы её эволюции, то мы можем предсказать будущее поведение этой системы. Пример: классическая ньютоновская

«механическая» Вселенная, в которой положение планет походит на движение стрелок многострелочных часов. Здесь будущее предсказывается однозначно. Однако, в природе есть системы, полностью детерминистические в ньютоновском смысле, но их будущее в определённом интервале параметров принципиально нельзя рассчитать. Это явление известно как *детерминированный хаос*, или *теория хаоса*. Далее под детерминированным хаосом будем полагать систему, которая без шумов и случайностей ведёт себя хаотически.

Далее мы будем рассматривать ситуации, когда случайный процесс становится детерминированным, а в детерминированном процессе обнаруживаются элементы случайного, хаотического поведения.

Примерами подобных систем являются атмосфера, турбулентные потоки, некоторые виды аритмий сердца, биологические популяции, общество, как система коммуникаций и его подсистемы: экономические, политические и другие социальные системы, частично кристаллические полимеры и др.

Ещё пример детерминистического хаоса - вода горных потоков. Если бросить в эту речку два листика, один за другим, то ниже по течению они, вероятнее всего, окажутся далеко друг от друга. В системе, подобной этой, небольшое различие в начальных условиях (положение листиков) приводит к большому расхождению на выходе. Можем мы предсказать результат бильярдной игры? Нет! Даже задача с бильярдным шаром, отскакивающим от бортов на совершенно ровном столе, растворяется в неопределённости вследствие неточностей в измерении угла, под которым шар приближается к борту в самом начале.

Поведение детерминированной системы кажется случайным, хотя оно определяется детерминированными законами.

Причиной появления хаоса является неустойчивость (чувствительность) по отношению к начальным условиям и параметрам: малое изменение начального условия со временем приводит к сколь угодно большому изменению динамики системы (рис.). Так как начальное состояние физической системы не может быть задано абсолютно точно (например, из-за ограничений измерительных инструментов), то всегда необходимо рассматривать некоторую (пусть и очень маленькую) область начальных условий. При движении в ограниченной области пространства экспоненциальная расходямость с течением времени близких орбит приводит к перемешиванию начальных точек по всей области. После такого перемешивания бессмысленно говорить о координате частицы, но можно найти вероятность её нахождения в некоторой точке.

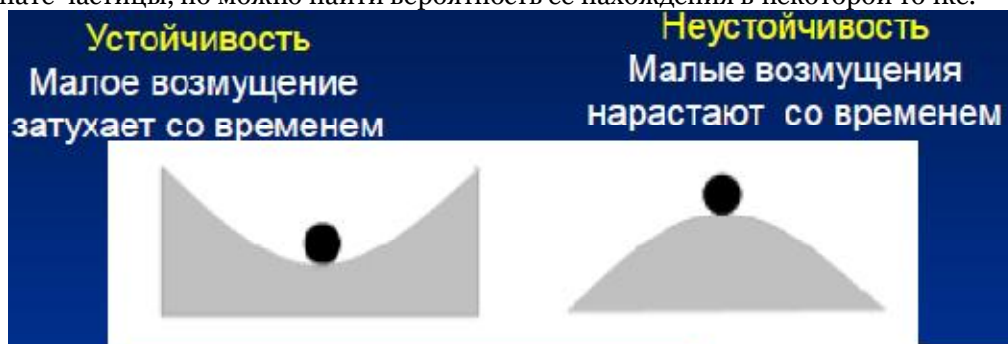


Рис. 5. Устойчивые и неустойчивые системы.

Примером неустойчивой динамической системы является двумерный газ Генриха Лоренца (начало XX века). Она состоит из кружков одинакового радиуса — рассеивателей, случайным образом разбросанных по плоскости, и материальной точки (частицы), которая движется с постоянной скоростью между ними, испытывая каждый раз зеркальное отражение при столкновении. В неустойчивости такой системы можно убедиться, рассмотрев две близких траектории частицы, выходящих из одной точки. Из представленного рис. 6 видно, что уже после двух актов рассеяния угол между траекториями, первоначально меньший 1° , становится больше, чем $\pi/2$. Таким образом, первоначально близкие траектории очень быстро расходятся. Иногда в таких случаях говорят, что происходит "забывание" частицей начальных условий. (Здесь под термином "забывание" имеется в виду, что при малом варьировании начальных условий статистические свойства траекторий никак не меняются). При малых временах предсказания поведения системы еще возможны, однако, начиная с некоторого времени приходится использовать статистический подход.

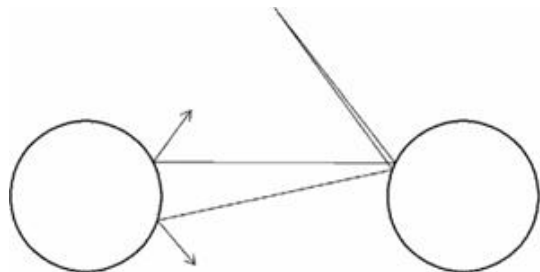


Рис. 6. "Потеря памяти" и расходимость близких траекторий в результате неустойчивости движения в двумерном газе Г.Лоренца.

Важным обстоятельством является тот факт, что степень упорядоченности хаоса довольно часто можно рассчитать. Меру даёт геометрия фракталов. Этим мы займёмся в последующих лекциях данного курса.

2.2 Виды сложных систем

Как известно, задача предсказания поведения изучаемой системы во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии сводится к нахождению некоторого закона, который позволяет по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени в некоторой точке пространства определить его будущее в любой следующий момент времени. В зависимости от степени сложности самого объекта этот закон может быть детерминированным или вероятностным, может описывать эволюцию объекта только во времени, только в пространстве, а может описывать пространственно-временную эволюцию.

Существуют различные типы систем.

Консервативная система — физическая система, работа консервативных сил которой равна нулю и для которой имеет место закон сохранения механической энергии, т. е. сумма кинетической энергии и потенциальной энергии системы постоянна. Объём в фазовом пространстве постоянен. Примерами консервативной системы служит солнечная система и колеблющийся маятник (если пренебречь трением в оси подвеса и сопротивлением воздуха).

Динамическая система — математическая абстракция, предназначенная для описания и изучения эволюции систем во времени. Это система, обладающая состоянием. Она описывает динамику некоторого процесса, а именно: процесс перехода системы из одного состояния в другое. Фазовое пространство системы — совокупность всех допустимых состояний динамической системы. Таким образом, динамическая система характеризуется своим начальным состоянием и законом, по которому система переходит из начального состояния в другое. Динамическая система характеризуется устойчивостью (способность системы сколь угодно долго оставаться около положения равновесия или на заданном многообразии) и грубостью (сохранение свойств при малых изменениях структуры динамической системы; «грубая система — это такая, качественный характер движений которой не меняется при достаточно малом изменении параметров).

Частным случаем динамической системы является диссипативная система - открытая динамическая система, в которой наблюдается прирост энтропии.

Диссипативная система — открытая система, которая оперирует вдали от термодинамического равновесия. Это устойчивое состояние, возникающее в неравновесной среде при условии диссипации (рассеивания) энергии, которая поступает извне. Характеризуется спонтанным появлением сложной, зачастую хаотичной структуры. Отличительная особенность таких систем — несохранение объёма в фазовом пространстве.

Динамическая система - любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы.



Математический аппарат, используемый для количественного описания закона эволюции динамических систем основан на использовании дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории графов, теории марковских цепей и т.д. Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно её состояние, и указан закон эволюции.

Таким образом, динамическая система = набор параметров + оператор эволюции.

Эволюция системы может описываться и дифференциальными уравнениями и отображениями (уравнениями с дискретным временем).

Динамические системы могут описываться линейными (линейные системы) или нелинейными (нелинейные системы) уравнениями. Возможны системы с непрерывным и дискретным (каскады) временем. Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Различают линейные и нелинейные колебательные системы, сосредоточенные и распределенные, консервативные и диссипативные, автономные и неавтономные. Особый класс представляют автоколебательные системы.

Рис. 7. Перемешивание цветного пластилина в шарике после последовательных итераций отображения «Подкова Смейла», т. е., сплющивания и складывания пополам.

Детерминированный хаос — абстрактное математическое понятие, обозначающее детерминированный процесс в детерминированной нелинейной системе, обусловленный свойством данной системы проявлять неустойчивость, чувствительную зависимость динамики системы от малых возмущений.

Замечание. Следует различать детерминированный хаос в диссипативных системах (например, возбуждаемый маятник с трением) и в консервативных системах (например, движение планет, подчиняющееся гамильтоновым уравнениям).

Синонимом детерминированного хаоса является **динамический хаос** — явление в теории динамических систем, при котором поведение нелинейной системы выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется детерминистическими законами. Оба термина полностью равнозначны и используются для указания на существенное отличие хаоса как предмета научного изучения в **синергетике** от хаоса в обыденном смысле. Обратным к динамическому хаосу является динамическое равновесие и явления гомеостаза.

Важным обстоятельством является тот факт, что в диссипативных системах хаотическая динамика развивается в рамках определённой структуры. Эту структуру трудно изучать обычными методами изучения динамики, например, откладывая зависимость отклика от времени или получая частотный спектр. Порядок следует искать в фазовом пространстве (по осям которого отложены координата и скорость). Попутно можно обнаружить, что хаотические движения обладают **фрактальной структурой**.

Детерминированный хаос характеризуется наличием периодического процесса, траектория которого воспроизводится, т.е. после повторения начального состояния вновь воспроизводится одна и та же траектория, независимо от её сложности. Это позволяет по параметрам одного из периодов повторения траектории прогнозировать будущее. Однако при этом необходимо учитывать свойства равновесных и неравновесных систем. Неравновесные открытые системы допускают новые структурные состояния. Диссипативные системы независимо от вида устойчивости вызывают уменьшение фазового объема во времени до нуля. Так что диссипативная система может переходить в упорядоченное состояние в результате неустойчивости предыдущего неупорядоченного состояния. Первоначально устойчивая диссипативная структура в процессе своей

эволюции достигает критического состояния, отвечающего порогу устойчивости структуры, начинает осциллировать, а возникающие в ней флуктуации приводят к самоорганизации новой, более устойчивой структуры на данном иерархическом уровне эволюции. При этом важным является тот факт, что как и в биологических системах, переходы устойчивость — неустойчивость — устойчивость контролируются кумулятивной обратной связью. Она отличается от регулируемой извне обратной связью тем, что позволяет самоорганизовывать такую внутреннюю структуру, которая повышает степень ее организации. Таким образом, кумулятивная обратная связь за счет накопленной внутренней энергии позволяет системе осуществлять не просто обратное взаимодействие, учитывающее полученную информацию о предыдущем критическом состоянии, но и обеспечивать сохранение или повышение организованности структур.

Примерами хаотических динамических систем могут являться подкова Смейла и преобразование пекаря.

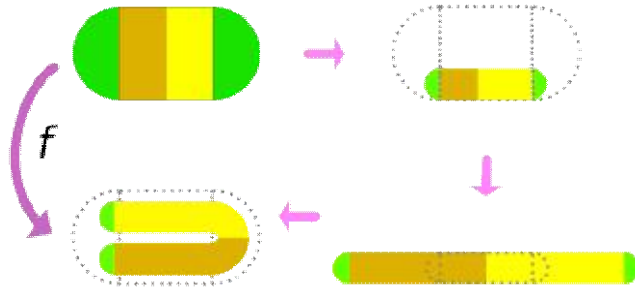


Рис. 8 Эволюция подковы Смейла. Предложенный Стивом Смейлом пример динамической системы, имеющей бесконечное число периодических точек (и хаотическую динамику), причём это свойство не разрушается при малых возмущениях системы.

Согласно алгоритму "подкова Смейла", единичный квадрат сжимается по одному направлению (по горизонтали) и растягивается по другому (по вертикали), причём площадь при этом уменьшается. Затем получившаяся полоска изгибается в форме подковы и вкладывается обратно в исходный квадрат. Эта процедура повторяется много раз. В пределе образуется множество с нулевой площадью, которое имеет в поперечном сечении *канторову структуру* - частный случай фрактальной геометрии (см. курс лекций И.Н. Бекмана "Фракталы"). Вид аттрактора Смейла мы рассмотрим далее в этой лекции.

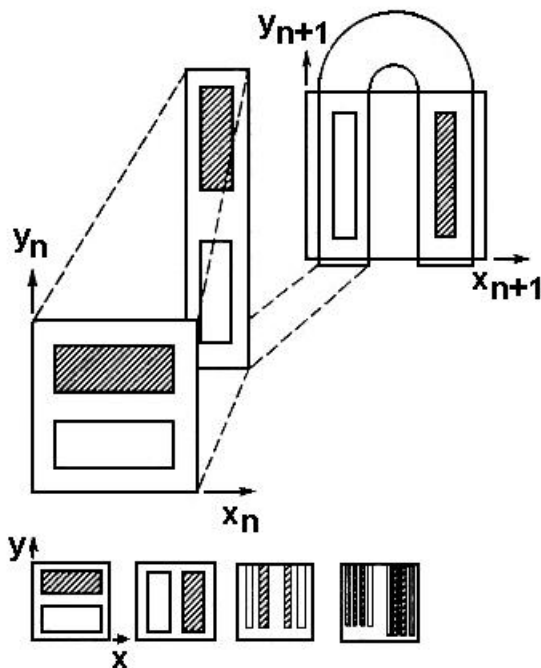


Рис. 9. Отображение подкова Смейла: вытягивание, сжатие и складывание после большого числа итераций отображения приводят к фрактальной структуре.

Отображение пекаря — нелинейное отображение единичного квадрата на себя, которое демонстрирует хаотическое поведение. Название «отображение пекаря» происходит из-за его сходства с замешиванием теста.

Так как отображение состоит из растяжения вдоль оси x и сжатия вдоль y , то близкие траектории экспоненциально расходятся в горизонтальном направлении и сближаются в вертикальном. Из случайной символической последовательности строится хаотическая траектория, которая проходит сколь угодно

близко к каждой точке квадрата (эргодичность). Под действием отображения любая выбранная область превращается в совокупность узких горизонтальных полос, которая через некоторое число итераций равномерно покрывает единичный квадрат (перемешивание). Преобразование обратимо, при итерациях в обратном направлении любая область будет разбиваться на узкие вертикальные полосы и также перемешается по всему квадрату.

Ещё примером детерминированного хаоса является бильярд Адамара, т.е. бильярд, в котором вместо плоского стола используется закрученная поверхность отрицательной кривизны. Вычисление траектории движения шара по бильярдному столу Адамара «абсолютно непригодно», потому что маленькая неопределенность, непременно присутствующая в начальных условиях, приводит к большой неопределенности для предсказанной траектории, если мы подождем достаточно долго, что делает предсказание бесполезным.

Системы детерминированного хаоса позволяют по другому относиться к использованию статистических подходов в повышении надёжности эксперимента. Согласно традиционной матстатистике, чем больше мы проведём параллельных экспериментов, тем надежнее будут установлены изучаемые зависимости. К детерминированным системам это абсолютно не

применимо - здесь имеет место эффект принципиальной невозпроизводимости эксперимента. Мы можем ставить один и тот же эксперимент, точнеем образом воспроизводить начальные условия, и получать повторяемые результаты, но в один прекрасный момент (предсказать его мы не можем) наблюдения начнут давать совершенно несхожие результаты. Это связано с явлением разбегания орбит, которое иллюстрируется только что рассмотренными тремя примерами.

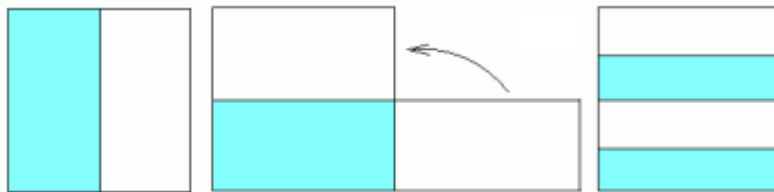


Рис. 10. Отображение пекаря. Преобразование состоит из однородного сжатия квадрата в 2 раза в вертикальном направлении и растяжения в горизонтальном. Далее правую половину следует отрезать и положить на левую. На рисунке показано действие двух первых итераций.

2.3 Открытие детерминированного хаоса

Рассмотрение детерминированного хаоса начнём с теории стохастического поведения динамических диссипативных систем. Нас будет интересовать случайное поведение системы, которая полностью детерминирована, т.е. её эволюцию во времени можно точно предсказать (и это подтверждается в широком интервале изменения параметров), но которая при некоторых значениях начальных условий (причём очень незначительных) начинает флуктуировать случайным образом и её поведение становится непредсказуемым, хаотичным.

Как показывает повседневный опыт, для многих физических систем малые изменения начальных условий приводят к малым изменениям результата. Так, например, путь автомобиля мало изменится, если руль лишь слегка поворачивать. Но есть ситуации, для которых справедливо противоположное. Сторона, на которую упадет монета, поставленная на ребро, зависит от слабого прикосновения. Последовательность «орлов» и «решек» при подбрасывании монеты проявляет нерегулярное, или хаотическое, поведение во времени, так как крайне малые изменения начальных условий могут привести к совершенно различным результатам.

Ещё сравнительно недавно полагали, что случайное поведение системы - это исключение, а практически все системы — детерминированы. Однако сейчас понятно, что высокая чувствительность к начальным условиям, приводящая к хаотическому поведению во времени, — типичное свойство многих систем. Такое поведение, например, обнаружено в периодически стимулируемых клетках сердца, в электронных цепях, при возникновении турбулентности в жидкостях и газах, в химических реакциях, в лазерах и т. д. С точки зрения математики во всех нелинейных динамических системах с числом степеней свободы больше двух (особенно во многих биологических, метеорологических и экономических моделях) можно обнаружить хаос и, следовательно, на достаточно больших временах их поведение становится непредсказуемым.

Для физической системы, поведение которой по времени *детерминировано* существует правило в виде дифференциальных уравнений, определяющее её будущее исходя из заданных начальных условий. Естественно предположить, что детерминированное движение достаточно регулярно и далеко от хаотичности, поскольку последовательные состояния непрерывно развиваются одно из другого. Это означает, что в классической механике все уравнения должны быть интегрируемы. Но уже в 1892 г. А. Пуанкаре знал, что в некоторых механических системах, эволюция которых во времени определяется уравнениями Гамильтона, возможно непредсказуемое хаотическое поведение. Примером является неинтегрируемая задача трёх тел, которая в определённых условиях приводит к полностью хаотическим траекториям.

Частным случаем задачи трёх тел является движение пробной частицы в гравитационном поле двух неподвижных точечных масс. Даже если движение происходит в одной плоскости, траектория частицы выглядит чрезвычайно сложной и запутанной. Она, то обвивается вокруг одной из масс, то неожиданно перескакивает к другой — рис. 7. Первоначально близкие траектории очень быстро расходятся.

Впоследствии было показано, что неинтегрируемых систем в механике много.

Через 60 лет после Пуанкаре Колмогоров, 1954; Арнольд, 1963 и Мозер, 1967 доказали, что в классической механике движение в фазовом пространстве не является ни полностью регулярным, ни полностью нерегулярным, а тип траектории зависит от выбора начальных условий (сейчас это утверждение носит название теоремы КАМ). Таким образом, устойчивое регулярное движение в классической механике — исключение в противоположность утверждениям многих учебников.

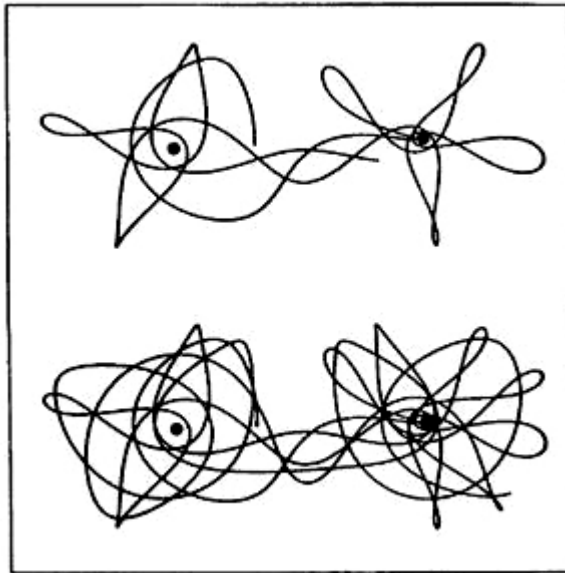


Рис. 11. Движение пробной частицы вблизи двух одинаковых масс. Вверху показана начальная часть траектории, а внизу её продолжение.

В 1961 американский метеоролог Эдвард Лоренц при моделировании неравномерно прогреваемого атмосферного воздуха обнаружил, что даже простая система из трёх связанных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка может привести к совершенно хаотическим траекториям (это — первый пример *детерминированного хаоса* в диссипативных системах).

Э.Лоренц вычислял значения решения в течение длительного времени, а затем остановил счет. Его заинтересовала некоторая особенность решения, которая возникала в середине интервала счета, и поэтому он повторил вычисления с этого момента. Результаты

повторного счета, очевидно, совпали бы с результатами первоначального счета, если бы начальные значения для повторного счета в точности были равны полученным ранее значениям для этого момента времени. Лоренц слегка изменил эти значения, уменьшив число верных десятичных знаков. Ошибки, введенные таким образом, были крайне невелики. Вновь сосчитанное решение некоторое время хорошо согласовывалось со старым. Однако, по мере счёта расхождение возрастало, и новое решение всё меньше напоминало старое. То, что наблюдал Лоренц, теперь называется существенной зависимостью от начальных условий — основной чертой, присущей хаотической динамике. Существенную зависимость иногда называют эффектом бабочки. Такое название относится к невозможности делать долгосрочные прогнозы погоды. Сам Лоренц разъяснил это понятие в статье "Предсказуемость: может ли взмах крылышек бабочки в Бразилии привести к образованию торнадо в Техасе?". Может!

Далее под детерминированным хаосом мы будем подразумевать нерегулярное, или хаотическое, движение, порожденное нелинейными системами уравнений, для которых динамические законы однозначно определяют эволюцию во времени состояния системы при известной предыстории.

Детерминированный хаос = нелинейная система уравнений + неустойчивость

От регулярного движения детерминированный хаос отличается сложными, неповторяющимися траекториями и непредсказуемостью поведения системы при больших временах (зависимость от начальных условий). От случайного процесса детерминированный хаос отличается тем, что в нём нерегулярность происходит из самой системы, а не от внешнего фактора (шум, флуктуации).

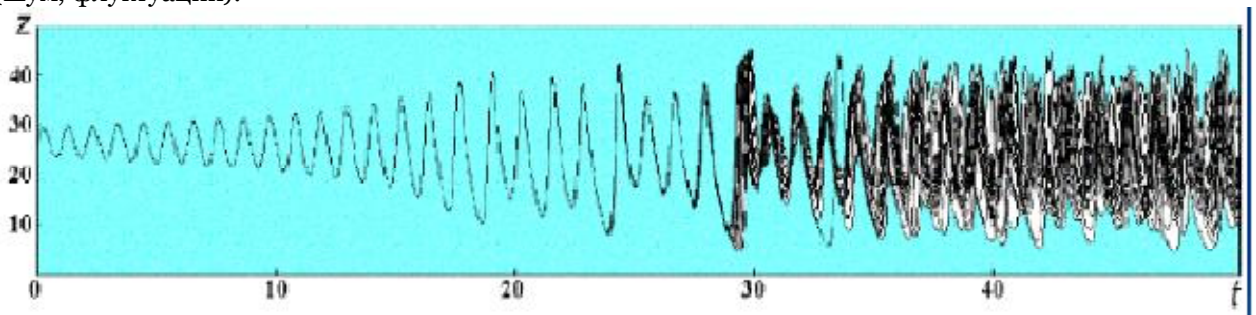


Рис. 12. Возникновение хаоса при больших временах.

Примерами нелинейных систем, в которых проявляется детерминированный хаос, являются: маятник с возбуждением, жидкости вблизи порога возникновения турбулентности, лазеры, приборы нелинейной оптики, переход Джозефсона (*Эффект Джозефсона — явление протекания сверхпроводящего тока через тонкий слой диэлектрика, разделяющий два сверхпроводника*) химические реакции, классические системы, включающие много тел (задача трёх тел), ускорители частиц, взаимодействующие нелинейные волны в плазме, биологические модели динамики популяций, стимулированные клетки сердца и др.

Как известно, линейные дифференциальные или разностные уравнения могут быть решены преобразованием Фурье и не приводят к хаосу. А нелинейные могут приводить, но важно

понимать, что нелинейность — необходимое, но не достаточное условие для возникновения хаотического движения.

Наблюдаемое во времени хаотическое поведение возникает не из-за внешних источников шума, не из-за бесконечного числа степеней свободы и не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические). Настоящая первопричина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства (например, трёхмерного в системе Лоренца). Невозможно предсказать длительное поведение таких систем, поскольку начальные условия можно задать лишь с конечной точностью, а ошибки экспоненциально нарастают. При решении такой нелинейной системы уравнений на компьютере, результат на всё более дальних временах зависит от всё большего количества цифр в (иррациональных) числах, представляющих начальные условия. Так как цифры в иррациональных числах распределены нерегулярно, траектория становится хаотической.

Здесь возникает несколько фундаментальных вопросов:

— Можно ли предсказать (например, по виду соответствующих дифференциальных уравнений), реализуется ли в системе детерминированный хаос?

— Можно ли определить понятие хаотического движения более строго с точки зрения математики и разработать для него количественные характеристики?

— Каково воздействие этих результатов на различные области физики? Означает ли существование детерминированного хаоса конец долговременной предсказуемости в физике для нелинейных систем или по хаотическому сигналу ещё можно что-то узнать?

2.4 Элементы теории динамических систем

Перейдём теперь к изложению теоретических основ описания динамических систем. Однако, сначала напомним о понятиях, на которых базируется используемый в этой области математический аппарат.

Фазовое пространство — пространство, на котором представлено множество всех состояний системы, так, что каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства.

Фазовое пространство = пространство значений параметров системы.

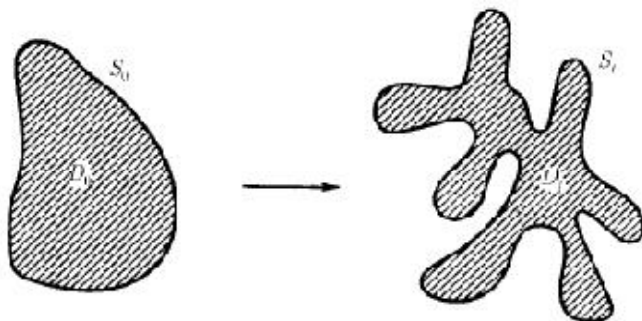
Траектория = набор точек в фазовом пространстве, последовательно посещаемых системой.

Особенность фазового пространства заключается в том, что состояние этой системы — перемещением представляется в нём одной единственной точкой, а эволюция этой системы — перемещением этой точки. При рассмотрении нескольких одинаковых систем, задаётся несколько точек в фазовом пространстве. Совокупность таких систем называют статистическим ансамблем. По теореме Лиувилля, замкнутая кривая (или поверхность), состоящая из точек фазового пространства гамильтоновой эволюционирует так, что площадь (или объём) заключенного в ней фазового пространства сохраняется во времени.

Теорема Лиувилля: функция распределения гамильтоновой системы постоянна вдоль любой траектории в фазовом пространстве. Теорема утверждает сохранение во времени фазового объёма, или плотности вероятности в фазовом пространстве.

Гамильтонова система — частный случай динамической системы, описывающей физические процессы без диссипации. В ней силы не зависят от скорости.

Динамическая система — система, обладающая состоянием. Она описывает



динамику процесса перехода системы из одного состояния в другое. Фазовое пространство системы — совокупность всех допустимых состояний динамической системы. Динамическая система характеризуется своим начальным состоянием и законом, по которому система переходит из начального состояния в другое.

Рис. 13. Сохранение фазового объёма при эволюции гамильтоновой системы.

системы.

Динамическая система — система, моделью которой является система обыкновенных дифференциальных уравнений. **Устойчивая динамическая система** — динамическая система, состояние которой полностью определяется начальными условиями и внешними воздействиями в процессе развития.

В консервативной системе элемент в фазовом пространстве только изменяет форму, но сохраняет объём (выполняется теорема Лиувилля), что предопределяет характер эволюции и тип хаотичности, возникающий в консервативных системах. Консервативные системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют гамильтоновыми. Механические колебательные системы в отсутствие трения относятся к консервативным системам. В консервативных системах хаотические орбиты стремятся однородно заполнить все части некоторого подпространства в фазовом пространстве, т.е. они характеризуются однородной плотностью вероятности в ограниченных областях фазового пространства.

Примером простой консервативной системой с одной степенью свободы является маятник. Если на колебания маятника трение не оказывает заметного влияния, то гамильтониан маятника длины l и массы m равен сумме потенциальной $\Pi = -mgl \cos \varphi$ и кинетической $K = p^2/2ml^2$ энергий:

$$H = p^2/2ml^2 - mgl \cos \varphi, \quad (2)$$

где φ — угол отклонения от вертикали а g — ускорение свободного падения.

Уравнения движения маятника имеют вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — частота колебаний.

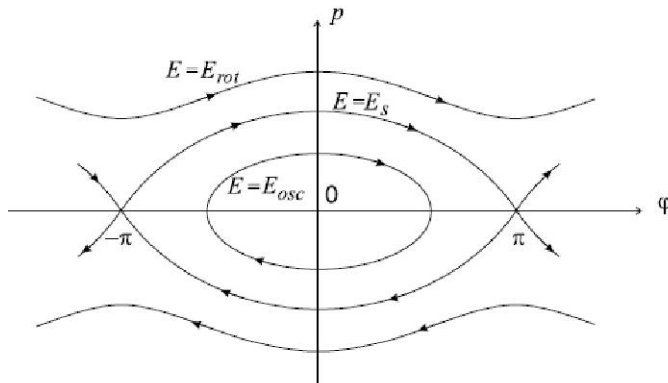


Рис. 14 . Фазовый портрет маятника с гамильтонианом (2.3).

Когда полная энергия $H = E$ маятника превышает наибольшее значение потенциальной энергии, $E = E_{rot} > mgl$, импульс p всегда будет отличен от нуля, что приводит к неограниченному росту угла φ . Это означает, что маятник будет вращаться. На фазовой плоскости (рис. 14) такое поведение изображается траекториями E_{rot} , отвечающими движению фазовой

точки слева на право для $p > 0$ и справа на лево для $p < 0$. Колебания маятника соответствует энергия $E = E_{osc} < mgl$. Если же $E \approx E_s = mgl$, то период колебаний стремится к бесконечности и движение происходит по сепаратрисе — линии, разделяющей два качественно различных типа движения: колебания ($E = E_{osc}$) и вращение ($E = E_{rot}$). В окрестности точек с координатами $(p, \varphi) = (0, 2\pi k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, семейство фазовых кривых имеет вид эллипсов. Поэтому такие точки называются эллиптическими точками системы. Семейство траекторий вблизи точек $(p, \varphi) = (0, \pi + 2\pi k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеет вид гипербол, и такие точки называются гиперболическими. Эллиптические точки являются устойчивыми и соответствуют нижнему положению равновесия маятника, а гиперболические точки, соответствующие верхнему положению равновесия маятника, являются неустойчивыми. Фазовая кривая, начавшаяся в окрестности гиперболической точки, удаляется от неё, в то время как траектория в близи эллиптической точки всегда остаётся в её окрестности.

Замечание. Маятник в случае малых отклонений описывается линейными уравнениями: частота колебаний не зависит от амплитуды. Маятник в случае больших отклонений относится к нелинейной системе: частота колебаний зависит от амплитуды.

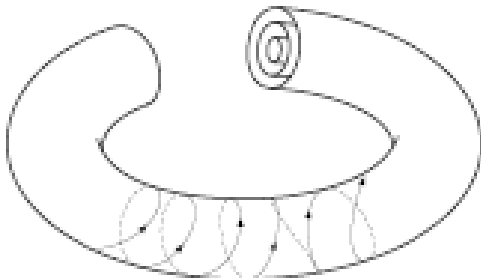


Рис. 15. Фазовый портрет интегрируемой системы с двумя степенями свободы.

Для систем с двумя степенями свободы фазовое пространство четырёхмерно. Примером является система двух гармонических осцилляторов единичной массы (рис. 15). В случае полностью интегрируемых систем с n степенями свободы фазовое пространство $2n$ -мерно и в переменных действие-угол имеет структуру множества n -мерных торов. Любая возможная траектория располагается на одном из них. При этом некоторые траектории могут

оказаться замкнутыми, другие же будут всюду плотно покрывать поверхность соответствующего тора.

Диссипативная система - открытая динамическая система, в которой наблюдается прирост энтропии.

В диссипативной системе из-за диссипации энергии объём элемента фазового пространства сокращается с течением времени (теорема Луивилля не соблюдается). Поэтому в фазовом пространстве диссипативных систем появляются притягивающие множества, которые не существуют в консервативных системах - аттракторы (*attract* - притягивать).

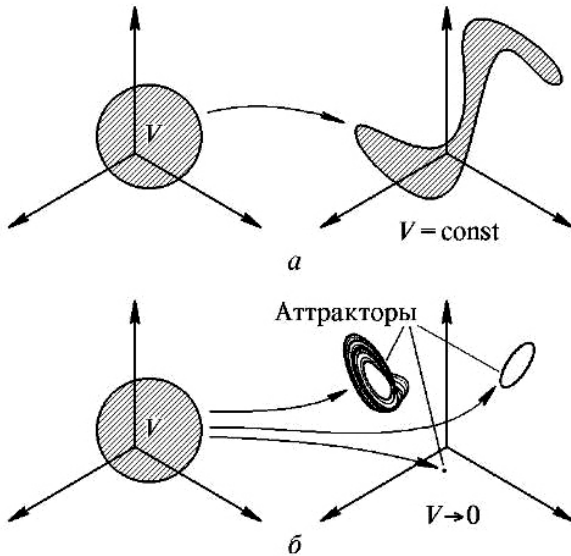


Рис. 16. К определению консервативных (а) и диссипативных (б) динамических систем.

Аттрактор - состояние динамической системы, к которому она стремится в процессе своего движения (развития). В фазовом пространстве аттрактор устойчивой динамической системы изображается точкой (в случае аperiodических процессов) или предельным циклом (в случае периодических процессов).

Странный аттрактор - аттрактор, которому в фазовом пространстве соответствует область, притягивающая к себе все фазовые траектории.

Эти траектории имеют сложную и запутанную структуру и представляют собой незамкнутые кривые.

Для диссипативных систем характерно, что с течением времени облако изображающих точек "съезжается" и концентрируется на одном или нескольких аттракторах - подмножествах фазового пространства, обладающих обычно нулевым фазовым объёмом (рис. 16б). С точки зрения динамики во времени это означает, что режим, возникающий в системе, предоставленной себе в течение длительного времени, становится независимым от начального состояния.

Хаотические орбиты в системах с потерями обнаруживают фрактальную структуру фазовых портретов, в то время как в бездиссипативных системах такая структура отсутствует. Примером является механическая колебательная система в присутствии трения, в которой механическая энергия не сохраняется, а постепенно рассеивается (диссипирует) и переходит в тепло, т.е. в энергию микроскопического движения молекул, составляющих систему и её окружение.

Понятие фазового пространства широко используется в разных областях физики. Интерпретация состояния движущегося объекта как точки в фазовом пространстве разрешает парадокс Зенона (Парадокс состоит в том, что если мы описываем состояние объекта его положением в конфигурационном пространстве, то объект не может двигаться.) Фазовое пространство состояний квантового осциллятора позволяет описать квантовый шум усилителя, а также построить единый формализм для классической и квантовой механики. смысл как в классической, так и в квантовой механике.

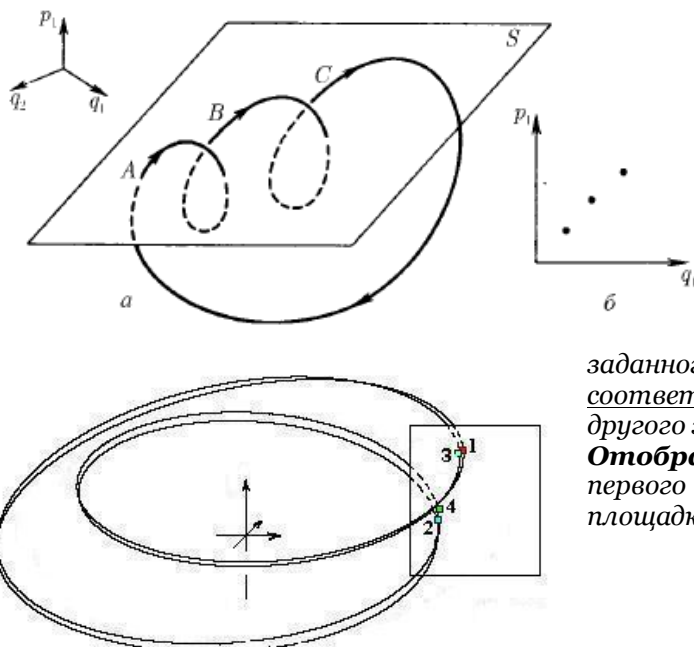


Рис. 17. Построение отображения Пуанкаре в фазовом пространстве автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

В анализе динамических систем широко используется отображение Пуанкаре.

Отображение - закон, по которому каждому элементу некоторого заданного множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент другого заданного множества Y .

Отображение Пуанкаре (отображение первого возвращения) — проекция некоторой площадки в фазовом пространстве на себя (или

на другую площадку) вдоль траекторий (фазовых кривых) системы.

Рис. 18. Сечение Пуанкаре - составление разностного уравнения (отображения) для динамической модели с непрерывно меняющимся временем.

А. Пуанкаре предложил процедуру, которая сопоставляет динамике в рамках дифференциальных уравнений некоторое отображение. Идея состоит в следующем: в фазовом пространстве строится некоторая поверхность, и изучается поведение точек пересечения фазовой траектории и секущей. На рис. 18 показана иллюстрация этого метода – сечение Пуанкаре четырехоборотного предельного цикла. Можно видеть, что в таком сечении изображающая точка будет последовательно занимать положения, отмеченные цифрами 1, 2, 3 и 4. Таким образом, в терминах отображений можно сказать, что реализуется цикл периода 4. Понятно, что те или иные перестройки предельного цикла будут приводить и к перестройкам в сечении Пуанкаре. Последнее изучать гораздо проще, что и определяет важность этого метода. При анализе конкретных систем сечение Пуанкаре строится при помощи компьютера.

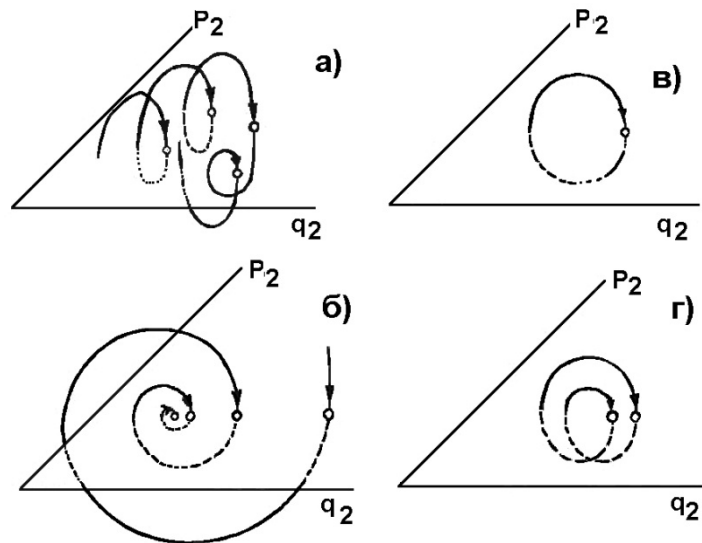


Рис. 19. Качественно разные траектории отличаются сечениями Пуанкаре: а - хаотическое движение; б - движение к неподвижной точке; в - цикл; г - цикл удвоенного периода.

Метод сечений Пуанкаре является эффективным, но не всегда надёжным, методом исследования периодического движения с понижением порядка системы. На рис. представлены четыре типа сечения Пуанкаре.

Применение сечения Пуанкаре проиллюстрируем на примере системы уравнений Хенона-Хейлиса (1964), описывающей движение частицы массой $m=1$ в двумерном потенциале:

$$U(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \quad (4)$$

По сути это два одинаковых гармонических осциллятора с нелинейным взаимодействием между ними. Если полная энергия этой механической системы $0 < E < 1/6$, то движение финитно и происходит внутри треугольной области (потенциальной яме) на плоскости x, y , показанной на рис. 20.

При энергиях E , близких к нулю система совершает обычные гармонические колебания, однако если величина E не очень мала, то большая часть траекторий этой системы (с двумя степенями свободы) блуждает по изоповерхности гиперповерхности в 4-х мерном фазовом пространстве (x, y, p_x, p_y) крайне нерегулярным образом. Так, если взять только те моменты времени, когда траектория пересекает плоскость $x=0$, то значение координаты y и импульса p_y изображены в эти моменты точками на рис. 20 (сечение Пуанкаре). Причем для энергии $E=1/10$ показано несколько траекторий (с разными начальными условиями), а для $E=1/8$ всего одна – хаотическая.

Динамических системы, которые описываются обыкновенными (линейными) дифференциальными уравнениями, имеют четыре типа решений: состояние равновесия, периодическое движение, квазипериодическое движение и хаотическое. Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют сосредоточенными или точечными системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться либо как сосредоточенная, либо как распределенная. Математические модели распределенных систем - это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения её состояния.

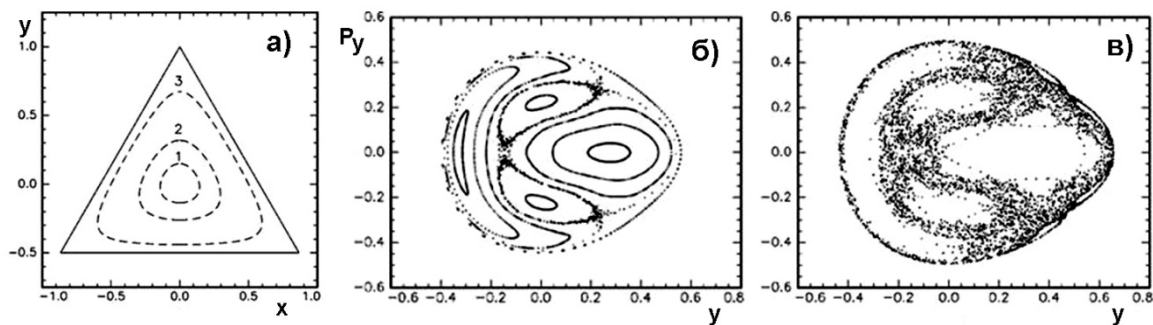


Рис. 20. Модель Хенона-Хейлеса: а - область финитного движения (пунктирные линии представляют собой эквипотенциальные кривые $U=\text{const}$, 1 - $U=0,01$, 2 - $U=0,04$, 3 - $U=0,125$); сечение Пуанкаре (y, P_y) при энергии частицы $E=1/10$ (б) и $E=1/8$ (в).

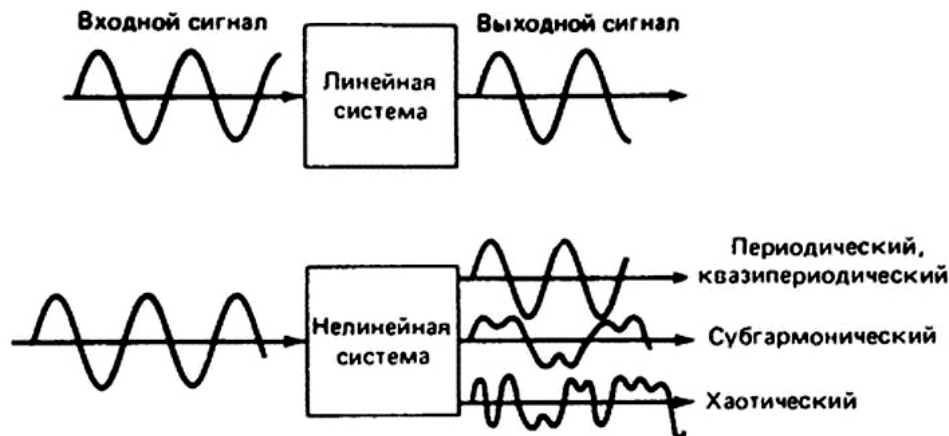


Рис. 21. Схема возможных преобразований сигнала в линейных и нелинейных системах.

В линейной системе оператор эволюции линеен, т.е. $A(x+y)=Ax+Ay$, $A(\lambda x)=\lambda Ax$. В такой системе не может быть хаотических колебаний. В ней периодические внешние воздействия вызывают после затухания переходных процессов периодический отклик того же периода (рис. 21).

Маятник с трением

Как известно, существуют три классических типа движения: равновесие, периодическое движение (предельный цикл) и квазипериодическое движение. Эти состояния называются аттракторами, поскольку в присутствии какого-либо затухания переходные отклонения подавляются и система "притягивается" к одному из трёх перечисленных состояний. Существует, однако, класс движений (нелинейные колебания), который не сводится ни к одному из классических аттракторов. Здесь движения хаотичны в том смысле, что, если присутствует малая неопределённость начальных условий, то они непредсказуемы (странный аттрактор).

Классическим аттракторам соответствуют классические геометрические объекты в фазовом пространстве: равновесному состоянию - точка, периодическому движению или предельному циклу - замкнутая кривая, а квазипериодическому движению соответствует поверхность в трёхмерном фазовом пространстве. Странный аттрактор связан с геометрическим объектом - фрактальным множеством. В трёхмерном фазовом пространстве фрактальное множество странного аттрактора выглядит как набор бесконечного числа слоев или параллельных плоскостей, причём расстояние между некоторыми из них приближаются к бесконечно малому.

Примером неинтегрируемой системы может служить двойной плоский маятник с точечными массами m_1 и m_2 , (рис. 22) у которого две степени свободы — углы φ_1 и φ_2 . Если отклонение от положения равновесия мало, то система совершает регулярные гармонические колебания. Однако при увеличении полной энергии наступает такой момент, когда колебания становятся хаотическими — маятники начинают прокручиваться и два близких начальных условия приводят в конце концов к совершенно различной динамике этой нелинейной системы с двумя степенями свободы.

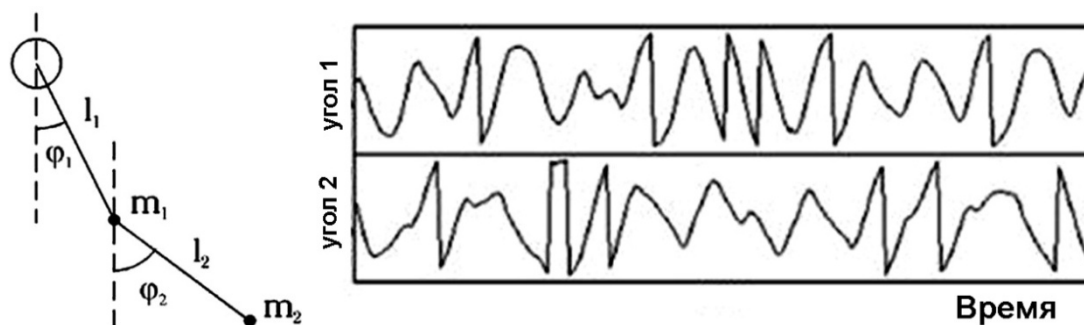


Рис. 22. Двойной плоский маятник и его хаотические колебания.

Хаотическая динамическая система - динамическая система, процессы в которой описываются странным аттрактором. В отличие от устойчивой динамической системы определить состояние системы по заданным значениям времени и начальных условий невозможно.

Бифуркация - раздвоение, разделение, разветвление чего-либо. Состояние процесса в динамической системе, при котором резко возрастают флуктуации и выход из которого возможен по двум существенно различным трудно предсказуемым направлениям — хаотическому или упорядоченному.

Важной характерной особенностью всех систем, в которых наблюдается детерминированный хаос, является то, что они описываются нелинейными дифференциальными уравнениями или системами уравнений. К таким уравнениям неприменим принцип суперпозиции, справедливый для линейных систем, согласно которому сумма решений есть тоже решение. Нелинейная система управляется нелинейным оператором эволюции: $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \neq \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$. Примером является функция $\sin(x)$. Ситуация усложняется еще и тем, что у нелинейных уравнений часто не одно, а несколько решений. Среди них могут быть как хаотические, так и регулярные, периодические решения. Какое из них осуществляется на практике, зависит от начальных условий.

Простейшим видом динамического хаоса является хаотическая динамика в нелинейных системах с *дискретным* временем (регулярная динамика рассматривается при этом как этап, предшествующий хаосу). Математический аппарат здесь прост, фактически он сводится к теории разностных уравнений. Понимание хаоса в системах с *непрерывным* временем сложнее, требуется глубокое знание теории дифференциальных уравнений.

Важно понимать, что для возникновения хаоса в случае систем с *непрерывным* временем их размерность (порядок N нелинейного дифференциального уравнения, описывающего данную систему) должна быть не ниже 3-х. Такие системы (3D-динамические системы) представляются *потоками* траекторий в фазовом пространстве, размерность которого 3 (или выше, в соответствии с порядком дифференциального уравнения). Однако в нелинейных динамических системах с *дискретным* временем хаотические движения могут возникать уже в случае систем 1-го порядка (1D-дискретные динамические системы). Эти движения представляют *каскады* дискретных отображений и описываются нелинейными разностными уравнениями порядка 1 и выше.

Отметим, что существуют четыре критерия хаотичности движения: сигнал «выглядит случайным»; в спектре мощности наблюдается широкополосный шум на низких частотах; автокорреляционная функция быстро спадает; сечение Пуанкаре состоит из точек, заполняющих пространство.

Математические модели, содержащие 3 и более обыкновенных дифференциальных уравнений, способны демонстрировать хаотические режимы колебаний, которые на первый взгляд имеют вид случайных процессов. Переход в фазовое пространство позволяет получать наглядную информацию об особенностях сложной динамики соответствующих систем, и прежде всего о геометрии предельных множеств фазовых траекторий, которые соответствуют установившимся режимам.

Важную роль в анализе хаотических систем сыграл странный аттрактор Э. Лоренца. Лоренц показал, что разогрев воздуха со стороны Земли и охлаждение его с противоположной приводит к конвекционным потокам, которые приближенно описываются системой трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не имеющих точного аналитического решения:

$$dx/dt = s(y-x), \quad (5a)$$

$$dy/dt = x(r-z) - y, \quad (5б)$$

$$dz/dt = xy - bz, \quad (5в)$$

где $s = 10, r = 28, b = 8/3$.

Модель Лоренца представляет собой динамическую систему в трёхмерном фазовом пространстве.

Переменная X пропорциональна скорости конвективного потока (характеризует скорость вращения конвекционных валов), Y и Z - отвечают за распределение температуры соответственно по горизонтали и вертикали. Параметр r пропорционален числу Рэлея, а s и b — некоторые безразмерные константы, характеризующие систему. Решение этих уравнений — функции $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ — определяют в параметрическом виде траекторию системы в трёхмерном "фазовом" пространстве X, Y, Z . Ввиду однозначности функций, стоящих в правых частях этих уравнений, траектория себя никогда не пересекает.

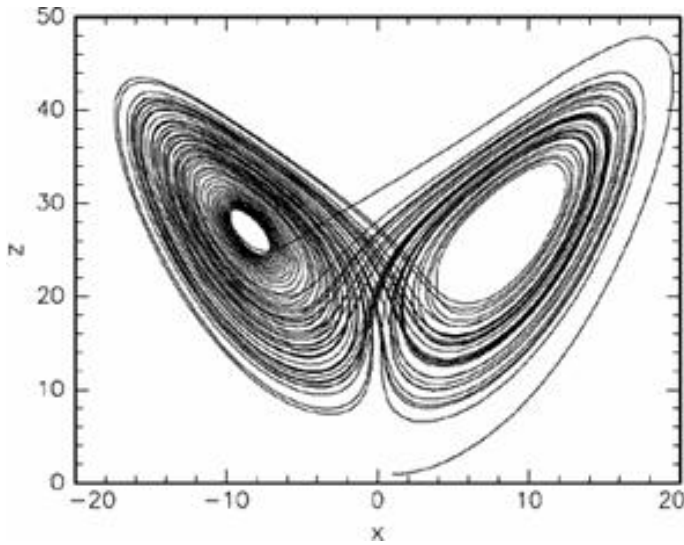


Рис. 23. Траектория, отвечающая хаотическому решению уравнений Лоренца, с параметрами, приведенными в тексте, и начальными условиями $X(0)=Y(0)=Z(0)=1$. Один эллипс отражает вращение атмосферы по часовой стрелке, другой - против неё.

Лоренц исследовал вид этих траекторий при разных начальных условиях при значениях параметров $r=28$, $s=10$ и $b=8/3$. Он обнаружил что при этом траектория хаотическим образом блуждает из полупространства $x>0$ в полупространство $x<0$, флорируя две почти плоских, перепутанных сложным образом спирали. На рис. 23 показана проекция этих спиралей на плоскость XZ для некоторого начального условия. Траектория сперва делает 1 оборот справа, затем 20 слева, затем опять 1 справа, затем 4 — слева и так далее. Похожее поведение было найдено и при других значениях параметров. Хаотичность решения означает, что если мы заранее выберем каким угодно способом цепочку переходов из одного полупространства в другое, то у системы Лоренца найдется решение, которое в точности эту цепочку воспроизведёт.

Причина непредсказуемости поведения этой и других подобных систем заключается в не в том, что не верна математическая теорема о существовании и единственности решения при заданных начальных условиях, а в необычайной чувствительности решения к этим начальным условиям. Близкие начальные условия со временем приводят к совершенно различному конечному состоянию системы. Причем часто различие нарастает со временем экспоненциально, то есть чрезвычайно быстро (см. рис. 24):

$$D(t) = D(0)e^{ht}, \quad (6)$$

где инкремент неустойчивости h является функцией точки в фазовом пространстве.

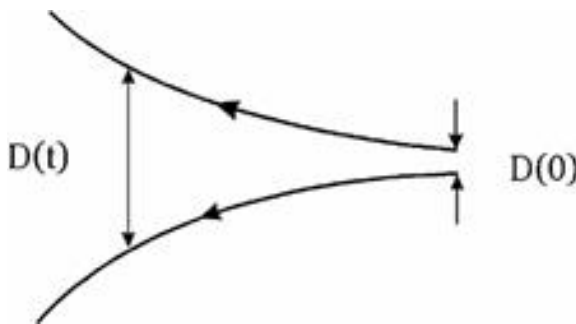


Рис. 24. Две первоначально близкие траектории в фазовом пространстве расходятся со временем в результате локальной неустойчивости.

Оказалось, что нечто похожее происходит и с системами, в которых наблюдается детерминированный хаос: они движутся таким образом, что все время находятся в неустойчивом состоянии.

Иными словами, сколь угодно малые возмущения начальных условий приводят с течением времени к сильному отклонению траектории от своего невозмущенного положения. Если фазовое пространство системы является конечным, то фазовые траектории не могут разойтись из-за неустойчивости более чем на характерный размер области движения, и начинается их запутывание. Предсказать поведение такой системы тогда оказывается практически невозможным.

Странный аттрактор — это некоторое «сложно устроенное» множество в фазовом пространстве, к которому притягиваются почти все траектории из его некоторой окрестности, а на самом множестве движение имеет экспоненциально неустойчивый характер. Такое сочетание глобального сжатия с локальной неустойчивостью приводит к тому, что аттрактор уже не может быть гладким как, например, тор; он определенным образом расслаивается и представляет собой в некотором сечении канторово множество (фрактально). Странный аттрактор играет определяющую роль в решении проблемы турбулентности.

Количественными критериями хаоса являются показатель Ляпунова и фрактальная размерность. При этом положительный показатель Ляпунова указывает на хаотическую динамику,

а фрактальная структура орбиты в фазовом пространстве указывает на присутствие странного аттрактора. Проверка с применением показателя Ляпунова может использоваться в как в диссипативных, так и бездиссипативных (консервативных) системах, а фрактальные размерности имеют смысл только в диссипативных системах.

Фрактал - структура, обладающая свойствами изломанности и самоподобия

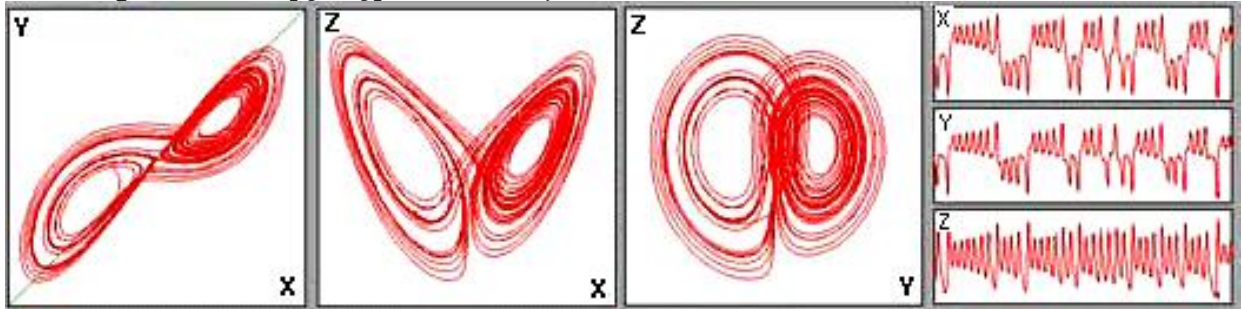


Рис. 25. Динамика хаотической системы (Лоренц): представлены временные реализации, проекции фазовых траекторий, сечение Пуанкаре.

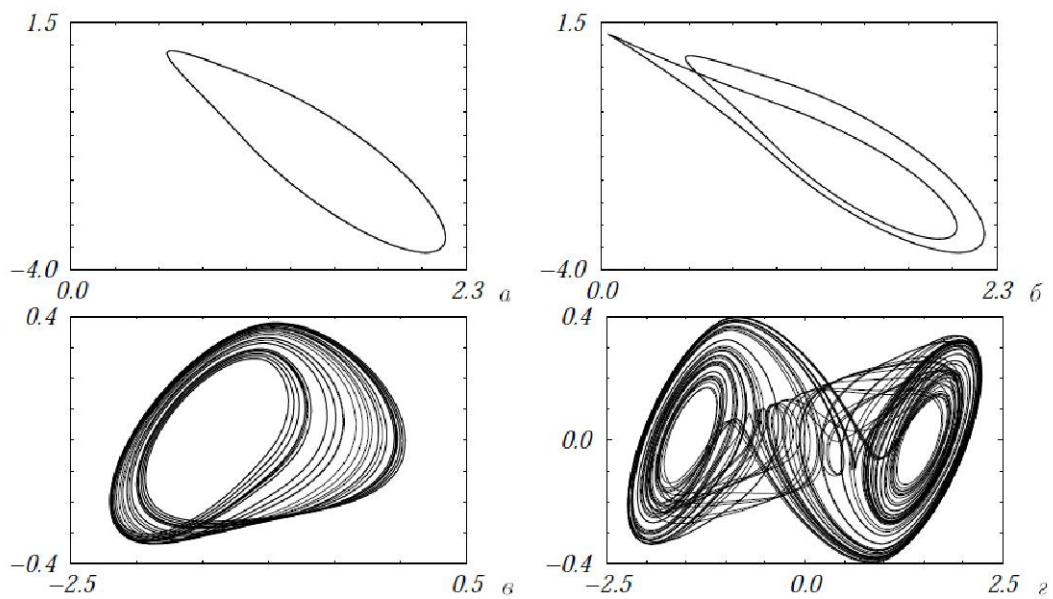


Рис. 26. Двумерные проекции периодической (а,б) и хаотической (в,г) динамик 3-мерной динамической системы.

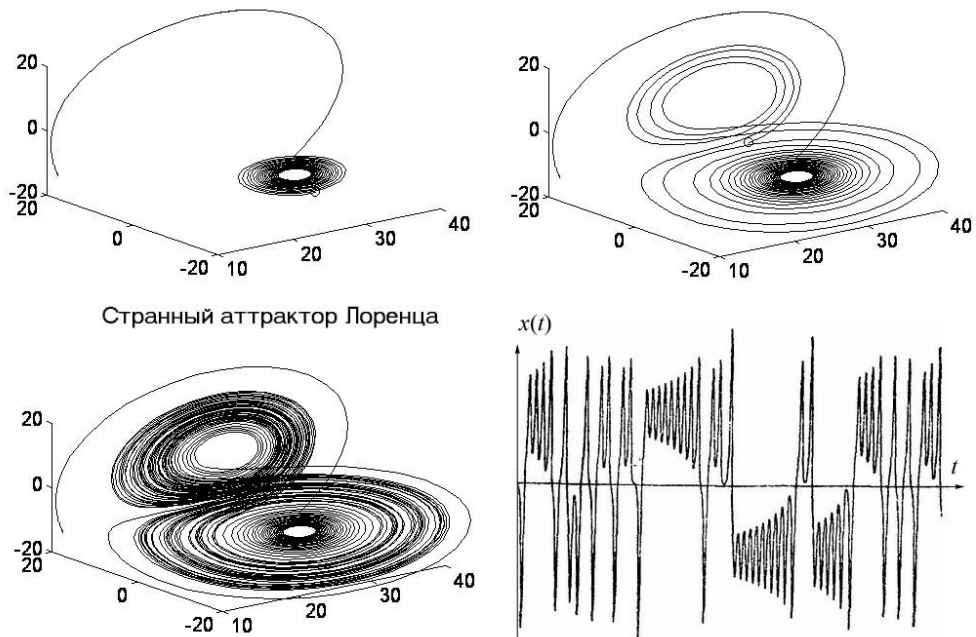


Рис. 27. Эволюция странного аттрактора Лоренца.

Хаос в динамике означает чувствительность динамической эволюции к изменениям начальных условий. Если представить себе набор начальных условий, заполняющий в фазовом пространстве сферу радиуса E , то траектории хаотического движения, начинающиеся в этой сфере, отобразят её на эллипсоид, большая полуось которого растёт как $d = E \cdot \exp(L \cdot t)$, где постоянная $L > 0$ - показатель Ляпунова. Для регулярных движений $L \leq 0$, но в хаотических режимах $L > 0$. Таким образом, знак L является критерием хаоса. Такое же «беспорядочное» перепрыгивание рекурсивной функции с одной орбиты на другую наблюдается на аттракторе Лоренца. Здесь «хаотичность» усугубляется ещё и тем, что конфигурация границ аттрактора Лоренца, его тонкая структура скрыта от наших глаз, поэтому все выглядит по меньшей мере «странно». Сначала вращение переднего фронта графического изображения функции происходит в одной плоскости, потом орбита этой пространственной функции неожиданно перепрыгивает в другую плоскость, сделав несколько оборотов, траектория снова переходит на первоначальную плоскость, и эти непрерывающиеся скачки воспринимаются как абсолютно случайные, но по своей сути они таковыми не являются.

На примере отображения "подкова", мы видели, что в системах с хаотической динамикой области фазового пространства вытягиваются, сжимаются, складываются и отображаются обратно на исходную область. При этом отображении в фазовом пространстве остаются лакуны. Это значит, что орбиты стремятся заполнить менее чем целое подпространство фазового пространства. Фрактальная размерность - мера степени заполнения орбитой определённого подпространства, и нецелая размерность - визитная карточка странного аттрактора.

Замечание. Если фракталы рассматривать не в статике, а в динамике (в эволюции во времени), то динамическим аналогом фрактала будет хаос (конкретный фрактал - мгновенный снимок хаотического процесса). Хаос описывает состояние крайней непредсказуемости, возникающей в динамической системе, в то время как фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации.

Таким образом, свойства странного аттрактора связаны с чувствительной зависимостью от начальных условий (любые две первоначально близкие траектории на аттракторе в конце концов расходятся, причём расхождение траекторий (усредненное по коротким интервалам времени) возрастает со временем экспоненциально). Для него характерно обращение в нуль автокорреляционной функции, широкополосный спектр Фурье и внутренняя непредсказуемость системы. Малейшая ошибка или неточность в задании начального условия не позволяет определить, по какой траектории пойдет эволюция системы, и вынуждает ограничиться статистическим предсказанием долговременного будущего системы. Отсюда следует нетривиальный вывод о непредсказуемости поведения некоторых детерминированных потоков всего лишь с тремя степенями свободы!

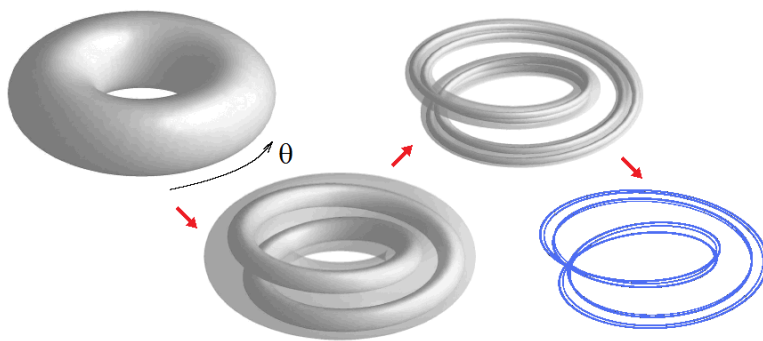


Рис. 28. Построения аттрактора соленоида Смейла – Вильямса.

Аттракторы в виде состояний равновесия, предельных циклов или 1-мерных торов называют простыми или регулярными, подчеркивая тем самым, что движения на них отвечают сложившимся представлениям об устойчивом по

Ляпунову детерминированном поведении динамической системы. Со странным (хаотическим) аттрактором связывается реализация нерегулярного (в смысле отсутствия периодичности) колебательного режима, который во многом сходен с нашими представлениями о стационарных случайных процессах. Термин случайный имеет вполне определенный смысл. Случайное движение непредсказуемо либо предсказуемо с определенной вероятностью. Другими словами, траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом эксперименте. Примером служит классическое движение броуновской частицы. В случае странного аттрактора имеется строгая предсказуемость в смысле детерминированности закона эволюции. Решение уравнений (как и для регулярных аттракторов) подчиняется теореме единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных "шумоподобных" автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа динамическая стохастичность, детерминированный хаос и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета

флуктуаций в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории.

Известно большое число аттракторов различного типа. Например, на базе нелинейной динамики типа подкова Смейла строится аттрактор Смейла – Вильямса путём отображения трехмерного пространства в себя: область в форме тора растягивают в длину, складывают вдвое и вкладывают исходный тор (рис. 28). При каждой следующей итерации количество «витков» удваивается. Поперечная структура соленоида Смейла – Вильямса имеет вид канторова множества (фрактальна).

Коротко остановимся теперь ещё на одном свойстве нелинейных систем - перемежаемости.

Под перемежаемостью понимают прерванное равновесие в нелинейных системах. Как известно, у системы есть два абсолютно разных режима функционирования:

- система может долго находиться в состоянии близком к покою, когда уровень активности близок к нулю или в состоянии небольших колебаний вблизи точки равновесия;

- относительный покой неожиданно и непредсказуемо сменяется вспышками высокой активности, которые могут также неожиданно затухать.

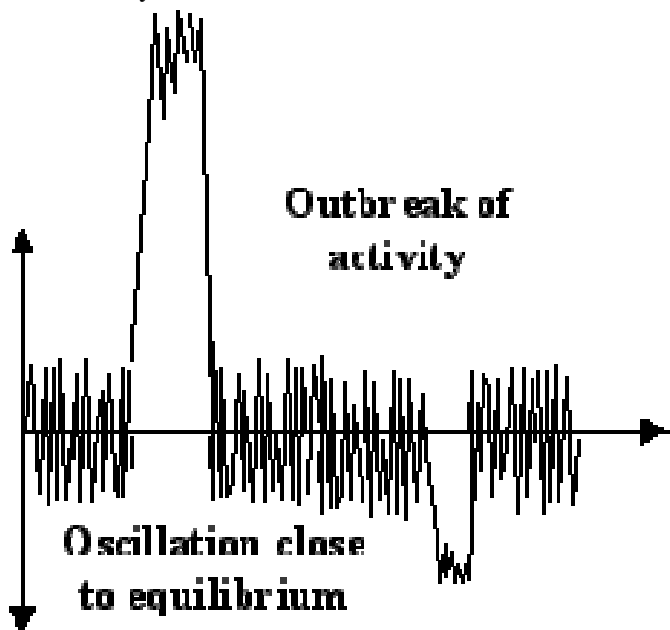


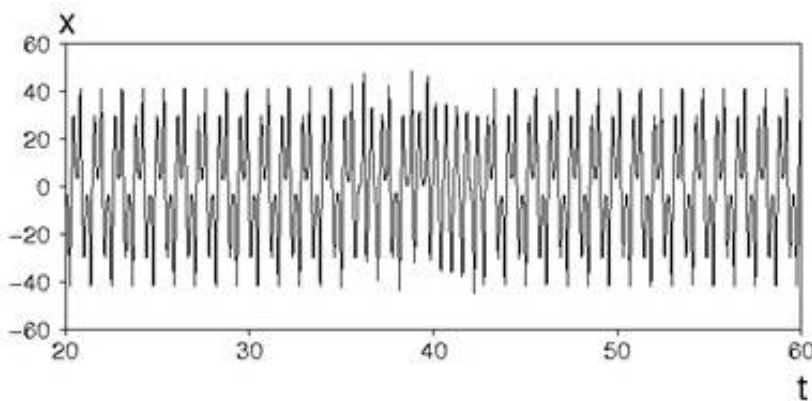
Рис. 29. Перемежаемость в последовательности сигналов.

Важно то, что эти вспышки активности генерируются самой системой, они практически никак не зависят от внешних воздействий. При этом длительность интервалов между вспышками, длительность самих вспышек, их амплитуда и т.п. совершенно случайны и не подчиняются никаким закономерностям.

Прерванное равновесие характерно для многих областей, таких как биологическая эволюция, социальные и рыночные процессы, гидродинамика, сейсмология и т.п. Некоторые кажущиеся необъяснимыми нарушения режимов

работы и даже аварии крупного химического, энергетического оборудования, компьютерных информационных сетей, резкие изменения моды и т.п. объясняются именно этим эффектом.

Переход от периодических колебаний к хаосу может происходить скачком, в результате



одной единственной бифуркации. Такой механизм возникновения хаоса называют “жестким”. Он сопровождается явлением перемежаемости.

Перемежаемостью называют режим чередования во времени почти регулярных колебаний (ламинарная фаза) с интервалами хаотического поведения (турбулентная фаза), наблюдающийся сразу за порогом возникновения хаоса.

Рис. 30. Пример перемежаемости.

перемежаемости.

2.5 Примеры динамических систем с детерминированным хаосом

В качестве примера нелинейной системы рассмотрим периодически возбуждаемый маятник, т.е. колеблющийся маятник, на который время от времени воздействует внешняя сила. Уравнение его движения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + g \sin \varphi = F \cos \omega t \quad (7)$$

где γ — постоянная затухания, g — ускорение свободного падения, ω — частота возбуждающей силы; масса принята за единицу. Это уравнение численно интегрировалось для различных значений параметров (γ, g, F, ω), и в Табл. 1 показано, что зависимость угла θ от времени «выглядит хаотической», если амплитуда вынуждающей силы превосходит некоторую пороговую величину F_c . То, что сигнал выглядит случайным, является возможным, но не очень точным критерием хаотичности.

Чтобы отличить от хаоса многопериодическое движение (которое, как и хаос, может выглядеть сложным), часто прибегают к фурье-преобразованию сигнала $x(t)$:

$$x(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{i\omega t} x(t) dt \quad (8)$$

Для многопериодического движения спектр мощности

$$P(\omega) = |x(\omega)|^2 \quad (9)$$

состоит только из дискретных линий на определенных частотах, тогда как хаотическое движение, которое совершенно аperiodично, представляется сплошной широкой полосой на низких частотах. Такой переход от периодического движения к хаосу представлен во второй строке Табл. 1, где показан спектр мощности x -компоненты скорости жидкости в эксперименте Бенара.

Табл. 1. Обнаружение хаоса в простых системах.


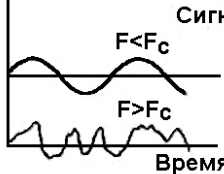

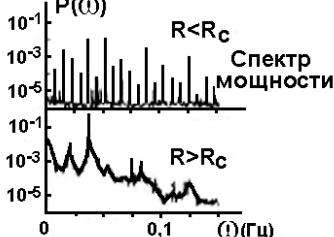
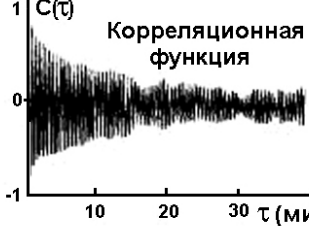
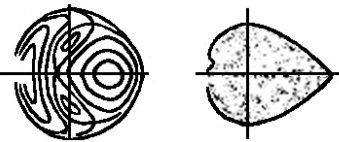
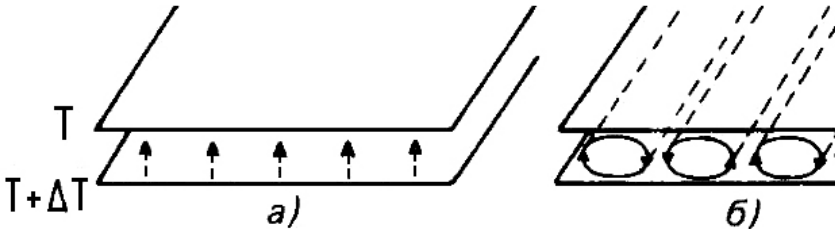
<p>Маятник</p> 	$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + g \sin \theta = F \cos \omega t$ $x = \theta, \quad y = \theta, \quad z = \omega t$ $\dot{x} = y$ $\dot{y} = -\gamma y - g \sin z + F \cos z$ $\dot{z} = \omega$	<p>$\theta(t)$</p>  <p>Сигнал $F < F_c$ $F > F_c$ Время, t</p>
<p>Эксперимент Бенара</p> 	$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$ $\dot{y} = r x - y - xz$ $\dot{z} = xy - bz$	<p>$P(\omega)$</p>  <p>$R < R_c$ Спектр мощности $R > R_c$ 0 0,1 ω (Гц)</p>
<p>Реакция Белоусова-Жаботинского</p> <p><chem>Ce2(SO4)3</chem></p> <p><chem>Ce4+</chem></p>	$\dot{x} = F(x, \lambda)$ $x = [C_1, C_2, \dots, C_d]$	<p>$C(\tau)$</p>  <p>Корреляционная функция 1 0 -1 10 20 30 τ (мин)</p>
<p>Система Хенна-Хейлесса</p>	$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (p_i^2 + q_i^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$ $\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$	<p>Отображение Пванкаре</p> 
 <p>а) б)</p>		

Рис. 31. Неустойчивость Бенара.

Другим примером возникновения детерминированного хаоса является возникновение ячеек Бенара. В этом эксперименте слой жидкости (с положительным коэффициентом объемного расширения) подогревается снизу в поле тяготения, как показано на рис. 31. Нагретая жидкость вблизи дна «стремится» подняться, а холодная вблизи крышки — опуститься, но этим движениям

противодействуют вязкие силы. При малых разностях температур ΔT преобладает вязкость, жидкость покоится и тепло переносится постоянной теплопроводностью. Это состояние становится неустойчивым при критическом значении R_a числа Рэлея R (пропорционального ΔT , и появляются стационарные конвективные валы. С дальнейшим ростом R после второго порога R_c наблюдается переход к хаотическому движению. В Табл.1 приведены спектры мощности x -компоненты скорости, измеренной по эффекту Доплера при рассеянии света.

Для теоретического описания эксперимента Бенара Э.Лоренц упростил сложные дифференциальные уравнения, описывающие эту систему, и получил дифференциальные уравнения так называемой модели Лоренца (см. систему). Численный анализ этой простой системы нелинейных дифференциальных уравнений показывает, что её переменные могут проявлять хаотическое поведение при превышении порога r_c .

Замечание. Уравнения Лоренца описывают эксперимент Бенара только непосредственно вблизи перехода от теплопереноса к конвективным валам, так как пространственные фурье-коэффициенты, оставленные Лоренцем в системе уравнений, описывают только простые валы. Хаос, обнаруженный Лоренцем в уравнениях (3), таким образом, отличается от хаоса, наблюдаемого по экспериментальному спектру мощности (Табл. 1). Для описания экспериментально наблюдаемого хаоса необходимо сохранить гораздо больше пространственных фурье-компонент.

Ещё одна экспериментальная система, в которой подробно исследовано хаотическое поведение, — это реакция Белоусова — Жаботинского. Органические молекулы (например, малоновой кислоты) окисляются бромат-ионами при катализе окислительно-восстановительной системой ($\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$). Реагентами являются $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$, NaBrO_3 , $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$, H_2SO_4 , которые участвуют в 18 элементарных реакциях.

Обобщенные уравнения для концентраций (C_i) реагентов в системе химических реакций — также система нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\frac{d}{dt} X = F(x, \lambda), \quad (10)$$

где $x = (C_1, C_2, \dots, C_d)$, F — нелинейная функция $\{C_i\}$, λ — внешний управляющий параметр. Переменная, проявляющая хаотическое поведение в реакции Белоусова — Жаботинского, — концентрация c ионов Ce^{4+} , измеряемая по селективному поглощению света этими ионами. Среднее время пребывания веществ в проточном реакторе является внешним управляющим параметром, соответствующим R в предыдущем эксперименте.

В Табл. 1 показан переход к хаосу в этой системе, обнаруживаемый по изменению автокорреляционной функции

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \hat{C}(t) \hat{C}(t + \tau) dt; \quad \hat{C}(t) = C(t) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(t) dt \quad (11)$$

Эта функция есть мера корреляции между последовательными значениями сигнала. Для регулярных движений она постоянна или осциллирует, а в хаотическом режиме быстро падает (чаще всего экспоненциально).

Наконец, рассмотрим простой пример из классической механики — неинтегрируемую систему, проявляющую хаотическое поведение. Гамильтониан H этой системы приведен в Табл. 1.

Гамильтониан, оператор Гамильтона – оператор полной энергии $\hat{H} = \hat{E} + \hat{U}$, где \hat{E} – оператор кинетической энергии, \hat{U} – оператор потенциальной энергии.

Чтобы обнаружить хаос, строились точки, в которых траектория в фазовом пространстве $x(t) = [p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t)]$ (12)

пересекает плоскость, пересекает плоскость (p_2, q_2) (здесь p_i и q_i — импульсы и координаты). Так получают сечения Пуанкаре. В Табл. 1 показано, что для системы Хенона — Хейлеса при достаточно большой энергии (которая является управляющим параметром для этой системы) точки на сечении Пуанкаре начинают заполнять плоскость. Это свидетельствует о высокой степени нерегулярности, т. е. о хаотическом движении траектории в фазовом пространстве.

Ещё один пример возникновения хаоса - динамика популяции в замкнутой среде. Он был описан ещё в 1845 г. П. Ф. Ферхюльстом. Относительная (нормированная) численность особей x_{n+1} в $n+1$ -й год пропорциональна численности в предыдущий год, а также свободной части жизненного пространства, которая пропорциональна $(1 - x_n)$, т. е. $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$, где параметр r зависит от плодовитости, реальной площади для жизни и т. д.

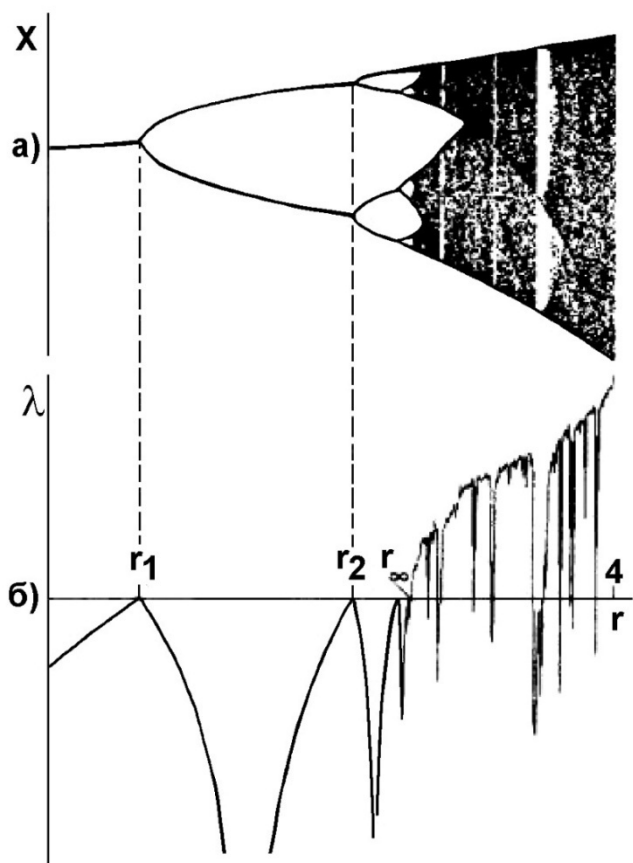


Рис. 32. а - Итерации логистического отображения (динамика эволюции популяции Ферхюльста); б - показатель Ляпунова L.

Уравнение для динамики популяции подходит и для решения задачи о банковских сбережениях при стабилизирующем росте процента. Пусть денежный вклад z_0 растёт в соответствии с процентом ε следующим образом: $z_{n+1}=(1+\varepsilon)z_n=\dots=(1+\varepsilon)^{n+1}z_0$. Желая воспрепятствовать беспредельному обогащению, какой-нибудь политик мог бы предложить, чтобы процент уменьшался пропорционально z_n , т. е. $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0(1-z_n/z_{max})$. Тогда счёт в банке изменялся бы в соответствии с законом $z_n=[1+\varepsilon_0(1-z_n/z_{max})]z_n$, который превращается в уравнение (логистическое отображение, которое например, описывает и поведение быстро успокаивающегося ротатора, на который действуют толчки).

$$x_{n+1}=f_r(x_n)=rx_n(1-x_n) \quad (13)$$

при $x_n=z_n\varepsilon_0/z_{max}(1+\varepsilon_0)$ и $r=z_{max}(1+\varepsilon_0)^2/\varepsilon_0$.

Казалось бы, можно ожидать, что благодаря механизму обратной связи, интересующие нас величины (численность популяции или величина банковского счёта) будут стремиться к некоторым средним значениям. Однако, итерации x_1, x_2, \dots отображения (13) при варьировании внешнего параметра r демонстрируют довольно сложное поведение, которое становится хаотическим при больших r (рис. 32). Свойства фейгенбаумовского перехода мы рассмотрим в отдельной лекции.

Рассмотрим теперь ещё один важный случай - переход к хаосу через перемежаемость.

Под перемежаемостью понимают такой вид сигнала, в котором случайным образом чередуются длинные регулярные (ламинарные) фазы (так называемые окна) и относительно короткие нерегулярные всплески. Известно, что число хаотических всплесков нарастает при увеличении внешнего параметра, а это означает, что перемежаемость представляет собой непрерывный переход от регулярного движения к хаотическому. Перемежаемость позволяет дать универсальное объяснение происхождения фликкер-шума в нелинейных системах.

При численном решении дифференциальные уравнения модели Лоренца для Y -компоненты обнаруживается поведение, показанное на рис. 33. При $r < r_c$ реализация $Y(t)$ представляет собой устойчивое периодическое движение. При превышении порога r_c колебания прерываются хаотическими всплесками, которые с ростом r становятся все более частыми, пока движение полностью не хаотизируется. Это связано с тем, что устойчивым колебаниям при $r < r_c$ соответствует устойчивая неподвижная точка на отображении Пуанкаре. При $r > r_c$ эта точка становится неустойчивой. Так как это может произойти лишь тремя путями, то различают три рода перемежаемости.

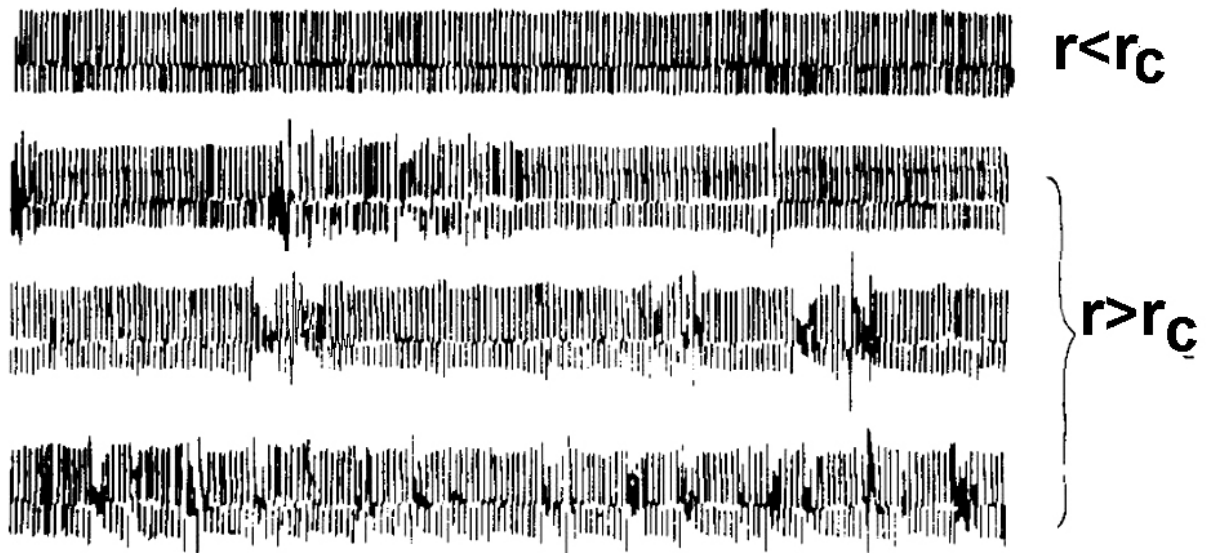


Рис. 33. Развитие во времени одной из составляющих в модели Лоренца.

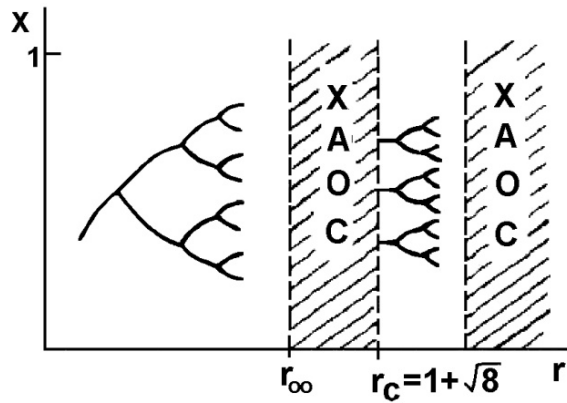


Рис. 34. "Окно" периода 3 в области хаотического режима.

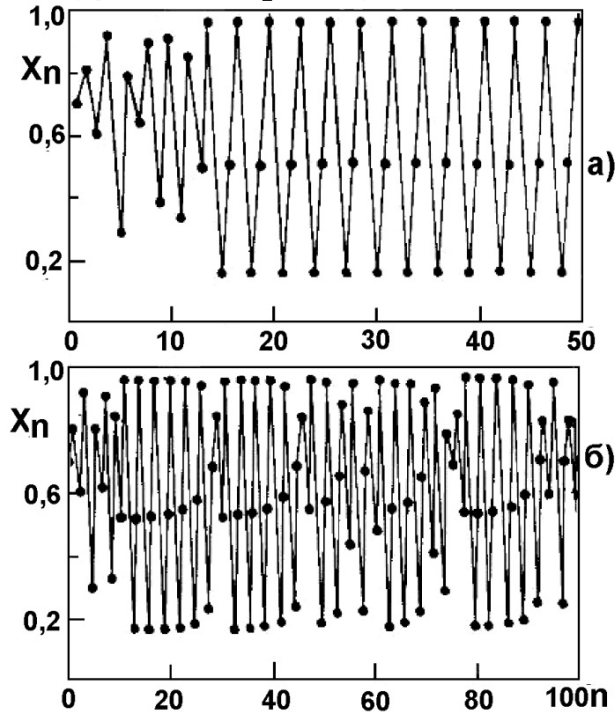


Рис. 35. Последовательность итераций логистического отображения, начинающаяся с $x=0,7$; а - в области устойчивого цикла периода 3 при $r_c-r=-0,02$; б - в области перемежаемости при $r_c-r=0,002$.

Пример перемежаемости 1-го рода — уже упоминавшееся ранее логистическое уравнение $x_{n+1}=f_r(x_n)=rx_n(1-x_n)$. Численный счёт показывает, что при $r_c = 1 + \sqrt{8}$ это отображение порождает цикл периода три с последующими бифуркациями, т. е. в хаотическом режиме существует окно (рис. 34). Последовательные итерации при значениях r , больших и меньших r_c , представлены на рис. 35. При r , несколько большем r_c , существует регулярный цикл периода 3, а ниже ламинарные области прерываются хаосом.

Перемежаемость тесно связана с фликкер-шумом, что мы обсудим в отдельной лекции.

Исследование эволюции динамических систем - практически важная задача. Например, при обтекании упругой пластины сверхзвуковым потоком воздуха возможно возбуждение колебаний этой пластины (в том числе и хаотических) и последующее ее механическое разрушение. Этот эффект известен под названием флаттер пластины. Он был причиной крупных авиакатастроф в эпоху развития сверхзвуковой авиации. Такие колебания наблюдались также во внешних оболочках ракет "Сатурн", доставивших человека на Луну в начале семидесятых.

Хаотические колебания возможны и в других механических и магнитомеханических устройствах, например, в устройствах на магнитной подушке, которые появляются при увеличении скорости движения. Хаотические обращения магнитного поля Земли с интервалом в сто тысяч лет заставили заняться изучением так называемого магнитного динамо — проводящего диска, вращающегося в магнитном поле, где такой эффект был действительно обнаружен. Нелинейные колебания в сердечной мышце ответственны за сокращения сердца и поддержания жизни организма. Однако в отсутствие управляющих сигналов со стороны головного мозга они могут перейти в хаотический режим и привести к смерти. Экономические потрясения (кризисы) нашего столетия вынуждают задумываться о возможности их прогнозирования. Атмосферные катаклизмы, такие, как, например, торнадо (мощные атмосферные вихри), иногда способны разрушить целые деревни и города и унести десятки и сотни человеческих жизней. Как и где они зарождаются? Нельзя ли их предотвратить или предсказать их появление? Наконец, неразгаданная пока тайна нашей памяти, проблема поиска информации в ней и т.д. и т.п.

Понимание природы детерминированных хаотических процессов необходимо прежде всего для того, чтобы ими управлять или предсказывать (с какой-то вероятностью) их эволюцию. В последнее время выяснилось, что наложение слабой обратной связи на систему может привести к трансформации хаотического сигнала в регулярный во времени. Оказалось, что управлять хаотическими системами в этом смысле даже проще, чем детерминированными. Это расширяет возможности строительной механики, авиации, практической твердотельной электроники, лазерной техники. Это также очень важно в биологии, потому что в режиме управляемого хаоса работает, например, наше сердце. Возможно, на этом пути лежит и решение проблемы управляемого термоядерного синтеза. Неустойчивости в плазме — это ведь тоже источник хаотического, непредсказуемого ее поведения.

Детерминированные хаотические сигналы могут быть и полезны, например, при кодировании и декодировании секретной информации. Наконец, изучение всех этих проблем, часто очень непростых с математической точки зрения, привело к появлению новых идей в физике, нового языка хаотической динамики — фрактальной геометрии, странных аттракторов и многого другого, что составляет содержание современной науки о детерминированном хаосе.