

Профессор
И.Н.Бекман

ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

Лекция 10. КИНЕТИКА РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

В данной лекции мы рассмотрим кинетику радиоактивного распада: распад одного нуклида, смеси радионуклидов, распад генетически связанных радионуклидов, а также кинетику разветвлённого распада.

Математический аппарат, описывающий процессы распада и накопления, достаточно прост (формальная кинетика химической реакции 1-го порядка), но громоздок. Особенно это касается расчета активностей далеких потомков и случая ветвлений цепи.

1. ОСНОВНОЙ ЗАКОН РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

При радиоактивном распаде ядер соблюдаются законы сохранения:

- сохранение зарядового числа;
- сохранение массового числа;
- сохранение энергии.

Способность ядер самопроизвольно распадаться, испуская частицы, называется радиоактивностью. Радиоактивный распад - статистический процесс. Каждое радиоактивное ядро может распасться в любой момент, и закономерность наблюдается только в среднем, в случае распада достаточно большого количества ядер.

Каждое радиоактивное ядро распадается независимо от поведения всех других ядер, а потому общая скорость распада, т.е. число ядер, распадающихся в единицу времени (активность) пропорционально числу имеющихся радиоактивных ядер. Самопроизвольные превращения радиоактивных ядер приводят к непрерывному уменьшению числа атомов (ядер) исходного радиоактивного изотопа и к образованию дочерних продуктов. Радиоактивный распад относится к разряду вероятностных процессов, и к нему применимы методы статистического анализа.

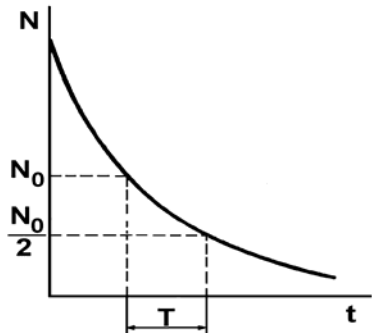
Уравнение радиоактивного распада (основной закон радиоактивного распада в дифференциальной форме) имеет вид:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N = A, \quad (1)$$

где N - число атомов, не претерпевших распад к моменту времени t , λ - константа, A - радиоактивность радионуклида.

Коэффициент пропорциональности λ называется константой (постоянной) радиоактивного распада (радиоактивной постоянной) и равен вероятности распада каждого отдельного ядра за единицу времени. Константа λ характеризует неустойчивость ядер радиоактивного изотопа. Из равенства

$$\lambda = -\frac{dN}{N dt} \quad (2)$$



очевидно, что постоянная распада λ численно равна доле атомов dN/N , распадающихся в единицу времени, при условии, что единица времени достаточно мала по сравнению с периодом

Рис.1. Типичная кривая радиоактивного распада

полураспада, T имеет размерность обратного времени и чаще всего выражается в сек^{-1} . Смысл основного закона радиоактивного распада состоит в том, что за равные промежутки времени подвергается распаду постоянная часть от общего количества имеющихся в данный момент атомов радиоактивного изотопа.

Замечание. С математической точки зрения кинетика распада радионуклида полностью соответствует кинетике необратимой химической реакции 1-го порядка.

Интегрирование уравнения (1) при условии, что в начальный момент времени $t=0$ количество радиоактивных ядер составляет N_0 даёт

$$\ln N = -\lambda t + a \quad (3)$$

Постоянная интегрирования a определяется из начального условия: $N=N_0$ при $t=0$. Отсюда следует, что $a=\ln N_0$.

Сопоставляя эти выражения, получаем $\ln N/N_0=-\lambda t$ или $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Закон радиоактивного распада описывает убывание со временем среднего числа радиоактивных ядер:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (4)$$

Ур.2 представляет интегральный вид основного закона распада.

Замечание. Бесспорно, экспонента, как эмпирически найденная формула, вполне пригодна в качестве первого приближения к истине. Но нельзя относиться к ней как к научно-обоснованному фундаментальному закону радиоактивного распада. Экспонента – не физична. И не только по той очевидной причине, что она простирается до бесконечности, асимптотически приближаясь к оси времени, хотя даже Вселенная существует не бесконечно долго. В уравнение экспоненты не заложено никакого физического смысла кроме простейшего предположения (недоказуемого на теоретическом уровне) об отсутствии причинно-следственной взаимосвязей между отдельными актами распада. Но самый главный недостаток экспоненциального закона – его несоответствие фундаментальным вариационным принципам природы (наименьшего действия и кратчайшего времени).

Согласно экспоненциальному закону, в равные промежутки времени всегда распадаются равные части имеющихся радиоактивных атомов. В качестве меры устойчивости радиоактивного нуклида используют период полураспада T , т.е. промежуток времени, в течение которого распадается половина данного количества радиоактивного нуклида:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,69315}{\lambda} \quad (5)$$

Период полураспада - время, требующееся для распада половины атомов данного радиоактивного вещества.

Замечание. На основании последнего соотношения можно получить формулу, позволяющую быстро рассчитать степень распада радиоактивного изотопа в течение времени, кратного периоду полураспада:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2^m} \quad (6)$$

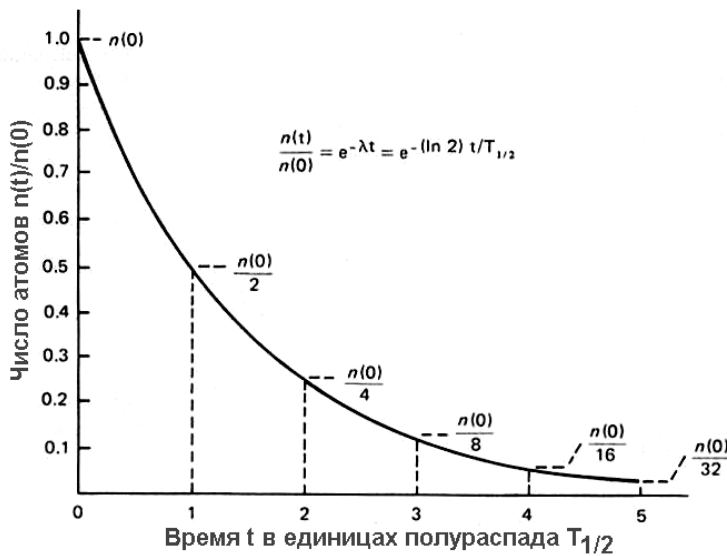


Рис. 2. Радиоактивный распад как функция времени, выраженная в периодах полураспада.

Периоды полураспада радиоактивных изотопов лежат в очень широких пределах: так, период полураспада ^{232}Th равен $1,39 \cdot 10^{10}$ лет, ^{226}Ra - 1617 лет, ^{210}Po - 138,401 день, $^{212}\text{Po}(\text{ThC})$ – $3,04 \cdot 10^{-7}$ сек. Величина периода полураспада определяется внутренними свойствами радиоактивных ядер и не зависит окружающих условий: температуры, давления, химического состояния радиоактивных веществ. Поэтому период полураспада является важной характеристикой радиоактивных изотопов; в частности можно проводить их идентификацию по периоду полураспада.

Скорость распада $-dN/dt$ атомов радиоактивного вещества называют абсолютной радиоактивностью (или абсолютной активностью) A препарата. Так как

$$A = \lambda N, \quad (7)$$

то закон радиоактивного распада можно переписать в виде:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (8)$$

Активность радиоактивного источника – число радиоактивных распадов в единицу времени.

Единице радиоактивности в системе СИ – беккерелю (Бк) – соответствует 1 распад в 1 сек. Внесистемная единица кюри (Ки) равна $3,7 \cdot 10^{10}$ Бк. Радиоактивность, приходящаяся на единицу массы источника называется удельной активностью.

Средняя продолжительность τ времени жизни атомов радиоактивного вещества определяется как сумма времён существования всех атомов данного изотопа, делённая на число атомов. Среднее время жизни радиоактивных ядер есть – по определению среднего:

$$\begin{aligned} \tau &= - \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t dN = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \\ &= - \left[\frac{\lambda t + 1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (9)$$

Среднее время жизни больше периода полураспада на фактор $1/0.693$. Легко видеть, что в течение времени $\tau=1/\lambda$ активность уменьшается до величины, составляющей $1/e$ от начального значения.

Среднее время жизни нуклида $\tau=1/\lambda$ - промежуток времени, в течение которого число имевшихся атомов уменьшается в e раз.

Среднее время жизни имеет фундаментальный физический смысл, т.к. это - время, которое входит в математическую формулировку принципа неопределённости Гайзенберга $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$, которое связывает неточность энергии системы, ΔE , с её временем жизни, Δt : $\tau \equiv \Delta t$.

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{0,658 \cdot 10^{-15} \text{ эВ}}{\tau(c)} \quad (10)$$

Величину ΔE называют шириной, Γ .

Замечание. Вывести уравнения для основного закона радиоактивного распада довольно просто.

Вероятностью появления некоторого случайного события называют отношение числа благоприятных событий к общему числу событий. Обозначим через M среднее число атомов, распадающихся за время t , а через N_0 - число исходных атомов. Тогда вероятность (p) того, что отдельный атом распадется в течение выбранного промежутка времени, будет равна:

$$p_t = M/N_0.$$

Вероятность же (q) того, что атом не распадется в течение времени t , равна:

$$q_t = 1 - p_t = \frac{N_0 - M}{N_0} = \frac{N_t}{N_0}$$

где $N_t = N_0 - M$ - среднее число атомов, не подвергшихся распаду за время t .

Вероятность $p \Delta t$ распада отдельного атома за время Δt не зависит от условий, в которых атом находился ранее или находится в данное время. Эта вероятность зависит только от величины интервала Δt и для достаточно малых отрезков времени пропорциональна Δt , таким образом:

$$p_{\Delta t} = \lambda * \Delta t,$$

где коэффициент пропорциональности λ является константой, характерной для данного радиоактивного изотопа.

Вероятность того, что атом не распадется в течение достаточно малого промежутка времени Δt , равна:

$$q_{\Delta t} = 1 - \lambda \Delta t.$$

Но если атом не распался в течение времени Δt , то вероятность того, что он не распадется в течение второго такого же промежутка времени, снова равна $(1 - \lambda \Delta t)$. Вероятность же того, что атом не распадется ни в первый, ни во второй промежутки времени, равна произведению этих вероятностей; рассуждая и далее подобным же образом, получаем:

$$q_{2\Delta t} = (1 - \lambda \Delta t)^2;$$

$$q_{3\Delta t} = (1 - \lambda \Delta t)^3;$$

.....

$$q_{n\Delta t} = (1 - \lambda \Delta t)^n.$$

Последнее выражение будет тем точнее, чем меньше рассматриваемые интервалы времени Δt . Принимая во внимание, что $\Delta t = t/n$, и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем:

$$q_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lambda \frac{t}{n} \right)^n = e^{-\lambda t}.$$

Подставляя сюда значение q_t , окончательно получим:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}.$$

На **Рис.1** представлена кривая изменения числа атомов радиоактивного изотопа со временем. Зависимость для изменения числа распадающихся атомов со временем:

$$M = N_0 \lambda e^{-\lambda t}.$$

Для малых значений λt достаточно точно выполняется равенство $e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t$; тогда:

$$M = N_0 \lambda t, \text{ или } M/t = \lambda N_0.$$

Отношение M/t представляет собой среднюю скорость распада, которую можно обозначить через $-dN/dt$ (знак минус указывает на убыль со временем числа атомов N радиоактивного изотопа) и, таким образом,

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (11)$$

Основной внесистемной единицей абсолютной активности является кюри (Ки, Ci), определявшееся первоначально как активность одного грамма радия, вернее, изотопа радия ^{226}Ra (что отвечает $3,62 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ для принятого теперь значения $T_{\text{Ra}}=1620$ лет), а ныне как активность препарата, в котором происходит $3,700 \cdot 10^{10}$ актов распада в секунду ($2,22 \cdot 10^{12}$ расп/мин). Дробные единицы: милликюри (мкюри, мКи), микрокюри, $\mu\text{Ки}$, мкКи. Другая единица – резерфорд (рд), равная $1/3700$ кюри, т.е. отвечающая активности 10^6 сек^{-1} . Концентрация радиоактивных веществ в воздухе, воде и т.д. измеряется в кюри/см³ или кюри/л. Применяются также единицы эман (10^{-13} кюри/см³) и махе (3,64 эмана). Грамм-эквивалент (г-эquiv) радия характеризует действие γ -излучения любого радиоактивного вещества, равное при тождественных условиях измерения действию γ -излучения одного грамма радия-226.

Единица активности в системе СИ - Беккерель (Бк, Bq), $1 \text{ Бк} = 1 \text{ расп/с}$; $1 \text{ Бк} = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ Ки}$. $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$;

Беккерель, единица СИ активности радиоактивных изотопов, названа по имени А.Беккереля, обозначается **1 Бк**. **1 Бк соответствует 1 распаду в секунду**.

Для смеси нескольких нуклидов указывается отдельно активность каждого нуклида. Концентрация радионуклидов измеряется в расп/сек*кг.

В **Табл. 1** в качестве примера приведены периоды полураспада и постоянные распада, а также удельные активности некоторых достаточно широко применяемых изотопов.

Табл. 1. Периоды полураспада некоторых радионуклидов.

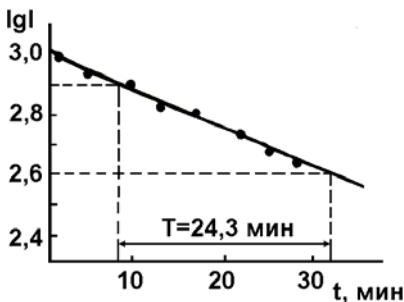
Изотоп	Период полураспада	Постоянная распада	Удельная радиоактивность
^3H	12.43 лет	0.056 лет^{-1}	28.7 Ки/ммоль
^{125}I	59.6 дней	0.0116 дней^{-1}	2190 Ки/ммоль
^{32}P	14.3 дней	0.0485 дней^{-1}	9128 Ки/ммоль
^{35}S	87.4 дней	0.0079 дней^{-1}	1493 Ки/ммоль

Массу m радионуклида активностью A можно рассчитать по формуле :

$$m = 2,4 \cdot 10^{-24} \cdot M \cdot T \cdot A \quad (12)$$

где M - массовое число радионуклида, A - активность в Беккерелях, T - период полураспада в секундах. Масса получается в граммах.

Рис. 3. Кривая распада в полулогарифмических координатах.



В практической работе с радиоактивными веществами абсолютная активность препаратов, как правило, не определяется непосредственно. Измерительные приборы, использующие различные свойства излучений, обычно дают величину, пропорциональную A ; эту величину называют регистрируемой активностью I . При работе со счётчиками ядерных частиц регистрируемой активностью является скорость счета, выражаемая в импульсах в минуту (имп/мин), а коэффициент пропорциональности, связывающий величину абсолютной и регистрируемой активности, называется коэффициентом счета (φ):

$$I = \varphi A \quad (13)$$

Экспериментальные кривые распада обычно строят в полулогарифмических координатах (**Рис. 2**). Величина логарифма активности индивидуального изотопа линейно изменяется со временем:

$$\lg I_t = \lg I_0 - 0,4343\lambda t. \quad (14)$$

Значение постоянной распада можно определить либо графически, по угловому коэффициенту α полулогарифмической прямой ($\text{tg}\alpha = -0,4343\lambda t$), либо непосредственным расчетом по уравнению (14). Отрезок абсциссы, соответствующий уменьшению регистрируемой активности вдвое, равен периоду полураспада.

Если в полулогарифмическом масштабе вместо прямой линии получается кривая, это свидетельствует о наличии в препарате более чем одного радиоактивного изотопа. В ряде случаев сложную кривую распада удается разложить на составляющие и определить периоды полураспада отдельных компонентов смеси.

Очень большие периоды полураспада определяются путем измерения абсолютной активности A известного весового количества P изотопа. Число атомов N изотопа рассчитывается по формуле:

$$N = P N_A / A_a \quad (15)$$

где N_A - число Авогадро, A_a - массовое число. Тогда:

$$\lambda = \frac{A^* A_a}{P^* N_A}, \quad T = 0,693 \cdot \frac{P^* N_A}{A^* A_a}. \quad (16)$$

Пример 1. Период полураспада ^{99m}Tc $T = 6$ часов. Через какое время останется 1/16-ая часть изотопа?

(а) Постоянная распада:

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{6} = 0,1155 \text{ час}^{-1}$$

Закон радиоактивного распада запишем в форме:

$$\frac{N_t}{N_0} = \exp(-\lambda t)$$

Согласно условиям задачи: $\frac{N_t}{N_0} = \frac{1}{16}$

Следовательно: $\frac{1}{16} = \exp(-0,1155t)$

откуда

$$t = \frac{\ln 16}{0,1155} = 24 \text{ час}$$

т.е. через 24 часа останется 1/16 от исходной радиоактивности.

(б) Воспользуемся определением периода полураспада. $T = 6$ час, следовательно через 6 часов останется половина изотопа, через 12 часов останется четверть, через 18 – 1/8, и через 24 часа – 1/16. Получили тот же ответ, что и в варианте (а).

Пример 2. Найти радиоактивность 1 г ^{226}Ra , при условии, что $T = 1620$ лет, число Авогадро $6,023 \cdot 10^{23}$, длина года 365,25 дн.

Постоянная распада радия: $\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{1620} = 4,28 \cdot 10^{-4} \text{ лет}^{-1} = 1,36 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}$

1 г ^{226}Ra содержит:

$$N = \frac{(\text{Число Авогадро}) \cdot (\text{Масса})}{\text{Массовое число}} = \frac{(6,023 \cdot 10^{23})(1\text{г})}{226} = 2,7 \cdot 10^{21} \text{ ядер}$$

Закон распада в дифференциальной форме: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$; или $\left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N$

Тогда: $\left| \frac{dN}{dt} \right| = (1,36 \cdot 10^{-11})(2,7 \cdot 10^{21}) = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ расп/сек.}$

Радиоактивность 1 г радия-226 оказалась примерно равной 1 кюри, что не удивительно, так как первоначально единица кюри и выбиралась, как радиоактивность 1 г радия!

Пример 3. Какая масса ^{99m}Tc имеет активность 1 МВq? $T_{1/2} = 6$ часов.

Постоянная распада $\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{6} = 0,1155 \text{ час}^{-1} = 3,21 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} = 3,21 \cdot 10^{-5}$

Т.к. $1 \text{ МБк} = 1 \cdot 10^6 \text{ расп/сек}$, то $\left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N = 1 \cdot 10^6 \text{ расп/сек}$, откуда $N = \frac{\left| \frac{dN}{dt} \right|}{\lambda} = \frac{1 \cdot 10^6}{3,21 \cdot 10^{-5}} = 3,116 \cdot 10^{10} \text{ ядер}$.

Масса этих ядер:

$$\text{Масса } N \text{ ядер} = \frac{(\text{Число ядер})(\text{Массовое число})}{\text{Число Авогадро}} = \frac{(3,116 \cdot 10^{10})(99)}{6,023 \cdot 10^{23}} \text{ г}$$

Таким образом, масса ^{99m}Tc всего в 5 пикограмм способна испустить 1 миллион γ -лучей в секунду. Вот почему так важно соблюдать правила безопасности при работе с радиоактивными препаратами!

2. СТАТИСТИКА РАСПАДА

Радиоактивный распад имеет статистическую природу; атомные ядра превращаются независимо друг от друга; каждый радионуклид имеет характерную для него вероятность распада. Для отдельного атома нестабильного нуклида нельзя предсказать момент времени его превращения. Вероятность распада обуславливается свойствами данного вида ядер, т.е. она не зависит от химического и физического состояния радионуклида. Продолжительность жизни каждого из радиоактивных ядер не задана точно, а лежит в пределах от 0 до ∞ , и вероятность того, что распад происходит в бесконечно малом интервале времени от t до $t+dt$, равняется $d\omega = e^{-\lambda t} \lambda dt$. За время, равное периоду полураспада T , лишь в среднем распадается половина первоначально имевшихся радиоактивных ядер; фактически число ядер, распавшихся в каждом данном опыте, может заметно отклоняться как в меньшую, так и большую сторону. Распределение числа наблюдений по числу происходящих за время наблюдений актов радиоактивного распада характеризуется так называемым биномиальным законом (распределением Бернулли), одним из параметров которого является ожидаемое на основании совокупности многочисленных экспериментов среднее число актов распада $P_n(N)$ за какой-то промежуток времени n ядер из общего числа N первоначально имевшихся радиоактивных ядер равняется:

$$P_n(N) = C_N^n \left(\frac{m}{N}\right)^n \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{m}{N}\right)^n \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{N-n} \quad (17)$$

где $m = \bar{n}$ - среднее число ядер, располагающихся в интервале такой длительности, а C_N^n - число сочетаний из N по n . При переходе к очень большому числу радиоактивных ядер, практически не изменяющемуся в интервале времени данной длительности ($N \rightarrow \infty$ или $m/N \rightarrow 0$), биномиальное распределение преобразуется в пуассоновское:

$$P_n(\infty) = \frac{m^n}{n!} e^{-m} \quad (18)$$

При таком виде распределения абсолютная флуктуация наблюдаемого числа распадов равняется:

$$\Delta_n = \sqrt{n^2 - \bar{n}^2} = \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{m} \quad (19)$$

Это означает, что если среднее число распадов в интервале данной длительности равняется $\bar{n} = m$, в большей части подобных интервалов фактическое число распадов n будет отличаться от m не более, чем на \sqrt{m} . Так, например, среднее число распадов за 1 мсек для препарата с радиоактивностью 1 мкюри равняется $m=37$. Фактическое число распадов за 1 мсек для этого препарата лежит, как правило, в пределах $37 \pm \sqrt{37}$, т.е. от 31 до 41. поэтому однократное измерение числа распадов такого препарата в течение 1 мсек даст величину его радиоактивности с точностью $\pm \frac{1}{\sqrt{37}} = \pm 16,1\%$. При измерении радиоактивности этого препарата в течение 1 сек

$m=37000$, $\Delta_n=192$, и величина радиоактивности определяется уже с гораздо большей точностью $\pm \frac{1}{\sqrt{37000}} = \pm 0,52\%$. Таким образом, вследствие статистического характера закона радиоактивного распада

точность всяких измерений радиоактивности улучшается с увеличением числа зарегистрированных актов распада, и зачастую именно требование определённой точности результатов задаёт необходимую длительность измерений.

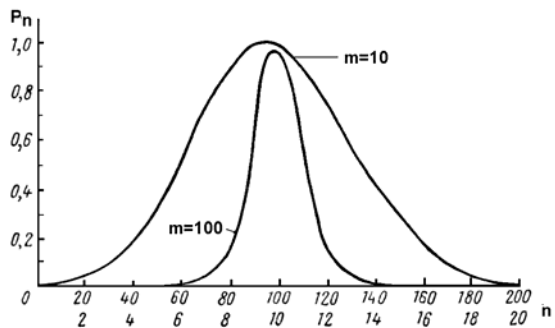


Рис. 4. Относительные вероятности чисел актов распада P_n в единицу времени при двух различных средних числах распада m . (Кривые распределения радиоактивных флуктуаций).

Законы радиоактивного распада носят статистический характер. Они верны лишь в тех случаях, когда числа атомов, распадающихся за единицу времени, достаточно велики, так что можно пренебречь относительно незначительными отклонениями

от средних значений рассматриваемых статистических величин. При малых скоростях распада статистические отклонения от среднего могут сыграть существенную роль.

Статистические отклонения при радиоактивном распаде подчиняются определённым закономерностям:

- Вероятность появления малых отклонений больше вероятности больших отклонений от среднего, иначе говоря, вероятность P_n появления статистических отклонений есть убывающая функция их величины.
- Вероятность появления случайных отклонений не зависит от их знака, т.е. статистические отклонения, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто. Значение истинной скорости распада может быть получено лишь как среднее при достаточно большой продолжительности наблюдений (если, конечно, можно пренебречь уменьшением количества радиоактивного изотопа за выбранное время). Различия в скоростях распада за равные промежутки времени при постоянной средней скорости распада называются радиоактивными флуктуациями.

На **Рис. 3** представлены относительные (т.е. не нормированные на единицу) вероятности чисел актов распада в единицу времени при средних скоростях распада m равных 10 и 100 частицам в единицу времени.

Таким образом, число ядер в радиоактивном образце, распадающихся в данный интервал времени, экспоненциально уменьшается во времени. Поскольку ядро изолировано окружающим его электронным облаком, скорость распада не зависит от давления, температуры, закона сохранения масс, или каких-то иных скорость ограничивающих факторов, обычно влияющих на химические или физические свойства. Поэтому скорость распада служит весьма полезным средством идентификации данного нуклида. Так как радиоактивный распад представляет собой трансформацию нестабильного радиоактивного нуклида в более устойчивый нуклид, который может так же быть радиоактивным, распад нуклида – необратимый процесс.

Замечание. В случае электронного захвата или внутренней конверсии, химическое окружение электронов может влиять на скорость распада. Для β^- -электронного захвата в ${}^7\text{Be}$ ($T_{1/2}=53,3$ дн.), отношение $T_{1/2}^{\text{BeF}_2}/T_{1/2}^{\text{Be}}=1,00084$. Кроме того, радиоактивный ион, полностью лишённый электронной оболочки, не может подвергаться распаду по механизмам электронного захвата или внутренней конверсии. Особенность, интересная для астрофизики.

Нестабильные ядра в радиоактивном образце не распадаются одновременно. Распад конкретного ядра - полностью случайное событие. Следовательно, изучение радиоактивных событий распада требуют использования статистических методов. Эти методы требуют наблюдения большого количества радиоактивных ядер. Они предсказывают с хорошей гарантией, что, после данного отрезка времени, определённая доля ядер распадётся. Но какой именно атом распадётся и когда это произойдёт сказать невозможно.

3. РАСПАД СМЕСИ РАДИОНУКЛИДОВ

Если несколько радиоактивных веществ смешать вместе, то наблюдаемая полная активность представляет собой сумму активностей всех веществ

$$A(t) = \sum_{i=1}^n a_i \exp(-\lambda_i t), \quad (20)$$

где λ_i – постоянная распада i -го радионуклида, n – число радионуклидов в смеси.

В качестве примера на **Рис.5** представлена кинетика распада смеси двух радионуклидов, периоды полураспада которых различаются в пять раз. Кинетика такого распада описывается формулой:

$$A = A_1 + A_2 = A_{10} e^{-\lambda_1 t} + A_{20} e^{-\lambda_2 t} \quad (21)$$

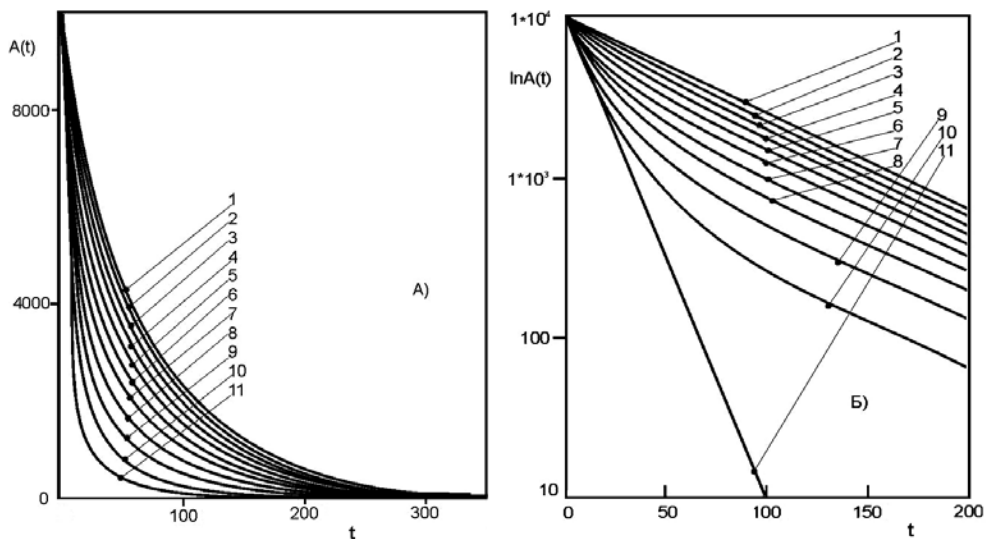


Рис. 5. Распад смеси двух радионуклидов. Влияние исходного состава смеси.

Периоды полураспада: $T_1=10$ мин, $T_2=50$ мин. $A(t)=A_0(p_1 \cdot \exp(-\lambda_1 t) + p_2 \cdot \exp(-\lambda_2 t))$; $A_0=10000$ расп/мин, t – мин;

№	p_1	p_2
1	0.0	1.0
2	0.1	0.9
3	0.2	0.8
4	0.3	0.7
5	0.4	0.6
6	0.5	0.5
7	0.6	0.4
8	0.7	0.3
9	0.8	0.2
10	0.9	0.1
11	1.0	0.0

а) Исходный масштаб; б) Логарифмический масштаб

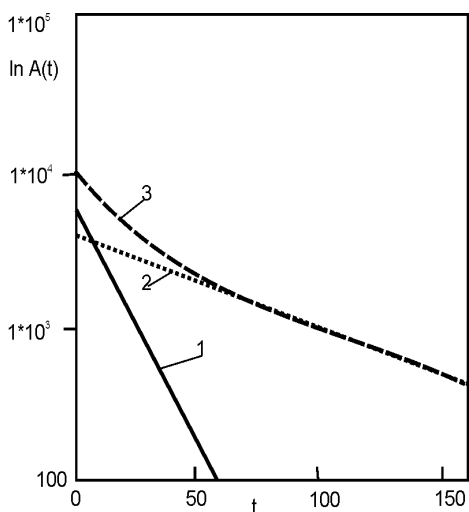


Рисунок иллюстрирует влияние вкладов различных компонентов на форму кривой распада. В исходном масштабе (Рис.5а) по форме кривой трудно определить распадается ли один изотоп, или некоторая смесь радионуклидов. Для анализа кривой распада с целью определения количества компонентов в смеси, их относительных вкладов в суммарную активность, а так же постоянных распада (т.е. определение типа изотопов элементов, участвующих в распаде) необходимо использовать нелинейный вариант метода наименьших квадратов.

Рис. 6. Разложение кривой распада смеси двух радионуклидов на элементарные составляющие. $T_1=10$ мин, $T_2=50$ мин; $p_1=0.6$, $p_2=0.4$. Кривая 1 – распад короткоживущего компонента, кривая 2 – распад долгоживущего компонента, кривая 3 – распад смеси компонентов.

Задача несколько упрощается при перестроении кривых распада в полулогарифмическом масштабе (Рис. 5б). Распад чистых радионуклидов на таком графике представляется прямой линией (тангенс угла наклона которой соответствует постоянной распада), а распад смеси – в виде некоторой нисходящей параболы (кривая $\lg A - t$ смеси всегда вогнута относительно начала координат), переходящей при больших временах в прямолинейную зависимость.

Разложение кривой распада смеси радиоактивных веществ на элементарные составляющие проиллюстрировано Рис.6 для двухкомпонентной смеси и Рис.7 – для трехкомпонентной смеси. Для получения удовлетворительных результатов определения радиоактивных постоянных необходимо проводить наблюдения распада с большой точностью (набирать хорошую статистику распада) и измерять кинетику распада в течение времен не меньших, чем два периода наиболее долгоживущего компонента смеси.

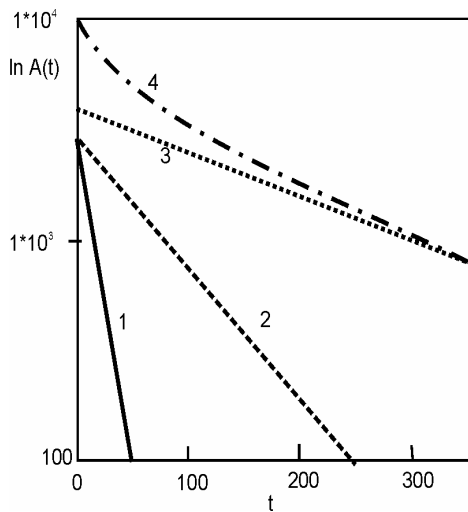


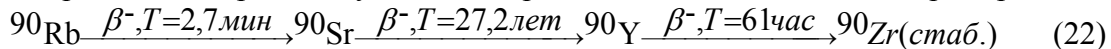
Рис.7. Кинетика распада смеси трех радионуклидов. $A(t)=A_0(p_1*\exp(-\lambda_1 t) + p_2*\exp(-\lambda_2 t) + p_3*\exp(-\lambda_3 t))$
 $A_0=10000$ расп/мин, t – мин; Периоды полураспада: $T_1= 10$ мин, $T_2=50$ мин, $T_3=150$ мин.
 Кривая 1 – распад компонента 1, кривая 2 – распад компонента 2, кривая 3 - распад компонента 3, кривая 4 – распад смеси трех веществ.

4. ПРОЦЕССЫ НАКОПЛЕНИЯ И РАСПАДА ГЕНЕТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ РАДИОНУКЛИДОВ

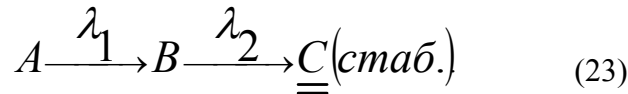
Атом, образовавшийся в результате радиоактивного превращения (продукт распада), может сам оказаться радиоактивным и обладать собственным характерным излучением и периодом полураспада.

4.1 Цепочка из двух изотопов

До сих пор рассматривался распад генетически не связанных между собой изотопов. Однако атом, образовавшийся в результате распада материнского изотопа, может сам оказаться радиоактивным, образуя цепочку радиоактивных атомов. Естественные радиоактивные ряды насчитывают большое количество членов. Цепочки распада встречаются и среди искусственных радиоактивных изотопов, например:



Рассмотрим ситуацию образования радиоактивного дочернего продукта из радиоактивного предка:



Продукт распада - нуклид или радионуклид, образующийся при распаде. Он может образовываться непосредственно при распаде одного радионуклида или в результате серии последовательных распадов нескольких радионуклидов.

Обозначим индексом 1 изотоп A , а индексом 2 - изотоп B .

Тогда дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \quad (24)$$

или

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 - \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} = 0 \quad (25)$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_{20} e^{-\lambda_2 t} \quad (26)$$

здесь N_{10} и N_{20} - значения N_1 и N_2 при $t=0$.

Замечание 1. Приведем решение исходного уравнения. Будем искать его в виде произведения двух функций u и v , т.е. $N_2=uv$, где u и v являются функциями времени. Дифференцируя, получаем

$$\frac{dN_2}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}$$

Подставляя значения функции N_2 и ее производной в Ур.(26), имеем

$$u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} + \lambda_2 uv - \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} = 0$$

Перепишем

$$u \left(\frac{dv}{dt} + \lambda_2 v \right) + v \frac{du}{dt} - \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} = 0 \quad (27)$$

Одна из функций (u или v) может быть выбрана произвольно. Выберем v так, чтобы выражение, стоящее в скобках, обратилось в нуль:

$$\frac{dv}{dt} + \lambda_2 v = 0.$$

Тогда

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda_2 v$$

и

$$v = e^{-\lambda_2 t}.$$

Подставляя это выражение в равенство (27), получаем дифференциальное уравнение, определяющее u :

$$e^{-\lambda_2 t} \cdot \frac{du}{dt} - \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} = 0$$

Отсюда

$$du = \lambda_1 N_{10} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dt$$

и

$$u = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C$$

Таким образом,

$$N = uv = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} + C e^{-\lambda_2 t} \quad (28)$$

Значение постоянной интегрирования C определяется из начального условия: $N_2 = N_{20}$ при $t=0$. Отсюда

$$C = N_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10}. \quad (29)$$

После подстановки выражения для C в ур. (28) и простых преобразований получаем окончательное решение, дающее зависимость N_2 от времени Ур(26).

Замечание 2. Часто преподаватели задают ехидный вопрос: а что будет, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$? Ведь в этом случае ур.(26) дает деление на ноль, т.е. бесконечность! Нам такие вопросы не страшны. Действительно:

$$\begin{aligned} du &= \lambda N_{10} dt; & \frac{du}{dt} &= \lambda N_{10}; & u &= \lambda N_{10} t + C; \\ N &= \lambda N_{10} t e^{-\lambda t} + C e^{-\lambda t}; & C &= N_{20} \\ N &= \lambda N_{10} t e^{-\lambda t} + N_{20} e^{-\lambda t} = (\lambda N_{10} t + N_{20}) e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (30)$$

Вернемся к ситуации $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Кривая, показывающая изменение во времени числа атомов второго изотопа, проходит через начало координат и имеет максимум в момент времени

$$t_m = \frac{2.303}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lg \lambda_2 - \lg \lambda_1)$$

Замечание. Значение времени t_m можно найти дифференцированием общего уравнения (24):

$$N_{20} = 0; \quad \frac{dN_2}{dt} = -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_2 t}.$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_m}, \quad \text{или} \quad t_m = \frac{2.303}{\lambda_2 - \lambda_1} \lg \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Так как при $t=t_m$ $dN_2/dt=0$, то

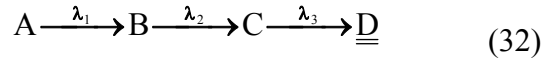
В момент $t=t_m$ скорость распада дочернего вещества $\lambda_2 N_2$ в точности равна скорости его образования $\lambda_1 N_1$, т.е. $A_1 = A_2$. Время точки перегиба кривой изменения активности дочернего нуклида найдем из условия $d^2 N_2 / dt^2 = 0$: $t_{\text{пер}} = 2t_m$.

Если в начальный момент времени материнский изотоп отделён от продуктов распада, так что $N_{2,0} = 0$.

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \quad (31)$$

4.2 Цепочки из трёх и более изотопов

Если имеется цепочка радиоактивных превращений, включающая три звена:



то выражение для N_3 может быть получено путем решения дифференциального уравнения:

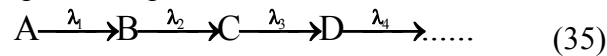
$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3. \quad (33)$$

Если в начальный момент времени дочерние изотопы отсутствовали, то изменение числа атомов третьего компонента C в цепочке определяется формулой:

$$N_3(t) = N_{30} \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3) \cdot (\lambda_2 - \lambda_3)} \right] \quad (34)$$

Активность нуклида C : $A_3 = \lambda_3 N_3$.

Разберем общий случай превращения ряда элементов:



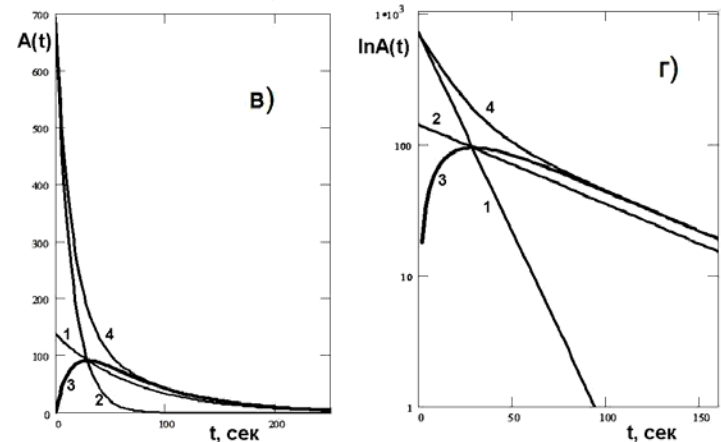
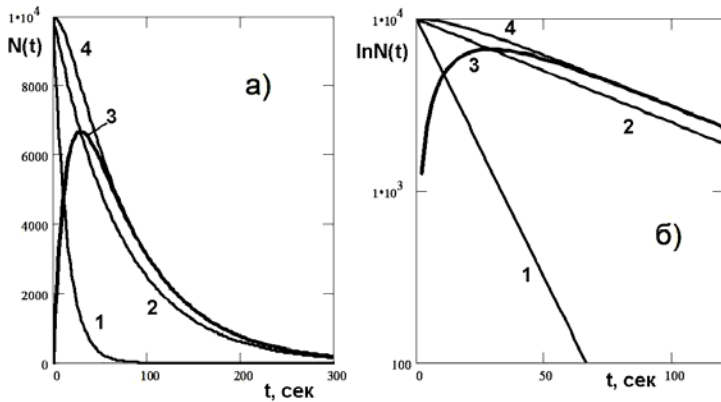
Пусть числа атомов продуктов распада будет соответственно $N_1, N_2, N_3, \dots, N_i$, а соответствующие им постоянные распада: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_i$.

При условии, что в начальный момент времени ($t = 0$) присутствовал только первый изотоп, количество которого $N_1 = N_{10}$, а $N_2 = N_3 = \dots = N_i = 0$, количество атомов любого элемента N_i в момент времени t найдём по выражению

$$N_i = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{i-1} \cdot \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_2)} + \dots + \frac{e^{-\lambda_{i-1} t}}{(\lambda_1 - \lambda_{i-1})(\lambda_2 - \lambda_{i-1}) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_{i-1})} \right] \quad (36)$$

4.3 Радиоактивные равновесия

В зависимости от того, какое из двух веществ в цепочке из двух генетически связанных радионуклидов обладает большим периодом полураспада, различают три основных случая: случай отсутствия равновесия, подвижное и вековое равновесия.



4.3.1 Случай отсутствия равновесия

Рис. 8. Радиоактивный распад двух генетически связанных радионуклидов: материнский – дочерний.

$A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} \bar{A}$ Случай отсутствия радиоактивного равновесия. $A_1 = N_1 \lambda_1$; $A_2 = N_2 \lambda_2$, $T_1 = 10$; $T_2 = 50$; $N_{10} = 10000$; $N_{20} = 0$.
 $N_1(t) = N_0 \exp(-\lambda_1 t)$, $N_2(t) = N_{20} \exp(-\lambda_2 t) + N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t))$, а) Число атомов – исходный масштаб; б) Число атомов – логарифмический масштаб; в) Активность – исходный масштаб; г) Активность – логарифмический масштаб. Кривая 1 – распад материнского нуклида; кривая 2 – распад дочернего нуклида в свободном состоянии (без материнского нуклида); кривая 3 – распад дочернего нуклида при его образовании из материнского; кривая 4 – суммарная кривая распада изотопов.

Если материнское вещество является более короткоживущим, чем дочернее ($T_1 < T_2$, $\lambda_1 > \lambda_2$), то какого-либо равновесия в цепочке не наблюдается. По мере распада материнского вещества, предварительно очищенного от дочернего, количество дочернего вещества нарастает, проходит через максимум (**Рис.7 а и б**), а затем падает. Кривая изменения активности в системе, где равновесие отсутствует, при $N_{2,0} = 0$ подобна кривой распада смеси генетически не связанных изотопов. Как всегда в точке максимума активность материнского нуклида равна активности дочернего (**Рис. 7 в и г**), и в дальнейшем дочерний распадается в соответствии с собственным периодом полураспада - *долгоживущий потомок короткоживущего предка живёт по своему закону*. Снижение полной активности препарата на начальном участке кривой обусловлено распадом как материнского, так и дочернего изотопов; в дальнейшем материнское вещество полностью распадается, так что изменение активности соответствует периоду полураспада дочернего изотопа.

4.3.2 Подвижное равновесие

Если материнский изотоп живет дольше дочернего ($T_1 > T_2$, $\lambda_1 < \lambda_2$), то достигается так называемое состояние радиоактивного равновесия. Это означает, что по истечении определенного времени отношение количеств радиоактивных атомов материнского и дочернего вещества, а, следовательно, и отношение их скоростей распада становится постоянным. Это непосредственно следует из рассмотрения уравнения (10). При достаточно большом t член $e^{-\lambda_2 t}$ делается пренебрежимо малым по сравнению с $e^{-\lambda_1 t}$, слагаемым $N_{20} e^{-\lambda_2 t}$ также можно пренебречь. Тогда

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} \quad (37)$$

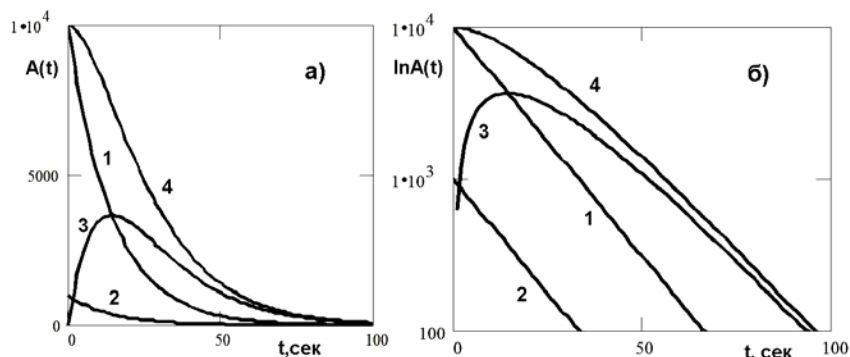


Рис. 9. Радиоактивный распад двух генетически связанных радионуклидов: материнский – дочерний.

Цепочка: $A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} \bar{A}$, Случай подвижного радиоактивного равновесия. Период полураспада материнского нуклида равен периоду полураспада дочернего $A_1 = N_1 \lambda_1$; $A_2 = N_2 \lambda_2$, $T_1 = 10$; $T_2 = 10.01$; $N_{10} = 10000$; $N_{20} = 0$, $N_1(t) = N_0 \exp(-\lambda_1 t)$,

$$N_2(t) = N_{20} \exp(-\lambda_2 t) + N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t))$$

а) Активность – исходный масштаб; б) Активность – логарифмический масштаб.

и так как $N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$, то

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (38a)$$

и равновесное количество атомов дочернего вещества определяется выражением:

$$(N_2)_{равн} = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (39)$$

Поскольку $A_1 = \lambda_1 N_1$, $A_2 = \lambda_2 N_2$, отношение измеряемых активностей равно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \quad (38б)$$

Замечание: Следует обратить внимание, что правые части уравнений (38a) и (38б) не одинаковы.

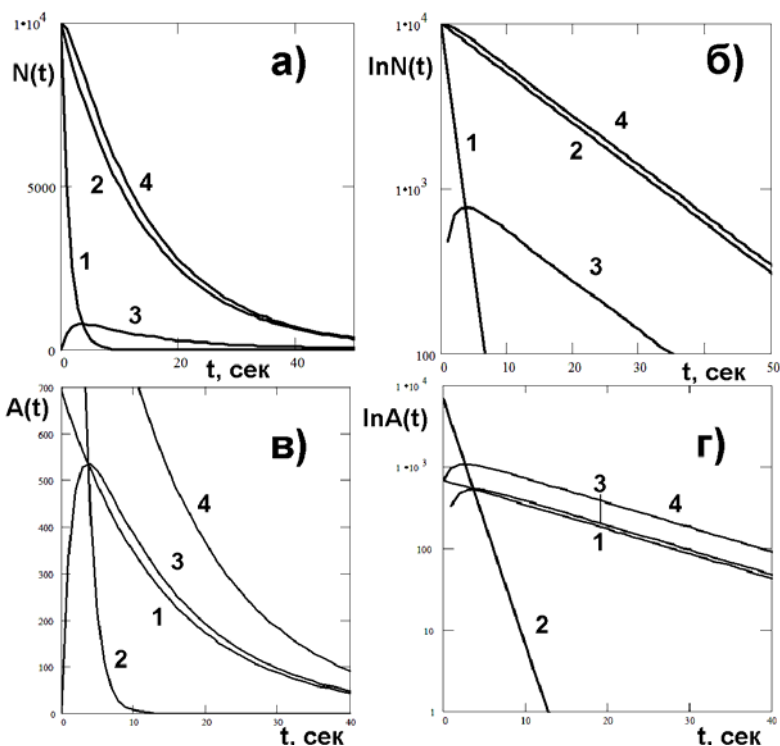


Рис. 10. Радиоактивный распад двух генетически связанных радионуклидов: материнский – дочерний. Цепочка:

$A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} \bar{A}$ Случай подвижного радиоактивного равновесия: период полураспада дочернего нуклида меньше периода полураспада материнского, $A_1 = N_1 \cdot \lambda_1$; $A_2 = N_2 \cdot \lambda_2$, $T_1 = 10$; $T_2 = 1$; $N_{10} = 10000$; $N_{20} = 0$, $N_1(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_1 t)$,

$$N_2(t) = N_{20} \exp(-\lambda_2 t) + N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t))$$

а) Число атомов – исходный масштаб; б) Число атомов – логарифмический масштаб; в)

Активность – исходный масштаб; г) Активность – логарифмический масштаб.

В зависимости от соотношения между λ_1 и λ_2 величина A_1/A_2 может принимать любое значение от 0 до 1. Таким образом, при подвижном равновесии дочерняя активность **больше** материнской на фактор $\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)$. При равновесии активности обоих изотопов уменьшаются с периодом полураспада материнского нуклида (*Короткоживущий потомок находится на иждивении долгоживущего предка и живёт по его закону*). При условии $\lambda_2 > \lambda_1$ суммарная активность материнского и дочернего веществ (в первоначально чистой материнской фракции) со временем нарастает, а затем проходит через максимум; только после этого устанавливается подвижное равновесие.

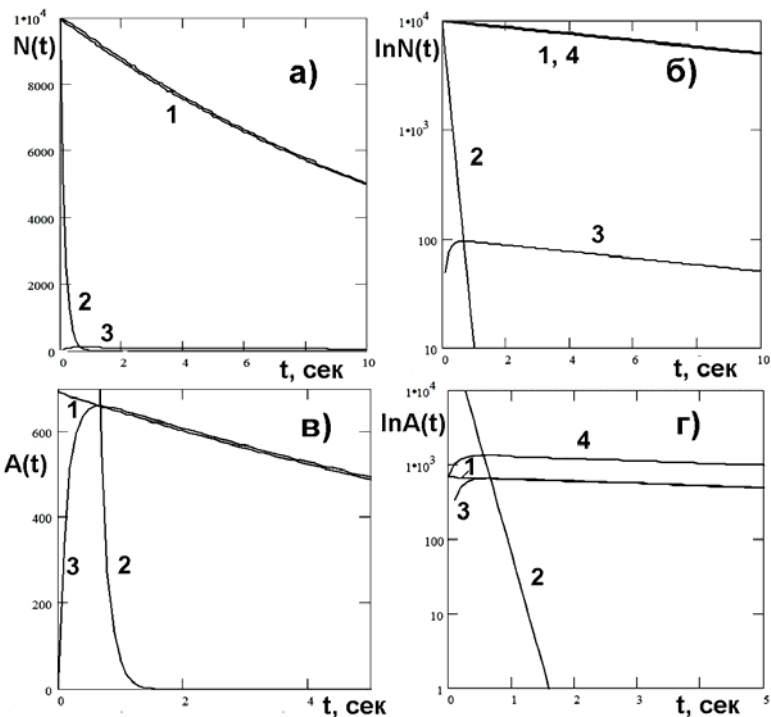


Рис. 11. Радиоактивный распад двух генетически связанных радионуклидов: материнский – дочерний. $A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} \bar{A}$
Случай векового радиоактивного равновесия (Период полураспада материнского радионуклида намного больше периода полураспада

дочернего). $A_1 = N_1 \cdot \lambda_1$; $A_2 = N_2 \cdot \lambda_2$, $T_1 = 10$; $T_2 = 0.1$; $N_{10} = 10000$; $N_{20} = 0$, $N_1(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_1 t)$, а)
Число атомов – исходный масштаб; б) Число атомов – логарифмический масштаб; в) Активность – исходный масштаб; г) Активность – логарифмический масштаб.

При подвижном равновесии $(N_2)_{равн}$ уменьшается с периодом полураспада материнского изотопа:

$$(N_2)_{равн} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} e^{-\lambda_1 t} \quad (40)$$

На **Рис. 10** представлены кривые распада и накопления двух генетически связанных радионуклидов для частного случая подвижного равновесия - одинаковых значений периодов полураспада материнского и дочернего нуклидов, а на **Рис. 11** – общий случай подвижного равновесия. Наклон правой части кривой дочернего изотопа, построенной в логарифмическом масштабе, соответствует T_1 .

Замечание. В точке, где активность дочернего нуклида достигает максимума, активность материнского нуклида **всегда** равна активности дочернего!

4.3.3 Вековое равновесие

Вековым (секулярным) равновесием называется предельный случай радиоактивного равновесия, когда $T_1 \gg T_2$, $\lambda_1 \ll \lambda_2$ и когда в течение времени, равного многим периодам полураспада дочернего вещества, материнская активность заметно не уменьшается. Пусть $\lambda_1 \ll \lambda_2$, то

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad (41)$$

или $\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2$ или $A_1 = A_2$. В случае векового равновесия время t_m бесконечно велико.

Количество атомов дочернего изотопа при вековом равновесии равно

$$(N_2)_{равн} = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2} \quad (42)$$

Если отделить равновесное количество атомов изотопа B от материнского вещества A , то уменьшение числа атомов дочернего вещества будет подчиняться основному закону распада:

$$(N_2)_{равн} = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad (43)$$

Одновременно в материнском веществе происходит накопление дочернего изотопа. Очевидно, что общее число атомов дочернего изотопа в выделенном веществе и в материнской фракции в любой момент времени будет равно $(N_2)_{\text{равн}}$. Поэтому накопление дочернего изотопа в очищенном материнском веществе выражается уравнением:

$$(N_2)_{\text{накоп}} = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2} \left(1 - e^{-\lambda_2 t} \right) \quad (44)$$

Таким образом, увеличение числа атомов дочернего изотопа в первоначально очищенном материнском препарате зависит лишь от постоянной распада (и связанного с ней периода полураспада) дочернего вещества. За время, равное периоду полураспада T_2 дочернего изотопа, накапливается половина равновесного количества его атомов. Состояние векового равновесия практически достигается при $t > 10T_2$, в этом случае N_2 отличается от равновесного не более чем на 0,1%.

На **Рис.11** приведен пример векового равновесия. По мере уменьшения λ_1 по сравнению с λ_2 кривые для случая подвижного равновесия все более и более приближаются к предельным кривым векового равновесия (**Рис.12**).

На **Рис.13** приведены примеры расчетов процессов распада и накопления в цепочке, состоящей из двух генетически связанных радионуклидов. Рисунок иллюстрирует влияние соотношения периодов полураспада материнского и дочернего радионуклидов на форму кинетической кривой накопления активности дочернего элемента.

Из **Рис.13** видно, что пик на кривой $A(t)$ дочернего нуклида всегда лежит на кривой активности материнского изотопа. При малых значениях T_2 (короткоживущий потомок долгоживущего предка) дочерний нуклид распадается по закону предка, а при больших значениях периода полураспада дочернего нуклида, последний распадается по собственному закону.

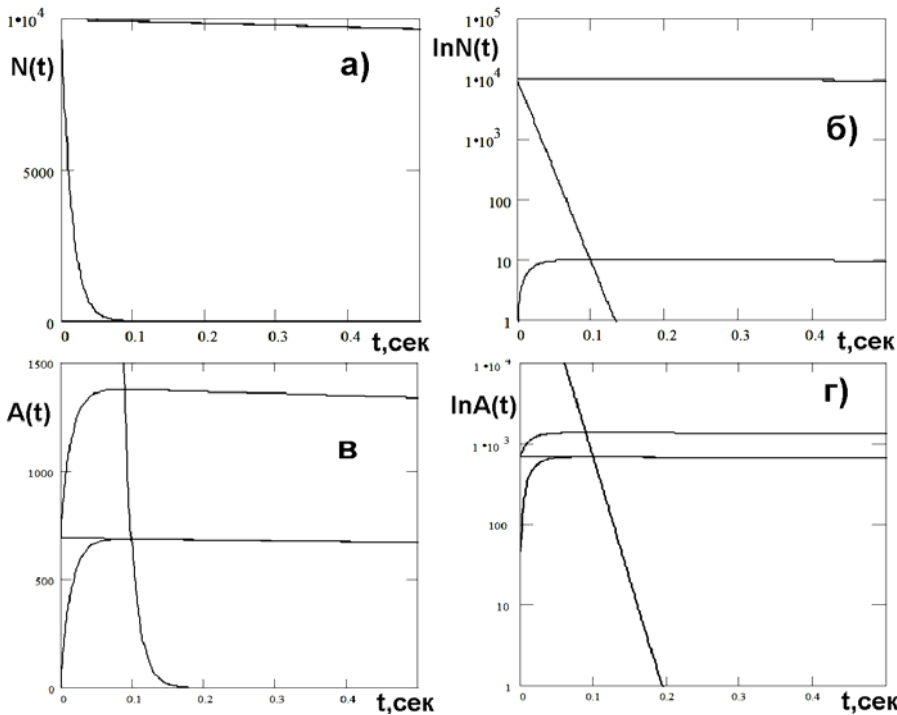


Рис. 12. Радиоактивный распад двух генетически связанных радионуклидов: материнский – дочерний. Цепочка:

$A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} \bar{A}$ Случай векового радиоактивного равновесия (Период полураспада материнского радионуклида намного больше периода полураспада дочернего), $A_1 = N_1 \cdot \lambda_1$; $A_2 = N_2 \cdot \lambda_2$, $T_1 = 10$; $T_2 = 0.01$; $N_{10} = 10000$; $N_{20} = 0$, $N_1(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_1 t)$,

$N_2(t) = N_{20} \exp(-\lambda_2 t) + N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t))$, а) Число атомов – исходный масштаб; б) Число атомов – логарифмический масштаб; в) Активность – исходный масштаб; г) Активность – логарифмический масштаб.

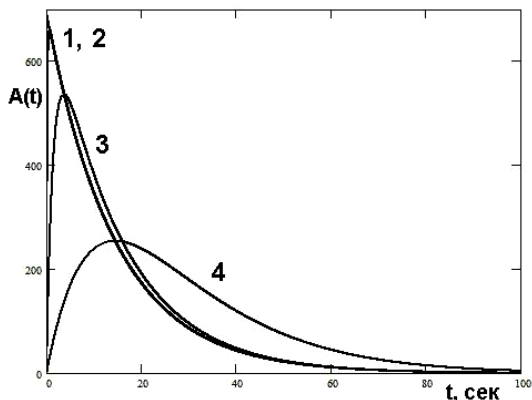


Рис. 13. Радиоактивный распад двух генетически связанных радионуклидов: материнский – дочерний. Цепочка $A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} \bar{A}$. Радиоактивное равновесие. Влияние периода полураспада дочернего элемента на его кинетику накопления. Период полураспада материнского нуклида, $T_1=10$ мин. $T_2 = 0.1$ (1); 1(2); 10 (3); 100(4) мин

Замечание. В отличие от распада смеси компонентов, суммарная кривая распада генетически связанных радионуклидов выпукла относительно начала координат.

Примеры процессов распада и накопления нуклидов в трехкомпонентной цепочке приведены на **Рис.14**. Расчёты проводили при значениях параметров: $A_{10}=10000$ имп/мин, $T_1=10$ мин, $T_2=2$ мин и

$T_3=0.4$ мин. Видно, что в точке максимума активности третьего нуклида его активность совпадает с активностью второго (предшествующего) нуклида, а максимум активности второго нуклида лежит на кривой распада 1-го нуклида (Здесь мы ограничились случаем наличия подвижного равновесия между всеми членами ряда).

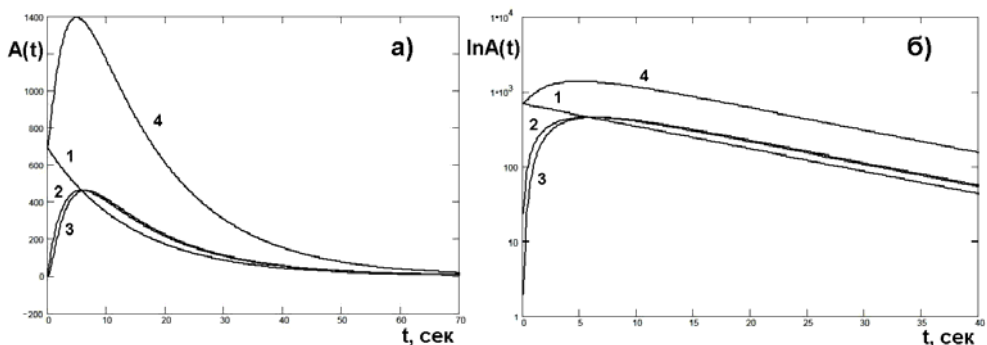


Рис. 14. Радиоактивный распад трёх генетически связанных радионуклидов: материнский – дочерний 1 – дочерний 2. Цепочка $A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} A_3 \xrightarrow{\lambda_3} \bar{A}$. Подвижное равновесие по всему ряду. $N_1(t)=N_0 \cdot \exp(-\lambda_1 t)$

$$N_3(t) = N_{30} \exp(-\lambda_3 t) + N_{20} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} (\exp(-\lambda_2 t) - \exp(-\lambda_3 t)) + N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1) * (\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2) * (\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{(\lambda_1 - \lambda_3) * (\lambda_2 - \lambda_3)} \right]$$

$$A_1=N_1 \cdot \lambda_1; A_2=N_2 \cdot \lambda_2; A_3=N_3 \cdot \lambda_3, T_1=10; T_2=2; T_3=0.4; N_{10}=10000; N_{20}=0; N_{30}=0.$$

В качестве примера реального процесса распада и накопления генетически связанных радионуклидов на **Рис. 15** приведены кривые, показывающие изменение активности при накоплении и распаде активного налета радона-222, т.е. в цепи распада RaA-RaB-RaC- при условии, что в начальный момент времени присутствуют только атомы RaA.

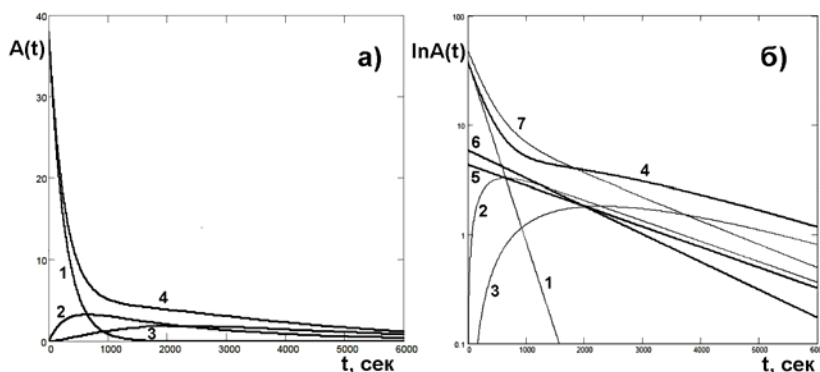


Рис. 15. Распад активного налета радона-222 (начало ряда). Цепочка: RaA—RaB—RaC, $N_1(t)=N_0 \cdot \exp(-\lambda_1 t)$

$$N_2(t) = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)), N_3(t) = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1) * (\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2) * (\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{(\lambda_1 - \lambda_3) * (\lambda_2 - \lambda_3)} \right]$$

$A_1=N_1 \cdot \lambda_1; A_2=N_2 \cdot \lambda_2; A_3=N_3 \cdot \lambda_3, T_1=3.05$ мин; $T_2=26.8$ мин; $T_3=19.7$ мин; $N_{10}=10000$. а) Активность – исходный масштаб; б) Активность – логарифмический масштаб.

4.4 Разветвленный распад

Разновидностью общей схемы радиоактивного распада является разветвленный распад. Ветвление означает, что при распаде радионуклида образуется не один дочерний нуклид, а два (иногда и несколько) нуклида:



Если число атомов вещества A в данный момент – N_A , то скорость этого распада вещества составляет:

$$\frac{dN_A}{dt} = -(\lambda_b + \lambda_c)N_A = -\lambda_A N_A \quad (46)$$

При рассмотрении общего процесса распада следует учитывать обе константы λ_b и λ_c ; при этом изотоп B образуется со скоростью $\lambda_b N_A$, однако вещество A распадается со скоростью $(\lambda_b + \lambda_c)N_A$. Заметим, что A может иметь только один период полураспада, определяемый в этом случае равенством $t_{1/2} = 0.693/(\lambda_b + \lambda_c)$. При определении периода полураспада исходят из общей скорости уменьшения количества радиоактивного вещества вне зависимости от механизма процессов, приводящих к уменьшению активности.

Если имеется цепочка радиоактивных превращений, содержащая разветвления, то, применяя к ней общее решение константы λ_i в числителях слагаемых в точках разветвления следует заменить парциальными константами λ_i^* ; каждую ветвь надо просчитывать самостоятельно. Если вслед за разветвлением цепочки после ряда распадов снова соединяются (как это наблюдается в естественных радиоактивных семействах), то число атомов ниже этой точки получается суммированием радиоактивных превращений по обоим цепочкам.

При наличии разветвлений общая величина константы радиоактивного распада равняется сумме констант распада в каждом из возможных направлений: $\lambda = \sum \lambda_i$. Соответственно, вероятность каждого из возможных путей распада $f_i = \lambda_i / \lambda$, а период полураспада данного i -го варианта радиоактивного превращения связан с наблюдаемым общим периодом полураспада соотношением $T_i = T / f_i$

Если обозначить постоянную распада некоторого нуклида ряда как λ_i , то общая постоянная распада

$$\lambda \equiv \lambda_1 + \lambda_2 + \dots = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (47)$$

а общий период полураспада

$$\frac{1}{T_{1/2}} = \frac{1}{T_{1,1/2}} + \frac{1}{T_{2,1/2}} + \dots \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{i,1/2}} \quad (48)$$

Доля распадов, происшедших по i -ой моде задаётся уравнением:

$$f_i \equiv \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad (49)$$

Аналогично, неточность в энергии, связанная с данным состоянием, ΔE , принципом неопределённости Гайзенберга, может быть рассчитана из времени жизни каждой моды распада. Тогда общая ширина уровня:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \dots = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \quad (50)$$

где $\Gamma_i = \frac{1}{\tau_i}$

Это соотношение особенно полезно в интерпретации состояний распада, сформированных внутриядерными реакциями, в которых конкурируют такие процессы, как α -распад, эмиссия протонов, эмиссия нейтронов и т.п. при снятии возбуждения ядра. В этом случае мы можем выразить общую ширину как

$$\Gamma = \Gamma_\alpha + \Gamma_p + \Gamma_n \quad (51)$$

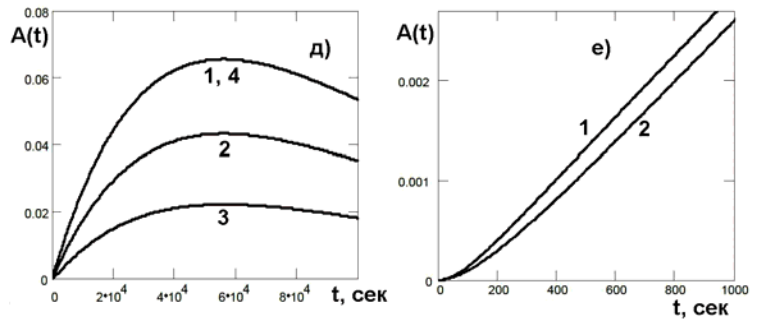
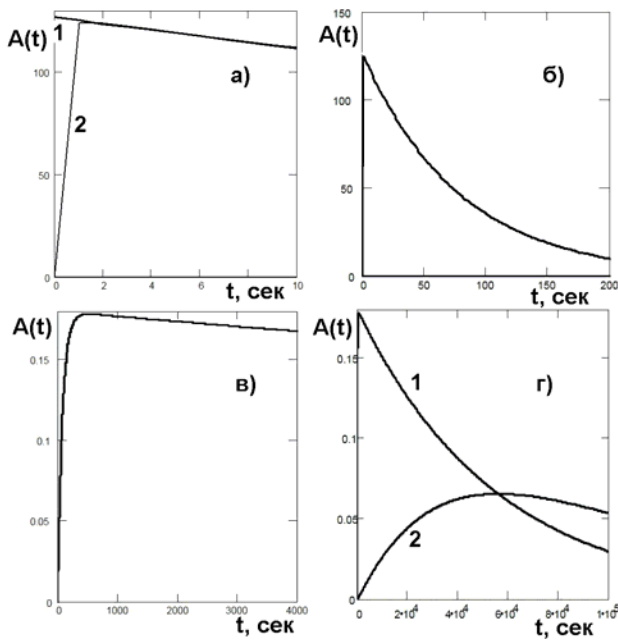


Рис. 16. Распад радона-220 (торон) и его активного налета, Цепочка: Tn(1)—ThA(2)—ThB(3)—ThC(4)—[(вилка)—66%ThC'(5a)—34%ThC''(5b)], $N_1(t)=N_0 \cdot \exp(-\lambda_1 t)$, $N_2(t) = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t))$,

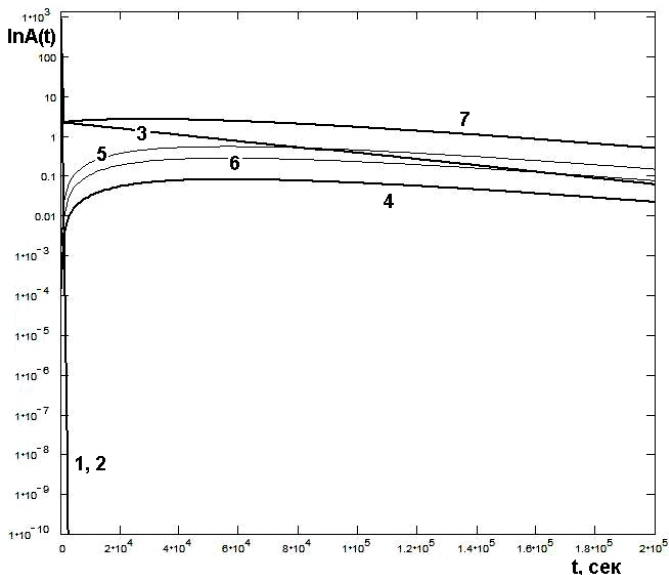
$$N_3(t) = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1) * (\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2) * (\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{(\lambda_1 - \lambda_3) * (\lambda_2 - \lambda_3)} \right],$$

$$N_4(t) = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left[\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1) * (\lambda_3 - \lambda_1) * (\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2) * (\lambda_3 - \lambda_2) * (\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{(\lambda_1 - \lambda_3) * (\lambda_2 - \lambda_3) * (\lambda_4 - \lambda_3)} + \frac{\exp(-\lambda_4 t)}{(\lambda_1 - \lambda_4) * (\lambda_2 - \lambda_4) * (\lambda_3 - \lambda_4)} \right],$$

$$N_{5a}(t) = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 p_a \left[\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1) * (\lambda_3 - \lambda_1) * (\lambda_4 - \lambda_1) * (\lambda_{5a} - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2) * (\lambda_3 - \lambda_2) * (\lambda_4 - \lambda_2) * (\lambda_{5a} - \lambda_2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{(\lambda_1 - \lambda_3) * (\lambda_2 - \lambda_3) * (\lambda_4 - \lambda_3) * (\lambda_{5a} - \lambda_3)} + \frac{\exp(-\lambda_4 t)}{(\lambda_1 - \lambda_4) * (\lambda_2 - \lambda_4) * (\lambda_3 - \lambda_4) * (\lambda_4 - \lambda_{5a})} + \frac{\exp(-\lambda_{5a} t)}{(\lambda_1 - \lambda_{5a}) * (\lambda_2 - \lambda_{5a}) * (\lambda_3 - \lambda_{5a}) * (\lambda_4 - \lambda_{5a})} \right],$$

$$N_{5b}(t) = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 p_b \left[\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1) * (\lambda_3 - \lambda_1) * (\lambda_4 - \lambda_1) * (\lambda_{5b} - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2) * (\lambda_3 - \lambda_2) * (\lambda_4 - \lambda_2) * (\lambda_{5b} - \lambda_2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{(\lambda_1 - \lambda_3) * (\lambda_2 - \lambda_3) * (\lambda_4 - \lambda_3) * (\lambda_{5b} - \lambda_3)} + \frac{\exp(-\lambda_4 t)}{(\lambda_1 - \lambda_4) * (\lambda_2 - \lambda_4) * (\lambda_3 - \lambda_4) * (\lambda_4 - \lambda_{5b})} + \frac{\exp(-\lambda_{5b} t)}{(\lambda_1 - \lambda_{5b}) * (\lambda_2 - \lambda_{5b}) * (\lambda_3 - \lambda_{5b}) * (\lambda_4 - \lambda_{5b})} \right],$$

$$A_1 = N_1 * \lambda_1; A_2 = N_2 * \lambda_2; A_3 = N_3 * \lambda_3; A_4 = N_4 * \lambda_4; A_{5a} = N_{5a} * \lambda_{5a}; A_{5b} = N_{5b} * \lambda_{5b}. T_1 = 54.5 \text{ с};$$



$T_2 = 0,158 \text{ с}; T_3 = 3.852 * 10^4 \text{ с}; T_4 = 1.766 * 10^{-5} \text{ с}; T_{5a} = 2.9 * 10^{-7} \text{ с}; T_{5b} = 3.727 * 10^{-3} \text{ с}; N_{10} = 10000$. а) Активность изотопов 1 (кривая 1) и 2 (кривая 2). Ранние времена; б) Активность изотопов 1 (кривая 1) и 2 (кривая 2) Средние времена; в) Активность изотопа 3. Средние времена; г) Активности изотопов 3 (кривая 1) и 4 (кривая 2). Большие времена; д) Активности изотопов 4 (кривая 1), 5a (кривая 2), 5b (кривая 3) и суммарная активность изотопов 5 (кривая 4); е) Активность изотопа 4 (кривая 1) и суммарная активность изотопа 5 (кривая 2).

Рис. 17. Распад активного налета (дочерних продуктов распада) торона (^{220}Rn). Логарифмический масштаб.

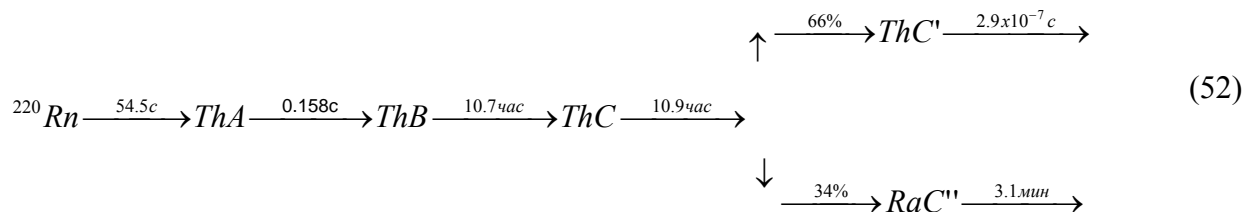
Пример 1. Нуклид ^{64}Cu ($T_{1/2} = 12,7$ час) распадается по двум каналам: электронный захват (61%) и β^- - распад (39%). Чему равны периоды полураспада по каждому каналу? Чему равна парциальная ширина распада по электронному захвату?

Решение. $\lambda = \ln 2 / 12,7 \text{ час} = 5,46 * 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$; $\lambda = \lambda_{\text{эз}} + \lambda_{\beta} = \lambda_{\text{эз}} + (39/61) \lambda_{\text{эз}}$;

$$\lambda_{\text{эз}} = 3,329 * 10^{-2} \text{ ч}^{-1}; T_{1/2, \text{эз}} = (\ln 2) / \lambda_{\text{эз}} = 20,8 \text{ ч}; \lambda_{\beta} = (39/61) \lambda_{\text{эз}} = 2,128 * 10^{-2} \text{ ч}^{-1}; T_{1/2, \beta} = (\ln 2) / \lambda_{\beta} = 32,6 \text{ ч}; \tau_{\text{эз}} = T_{1/2, \text{эз}} / \ln 2 = 30 \text{ ч} = 108131 \text{ с};$$

$\Gamma_{\alpha} = \hbar/\tau = 6,582 \times 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с} / 108131 \text{ с} = 6,1 \times 10^{-27} \text{ МэВ}$. Все радиоактивные ядра естественного происхождения имеют малые парциальные ширины. Как Вы заметили, ^{64}Cu способен распадаться и на ^{64}Zn и на ^{64}Ni . Это не обычно, но всё же может происходить с некоторыми нечётно – нечётными ядрами.

В качестве других примеров, на **Рис. 16 и 17** приведены кривые распада торона (радона – 220) и образование активного налета. Рассматривался участок ряда:



Здесь продукты распада существенно более долгоживущие по сравнению с радоном, но тоже имеется вилка.

4.5 Степень равновесности

В зависимости от схемы распада радиоактивные цепочки могут быть простыми (линейные) или сложными (с ветвлениями). В сложных цепочках важно знать коэффициенты ветвления, характеризующие приходящуюся на данный вид превращения долю переходов. Степень равновесности η_i дочерних радионуклидов по отношению к материнскому определяется соотношением их периодов полураспада,

$$\eta_i = \frac{A_i}{A_1} = \frac{N_i \lambda_i}{N_1 \lambda_1} = \frac{N_i T_1}{N_1 T_i} \quad (53)$$

Для первого дочернего элемента:

$$\eta_2 = \frac{N_2 \lambda_2}{N_1 \lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \{1 - \exp[-(\lambda_2 - \lambda_1)t]\} \quad (54a)$$

$$\eta_3 = \frac{N_3 \lambda_3}{N_1 \lambda_1} = \lambda_2 \lambda_3 \left[\frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{\exp[-(\lambda_2 - \lambda_1)t]}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{\exp[-(\lambda_3 - \lambda_1)t]}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] \quad (54b)$$

и т.д.

Таким образом, если символом A обозначить активность, гамма-эквивалент, энергетический выход или гамма-постоянную, то при наличии простой цепочки суммарные характеристики будут определяются соотношением:

$$A = A_1 + \sum_{i=2}^n A_i \eta_i. \quad (55)$$

В сложной цепочке с коэффициентами ветвления ω_i суммарные характеристики определяются соотношением:

$$A = A_1 + \sum_{i=2}^n \omega_i A_i \eta_i. \quad (56)$$

Замечание. Приведенные здесь выражения следует учитывать при использовании значений энергетических выходов и гамма-постоянных радиоактивных нуклидов для дозиметрических расчетов.

4.6 Примеры радиоактивных распадов

Ториевый ряд.

Два изотопа могут находиться в различном соотношении в зависимости от того, в каком равновесии они находятся. Пусть $^{212}\text{Pb}(\text{ThB})$ отделен от всех других изотопов. После истечения 10 час он придет в равновесие с дочерним $^{212}\text{Bi}(\text{ThC})$. В данном случае ^{212}Bi находится в подвижном равновесии с ^{212}Pb . Но ^{212}Pb и ^{212}Bi могут находиться в вековом равновесии с ^{232}Th , родоначальником этого ряда. В первом случае количество дочернего ^{212}Bi определяется из соотношения:

$$N_{\text{Bi}}^n = N_{\text{Pb}} \frac{\lambda_{\text{Pb}}}{\lambda_{\text{Bi}} - \lambda_{\text{Pb}}} = N_{\text{Pb}} \frac{1.82 \cdot 10^{-5}}{1.91 \cdot 10^{-4} - 1.82 \cdot 10^{-5}} = 0.105 N_{\text{Pb}}$$

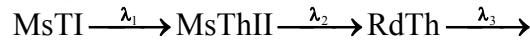
Во втором случае с тем же количеством ^{212}Pb находится уже другое количество ^{212}Bi :

$$N_{Bi}^b = N_{Pb} \frac{\lambda_{Pb}}{\lambda_{Bi}} = 0.095 N_{Pb},$$

т.е. $\frac{N_{Bi}^n}{N_{Bi}^b} = \frac{\lambda_{Bi}}{\lambda_{Bi} - \lambda_{Pb}} = 1.105.$

Этот пример показывает, что при соизмеримых периодах полураспада необходимо учитывать, какой тип равновесия связывает интересующую нас пару изотопов.

Распад мезотория. Если между двумя радиоактивными изотопами в ряду распада находится короткоживущий изотоп, то можно при расчетах принимать, что третий изотоп образуется непосредственно из первого. Примером может служить переход MsThI (^{228}Ra) через MsThII (^{228}Ac) в RdTh (^{228}Th)



$T_1=6.7$ года, $T_2=6.13$ часа, $T_3=1.9$ года.

Действительно, количество атомов RaTh:

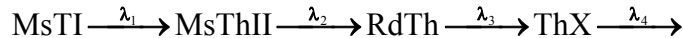
$$N_3 = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right]$$

при условии $\lambda_2 \gg \lambda_1$ и $\lambda_2 \gg \lambda_3$, а также $e^{-\lambda_2 t} = 0$ имеем:

$$N_3 = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] = \frac{N_{10} \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_3 t})$$

т.е. практически накопление третьего изотопа цепочки происходит так, как будто он образуется непосредственно из первого.

Продолжим цепочку



($T_4=3.64$ дня) и рассмотрим образование ThX (^{224}Ra).

Вследствие малого периода полураспада MsThII его количество можно не учитывать. Обозначим числа атомов в начальный момент времени ($t=0$) для MsThI, RdTh и ThX через M_0 , R_0 и X_0 соответственно. Количество атомов ThX для момента времени t обозначим через X ; оно состоит из трех слагаемых: числа атомов, оставшихся к моменту времени t от начального количества их X_0 , т.е. $\varphi(X_0)$; числа атомов ThX, образовавшихся из R_0 атомов радиотория $\varphi(R_0)$, и числа атомов ThX, образовавшихся из M_0 атомов MsThI $\varphi(M_0)$.

$$X = \varphi(X_0) + \varphi(R_0) + \varphi(M_0)$$

Значение каждого из этих слагаемых вычисляется по общим формулам. Обозначим константы распада ThX, RdTh и MsThI через λ_X , λ_R , λ_M , может написать три выражения для определения чисел атомов, указанных выше:

$$\varphi(X_0) = X_0 e^{-\lambda_X t}$$

$$\varphi(R_0) = \frac{R_0 \lambda_R}{\lambda_X - \lambda_R} (e^{-\lambda_R t} - e^{-\lambda_X t})$$

$$\begin{aligned} \varphi(M_0) = & M_0 \lambda_M \lambda_R \left[\frac{e^{-\lambda_M t}}{(\lambda_R - \lambda_M)(\lambda_X - \lambda_M)} + \frac{e^{-\lambda_R t}}{(\lambda_M - \lambda_R)(\lambda_X - \lambda_R)} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-\lambda_X t}}{(\lambda_M - \lambda_X)(\lambda_R - \lambda_X)} \right] \end{aligned}$$

Производя суммирование, получим выражение для общего количества атомов ThX к моменту времени t :

$$X = \left(X_0 - \frac{R_0 \lambda_R}{\lambda_X - \lambda_R} + \frac{M_0 \lambda_M \lambda_R}{(\lambda_M - \lambda_X)(\lambda_R - \lambda_M)} \right) e^{-\lambda_X t} +$$

$$+ \left(\frac{R_0 \lambda_R}{\lambda_X - \lambda_R} + \frac{M_0 \lambda_M \lambda_R}{(\lambda_M - \lambda_R)(\lambda_X - \lambda_R)} \right) e^{-\lambda_R t} + \frac{M_0 \lambda_M \lambda_R}{(\lambda_R - \lambda_M)(\lambda_X - \lambda_M)} e^{-\lambda_M t}$$

Так как величина радиоактивной постоянной λ_X значительно больше двух других, а именно $\lambda_X = 0.19 \text{ д}^{-1}$, $\lambda_R = 10 \cdot 3 \text{ д}^{-1}$, $\lambda_X = 2.8 \cdot 10^{-4} \text{ д}^{-1}$, то можно упростить полученное выражение для случаев, когда значения времени очень малы и очень велики.

Для малых значений t по сравнению с $T_{1/2X}$ можно положить

$$e^{-\lambda_R t} = e^{-\lambda_M t} = 1$$

Приняв во внимание, что $\lambda_R \ll \lambda_X$ и $\lambda_M \ll \lambda_X$ и произведя соответствующие преобразования, получим:

$$X = X_0 e^{-\lambda_X t} + \left(\frac{M_0 \lambda_M \lambda_R}{\lambda_X^2} - R_0 \frac{\lambda_R}{\lambda_X} \right) e^{-\lambda_X t} + \frac{R_0 \lambda_R}{\lambda_X}$$

или приближенно:

$$X \approx X_0 e^{-\lambda_X t} + R_0 \frac{\lambda_R}{\lambda_X} (1 - e^{-\lambda_X t})$$

Если выразить количества атомов ThX в единицах равновесного ^{232}Th , получим для малых значений t :

$$X \approx X_0 e^{-\lambda_X t} + R_0 (1 - e^{-\lambda_X t})$$

Для больших значений t , когда $e^{-\lambda_X t} = 0$, имеем:

$$X = \left(R_0 \frac{\lambda_R}{\lambda_X} + \frac{M_0 \lambda_M \lambda_R}{(\lambda_M - \lambda_R) \lambda_X} \right) e^{-\lambda_R t} + \frac{M_0 \lambda_M \lambda_R}{(\lambda_R - \lambda_M) \lambda_X} e^{-\lambda_M t} =$$

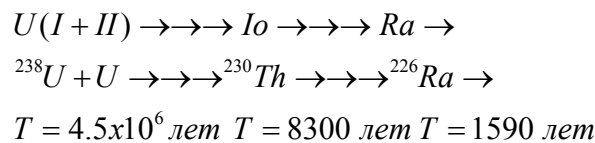
$$= \frac{\lambda_R}{\lambda_X} \left[\left(R_0 - \frac{M_0 \lambda_M}{(\lambda_M - \lambda_R)} \right) e^{-\lambda_R t} + \frac{M_0 \lambda_M}{(\lambda_R - \lambda_M)} e^{-\lambda_M t} \right] =$$

$$= \frac{\lambda_R}{\lambda_X} \left[R_0 e^{-\lambda_R t} + \frac{M_0 \lambda_M}{(\lambda_M - \lambda_R)} (e^{-\lambda_M t} - e^{-\lambda_R t}) \right]$$

В единицах равновесного тория получим следующее выражение для количества X атомов тория при больших значениях t :

$$X = R_0 e^{-\lambda_R t} + \frac{M_0 \lambda_R}{\lambda_R - \lambda_M} (e^{-\lambda_M t} - e^{-\lambda_R t})$$

Уран. Если между долгоживущим изотопом и его короткоживущим потомком находится промежуточный радиоактивный изотоп большой продолжительности жизни, например, в случае образования радия из урана через ионий:



то вычисление производится следующим образом.

В общей формуле для числа атомов радия

$$N_3 = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right]$$

можно положить $e^{-\lambda_1 t} = 0$, тогда

$$N_3 = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{\lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2)} \right]$$

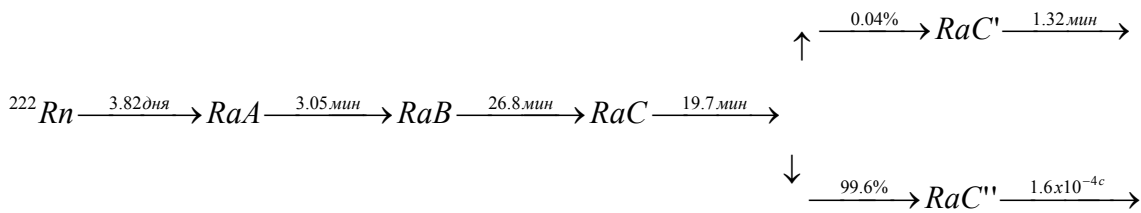
Разлагая $e^{-\lambda_2 t}$ и $e^{-\lambda_3 t}$ в ряды и ограничиваясь членами второго порядка, находим:

$$N_3 = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{1 - \lambda_2 t + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2}}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{1 - \lambda_3 t + \frac{\lambda_3^2 t^2}{2}}{\lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2)} \right]$$

После преобразования получаем:

$$N_3 \approx N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \frac{t^2}{2}$$

Радон. Начальный участок радиоактивного ряда ^{222}Rn имеет вид:



Здесь интересно участие вилки. На кривых изменения активностей радона, продуктов его распада заметны только два первых члена ряда, остальные быстро достигают векового равновесия и их кривые сливаются с предыдущими.