III.I. Задача по проницаемости с линейными граничными условиями 3-го рода

Вводя константы обобщенных процессов насыщения $k_н$ и дегазации k_g, линейные граничные условия 3-го рода к уравнению Фика можно записать следующим образом [5]:

$$-D\,\frac{\partial c(t)}{\partial x} = k_g\left(c_0(t) - \Gamma p_0\right),\ x=0; \qquad \text{(III.I.I)}$$

$$D\,\frac{\partial c(t)}{\partial x} = k_g\left(c_\ell(t) - \Gamma p_\ell\right),\ x=\ell, \qquad \text{(III.I.2)}$$

где P_ℓ, P_0 – давления над входной и выходной сторонами мембраны соответственно; $\Gamma = k_н / k_g$ – константа растворимости.

Общие принципы решения уравнения Фика с граничными условиями типа (III.I.I), (III.I.2) подробно описаны в [5,38], поэтому мы остановимся лишь на некоторых основных моментах.

Применяя метод преобразования Лапласа, легко получить изображение $J^*(\hat{a})|_{x=0}$ для искомого потока $J_0(t)|_{x=0}$ на выходной стороне мембраны:

$$J^*(\hat{a}) = \frac{D\sigma\left[k_g^2\,\Gamma p_\ell - k_g\,\Gamma p_0\, D\sigma\, \mathrm{sh}\sigma\ell - k_g^2\,\Gamma p_0\, \mathrm{ch}\sigma\ell\right]}{D^3\sigma^4\,\mathrm{sh}\sigma\ell + 2k_g\,D^2\sigma^3\,\mathrm{ch}\sigma\ell + k_g^2\,D\sigma\,\mathrm{ch}\sigma\ell}. \qquad \text{(III.I.3)}$$

В (III.I.3) $\sigma = \sqrt{\hat{a}/D}$. Связь изображения и искомого потока выражается формулой

$$J^*(x,\hat{a}) = \int_0^\infty \exp(-\hat{a}\,t)\,J_0(x,t)\,dt. \qquad \text{(III.I.4)}$$

Используя (III.I.3), легко найти изображение для количества продиффундировавшего вещества $Q^*(\hat{a})|_{x=0}$:

$$Q^*(\hat{a}) = \frac{1}{\hat{a}^2}\;\frac{k_g^2\,\Gamma p_\ell - k_g\,\Gamma p_0\,D\sigma\,\mathrm{sh}\sigma\ell - k_g^2\,\Gamma p_0\,\mathrm{ch}\sigma\ell}{D\sigma\,\mathrm{sh}\sigma\ell + 2k_g\,\mathrm{ch}\sigma\ell + \frac{k_g^2\,\ell}{D}\cdot\frac{\mathrm{sh}\sigma\ell}{\sigma\ell}},\ x=0. \qquad \text{(III.I.5)}$$

Известно, что оригинал, изображение которого имеет вид $\frac{1}{\hat{a}^2}\cdot\frac{f(\hat{a})}{\varphi(\hat{a})}$, где дробь $\frac{f(\hat{a})}{\varphi(\hat{a})}$, не имеет особенностей при $\hat{a} = 0$, обладает линейной асимптотикой. Величину стационарного потока, представляющую собой наклон линейной асимптотики, можно найти по формуле [4]

$$J_{cm} = \lim_{\hat{a} \to 0} \frac{f(\hat{a})}{\varphi(\hat{a})}, \qquad (\text{Ш.I.6})$$

а время запаздывания в установлении стационарного потока

$$\tau_L = \lim_{\hat{a} \to 0} \frac{f(\hat{a})\,\varphi'(\hat{a}) - f'(\hat{a})\,\varphi(\hat{a})}{f(\hat{a})\,\varphi(\hat{a})}. \qquad (\text{Ш.I.7})$$

Таким образом, стационарный поток проницаемости

$$J_{cm} = \frac{\Gamma(p_\ell - p_o)}{\ell/D + 2/k_g}, \qquad (\text{Ш.I.8})$$

а время запаздывания

$$\tau_L = \frac{\ell\left(1 + \frac{k_g \ell}{D} + \frac{k_g^2 \ell^2}{6D^2}\right)}{2k_g\left(1 + \frac{k_g \ell}{2D}\right)} + \frac{p_o \ell\left(1 + \frac{k_g \ell}{6D}\right)}{(p_\ell - p_o)k_g}. \qquad (\text{Ш.I.9})$$

При условии, что $p_o \ll p_\ell$ и k_g велико,(Ш.I.9) можно упростить:

$$\tau_L \approx \frac{\ell^2}{6D} + \frac{2\ell}{3k_g}. \qquad (\text{Ш.I.10})$$

Для задачи по проницаемости с граничными условиями I-го рода на входе и 3-го рода на выходе время запаздывания

$$\tau_L \approx \frac{\ell^2}{6D} + \frac{\ell}{3k_g}, \qquad (\text{Ш.I.11})$$

а стационарный поток

$$J_{cm} = \frac{\Gamma(p_\ell - p_o)}{(\ell/D) + (1/k_g)}. \qquad (\text{Ш.I.12})$$