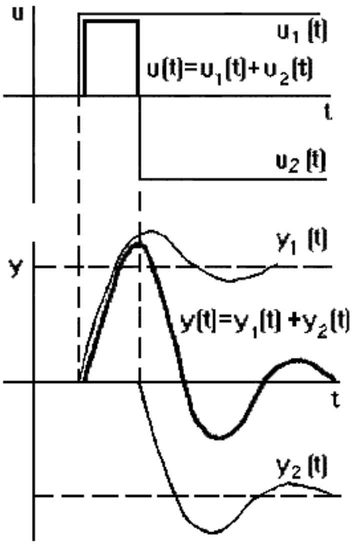
4. ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕМБРАНЫ

4.1 Временные характеристики динамической системы



Для оценки динамических свойств системы и отдельных звеньев принято исследовать их реакцию на типовые входные воздействия, которые наиболее полно отражают особенности реальных возмущений. Во - первых, это позволяет сравнивать отдельные элементы между собой с точки зрения их динамических свойств. Во - вторых, зная реакцию системы на типовые воздействия, можно судить о том, как она будет вести себя при сложных изменениях входной величины.

Наиболее распространенными типовыми воздействиями являются: ступенчатое, импульсное и гармоническое воздействия. Любой сигнал u(t), имеющий сложную форму, можно разложить на сумму типовых воздействий $u_i(t)$ и исследовать реакцию системы на каждую из составляющих, а затем, пользуясь принципом суперпозиции, получить результирующее изменение выходной величины y(t) суммируя полученные таким образом составляющие выходного сигнала $y_i(t)$.

Особенно важно ступенчатое воздействие

$$1(t)=\begin{cases}1, & при\ t\geq 0\\ 0, & при\ t<0.\end{cases} \quad (63)$$

Все остальные воздействия могут быть сведены к нему. Так, например, реальный импульсный сигнал может быть представлен двумя ступенчатыми сигналами одинаковой величины, но противоположными по знаку, поданными один за другим через интервал времени Δt. Зависимость изменения выходной величины системы от времени при подаче на ее вход единичного ступенчатого воздействия при нулевых начальных условиях называется переходной характеристикой и обозначается h(t). Не менее важное значение уделяется импульсной переходной характеристике, которая описывает реакцию системы на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях. Единичный импульс физически представляет из себя очень узкий импульс, ширина которого стремится к нулю, а высота - к бесконечности, ограничивающий единичную площадь.

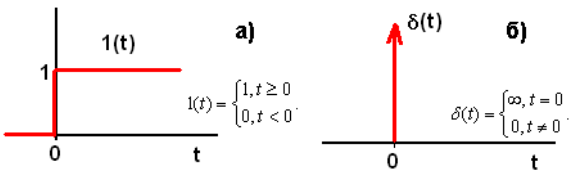
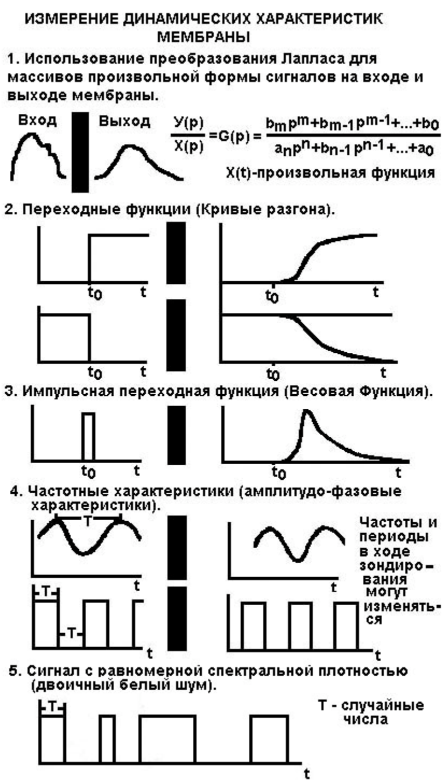


Рис. 64. Единичный ступенчатый сигнал (сигнал, который при любом t>=0 равен 1, а при t<0 численно равен нулю) (а) и дельта-импульс δ(t) (сигнал, который при t=0 равен бесконечности, а при всех отличных от нуля значениях аргумента численно равен нулю) (б).



Переходная и импульсная переходная характеристики называются временными характеристиками. Каждая из них является исчерпывающей характеристиками системы и любого ее звена при нулевых начальных условиях. По ним можно однозначно определить выходную величину при произвольном входном воздействии. Зная передаточную функцию, выражение для переходной функции можно найти из формулы Хевисайда. Взяв производную от переходной функции, получим импульсную переходную функцию.

Реакцию цепи y(t) можно вычислить при помощи интеграла Дюамеля.

$$y(t)=f(0)\cdot h(t)+\int_0^{\tau} f'(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \quad (64)$$

где f(0) h(t) - реакция системы на начальный скачок f(t) при t=0; h(t) - переходная характеристика; $f^{/}(x)$ - производная от воздействия по времени в точке t=τ; h(t-τ) - переходная характеристика, в которой вместо t подставляют t-τ.

4.2 Переходные функции

Переходная характеристика (переходная функция) *h(t) – реакция системы на входное единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях.*

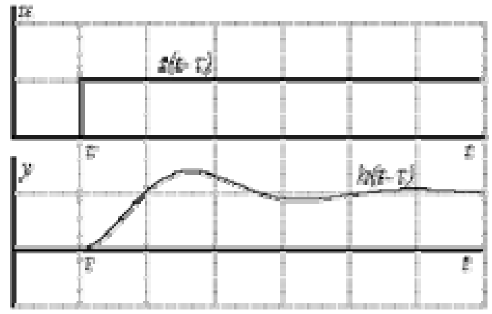


Рис. 65. Переходная характеристика системы (τ - момент возникновения входного воздействия)

Чтобы определить переходную характеристику аналитически, следует решить дифференциальное уравнение при нулевых начальных условиях и переменной концентрации на входной поверхности мембраны. Передаточную функцию можно определить с помощью изображений Лапласа или Карсона-Хевисайда. Если подвергнуть одному из этих преобразований обе части дифференциального уравнения и найти соотношения между входными и выходными величинами при нулевых начальных условиях, то получим искомую передаточную функцию. Переход от дифференциальных уравнений к передаточным функциям и обратно осуществляется с помощью оператора дифференцирования $p=d/dt$.

Выходная переменная находится через импульсную переходную функцию

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad (65)$$

Подвергнем его преобразованию Лапласа,

$$L[y(t)]=L\left[\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau\right],$$

и получим $y(s) = g(s)u(s)$. Отсюда определим импульсную переходную функцию:

$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=W(s) \qquad (66)$$

Таким образом, передаточная функция - есть преобразование по Лапласу от импульсной переходной функции

Импульсная характеристика (функция) *- реакция системы на входное единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях.*

Импульсная переходная функция ***(импульсная переходная характеристика**, **импульсная характеристика**, **ИПФ**) - выходной сигнал динамической системы как реакция на входной сигнал в виде дельта-функции Дирака. В цифровых системах входной сигнал представляет собой простой импульс минимальной ширины (равной периоду квантования для дискретных систем) и максимальной амплитуды. В применении к фильтрации сигнала называется также **ядром фильтра**. Находит широкое применение в теории управления, обработке сигналов и изображений, теории связи и других областях инженерного дела.*

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$1)\ \delta(t-\tau)=\begin{cases}0, & t\neq\tau\\ \infty, & t=\tau\end{cases};\ 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)d\tau=1. \qquad (67)$$

С помощью дельта-функции моделируется реальное входное воздействие типа удара.

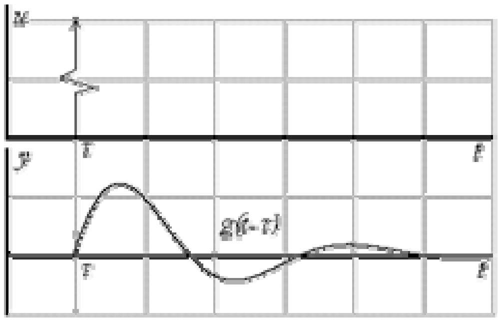


Рис. 66. Импульсная характеристика системы

Импульсная функция позволяет вычислить реакцию системы на произвольное входное воздействие при нулевых начальных условиях по выражению

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \qquad (68)$$

т.е. выходной сигнал линейной системы может быть получен как свертка его входного сигнала и импульсной характеристики системы, либо, в случае цифровой системы

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}u(k)g(n-k), \quad n=0,1,2... \qquad (69)$$

Для того, чтобы система была физически реализуема, ее импульсная переходная функция должна удовлетворять условию: $h(t)=0$ при $t<0$. В противном случае система нереализуема, так как она нарушала бы причинно-следственную связь: отклик появляется на выходе раньше, чем на вход поступило воздействие.

Переходная и импульсная функции однозначно связаны между собой соотношениями

$$g(t-\tau)=\dot{h}(t-\tau), \quad h(t-\tau)=\int_0^t g(t-\tau)d\tau, \quad (70)$$

что позволяет по одной известной характеристике определить вторую.

Для реальной системы переходную характеристику можно получить экспериментальным путем; при этом на вход системы следует подавать ступенчатое воздействие и фиксировать реакцию на выходе. Если ступенчатое воздействие отлично от единицы, то характеристику на выходе следует разделить на величину входного воздействия.

Зная переходную характеристику, можно определить реакцию системы на произвольное входное воздействие с помощью интеграла свертки

$$y(t)=h(t)u(t)+\int_0^t h(t-\tau)\dot{u}(\tau)d\tau \qquad (71)$$

где τ- переменная интегрирования.

Важным свойством импульсной характеристики является тот факт, что на её основе может быть получена комплексная частотная характеристика, определяемая как отношение комплексного спектра сигнала на выходе системы к комплексному спектру входного сигнала. Частотная характеристика фильтра определяется как преобразование Фурье (дискретное преобразование Фурье в случае цифрового сигнала) от импульсной характеристики.

$$H(i\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-2\pi j\omega\tau} \qquad (72)$$

4.3 Форма выходных импульсов проницаемости

На **Рис. 67** представлена амплитудная частотная характеристика прямоугольного импульса до и после прохождения его через мембрану. Видно, что в ходе диффузии, в первую очередь, падает амплитуда волн высокой частоты. Разложив входной и выходной импульсы на частотные характеристики, найдем частотный спектр мембраны. Сравнив экспериментальный спектр с эталонным, получим спектр коэффициентов диффузии. Импульсный вариант аналогичен методу концентрационных волн, но число экспериментов значительно сокращается, т.к. подобрав соответствующую длительность импульса, мы можем исследовать мембрану сразу на всех интересующих нас частотах.

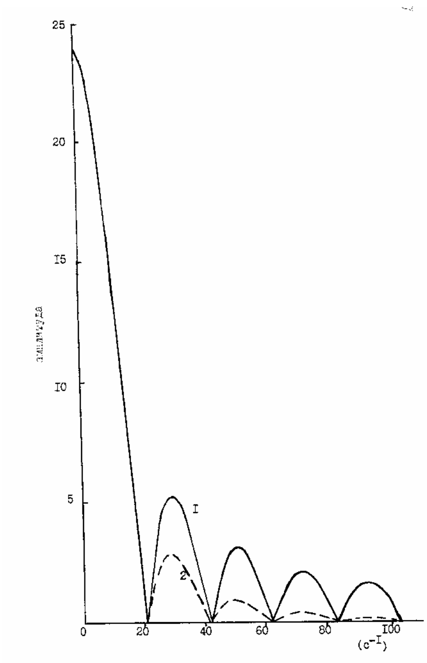


Рис. 67. Влияние коэффициента диффузии на амплитудную характеристику прямоугольного импульса (H = 0,01 см) 1 – D =∞ (вход мембраны), 2 – $D = 10^{-7}$ см^2/с.

Вернёмся к задаче проницаемости.

Если на вход мембраны подано колебание с амплитудным спектром $S_y(\omega)$, то на выходе будут получены колебания с амплитудным спектром $S_x(\omega)$. Между этими величинами существует соотношение, которое определяет частотную характеристику мембраны $B(\omega)$:

$$B(\omega)=\frac{S_x(\omega)}{S_y(\omega)} \qquad (73)$$

При этом фазовые спектры смещаются на величину φ(ω), также зависящую от частоты:

$$\phi_x(\omega)=\phi_y(\omega)+\varphi(\omega) \qquad (74)$$

Величина φ(ω) называется фазовой характеристикой мембраны.

Для линейной системы из n элементов частотные характеристики перемножаются:

$$B(\omega)=B_1(\omega)B_2(\omega)\cdots B_n=\prod_{i=1}^{n} B_i(\omega) \qquad (75)$$

а фазовые характеристики складываются

$$\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+.....+\varphi_n(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega) \qquad (76)$$

Вследствие зависимости величин B(ω) и φ(ω) от частоты, сигналы, прошедшие сквозь линейную систему, претерпевают линейные искажения – спектры их амплитуд и фаз преобразуются.

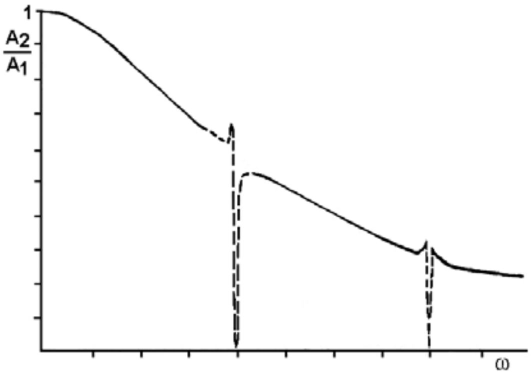
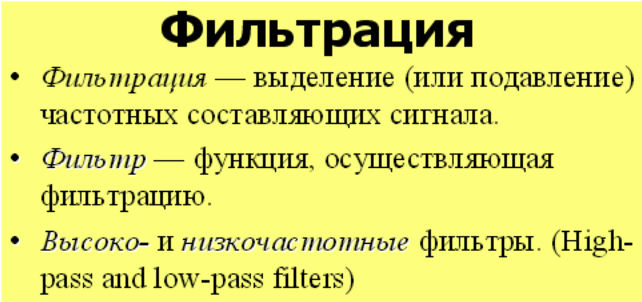


Рис. 68. Частотная зависимость переходной функции проницаемости. Ликвидация разрывов требует использования специальных методов регуляризации.

Линейные искажения вносятся в систему для осуществления частотной селекции. Если подавляются низкие частоты, а высокие относительно усиливаются, то мы имеем дело с фильтрацией высоких частот, в противном случае фильтрация называется низкочастотной. Если усиливаются колебания в некоторой области частот, такая фильтрация называется полосовой. Частоты, в пределах которых сигнал усиливается, называются граничными, а частота, соответствующая максимальной амплитуде, - средней частотой полосы пропускания. Разность граничных частот носит название ширины полосы пропускания. Наклон всей частотной характеристики B(ω) даёт крутизну характеристики:



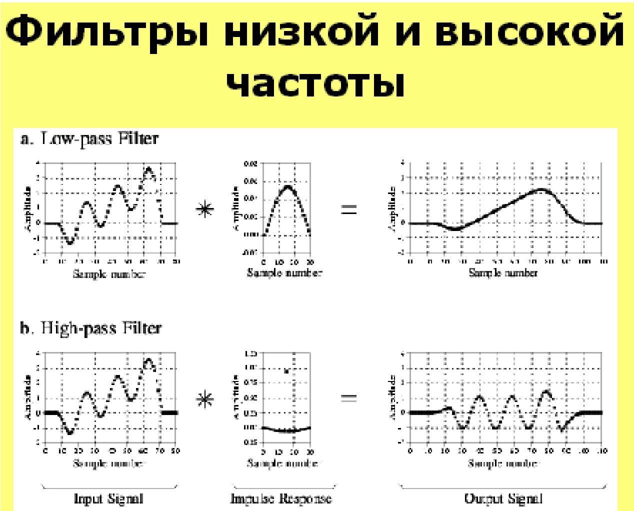
$$k(\varphi) = \frac{dB(\omega)}{d\omega} \qquad (77)$$

Часто вместо крутизны k(ω) употребляют логарифмическую крутизну частотной характеристики:

$$\Gamma(\omega) = \frac{d\ln B(\omega)}{d\ln\omega} = \frac{dB(\omega)}{d\omega}\cdot\frac{\omega}{B(\omega)} \quad \left[\frac{дб}{окт}\right] \qquad (78)$$

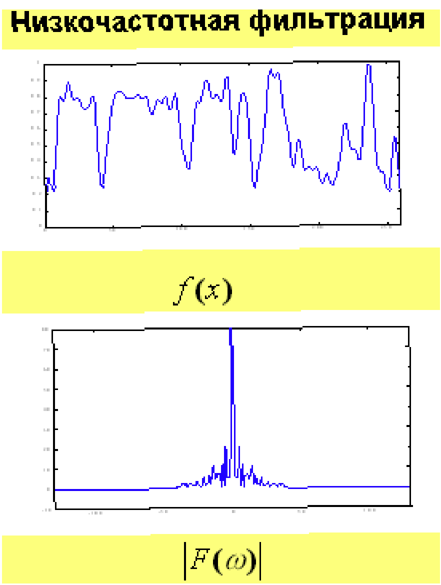
Частоты, при которых определяется крутизна, должны отличаться на октаву, т.е. $\omega_2 = 2\omega_1$.

4.4 Цифровая фильтрация



Практика показала, что обработка реальных экспериментальных кривых газопроницаемости методом частотных характеристик невозможна без подавления шумов на частотных характеристиках (а так же эффектов «деления на ноль», поскольку функция в знаменателе переходной характеристики имеет дурную привычку периодически становиться равным нулю), т.е. без использования цифровой фиьтрации.

Под термином "цифровая фильтрация" обычно понимают локальную цифровую обработку сигнала скользящим окном. При этом полагают, что размер окна много меньше размера выборки обрабатываемого фрагмента сигнала. Для каждого положения окна, за исключением, возможно, небольшого числа крайних точек выборки, выполняются однотипные действия, которые определяют так называемый отклик или выход фильтра. Если действия, определяющие отклик фильтра, не изменяются в процессе перемещения по выборке сигнала, то соответствующий фильтр называется стационарным. В противном случае фильтр называется нестационарным. Различают линейную и нелинейную цифровую фильтрацию.



Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) показывает зависимость коэффициента передачи фильтра от частоты сигнала подаваемого на вход фильтра. Это одна из важнейших характеристик фильтра. Коэффициент передачи - это отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного. Если коэффициент передачи равен 1, это означает, что сигнал на выходе совпадает по амплитуде с входным. Если коэффициент передачи меньше 1, значит сигнал с данной частотой подавляется фильтром.

Коэффициент передачи принято измерять либо в абсолютных единицах, либо в логарифмических - децибелах (dB). Это десятые доли

Белла. А Белл - это десятичный логарифм от коэффициента передачи. В радиоэлектронике принято измерять коэффициент передачи для мощности сигнала, а не для амплитуды, отсюда появляется множитель 2. Абсолютные и логарифмические единицы связаны формулой:

$$M(dB)=20Log10(M)$$

Для логарифмических единиц полезно запомнить пару цифр. Значению в 6dB соответствует уменьшение амплитуды в 2 раза и соответствующую частоту принято называть частотой отсечки фильтра. Значению в 20dB соответствует уменьшение сигнала в 10 раз, значению 40dB уменьшение в 100 раз и т.д.

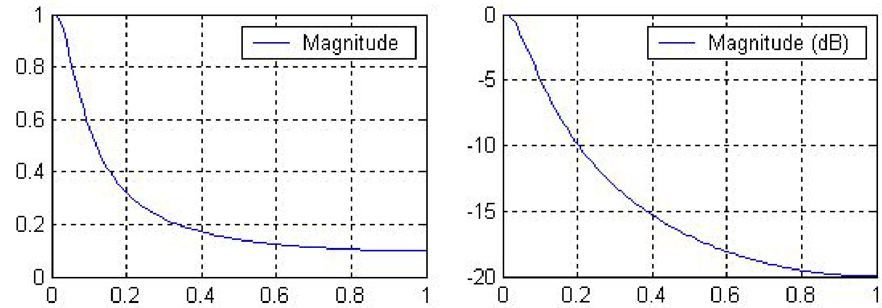


Рис. 69. Зависимость амплитуды сигнала на выходе фильтра в абсолютных единицах от нормализованной частот (левый график) и зависимость амплитуды сигнала на выходе фильтра в логарифмической шкале (dB) от нормализованной частоты (правый график)

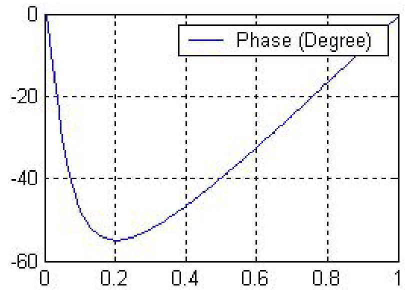
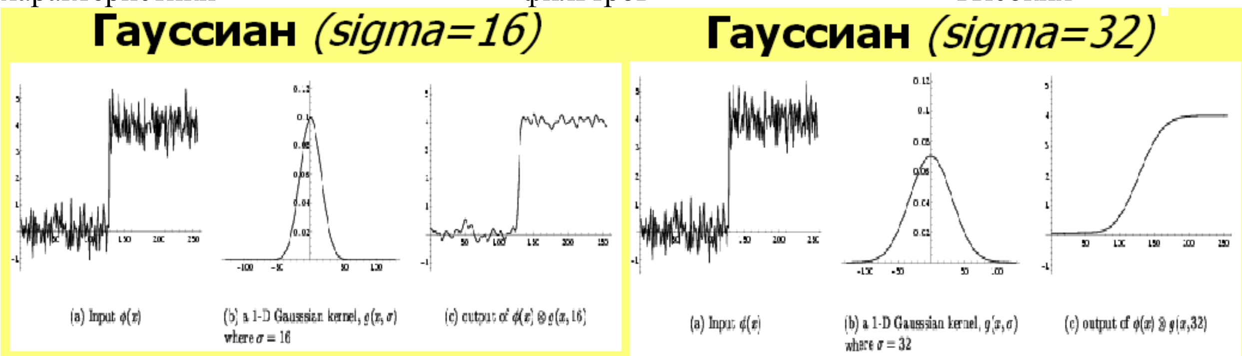


Рис. 70. Фазо-частотная характеристика фильтра

Сигнал на выходе цифрового фильтра представляет результат дискретной свертки входного сигнала и импульсной характеристики фильтра. Частотный коэффициент передачи цифрового фильтра является преобразованием Фурье импульсной характеристики и представляет собой периодическую функцию частоты с периодом равным частоте дискретизации. Возможности цифровой фильтрации значительно расширяются, если ввести обратную связь. Такие фильтры называются рекурсивными.

Математическим аппаратом для исследования цифровых фильтров и описания дискретных сигналов служат дискетное преобразование Фурье и его разновидность - быстрое преобразование Фурье, а также дискретное преобразование Лапласа и метод Z - преобразования, позволяющий успешно исследовать характеристики фильтров высоких порядков.



4.5 Мембрана, как низкочастотный фильтр

В сущности, в ходе проницаемости мембрана действует как интегрирующая цепочка – низкочастотный фильтр, т.е. подавляет высокие частоты и усиливает роль низких. Электрическая аналоговая цепочка, позволяющая моделировать переходные характеристики мембраны представлена на Рис. . Она представляет набор последовательно включённых сопротивлений и параллельно – ёмкостей (конденсаторов), один из контактов которых заземлён. Напряжение в некоторой точке – аналог напряжение. На вход подаётся изменяющееся в времени напряжение (входная концентрация), на выходе амперметр измеряет электрический ток – аналог потока диффузанта на выходе из мембраны. В этих условиях, нестационарный коэффициент диффузии:

$$D \propto \frac{1}{RC}, \qquad (79)$$

где R – сопротивление всей цепи, C – ёмкость всех конденсаторов.

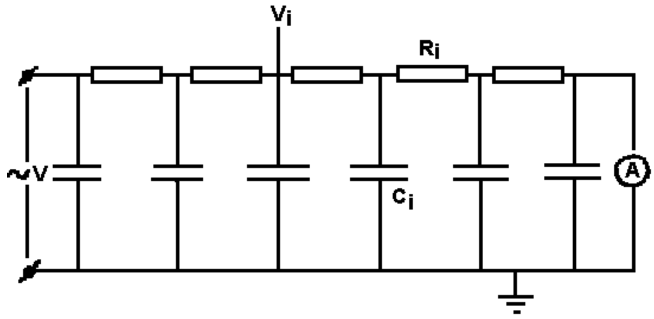


Рис. 71. Схема физического моделирования процесса газопроницаемости, иллюстрирующая действие мембраны как фильтра, отсекающего высокие частоты (высокие частоты стекают через конденсатор на землю).