

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Химический факультет

**Игорь Н. фон Бекман**

д.х.н., профессор, заслуженный профессор МГУ

# **НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ:**

**теория и практика**

**МЕТАНАУКА**

**ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМ**

Материалы к курсу лекций и учебнику

**Часть 2**

## Оглавление

23. СТРАННЫЕ ХАОТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ .....	3
23.1 Особенности хаотических аттракторов .....	3
23.2 Гиперболические и сингулярные аттракторы диссипативных систем .....	5
23.3 Аттрактор Лоренса .....	8
23.4 Моделирование системы уравнений Лоренца .....	16
23.5 Система Лоренца, находящаяся под воздействием случайных возмущений .....	17
23.6 Аттрактор Смейла-Вильямса .....	18
23.7 Аттрактор Плыкина .....	21
23.8 Аттрактор Рикитакки .....	26
23.9 Аттрактор Носе-Гувера .....	28
24. АТТРАКТОРЫ РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМ .....	30
24.1 Хаос в механическом маятнике .....	30
24.2 Аттрактор Дуффинга .....	34
24.3 Осциллятор Ван дер Поля .....	36
24.4 Хаос в динамических бильярдах .....	41
24.5 Аттрактор Рёсслера .....	46
24.6 Системы Спротта .....	52
24.7 Осциллятор Уеды .....	55
24.8 Аттрактор Нозе-Гувера .....	55
Гл. 25. ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ .....	59
25.1 Топологические особенности, бифуркации и теория катастроф .....	59
25.2 Элементы теории катастроф .....	62
25.3 Элементарные катастрофы .....	66
25.4 Классификация катастроф .....	78
25.5 Машина катастроф .....	81
25.6 Параболическая качалка .....	84

## 23. СТРАННЫЕ ХАОТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ

Как уже неоднократно упоминалось, по своим свойствам динамические системы в первом приближении делятся на *диссипативные* и *консервативные*. В предыдущих главах мы уже привели примеры таких систем, а так же систем, выпадающих из этой примитивной классификации.

Данной главе обсуждены некоторые системы с грубыми (устойчивыми к малым возмущениям) хаотическими аттракторами: соленоид Смейла-Вильямса и аттрактор Плыкина (гиперболические аттракторы) и негрубая система с почти гиперболическим (сингулярно гиперболическим) аттрактором Лоренца, динамо Рикитаки и термостат Носе-Гувера.

### 23.1 Особенности хаотических аттракторов

Напомним, что аттракторы делятся на простые и странные.

На простом аттракторе фазовая точка движется по определённой траектории независимо от начальных условий, приведших её к странному аттрактору (условие инвариантности); размерность аттрактора выражается целым числом и меньше размерности области притяжения. Условие инвариантности «а» свидетельствует о том, что на простом аттракторе исчезает информация о начальных условиях (теряется память). Если система находится на аттракторе, невозможно узнать из какой точки она двигалась. Если система в процессе своего фазового движения попадает в область притяжения какого-либо аттрактора, то в дальнейшем она развивается только в его направлении. Оказавшись на аттракторе, система перестаёт развиваться, т.е. находится в стационарном состоянии. Небольшое отклонение от этого состояния (в границах области притяжения аттрактора) возвращает систему обратно в это состояние. Простой аттрактор является асимптотически устойчивым состоянием.

**Замечание.** Свойство инвариантности объясняет существование в природе необратимых явлений.

**Хаотическое движение** – движение, в котором фазовые траектории расходятся с течением времени по экспоненциальному закону.

**Истинный хаос** – такая структурная организация системы, при которой поведение любого элемента системы не зависит от поведения всех остальных её элементов и каждого в отдельности.

В некотором интервале значений управляющего параметра, система теряет устойчивость, фазовые траектории попадают в некоторую часть фазового пространства, где ведут себя хаотически. Эта область фазового пространства имеет свою область притяжения, оказавшись в которой фазовые траектории обязательно устремляются к хаотическому пространству, т.е. этот участок проявляет себя как аттрактор. Поскольку такой аттрактор не удовлетворяет свойствам простого аттрактора, то его называют странным.

Странный аттрактор чувствителен к начальным условиям: две первоначально близкие орбиты экспоненциально расходятся и спустя бесконечное время оказываются в абсолютно непредсказуемых положениях. Если в некоторый момент времени слегка развести орбиты, то спустя какое-то время они полностью теряют связь друг с другом (на простом аттракторе две первоначально близкие траектории остаются близкими в течение бесконечно долгого времени). За интервалом значений управляющего параметра, в котором реализуется странный аттрактор, могут существовать ещё один или несколько интервалов, соответствующих опять простому аттрактору. В фазовом пространстве странный аттрактор представляет собой компактное образование: занимает некоторую конечную область. При этом на странном аттракторе с одной стороны, расстояние между первоначально близкими траекториями увеличивается по экспоненте, а с другой, траектории системы в фазовом пространстве не могут пересекаться друг с другом.

Невозможность взаимного пересечения фазовых траекторий следует из того, что они являются решениями эволюционных уравнений, представляющих собой ОДУ, для которых должна выполняться теорема существования и единственности решений. Нарушение пересечения орбиты с предыдущим её участком в некоторой точке  $A$  привело бы к нарушению причинно-следственной связи, так как означало бы существование в этой точке развилки, которой не было ранее – в то время, когда система уже проходила данный участок (системе уже известно, что развилки в точке  $A$  нет).

На странном аттракторе траектории, разбегаясь, вынуждены с течением времени занимать все больший объём, который, тем не менее, должен оставаться конечным. Данное противоречие разрешается благодаря тому, что в области странного аттрактора осуществляется процедура растягивания с образованием складок фазового пространства. Экспоненциальная расходимость – локальное явление: поскольку аттрактор имеет конечные размеры, две орбиты на хаотическом аттракторе не могут экспоненциально расходиться навсегда. Это означает, что такой аттрактор должен образовывать складки внутри самого себя. Траектории расходятся и следуют совершенно разными путями, но за счёт множества складок они могут пройти вблизи более ранних своих частей, не только не пересекаясь, но и находясь от них на экспоненциально далеком (суммарном по складкам) расстоянии. Случайность хаотических орбит есть результат процесса перемешивания. Вытягивание и образование складок происходит снова и снова, создавая складки внутри складок, и так до бесконечности. Если фазовое пространство системы является конечным, то фазовые траектории не могут разойтись из-за неустойчивости более чем на характерный размер области движения, и начинается их запутывание. Предсказать поведение такой системы нельзя. Хаотический аттрактор является фракталом – объектом, в котором по мере увеличения выявляется всё больше деталей.

**Замечание.** При обсуждении отображения "подкова" было продемонстрировано, что в системах с хаотической динамикой области фазового пространства вытягиваются, сжимаются, складываются и отображаются обратно на исходную область. При этом отображении в фазовом пространстве остаются лакуны. Это значит, что орбиты стремятся заполнить менее чем целое подпространство фазового пространства. Фрактальная размерность - мера степени заполнения орбитой определённого подпространства, и нецелая размерность - визитная карточка странного аттрактора.

В зависимости от свойств системы, странные аттракторы имеют складки с различной геометрией. Вид складки повторяется на любых масштабах фазового пространства, занимаемого аттрактором. Странные аттракторы обладают масштабной инвариантностью, которая определяется как независимость геометрического строения от масштаба. Хаотический аттрактор имеет некоторую структуру, т.е. обладает хоть и слабым, но порядком. Этим он отличается от истинного хаоса, в котором нет никакого определённого закона разбегания фазовых траекторий; нет и складок. Наличие складок – основная причина фрактальности странного аттрактора. Вместо привычной размерности, выражаемой целым числом, странные аттракторы имеют дробную размерность.

Вытягивание и складывание хаотического аттрактора устраняет начальную информацию и заменяет её новой: при растяжении увеличивается мелкомасштабная неопределённость информации, при складывании сближаются далеко отстоящие траектории и возрастает неопределённость крупномасштабной информации. Хаотический аттрактор переводит микроскопические флуктуации в макроскопическое проявление. Поэтому точный прогноз будущего невозможен: между прошлым и будущим нет никакой причинной связи. Причинно-следственной связи между прошлым и будущим в хаосе нет.

Хаотический аттрактор локально действует как усилитель шумов. Небольшая флуктуация быстро приводит к сильному отклонению траектории. Однако хаотические аттракторы отличаются от простых усилителей шумов. Поскольку предполагается, что вытягивания и складывания беспрерывно повторяются, малейшая флуктуация, в конце концов, приобретает важную роль в движении и качественное поведение не зависит от

уровня шума. Поэтому хаотическую систему нельзя непосредственно «успокоить», скажем, понизив температуру. Хаотические системы сами по себе порождают случайность и не нуждаются во внешних случайных воздействиях. Вместе с тем, любой аттрактор имеет граничные размеры, поэтому экспоненциальное расхождение двух траекторий разных систем не может продолжаться бесконечно. Рано или поздно орбиты вновь сойдутся и пройдут рядом друг с другом или даже совпадут, хотя последнее очень маловероятно (совпадение траекторий – свойство простых аттракторов).

Скорость сходимости-расхождения является мерой хаоса, т.е. численным выражением того, насколько система хаотична. Другой статистической мерой хаоса служит размерность аттрактора.

Свойства странного аттрактора: а) чувствительность к изменению начальных условий; б) масштабная инвариантность; в) дробная размерность.

## 23.2 Гиперболические и сингулярные аттракторы диссипативных систем

В предыдущих главах мы много внимания уделяли системам с дискретным временем, описываемых отображениями, однако нерегулярные аттракторы имеют место и в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих дело с потоками.

Вновь займёмся системами со структурно-устойчивым хаосом. В таких системах гиперболическая хаотическая динамика имеет место на *однородно гиперболическом аттракторе*.

***Гиперболический аттрактор – аттрактор, в котором касательное пространство каждой точки разлагается в устойчивые направления и неустойчивые направления.***

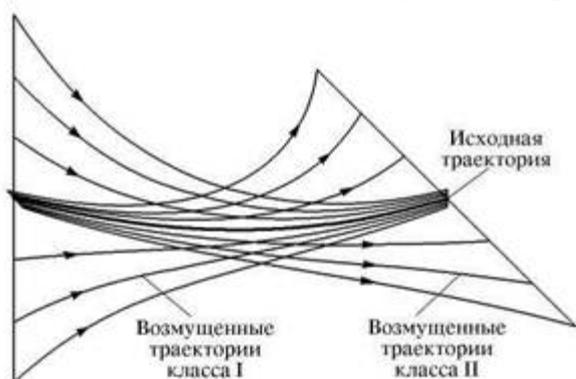
Именно на странных аттракторах гиперболического типа строится строгая аксиоматическая теория хаоса. У такого аттрактора все принадлежащие ему орбиты в фазовом пространстве системы являются седловыми. Седловыми называются траектории, в касательном пространстве которых можно выделить два инвариантных подпространства. Одно из подпространств состоит из векторов, нормы которых экспоненциально уменьшаются при эволюции в прямом времени; второе подпространство состоит из векторов, нормы которых экспоненциально уменьшаются при эволюции в обратном времени. Темпы уменьшения норм векторов этих подпространств ограничены и дистанцированы от нуля. В потоковых системах в касательном пространстве траекторий, не являющихся положением равновесия, выделяется также нейтральное подпространство, соответствующее возмущениям вдоль траектории, норма векторов которых в среднем не убывает и не возрастает. В силу инвариантности указанных подпространств, произвольный вектор возмущения седловой траектории представляет собой линейную комбинацию векторов, принадлежащих этим подпространствам. Размерности устойчивых и неустойчивых многообразий одинаковы для всех траекторий. Множества точек, асимптотически приближающихся к седловой траектории в прямом времени и в обратном времени, соответственно называются ее устойчивым многообразием и неустойчивым многообразием, причем эти многообразия могут пересекаться лишь трансверсально (без касания). Это влечёт структурную устойчивость, или грубость: характеристики динамики не чувствительны к малым изменениям параметров и другим возмущениям системы (в отличие, например, от фейгенбаумовского хаоса).

В этой главе аттракторы гиперболического типа будут рассмотрены на примере соленоида Смейла–Вильямса и аттрактора Плыкина.

Аттрактор какой-либо динамической системы гиперболический, если все принадлежащие ему траектории гиперболические (седловые), рис. 1. Возьмем любую траекторию на аттракторе и рассмотрим всевозможные близкие к ней возмущенные траектории. В линейном приближении среди них выделяется класс траекторий (I), которые приближаются к исходной, причем в среднем по экспоненте, и класс траекторий (II), приближающихся к исходной в обратном времени, тоже в среднем по экспоненте.

Поскольку речь идет о рассмотрении динамики около исходной траектории в линейном приближении, то любой из множества инфинитезимально возмущенных траекторий сопоставляется элемент линейного векторного пространства (касательное пространство), причем все множество исчерпывается всевозможными суперпозициями векторов, ассоциирующихся с возмущениями класса I и II. Так устроена окрестность у *всех* принадлежащих аттрактору траекторий.

Если некоторая система имеет гиперболический аттрактор, то это будет справедливо и для систем, полученных произвольным достаточно малым непрерывным возмущением исходной системы.



Исходя из предположения о гиперболичности аттрактора, можно строго доказать присутствие всех других свойств, являющихся существенными атрибутами хаоса.

**Рис. 1. К пояснению устройства окрестности гиперболической (седловой) траектории**

В настоящее время понятие странный аттрактор оказалось слишком общим (использовать его для характеристики конкретного аттрактора, всё равно, что характеризовать нашего декана, как млекопитающего, что, конечно, верно, но недостаточно для понимания его сущности). Это понятие пришлось подразделить на гиперболические, квазигиперболические и квазистранные.

К сожалению, известные физические системы, такие как простые генераторы хаоса, нелинейные осцилляторы с периодическим воздействием и другие, не относятся к классу систем с гиперболическими аттракторами. Хаос в них обычно связан с так называемым *квазиаттрактором*, который наряду с хаотическими траекториями включает устойчивые орбиты большого периода (не различаемые при решении уравнений на компьютере из-за узости областей притяжения). В отличие от гиперболического аттрактора, для квазиаттракторов характерна чувствительная зависимость деталей динамики от параметров. Это нежелательно для потенциальных приложений хаоса, каковыми являются системы коммуникации, маскировка сигналов и т.д.

Некоторые важные аттракторы, такие как аттрактор Лоренца (сингулярно гиперболический аттрактор) и аттрактор Эно не относятся к гиперболическому типу: аттрактор Лоренца является негрубым, а аттрактор Эно очень сильно зависит от начальных условий.

Структура квазигиперболических (сингулярно-гиперболических, почти гиперболических, стохастических) аттракторов меняется только в точках бифуркаций. Примеры: аттрактор Фейгенбаума (простейший сингулярный аттрактор – первый непериодический аттрактор в каскаде Шкловского), аттракторы Лоренца и Эно, системы со спиральным хаосом и др.

Для квазистационарных систем характерно присутствие сингулярных фазовых траекторий.

**Замечание.** Помимо «классического» аттрактора Лоренца, существует и негиперболический аттрактор Лоренца.

Сингулярный (нерегулярный) аттрактор – важный элемент эргодической теории равномерно гиперболических аттракторов для потоков.

**Сингулярный аттрактор – нерегулярный аттрактор нелинейной диссипативной системы дифференциальных уравнений, пределом каскадов бифуркаций удвоения периода и гомоклинических (гетероклинических) каскадов различных регулярных аттракторов. Простой сингулярный аттрактор является почти устойчивой непериодической траекторией.**

Сингулярные аттракторы - **негрубые** образования, рождающиеся в результате каскадов бифуркаций удвоения периода и гомоклинических и гетероклинических каскадов бифуркаций регулярных аттракторов. В любой окрестности точки существования сингулярного аттрактора в пространстве параметров существует бесконечное число точек существования различных регулярных аттракторов, и в процессе каскадов бифуркаций сложность сингулярных аттракторов возрастает.

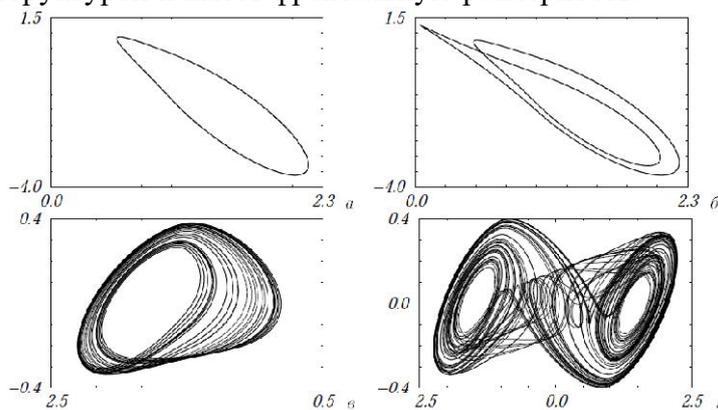
Сингулярные аттракторы – единственный тип нерегулярных аттракторов во всех нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений (обыкновенных, с частными производными, с запаздывающим аргументом, автономных и неавтономных). Они интерпретируются в терминах решений систем дифференциальных уравнений. Сингулярные аттракторы порождаются каскадами бифуркаций сингулярных циклов или торов, при этом особые (сингулярные) точки в системе могут вообще отсутствовать. Не свойство гиперболичности, а сдвиг фазы между траекториями исходного седлового цикла является причиной хаотической динамики на сингулярном аттракторе с обязательным выполнением условия для показателей Ляпунова  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  (нет положительного показателя Ляпунова) в случае  $n=3$ .

Все сингулярные и регулярные аттракторы (устойчивые предельные циклы) автономной системы принадлежат замыканию двумерного неустойчивого многообразия исходного сингулярного цикла с выполнением условия для равномерности любого аттрактора с показателем фрактала  $d_f \leq 2$  в случае  $n=3$ .

Простейшим сингулярным аттрактором нелинейной системы дифференциальных уравнений является аттрактор Фейгенбаума трёхмерной автономной системы - первая непериодическая почти устойчивая траектория системы, являющаяся пределом каскада бифуркаций удвоения периодов устойчивых циклов.

Геометрически следует различать простые сингулярные аттракторы, являющиеся пределами каскадов бифуркаций удвоения периода различных регулярных аттракторов, и сложные сингулярные аттракторы, являющиеся пределами гомоклинических (гетероклинических) каскадов бифуркаций регулярных аттракторов. Простой сингулярный аттрактор является почти устойчивой непериодической траекторией с кратным нулевым старшим характеристическим показателем. Сложный сингулярный аттрактор - семейство траекторий, среди которых нет устойчивых траекторий, но есть гомоклинический или гетероклинический сепаратрисный контур, бесконечное число неустойчивых седловых периодических траекторий и бесконечное число непериодических неустойчивых траекторий с кратным нулевым старшим характеристическим показателем.

Как правило, нелинейная система дифференциальных уравнений имеет бесконечное число сингулярных аттракторов различной сложности, занимающих различные по плотности области фазового пространства, которые обладают геометрической (масштабной) инвариантностью. Увеличенная часть аттрактора подобна всему аттрактору. Такое множество является фракталом, т. е. обладает фрактальной структурой и имеет фрактальную размерность.



**Рис. 2. Двумерные проекции периодической (а,б) и хаотической (в,г) динамик 3-мерной динамической системы.**

Уже в логистическом отображении существует бесконечное число простых сингулярных аттракторов, фрактальная размерность которых равна фрактальной размерности аттрактора Фейгенбаума (нигде не плотное множество точек на отрезке). Существует бесконечное число сложных

сингулярных аттракторов, отличающихся борелевской мерой (т.е. занимающих различные подобласти единичного отрезка), но имеющих одинаковую фрактальную размерность. Поэтому, использование понятия фрактальной размерности для классификации сингулярных аттракторов неэффективно.

Двумя ключевыми бифуркациями, порождающими все обнаруженные в нелинейных системах дифференциальных уравнений каскады бифуркаций, ведущих к образованию сингулярных аттракторов, являются седло-узловая бифуркация и бифуркация удвоения периода. Именно эти две бифуркации участвуют в универсальном сценарии перехода к хаосу в соответствии с теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого через каскад бифуркаций удвоения периода, затем субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций.

### 23.3 Аттрактор Лоренса

Лоренц в 1963 высказал предположение о том, что динамика атмосферы весьма чувствительна к начальным условиям. Из этой гипотезы вытекают самые серьёзные следствия для предсказания погоды. Даже если удастся усовершенствовать метеорологические модели и сбор данных, то предсказать будущую погоду в конкретном месте нельзя (даже в среднем за большой период времени). Лоренц обнаружил, что сократив число членов в уравнении Навье-Стокса, можно получить нелинейную систему уравнений с тремя переменными, сохраняющую много характерных особенностей исходной системы. Эта модель оказалась наглядным примером трёхмерной системы, при некоторых условиях (не всегда!) обладающей хаотическим аттрактором

**Аттрактор Лоренса – компактное инвариантное множество в трёхмерном фазовом пространстве гладкого потока векторного поля через поверхность, которое имеет определённую сложную топологическую структуру и является асимптотически устойчивым, оно устойчиво по Ляпунову и все траектории из некоторой окрестности Астремляются к Апри . Непрерывный аттрактор Лоренса широко используется в теории хаоса; используются и его дискретные аналоги – отображения.**

Аттрактор Лоренса (1961) был найден в численных экспериментах по изучению поведения траекторий нелинейной системы (три дифференциальных уравнения первого порядка):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  – некоторые положительные числа, параметры системы.

Стохастическая модель Лоренса, несмотря на внешнюю простоту (три степени свободы: три обыкновенных дифференциальных уравнения, три константы и три начальных условия), не имеет аналитического решения. Трёхмерная система (1) демонстрирует большое разнообразие качественно различных динамических режимов, в том числе сосуществование периодических аттракторов и переход к хаосу через удвоение периода. При  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  и произвольном  $r$ , система (1) является детерминированной.

Обычно исследование системы Лоренса проводят при  $\sigma=10$ ,  $r=28$ ,  $b=8/3$ ,  $x(0)=1$ ,  $y(0)=0$ ,  $z(0)=0$  (классические значения параметров). В этом случае она ведёт себя псевдослучайным (хаотическим) образом.

**Замечание.** Аттрактор Лоренса при классических значениях параметров возникает в (1) независимо от выбора начальных условий. Это аттрактор квазигиперболического типа, т.к. для него нарушается одно из требований гиперболичности (условие строгой трансверсальности).

Эта система вначале была введена как первое нетривиальное галёркинское приближение для задачи о конвекции морской воды в плоском слое, чем и мотивировался

выбор значений  $\sigma$ ,  $r$  и  $b$ . Полагали, что такая нелинейная система трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при некоторых приближениях способна описать конвекцию в подогреваемом снизу слое жидкости. Считается, что она имеет и другие физические применения: конвекция в замкнутой петле (в тороидальной петле); вращение водяного колеса; модель одномодового лазера; диссипативный гармонический осциллятор с инерционной нелинейностью (с инерционной возбудимостью). Модель Лоренца является реальным физическим примером динамических систем с хаотическим поведением, в отличие от различных искусственно сконструированных отображений (зуб пилы, тент, преобразование пекаря, отображение Фейгенбауэра и др.).

Для любого решения системы Лоренца существует такой момент времени, когда соответствующая фазовая траектория навсегда погружается в сферу фиксированного радиуса. Поэтому существует предельное двумерное притягивающее множество чрезвычайно сложной структуры – аттрактор Лоренца, – к которому притягиваются все траектории из некоторой его окрестности при  $t \rightarrow \infty$ .

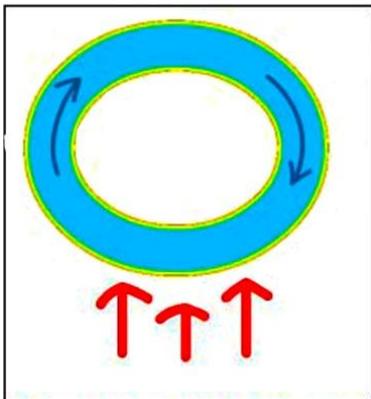
Исходная гидродинамическая система уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\mathcal{G}\nabla)\mathcal{G}\bar{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2 \bar{g} + \bar{g} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p\bar{g}) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\mathcal{G}) = \chi\nabla^2 T \\ p = p_0(1 - \gamma(T - T_0)) \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $\bar{g}$  – скорость течения,  $T$  – температура жидкости,  $T_0$  – температура верхней границы (на нижней поддерживается),  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $\bar{g}$  – сила тяжести,  $\nu$  – соответственно коэффициент теплового расширения, коэффициент температуропроводности и кинематической вязкости.

В системе 1 переменная  $x$  пропорциональна скорости конвективного потока (характеризует скорость вращения конвекционных валов),  $y$  и  $z$  – отвечают за распределение температуры соответственно по горизонтали и вертикали. Параметр  $r$  пропорционален числу Рэлея, а  $\sigma$  и  $b$  – некоторые безразмерные константы, характеризующие систему. Функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  определяют в параметрическом виде траекторию системы в трёхмерном "фазовом" пространстве  $x, y, z$ . Ввиду однозначности функций, стоящих в правых частях этих уравнений, траектория себя никогда не пересекает.

Система Лоренца предлагает модель ламинарно-турбулентного перехода при конвективных движениях жидкости. Если градиент температуры превышает некоторый порог, т.е.  $r$  увеличивается до сверхбифуркационного значения, то происходит переход от ламинарного движения жидкости к турбулентному. С точки зрения нелинейной динамики это означает переход от особой точки типа узла, к другому, совершенно необычному режиму, который называется странным аттрактором или аттрактором Лоренца.

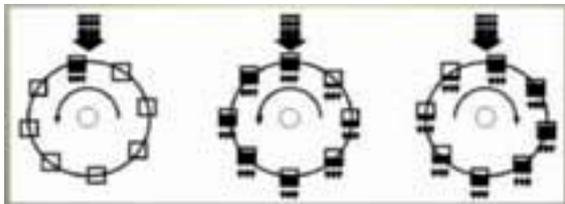


**Рис. 3. Физическая модель для системы Лоренца.**

В задаче о конвекции модель возникает при разложении скорости течения и температуры в двумерные ряды Фурье и последующей их «обрезки» с точностью до первых-вторых гармоник.

Нелинейную автономную система ОДУ третьего порядка попытались использовать для описания движения воздушных потоков в плоском слое жидкости постоянной толщины при разложении скорости течения и температуры в двойные ряды с

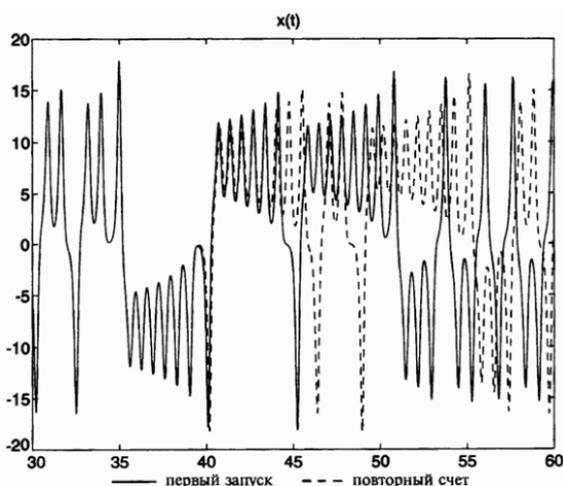
последующим усечением первых-вторых гармоник. Ничего практически ценного из таких попыток не вышло, но аттрактор Лоренца стал знаменит, поскольку такая исключительно простая система уравнений в некотором интервале значений параметров оказалась способна к хаотическому поведению. В своё время эта модель привлекла внимание из-за возможного её применения для интерпретации процессов турбулентности. Однако, вскоре выяснилось, что она неспособна описывать турбулентную конвекцию в силу существенной обрезки исходных тригонометрических рядов.



его, начинает вращаться в другую сторону, останавливается - в общем, как и положено уводящей себя хаотической системе.

**Замечание 1.** Лоренцу сильно повезло, что он смог открыть хаотическое поведение в такой системе. Случайно он выбрал важное с точки зрения хаоса значение параметра  $\gamma$ : система переходит к странному аттрактору только при значениях больших 24,74, при меньших значениях поведение оказывается совершенно иным.

**Замечание 2.** С какой стати для моделирования погоды метеоролог Лоренц



использовал гидродинамические уравнения (исходная система уравнений Навье-Стокса, после аппроксимации системы Бусинеска, сильно упрощенная, вплоть до потери физического смысла) – не ясно. Какое отношение уравнения конвекции жидкости имеют к движению атмосферы? Тем более, что жидкость пребывает в кастрюле на включённой электроплитке. Предсказать погоду по таким уравнениям нельзя!

**Рис. 5. Результаты численного эксперимента Лоренса.** Отклонение в результатах повторных вычислений.

Э.Лоренс вычислял значения решения в течение длительного времени, а затем остановил счёт. Его заинтересовала некоторая особенность решения, которая возникала где-то в середине интервала счёта, и поэтому он повторил вычисления с этого момента. Результаты повторного счёта, очевидно, совпали бы с результатами первоначального счёта, если бы начальные значения для повторного счёта в точности были равны полученным ранее значениям для этого момента времени. Лоренц слегка изменил эти значения, уменьшив число верных десятичных знаков. Ошибки, введенные таким образом, были крайне невелики. Вновь сосчитанное решение некоторое время хорошо согласовывалось со старым. Однако, по мере счёта расхождение возрастало, и новое решение сильно отличалось от старого (рис. 4). То, с чем столкнулся Лоренц, теперь называется существенной зависимостью от начальных условий (признак хаотической динамики). Её назвали эффектом бабочки, отражающим невозможности делать долго сточные прогнозы погоды (взмах крылышек бабочки в Бразилии вызывает торнадо в Техасе).

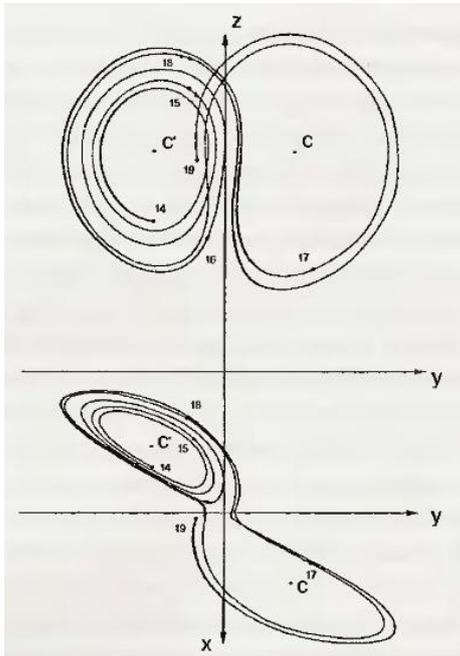


погоды, берущих начало из одной точки.

**Рис. 6. Расхождение двух графиков**

Аналитические результаты теории бифуркаций показывают, что в системе Лоренца с параметрами, сколь угодно близкими к значениям  $b=8/3$ ,  $\sigma=10,2$ ,  $r=30,2$ , существуют устойчивые предельные циклы. Однако до сих пор никакими численными методами их не удалось выявить.

Бифуркационную и фазовую диаграмму системы Лоренца получают численными расчётами. Обычно:  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ , а  $r$  – переменное, начальные координаты  $(10,10,10)$  и  $(-10,-10,10)$ . При плавном изменении параметра  $r$  динамическая система меняет тип своего аттрактора (аттрактор Лоренца лежит в трёхмерном фазовом пространстве). При одних значениях параметра  $r$  система имеет устойчивую предельную точку, а при других значениях  $r$ , больших некоторого бифуркационного значения  $r^*$ , система имеет совершенно невероятное решение.



**Рис. 7. Первый странный аттрактор.**

Лоренц смог вычислить только первые несколько элементов аттрактора для своей простой системы уравнений. Однако он понял, что «прослойка» двух спиральных крылообразных форм должна иметь необычную структуру, неразличимую в малых масштабах.

$0 < r < 1$  – аттрактор (одновременно и локальный и глобальный) – начало координат, единственное

устойчивое состояние, других критических точек нет. В этой точке нет конвекции. Все орбиты (любое начальное состояние) сходятся к началу координат, при  $t \rightarrow \infty$ .

–сли, например, речь идёт о тепловой конвекции, то при  $r > 1$  в однородной до этого среде появляются образования, напоминающие вращающиеся валы, причём разные ветви вилки соответствуют разным направлениям вращения соседних валов.

$r < 1,345$  равновесия – узлы,  $r > 1,345$  – фокусы.

$1 < r < 13,927$  – траектории спирально приближаются (это соответствует наличию затухающих колебаний) к двум критическим точкам, положение которых:  $y = \pm \sqrt{b(r-1)}$ ,  $x = r-1$ . Эти точки определяют состояния стационарного режима конвекции, когда в слое формируется структура из вращающихся валов жидкости. Пара равновесных точек

стабильна только если  $r < \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$ , что справедливо только для положительного  $r$  если

$\sigma > b+1$ . При критическом значении обе равновесные точки теряют стабильность через бифуркацию Хопфа.

$r \approx 13,927$  – две неустойчивые траектории, исходящие из начала координат, совершив полный оборот вокруг одной из устойчивых точек, возвращаются в начало координат при  $t \rightarrow \infty$ , возникают две гомоклинические петли (гомоклиническая траектория выходит и приходит в одно и то же положение равновесия). Эти траектории перестают быть глобальными аттракторами. Напротив, они окружены окрестностями, в которых являются локальными. Точка, исходящая из области, лежащей вне этих окрестностей, может совершать колебательные движения из одной окрестности в другую и обратно. Такое поведение называют метастабильным хаосом.

$r > 13,927$  – в зависимости от направления траектория приходит в одну из двух устойчивых точек. Гомоклинические петли перерождаются в неустойчивые предельные циклы, также возникает семейство сложно устроенных траекторий, не являющееся аттрактором, а скорее наоборот, отталкивающее от себя траектории. Это – странный репеллер.

$r \approx 24,06$  – траектории теперь ведут не к устойчивым точкам, а асимптотически приближаются к неустойчивым предельным циклам — возникает собственно аттрактор Лоренца. Однако обе устойчивые точки сохраняются вплоть до значений  $r \approx 24,74$ .

При больших значениях параметра траектория претерпевает серьезные изменения: при очень больших  $r$  система переходит в режим автоколебаний, при уменьшении параметра наблюдается переход к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний.

$24,06 < r < 24,74$  – в системе сосуществуют сразу три аттрактора: два устойчивых состояния, возникших ещё раньше в результате бифуркации вил, и странный аттрактор.

$r \approx 24,74$  – возникает инверсия бифуркации Хопфа.

$24,76 < r < 30,1$  – в системе есть только странный аттрактор.

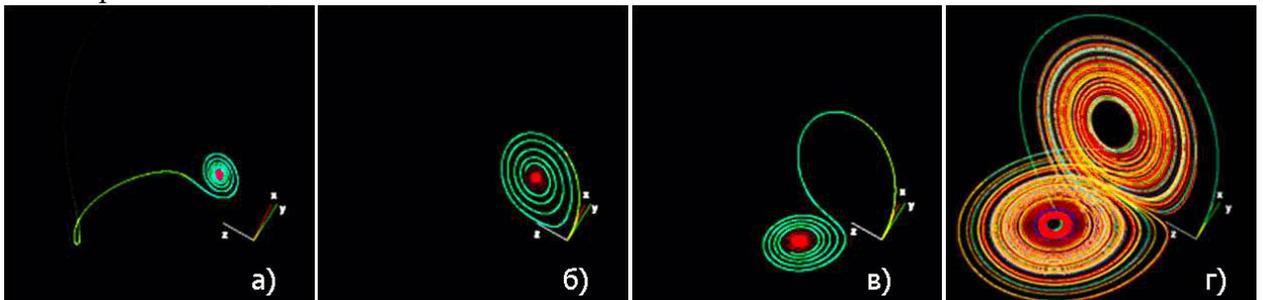
$r = 28$  – система Лоренца имеет хаотические решения (но не все решения хаотичны). Почти все начальные точки стремятся к инвариантному множеству – аттрактору Лоренца – странному аттрактору и фракталу. Фрактальная размерность Хаусдорфа оценивается как  $2,06 \pm 0,01$ , а корреляционная размерность  $2,05 \pm 0,01$ . Точная формула для размерности Ляпунова:

$$3 - \frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma}}$$

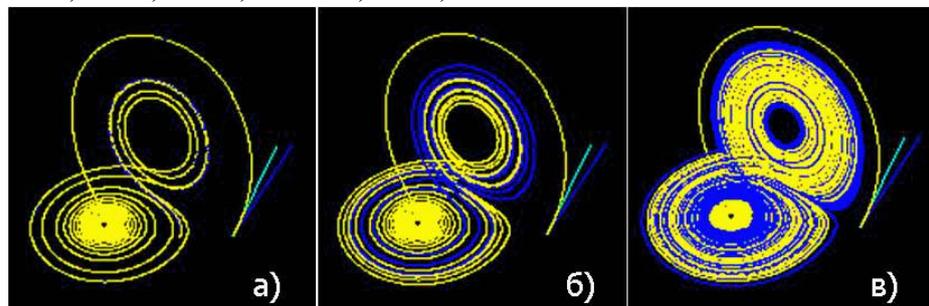
$r > 30,1$  – возможно чередование интервалов, в которых хаотический аттрактор сменяется предельным циклом и наоборот.

$r = 99,96$  система – торический узел.

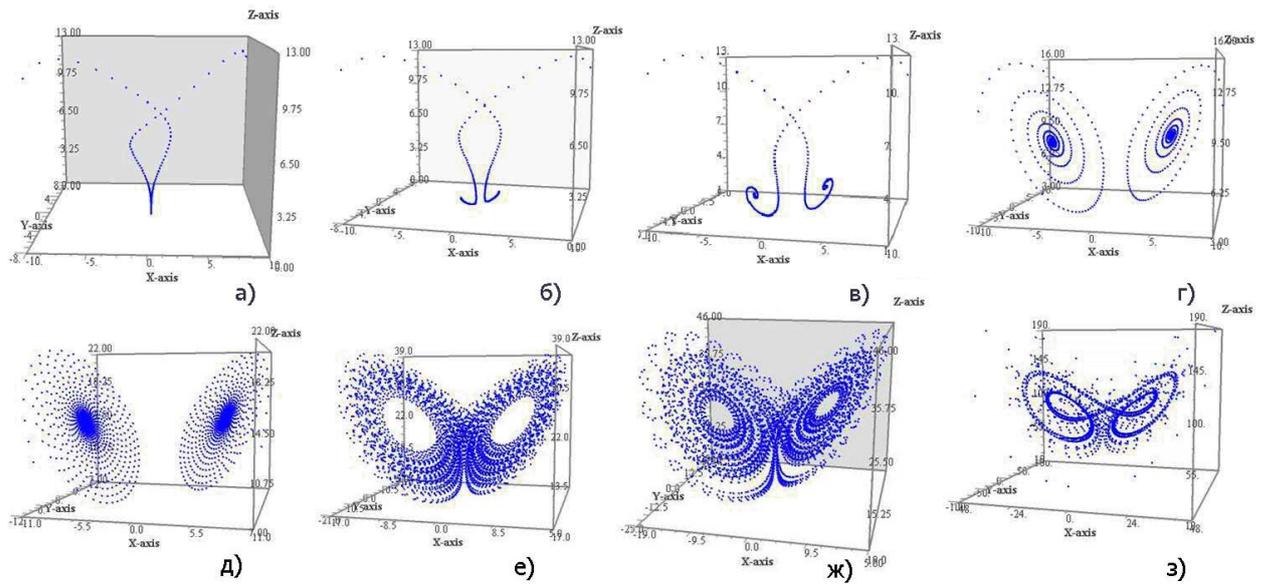
$r \geq 313$  – система находится в единственном аттракторе – устойчивом предельном симметричном



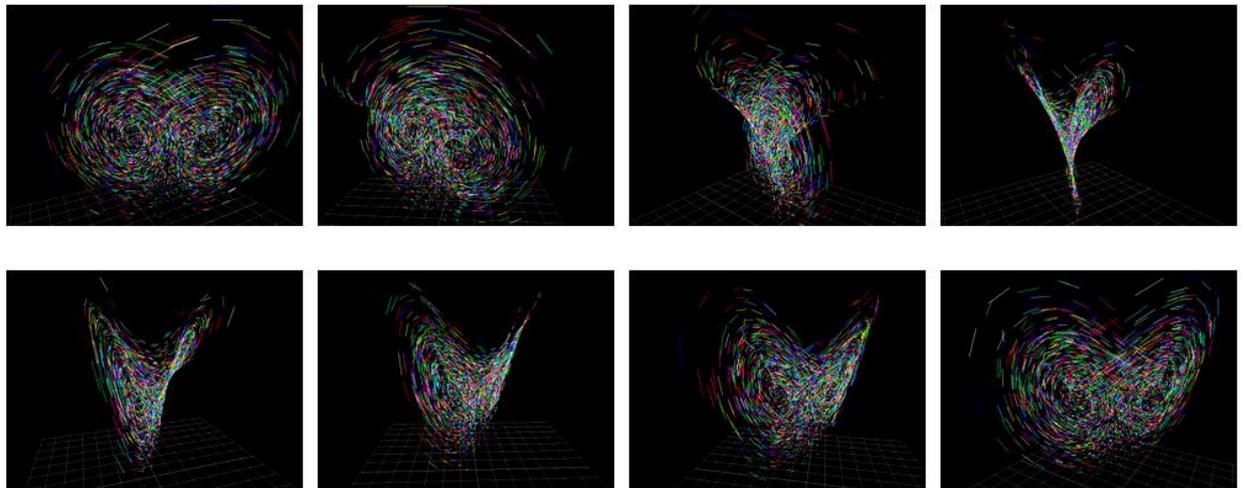
**Рис. 8. Примеры решений системы Лоренца при разных значениях  $r$ .** При малых значениях  $r$  система устойчива и эволюционирует к одному из двух аттракторов с неподвижной точкой. При  $r > 24.74$ , неподвижные точки становятся репеллерами, и траектории отталкиваются ими очень сложным образом. а –  $r=10$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ; б –  $r=13$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ; в –  $r=15$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ; г –  $r=28$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ .



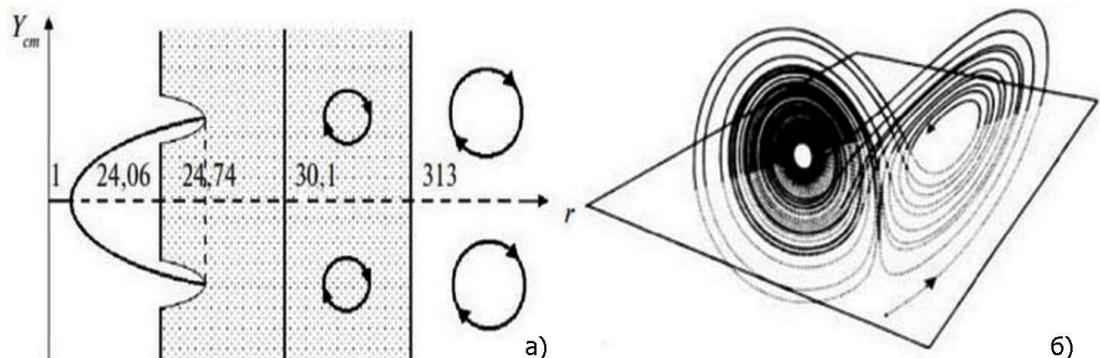
**Рис. 9. Сильная зависимость от начального условия характера эволюции системы Лоренца:** а –  $t=1$ ; б –  $t=2$ ; в –  $t=3$ .



**Рис. 10.** Решение системы (1) при различных значениях параметра  $r$ : а – 0,3; б – 1,8; в – 3,7; г – 10; д – 16; е – 24,06 (собственно это и есть аттрактор Лоренца); ж – 28; з – 10 (виден режим автоколебаний в системе).



**Рис. 11.** Виды аттрактора Лоренца под различными углами.



**Рис. 12.** Диаграммы системы Лоренца: а - бифуркационная диаграмма (участок, покрытый точками, условно обозначает странный аттрактор; значок окружности условно обозначает простой аттрактор – предельный цикл); б – фазовая диаграмма.

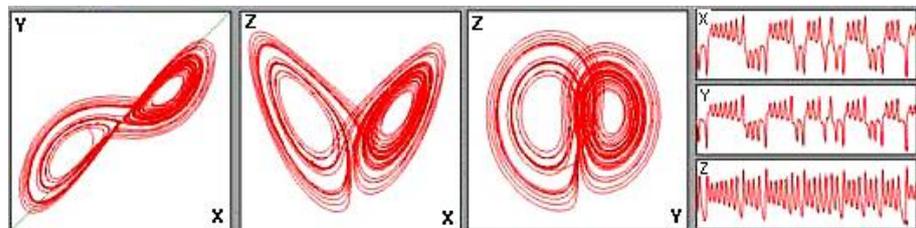
На рис. 9, рассчитанном при  $r=28$ ,  $\sigma=10$  и  $b=8/3$ , представлены три временных сегмента трёхмерной эволюции двух траекторий (одна синяя, другая жёлтая) в аттракторе Лоренца, начиная с двух начальных точек, которые отличаются только на  $10^{-5}$  по координате  $x$ . Первоначально две траектории кажутся совпадающими (только желтый

может быть замечен, поскольку он нарисован над синим), но через какое-то время расхождение очевидно.

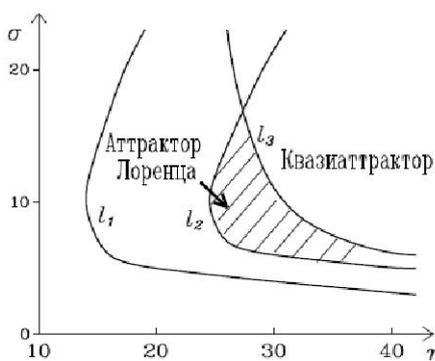
У модели Лоренца имеется три стационарных решения при  $r > 1$ , и только два из них устойчивы при небольшой надкритичности. Система уравнений имеет много различных мод движения. Самая удивительная при значениях параметров  $r = 8$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . При них система совершает сложное хаотическое движение вокруг двух неустойчивых фокусов. Стартуя с любой точки с небольшими  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , система переходит на неустойчивый фокус, вокруг которого она начинает описывать витки с амплитудой, возрастающей со временем, т.е. пробегает траекторию по раскручивающейся спирали. После некоторого количества таких витков система внезапно устремляется ко второму фокусу, вокруг которого она снова описывает витки по раскручивающейся спирали. После нескольких витков, система снова перепрыгивает на первую спираль, чтобы приблизительно повторить то же самое движение. Однако никакой периодичности в таком движении нет; и времена, в течение которых система находится вблизи одного из фокусов, и число витков на каждой из спиралей кажутся совершенно случайными. Хаотическое движение появляется в совершенно детерминированной динамической системе с тремя координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Хаос в аттракторе Лоренца не разрушается при малых смещениях параметров (грубый хаос). Поведение аттрактора Лоренца сверхчувствительно к начальным значениям, так что его геометрическая структура может изменяться. Малейшее различие во входных данных приводит к сильному расхождению результатов с течением времени. Зависимость от начальных условий не позволяет делать долгосрочные прогнозы в нестабильных динамических системах. Любая погрешность в начальных условиях не позволяет предсказать результат на какой-либо продолжительный отрезок времени.

Аттрактор рождается из петли сепаратрис, его объём равен нулю. В области хаоса показатель Ляпунова положителен, система имеет замкнутые нестабильные орбиты. Аттрактор Лоренца имеет некоторые черты равномерной гиперболичности (поток является сингулярно гиперболическим квазигиперболическим, негиперболическим). Он – негиперболический негрубый стохастический аттрактор, не является странным в смысле Смейла.



**Рис. 13.** Динамика хаотической системы Лоренца: представлены временные реализации, проекции фазовых траекторий, сечение Пуанкаре.



**Рис. 14.** Бифуркационная диаграмма системы Лоренца на плоскости двух параметров. При очень больших  $r$  система демонстрирует простой регулярный режим автоколебаний, которому в фазовом пространстве соответствует предельный цикл. При уменьшении  $r$  можно наблюдать переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. В определенных областях по  $r$  реализуется переход к хаосу через перемежаемость.

На аттракторе Лоренца происходит беспорядочное перепрыгивание рекурсивной функции с одной орбиты на другую. Но в нём хаотичность усугубляется ещё и тем, что конфигурация границ аттрактора Лоренца, его тонкая структура скрыта от наших глаз. Сначала вращение переднего фронта графического изображения функции происходит в одной плоскости, потом орбита этой пространственной функции неожиданно перепрыгивает в другую

плоскость, сделав несколько оборотов, траектория снова переходит на первоначальную плоскость, и эти непрекращающиеся скачки воспринимаются как абсолютно случайные, хотя по своей сути они таковыми не являются.

Аттрактор Лоренца является стохастическими автоколебаниями, поддерживаемыми в динамической системе за счет внешнего источника. В фазовом пространстве странный аттрактор имеет топологию некоторого клубка траекторий, в пределах которого можно выделить две области. В каждый момент времени решение находится в одной из этих областей, причем смена состояний системы в одну или другую область является совершенно непредсказуемой (при всех значениях времени  $t$ ). Асимптотического поведения системы Лоренца при  $t \rightarrow \infty$  нет.

Геометрический аттрактор Лоренца (негрубая система) в некоторых аспектах похож на отображение подкова (грубая система): каждый из них характеризуется замыканием своих периодических орбит, транзитивный и имеет чувствительность по отношению к начальным условиям. Он может быть описан в рамках эргодической теории. Небольшое случайное возмущение не влияет на подобные аттракторы, т.к. динамическая стохастичность доминирует над белым шумом. Его структура меняется при бифуркациях гомоклинических петель седла. Аттрактор Лоренца характеризуется присутствием множества петель сепаратрисы седлового состояния равновесия. Эти особые траектории не приводят к рождению устойчивых движений.

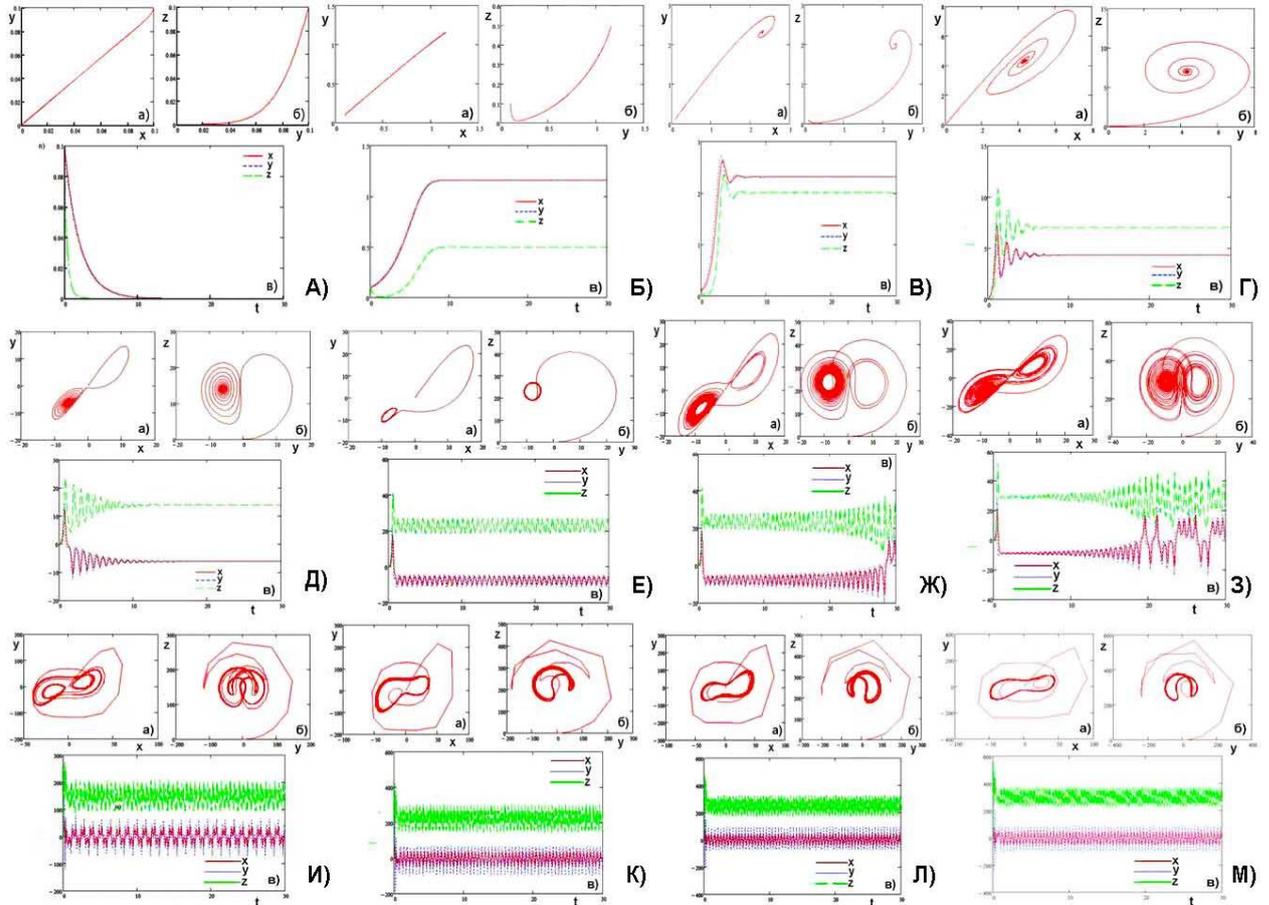
В определенном диапазоне значений параметров аттрактор Лоренца оказывается почти гиперболическим. Устойчивые и неустойчивые многообразия траекторий аттрактора пересекаются трансверсально. Однако при вариации параметров система Лоренца демонстрирует бифуркационный переход к негиперболическому аттрактору. Вероятность гомоклинического касания строго равна нулю. Удаление от области, в которой существует аттрактор Лоренца, приводит к появлению эффекта гомоклинического касания. Угол между многообразиями может обращаться в нуль.

В системе (1) есть седло, и это седло принадлежит аттрактору вместе со своими двумя изолированными сепаратрисами. Аттрактору же принадлежит и счетное всюду плотное множество седловых предельных циклов с неограниченно увеличивающимся периодом и всюду плотное множество устойчивых по Пуассону траекторий. А главное, этот аттрактор негрубый: при сколь угодно малых изменениях параметра сепаратрисы входящего в него седла меняют свое расположение – они то включаются в сепаратрисные поверхности одного из седловых циклов, входящих в аттрактор, то отделяются от нее. Так как седловые циклы всюду плотны в аттракторе, то при непрерывном изменении параметров аттрактор сохраняется, но его структура в силу описанного поведения сепаратрис – непрерывно меняется. Аттрактор Лоренца негрубый.

Аттрактор Лоренца - аттрактор переключательного типа. Фазовая траектория хаотически переключается из окрестности одного седлового состояния равновесия к окрестности другого. Такие переключения сопровождаются случайными изменениями фазы даже в отсутствие шума. Для аттрактора Лоренца шум практически не влияет на скорость релаксации (скорость перемешивания).

При параметрах  $r=28$ ,  $\sigma=10$  и  $b=8/3$  в фазовом пространстве системы Лоренца находятся два седло-фокуса, которые симметричны относительно оси  $r$  и разделены устойчивым многообразием седловой точки в начале координат. Устойчивое многообразие имеет сложную структуру, которая обеспечивает случайные переключения между седло-фокусами по особым путям. Вращаясь по спирали вокруг одного из седло-фокусов, фазовая траектория приближается к устойчивому многообразию и затем с определенной вероятностью может перейти в окрестность другого седло-фокуса. Вращение вокруг седло-фокусов не вносит значительного вклада в характер зависимости автокорреляционной функции (АКФ) от времени, в то время как случайные переключения существенно влияют на время корреляции.

Свойства АКФ определяются процессом случайного переключения, они слабо зависят от вращения вокруг седло-фокусов. Классическая модель телеграфного сигнала хорошо аппроксимирует участок линейного спада АКФ, что позволяет рассчитать время корреляции. Тот факт, что скорость спада АКФ аттрактора Лоренца практически постоянна как при отсутствии, так и в присутствии шума, обусловлен статистикой процесса переключений. Вероятность переключения в аттракторе Лоренца близка к 1/2 и практически не зависит от уровня воздействия шума.



**Рис. 15. Эволюция аттрактора Лоренца при изменении параметра  $r$ :** А – устойчивый аттрактор,  $r > 0$  и  $r < 1$ ; Б – два устойчивых аттрактора,  $r > 1$ ; В – два узла,  $r = 1, 3$ ; Г – два фокуса,  $r = 10$ ; Д – Гомоклиническая петля,  $r = 13, 927$ ; Е – два неустойчивых цикла,  $r > 13, 927$ ; Ж – аттрактор Лоренца,  $r = 24, 06$ ; З – странный аттрактор Лоренца,  $r > 24, 74$ ; И – автоколебательный режим,  $r = 100$ ; К – Удвоение цикла,  $r = 225$ ; Л – два несимметричных периодических решения,  $r = 300$ ; М – симметричный цикл,  $r = 400$ .

### 23.4 Моделирование системы уравнений Лоренца

В качестве примера рассмотрим моделирование системы Лоренца в пакете *Mathcad14* (Программа «Lorenz», автор Степанов Д.Ю., МИРЭА).

При  $r > 0$  и  $r < 1$  система имеет только одну критическую точку. Она является одновременно локальным и глобальным аттрактором. Любое начальное состояние приближается к началу координат при  $t$  стремящемся к бесконечности (рис. 15а). При  $r$  близкой к 1 возникает критическое замедление. Когда  $r$  превышает значение 1, происходит первая бифуркация. Начало координат теряет устойчивость и от него ответвляются два аттрактора (рис. 15б), оба глобально и локально устойчивы.

В случае  $r < 1, 345$  точки равновесия представляются узлами (рис. 15в), а при  $r > 1, 345$  – фокусами (рис. 15г).

При увеличении  $r$  до величины 13,926 две неустойчивые траектории, исходящие из начала координат, возвращаются в начало координат при  $t$  стремящемся к бесконечности, при этом перестают быть глобальными аттракторами.

В случае  $r=13,927$  точка может совершать колебательные движения из одной окрестности в другую и обратно. Такое поведение называют метастабильным хаосом или гомоклинической петлей (рис. 15д).

При  $r>13,927$  в зависимости от направления траектория приходит в одну из двух устойчивых точек. Гомоклинические петли перерождаются в неустойчивые предельные циклы, также возникает семейство сложно устроенных траекторий, не являющееся аттрактором. Происходит бифуркация гомоклинических траекторий с образованием двух неустойчивых циклов (рис. 15е).

При значении  $r=24,06$  траектории ведут не к устойчивым точкам, а асимптотически приближаются к неустойчивым предельным циклам — возникает собственно аттрактор Лоренца (рис. 15ж).

В случае  $r>24,06$  происходит очередная бифуркация. Однако обе устойчивые точки сохраняются вплоть до значений  $r=24,74$ .

При  $r=24,74$  возникает инверсия бифуркации Хопфа, когда  $r>24,74$  остается «странный аттрактор» (рис. 15з).

В случае увеличения  $r$  до 100 наблюдается автоколебательный режим (рис. 15и).

Далее при увеличении параметра  $r$  происходит бифуркация потери симметрии, и в системе существуют два несимметричных периодических решения. Пример поведения системы для  $r=300$  дан на рис. 15к.

При увеличении  $r$  до значения 225 происходит каскад бифуркаций удвоения цикла (рис. 15л). При больших значениях  $r$  в системе существует симметричный цикл (рис. 15м).

### 23.5 Система Лоренца, находящаяся под воздействием случайных возмущений

Система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) + \varepsilon \dot{w}_1 \\ \dot{y} = rx - y + xz + \varepsilon \dot{w}_2 \\ \dot{z} = -bz + xy + \varepsilon \dot{w}_3 \end{cases} \quad (3)$$

где  $w_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – независимые стандартные винеровские процессы с параметрами  $E(w_i(t)-w_i(s))=0$ ,  $E(w_i(t)-w_i(s))^2=|t-s|$ . Параметр  $\varepsilon$  является величиной интенсивности шума.

Воздействие шума приводит к стохастической деформации детерминированных аттракторов модели Лоренца. При случайных возмущениях траектории стохастической системы покидают детерминированный аттрактор и образуют вокруг него некоторый пучок с соответствующим вероятностным распределением. Дисперсия случайных состояний вблизи детерминированной аттрактора зависит от интенсивности шума и устойчивости локальных частей аттрактора. На рис. 16 изображен пучок случайных траекторий вокруг устойчивого предельного цикла системы Лоренца для  $r=330$  и интенсивности шума  $\varepsilon=1$ ; случайные траектории распределены вокруг детерминированного цикла неравномерно.

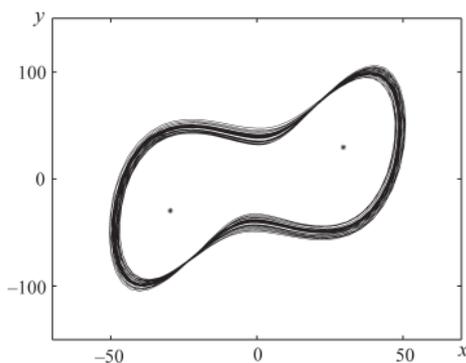
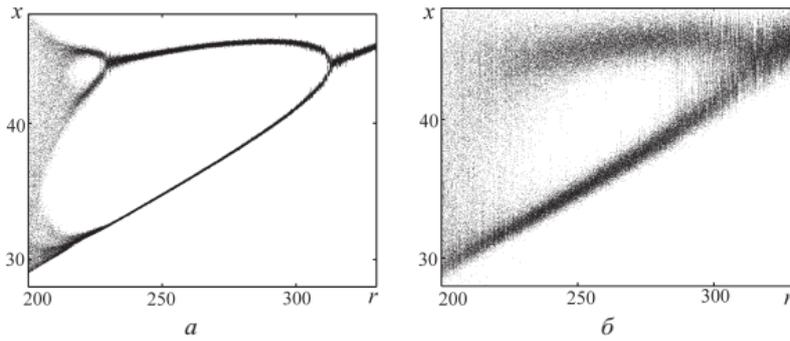


Рис. 16. Случайные траектории системы Лоренца для  $r=330$  и  $\varepsilon=1$ .

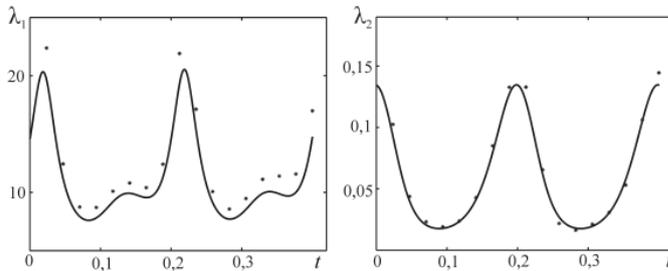
Воздействие даже малого шума приводит к размыванию тонкой структуры детерминированных аттракторов. Этот эффект можно наблюдать на стохастической бифуркационной диаграмме. На рис. 17 построены две бифуркационные диаграммы

системы Лоренца для двух значений интенсивности шума  $\varepsilon = 0,1$  и  $\varepsilon = 1$ .



**Рис. 17.** Бифуркационная диаграмма стохастической системы лоренца для: а –  $\varepsilon = 0,1$ ; б –  $\varepsilon = 1$ .

Для анализа воздействия шума на предельные циклы модели Лоренца применим технику функции стохастической чувствительности. Собственные числа  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ , ( $\lambda_1(t) > \lambda_2(t)$ ) матричной функции стохастической чувствительности являются удобными скалярными характеристиками чувствительности предельного цикла к шуму. Для стохастического цикла модели Лоренца с параметром  $r=330$  графики функций  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  показаны сплошными линиями на рис. 24; звездочками отмечены результаты прямого численного моделирования  $\lambda^*_1(t)$ ,  $\lambda^*_2(t)$  для  $\varepsilon = 0,01$ .

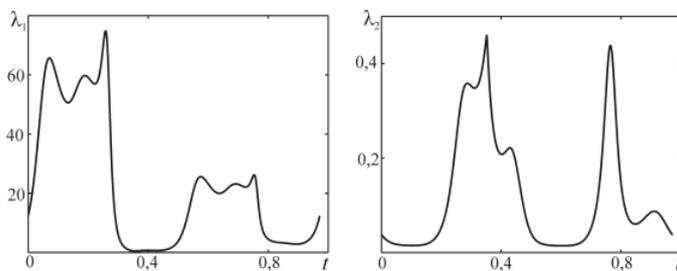


Функции  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ , полученные с помощью техники функций стохастической чувствительности, связаны с  $\lambda^*_1(t)$ ,  $\lambda^*_2(t)$  соотношением:

$$\lambda_i(t) \approx \frac{\lambda^*_i(t)}{\varepsilon^2}.$$

**Рис. 18.** Функции стохастической чувствительности цикла системы Лоренца для  $r=330$  и  $\varepsilon=0,01$

$\varepsilon=0,01$



**Рис. 19.** Функции стохастической чувствительности 2-цикла системы Лоренца для  $r = 225$

Кривые  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  расположены вблизи значений эмпирической функции чувствительности и отражают основные черты этой функции (острые пики, интервалы монотонности). На рис. 18 видны особенности поведения пучка случайных траекторий вдоль цикла (неравномерность ширины пучка вдоль цикла и большой перепад дисперсии в нормальном направлении). Графики функций  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  для стохастически возмущенного 2-цикла системы (3) для  $r=225$  показаны на рис. 19; 2-цикл более чувствителен к шуму. Об этом сигнализируют большие значения функции стохастической чувствительности. Экстремумы функций  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  обозначают соответствующие пространственные зоны стохастического цикла, где дисперсия разброса случайных траекторий имеет максимумы и минимумы.

### 23.6 Аттрактор Смейла-Вильямса

Из всех гиперболических аттракторов конструкция Смейла-Вильямса топологически наиболее проста. Аттрактор получается посредством отображения тороидальной области в себя, которое рассматривается в пространстве размерности три или больше.

**Аттрактор Смейла-Вильямса - результат бесконечного числа отображений внутрь себя тороидальной области в пространстве размерности не меньшей трёх, при которых**

**происходит растяжение тороида в целое число раз вдоль, сильное поперечное сжатие, перекручивание и вложение внутрь исходной области.**

Соленоид Смейла-Вильямса – обратимая динамическая система, аналогичная по поведению траекторий отображению удвоения на окружности. Определена на полнотории, и за одну её итерацию угловая координата удваивается; откуда автоматически возникает экспоненциальное разбегание траекторий и хаотичность динамики. Соленоид возникает при многократном итерировании отображения Смейла-Вильямса. Это - фрактальный аттрактор, состоящий из множества петель.

**Соленоид – аттрактор системы Смейла-Вильямса; устроен как (несчётное) объединение «нитей», наматывающихся вдоль полнотория (континуально множество). Внешне напоминает физический соленоид – электромагнитную катушку.**

**Полноторий,  $D$ , - заполненный двумерный тор.**

Отображением соленоида называют отображение

$$F: S^1 \times D \rightarrow S^1 \times D \quad (4a)$$

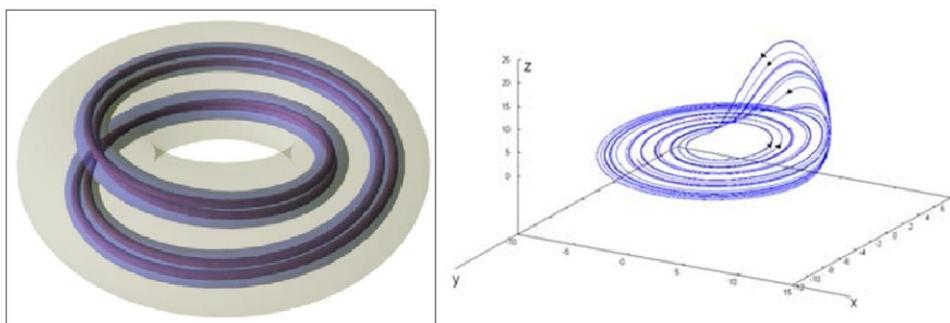
$$F: S^1 \times D \rightarrow S^1 \times D \quad (4б)$$

полнотория в себя, заданное как

$$F(\varphi, z) = \left(2\varphi, \frac{1}{2}e^{i\varphi} + \frac{1}{10}z\right). \quad (5)$$

Здесь диск  $D$  рассматривается как единичный диск на комплексной плоскости:  $D = \{z | |z| \leq 1\}$ . Максимальный аттрактор  $A_{max}(F)$  этого отображения – соленоид Смейла – Вильямса.

Динамика на соленоиде допускает символическое кодирование: точке соленоида можно (почти взаимно-однозначно) сопоставить двусторонне-бесконечным последовательностям нулей и единиц, причём применению отображения будет соответствовать левый сдвиг на пространстве последовательностей, а часть последовательности с положительными индексами будет являться двоичной записью угловой координаты.

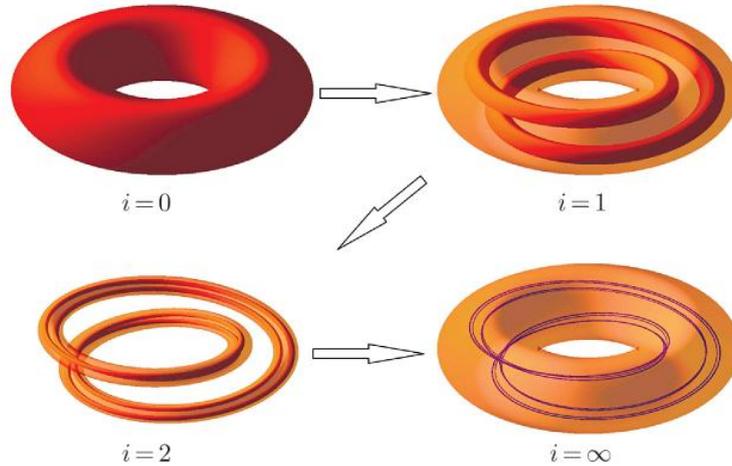


**Рис. 20. Соленоид Смейла-Вильямса.**

При построении аттрактора Смейла-Вильямса область в форме тора растягивают в длину, складывают вдвое и вкладывают полую трубочку в исходный тор (рис. 20). При каждой следующей итерации количество «витков» удваивается. Объект, получаемый в пределе большого числа итераций, есть *соленоид Смейла-Вильямса*. Его поперечная структура имеет вид канторова множества. Поперечная структура соленоида Смейла – Вильямса имеет вид канторова множества (фрактальна). Угловая переменная (угловая координата)  $\theta$  любого мгновенного состояния системы подвергается удвоению на каждом следующем шаге преобразования. На последовательных итерациях она подчиняется отображению Бернулли  $\theta_{n+1} = \{2\theta_n\}$ . По оставшимся двум направлениям элемент фазового объема претерпевает сжатие. Поскольку угловая координата, отсчитываемая вокруг тора, подвергается удвоению на каждом дискретном временном шаге, то аттрактор хаотичен:

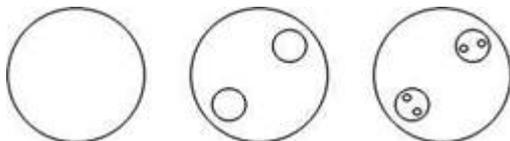
это двойное расширяющееся круговое отображение (отображение Бернулли) проявляет хаос, характеризуемый положительным показателем Ляпунова  $\Lambda = \ln 2$ .

**Замечание.** При растяжении резинового бублика в длину и его сложении вдвое, чтобы поместился в исходном торе, общий объём «бублика» уменьшается – площадь поперечного сечения должна уменьшиться более чем в два раза. Поскольку фазовый объём уменьшается, то эта система диссипативная. При многократных итерациях отображения формируется аттрактор, образованный из множества петель, с фрактальной поперечной структурой.



**Рис. 21.** Пример построения соленоида Смейла – Вильямса.

На рис. 22 показано, как выглядит поперечное сечение исходного тора после однократного и двукратного применения отображения. Это похоже на процедуру построения множества Кантора: на каждом шаге в сечении имеется некоторое число дисков. Очередной шаг построения состоит в том, что внутри каждого диска выделяются две меньшие области в форме дисков, которые оставляются для следующего шага, а все остальное множество исключается. То, что останется в итоге, и есть сечение аттрактора Смейла-Вильямса.



**Рис. 22.** Вид сечения аттрактора Смейла-Вильямса на первых шагах его построения.

Тороидальная область – это трёхмерная структура

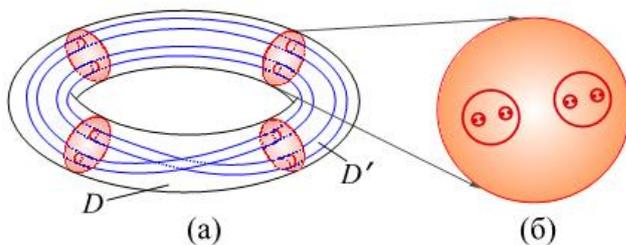
$$T = S^1 \times D^2,$$

где  $S^1$  – единичная окружность, а  $D^2$  – единичный диск в  $R^2$ . Тогда преобразование

$$f : T \rightarrow T, \quad f(x, y, \varphi) = \left( \frac{1}{k}x + \frac{1}{2} \cos \varphi, \frac{1}{k}y + \frac{1}{2} \sin \varphi, 2\varphi \right) \quad (6)$$

где значение  $k > 2$  определяет степень сжатия тора «по толщине» и задаёт соленоид как подмножество  $T \subset R^3$ . Рассмотрим сечение области  $T$  некоторой двумерной плоскостью  $\Pi$ . Тогда получим два диска радиуса  $1/k$ . При этом, очевидно,  $f^2(T) \subset f(T)$ . При итерациях отображения (6) картина будет повторяться на все меньших и меньших масштабах (рис.23б). В результате в сечении множество  $f^m(T)$  будет состоять из  $2^m$  дисков. При  $m \rightarrow \infty$

получим аттрактор Смейла-Вильямса, в котором растяжение в одном направлении и сжатие в другом являются равномерными.



**Рис. 23:** Построение аттрактора Смейла-Вильямса.

Если перейти к системе с

дискретным временем, то аналитическую форму отображения удобно представить в цилиндрических координатах

$$R_{n+1} = 1 + \alpha(r_n - 1) + \beta \cos \varphi_n, \quad (7a)$$

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n, \quad (7б)$$

$$h_{n+1} = \alpha h_n + \beta \sin \varphi_n, \quad (7в)$$

где  $0 < \alpha < 1/2$ ,  $\beta < 1$ , например, для  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ . Существенный момент состоит в том, что угловая координата подчиняется растягивающему отображению окружности

Свойства соленоида

- Отображение соленоида гиперболично.
- Сам соленоид оказывается гомеоморфен множеству, получаемому при реализации процедуры надстройки над одомером — отображением прибавления единицы в 2-адических целых числах .
- Динамика на соленоиде допускает символическое кодирование: точке соленоида можно (почти взаимно-однозначно) сопоставить двусторонне-бесконечным последовательностям нулей и единиц, причём применению отображения будет соответствовать левый сдвиг на пространстве последовательностей, а часть последовательности с положительными индексами будет являться двоичной записью угловой координаты.

Аттракторы соленоида являются гиперболическими (т. е. касательное пространство каждой точки разлагается в устойчивые направления и неустойчивые направления). Пересечение соленоида и меридионального диска является канторовским множеством. Каждая точка  $x$  в соленоиде не является блуждающей (т. е. для любой окрестности  $U$ , содержащей  $x$  и для любого большого целого  $N$ , найдется  $n > N$  такое, что  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ ).

**Замечание.** Как с теоретической точки зрения, так и для практической разработки систем, создающих гиперболический хаос, важен вопрос о сценариях возникновения равномерно гиперболических аттракторов при изменении одного или нескольких параметров управления. Шильников выдвинул сценарий формирования аттрактора Смейл-Вильямса в виде катастрофы голубого неба. Еще один сценарий возникновения или разрушения этого аттрактора связан с столкновением двух хаотических инвариантных множеств, притягивающего соленоида и непритягивающего множества.

Известен физически реализуемый пример системы с однородно гиперболическим странным аттрактором Смейла–Вильямса в системе двух связанных осцилляторов ван дер Поля с попеременным возбуждением и последовательной передачей фазы осцилляций от одной подсистемы к другой.

### 23.7 Аттрактор Плыкина

Рассмотрим пример двумерного отображения, обладающего свойством непрерывности и имеющего хаотический аттрактор (Плыкин, 1980). Этот пример позволяет уяснить важную концепцию гиперболичности – свойства, наличие которого позволяет строго математически обосновать присутствие хаоса.

Аттрактор Плейкина встречается в некотором специальном отображении на сфере с четырьмя дырками или в ограниченной области на плоскости с тремя дырами.

**Аттрактор Плыкина – динамическая система на диске, максимальный аттрактор которой гиперболический; структурно устойчива, т.к. удовлетворяет аксиоме Смейла.**

**Аксиома А Смейла – предложенное С. Смейлом условие на динамическую систему: неблуждающее множество гиперболично, а периодические точки в нём плотны. Объединение этого условия с «сильным условием трансверсальности» является необходимым и достаточным условием для структурной устойчивости системы.**

**Неблуждающее множество – один из вариантов определения аттрактора, формализующий описание «точка несущественна для аттрактора, если у неё есть окрестность, которую каждая орбита посещает не больше одного раза.**

**Аттрактор Плыкина** строится как фактор диффеоморфизма тора, являющегося  $DA$ -диффеоморфизмом, а именно, диффеоморфизмом Аносова  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$  тора охраняет точки, являющиеся неподвижными для отображения. Можно провести  $DA$ -конструкцию, построив коммутирующий с  $T$  диффеоморфизм  $f$ , для которого эти точки становятся отталкивающими, причём отображение в окрестности этих точек является чистой (растягивающей) гомотетией.

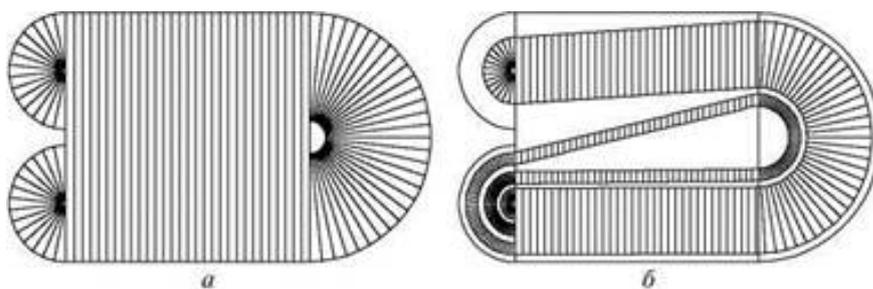
**Диффеоморфизмы Аносова** – введённый Д.В. Аносовым класс отображений с хаотической динамикой, динамика которых устойчива относительно малых возмущений.

**Трансверсальность** – условие общего положения на пересечение гладких многообразий.

Два гладких подмногообразия  $M$  и  $N$ , вложенные в объемлющее пространство, пересекаются трансверсально в точке  $p$ , если соответствующие касательные пространства  $T_p M$  и  $T_p N$  порождают всё касательное пространство объемлющего многообразия в точке  $p$ . Условие трансверсальности пересечения является условием общего положения, т.е., если даны два произвольных гладких подмногообразия  $M$  и  $N$ , то произвольно малой гладкой деформацией можно добиться того, чтобы многообразия пересекались трансверсально в любой точки их пересечения. В частности если суммарная размерность  $M$  и  $N$  строго меньше чем размерность объемлющего пространства, то после произвольно малой деформации можно добиться того, что подмногообразия не имеют точек пересечения.

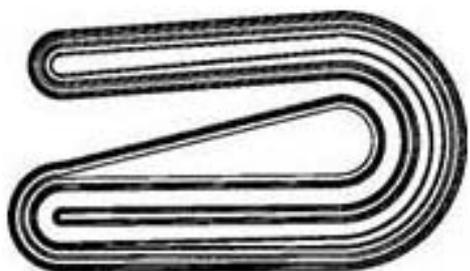
Фактор тора по действию инволюции — это двумерная сфера (а соответствующее накрытие — двулистное с ветвлением в четырёх точках), и коммутирующее с отображением спускается до диффеоморфизма сферы с четырьмя отталкивающими неподвижными точками. Перенос одной из них на бесконечность (позволяющий перейти к отображению диска в себя) заканчивает построение примера Плыкина.

При построении двумерного отображения Плыкина, с хаотическим аттрактором, рассмотрим область  $R$  на плоскости  $(x, y)$ , показанную на рис. 24а. Она состоит из квадрата и трех полудисков с полукруглыми вырезами. Область покрыта штриховкой, показывающей заданное на ней поле направлений. Определим двумерное отображение так, чтобы результатом его действия на точки области  $R$  была фигура, показанная на рис. 24б. Заметьте, что поле направлений, возникающее после применения отображения, совпадает с исходным, причём вдоль линий поля осуществляется сжатие, а против линий поля – растяжение.



**Рис. 24.** Исходная область с определенным на ней полем направлений (а) и результат ее преобразования за один шаг отображения Плыкина (б).

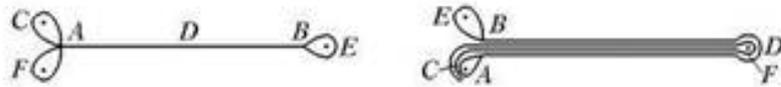
На рис. 25 показано, что получается при многократном действии описанного отображения. Точки, заполнявшие в начальный момент область  $R$ , сконцентрировались на аттракторе, который представляет собой некоторое сложно и тонко устроенное множество.



**Рис. 25.** Аттрактор Плыкина.

Рассмотрим точки какого-либо одного отрезка из числа образующих штриховку на рис. 24. Все они демонстрируют одну и ту же динамику: одновременно

посещают каждую из подобластей (квадрат и три полудиска), из которых построена область  $R$ . Если отождествить точки, принадлежащие каждому определенному отрезку, то вместо динамики в двумерном фазовом пространстве можно рассматривать одномерную динамику. Фазовым пространством для этой одномерной динамики служит «резиновая нить», имеющая две петли на одном конце и одну петлю на другом (рис. 26). Представим себе, что эта нить натянута на три гвоздика. Один шаг итераций будет состоять в том, что мы определенным образом растягиваем нить и вновь натягиваем ее на те же гвоздики. Попробуйте изготовить модель из резиновой нити и, используя рис. 26, воспроизвести

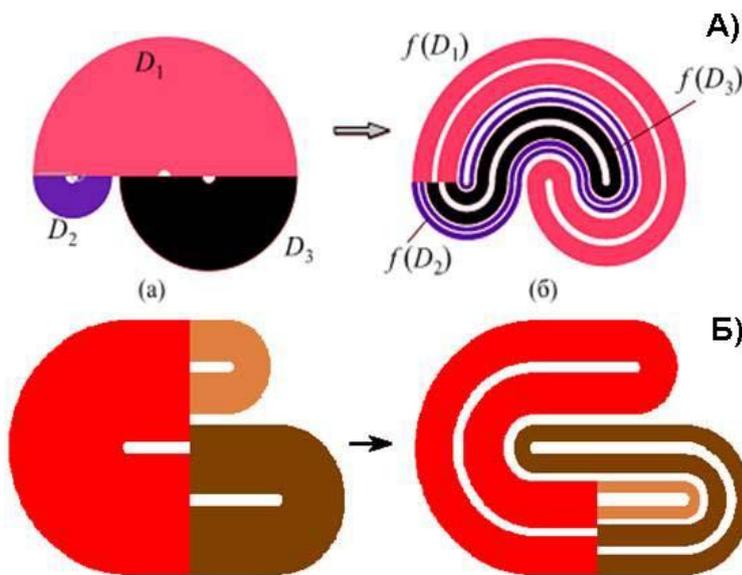


один или (если удастся) больше шагов преобразования.

Рис. 26. Резиновая

нить, представляющая топологию фазового пространства для одномерного аналога отображения Плыкина (слева), и ее преобразование за один шаг отображения (справа).

Аттрактор Плыкина однородно гиперболический, принадлежащие ему траектории седловые, его устойчивые и неустойчивые многообразия не имеют касаний, а пересекаться могут только трансверсально. Он обладает сильными хаотическими свойствами и допускает подробный математический анализ; важное свойство – грубость (структурная устойчивость).



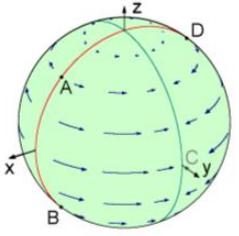
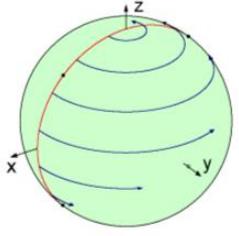
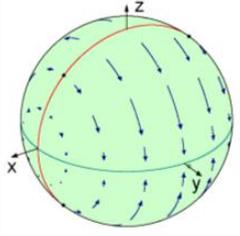
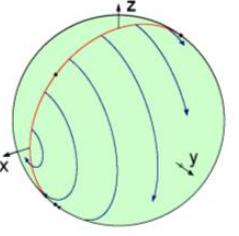
Аттрактор типа Плыкина строится на плоскости при отображении области с дырками в себя (рис. 27).

Рис. 27. Схема построения аттрактора Плыкина:  $A$  – из оригинальной статьи Плыкина;  $B$  – отображение Плыкина-Ньюхауса. Каждый из них может быть связан с отображением, определённым на сфере, например, с помощью стереографической проекции.

Аттрактор Плыкина получается применением специального отображения к области  $D$ , состоящей из объединения трех областей  $D_1, D_2$

и  $D_3$ , каждая из которых представляет собой полукруг с концентрически вырезанным меньшим полукругом, причём сумма диаметров полукругов  $D_1$  и  $D_2$  меньше диаметра полукруга  $D_1$ . Два полукруга  $D_1$  и  $D_2$  приклеены по диаметру к большему полукругу  $D_1$  (рис. 27Аа). Отображение  $f: D \rightarrow D$  переводит каждый радиус данного разбиения области  $D$  в радиус того же разбиения посредством некоторого сжатия (рис. 27Аб).

Для построения системы с аттрактором Плыкина рассмотрим сначала отображение сферы в себя, заданное последовательностью непрерывных преобразований из четырёх периодически повторяющихся стадий. Протяженность одной стадии принята за единицу времени. Роль дырок будут играть окрестности точек  $A, B, C, D$  на сфере. Первую стадию определим как сток изображающих точек по параллелям, в направлении от меридианов  $AB$  и  $DC$ . Вторая стадия – дифференциальное вращение вокруг оси  $z$  с угловой скоростью, линейно зависящей от  $z$ , так, что точки  $B$  и  $C$  остаются на месте, а точки  $A$  и  $D$  меняются местами. Третья и четвертая стадия отличаются от первых двух только пространственной ориентацией – меняются ролями оси  $x$  и  $z$ . На рис. 28 преобразования иллюстрируются геометрически, и приведен вид дифференциальных уравнений для каждой стадии.

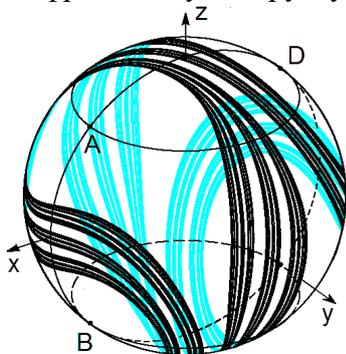
(1) Сток по параллели	(2) Дифференциальное вращение вокруг оси z	(3) Сток к экватору	(4) Дифференциальное вращение вокруг оси x
			
$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon xy^2 \\ \dot{y} = \varepsilon x^2 y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y \\ \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = \varepsilon yz^2 \\ \dot{z} = -\varepsilon y^2 z \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z \\ \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y \end{cases}$

**Рис. 28. Иллюстрация преобразований аттрактора Плыгина.**

Такой поток такой поток формирует вытянутые волокна с тонкой поперечной структурой, характерной для аттрактора Плыгина. Трансформация состояния за полный цикл описывается отображением

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_+(\mathbf{f}_-(\mathbf{x}_n)), \quad \mathbf{f}_\pm(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \pm z, \\ \frac{\sqrt{x^2 + y^2} ye^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2)} \cos \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2} + 1) \pm xe^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2)} \sin \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{x^2 e^{-\varepsilon(x^2 + y^2)} + y^2 e^{\varepsilon(x^2 + y^2)}}}, \\ \frac{\sqrt{x^2 + y^2} ye^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2)} \sin \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2} + 1) \mp xe^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2)} \cos \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{x^2 e^{-\varepsilon(x^2 + y^2)} + y^2 e^{\varepsilon(x^2 + y^2)}}} \end{pmatrix}$$

При  $\varepsilon=1$  итерации этого отображения на компьютере имеют результатом показанный на рис. 29 аттрактор. Обратим внимание на характерную поперечную фрактальную структуру: объект состоит из полосок, внутри которых имеются полоски следующего уровня и так далее. В непрерывном времени эволюция структуры иллюстрируется роликом.

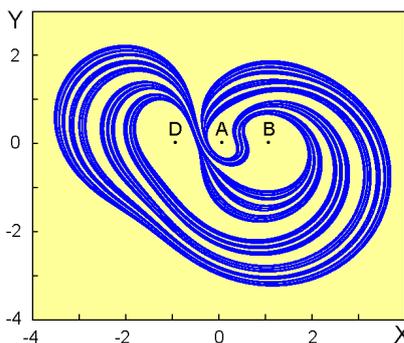


**Рис. 29. Аттрактор, получаемый итерациями отображения Плыгина.**

От представления состояний точками на сфере можно перейти на плоскость, используя стереографическую проекцию, которая дается заменой переменных

$$W = X + iY = \frac{x - z + iy\sqrt{2}}{x + z + \sqrt{2}} \quad (8)$$

За центр проецирования взята точка С, которая не принадлежит аттрактору, так что на плоскости объект расположен в ограниченной области. Если говорить об аттракторе потоковой системы, то он располагается в расширенном фазовом пространстве  $(X, Y, t)$ . При перемещении секущей плоскости  $(X, Y)$  вдоль временной оси имеет место эволюция объекта в сечении: в процессе эволюции вдоль волокон всё время происходит растяжение, а поперёк структуры волокон - сжатие.

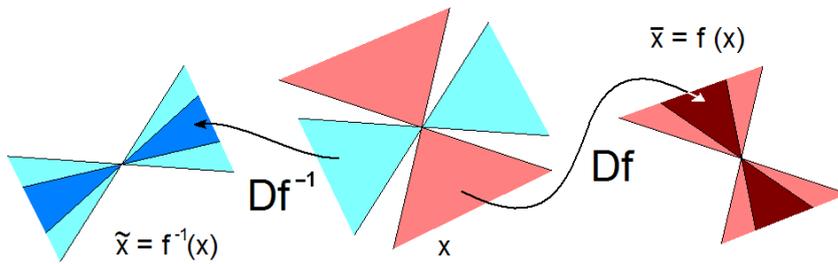


**Рис. 30. Секущая плоскость аттрактора Плыгина вдоль временной оси.**

Согласно критерию конусов (одному из критериев гиперболичности), в пространстве векторов бесконечно малых возмущений (касательном пространстве) для каждой точки  $\mathbf{x}$  на аттракторе  $A$  должен быть определен конус расширяющихся векторов (розовый) и конус

сжимающихся векторов (голубой). При этом образ расширяющегося конуса обязан попадать внутрь расширяющегося конуса точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса внутрь сжимающегося конуса точки-прообраза. Показано, что при правильном выборе константы расширения и сжатия (больше единицы), условия выполнены, причём не

только на аттракторе, но и в некоторой содержащей аттрактор области.



**Рис. 31. Проверка гиперболичности аттрактора Плыкина критерием конусов.**

Используя структурную устойчивость гиперболического аттрактора, удаётся модифицировать систему уравнений в надежде, не изменяя природу аттрактора. В частности, можно перейти от коэффициентов кусочно-непрерывных во времени к гладким коэффициентам. Обратимся к следующей системе уравнений, которая выписана в переменных, задающих координаты на плоскости:

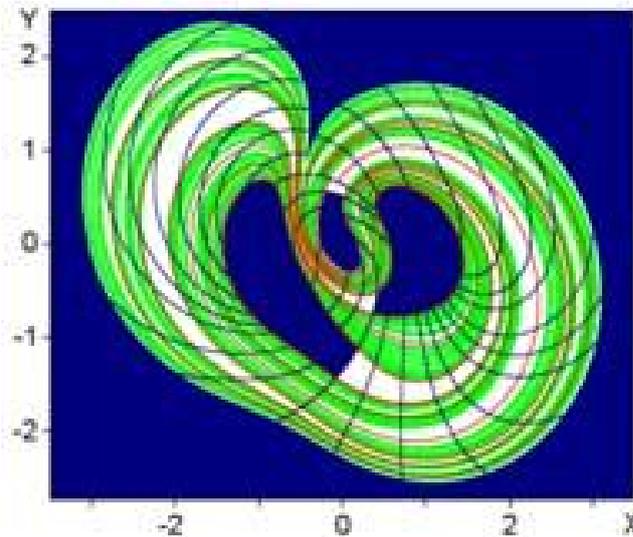
$$\frac{dX}{dt} = -2\varepsilon Y^2 \Omega_1 (\cos(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} t) - X \sin(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} t)) + KY \Omega_2 (\cos(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} t) - X \sin(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} t)) \sin \frac{\pi}{2} t,$$

$$\frac{dY}{dt} = 2\varepsilon Y \Omega_1 (X \cos(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} t) + \frac{1}{2}(1 - X^2 + Y^2) \sin(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} t)) - K \Omega_2 (X \cos(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} t) + \frac{1}{2}(1 - X^2 + Y^2) \sin(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} t)) \sin \frac{\pi}{2} t,$$

где

$$\Omega_1(X, Y, t) = \frac{2X \cos(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} t) + (1 - X^2 - Y^2) \sin(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} t)}{(1 + X^2 + Y^2)^2}, \quad \Omega_2(X, Y, t) = \frac{-2X \sin(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} t) + (1 - X^2 - Y^2) \cos(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} t)}{1 + X^2 + Y^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

Подобрав параметры, например,  $K=1.9$ ,  $\varepsilon=0.72$ , получаем аттрактор, представленный на рисунке в трехмерном расширенном фазовом пространстве неавтономной системы. В сечении плоскостью  $t=\text{const}$  можно видеть объект, аналогичный аттрактору рассмотренного выше отображения. Компьютерная проверка критерия конусов для модифицированной системы подтверждает гиперболическую природу аттрактора.



**Рис. 32. Расположение многообразий на плоскости (X, Y) в сечении Пуанкаре. Область, содержащая аттрактор, показана светлым тоном, а сам аттрактор зеленым цветом. Неустойчивые многообразия показаны красным и располагаются вдоль волокон аттрактора, а устойчивые, показанные черным, – поперек структуры волокон.**

Ещё одним свидетельством гиперболичности служит построенная на основе численных расчётов картина расположения многообразий на плоскости (X, Y) в сечении Пуанкаре (рис. 32). Видно, что в области, содержащей аттрактор, характер взаимного расположения многообразий исключает ситуацию касания.

Предприняты попытки получения динамики типа Плыкина на физическом устройстве, в частности, на базе системы двух связанных неавтономных осцилляторов. Возможно существование аттрактора Плыкина в модифицированной системе Лоренца и модели нейрона.

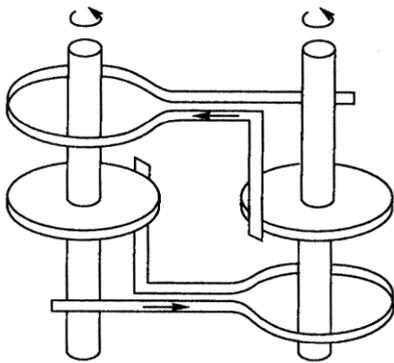
## 23.8 Аттрактор Рикитаки

Помимо решений системы, состоящей из  $N$  ОДУ, асимптотически стремящихся к некоторой точке в  $N$ -мерном фазовом пространстве, бывают решения, представляющие собой колебания различного типа. Среди них можно выделить три класса решений, обладающие существенно разными свойствами:

– обычные незатухающие колебания, описываемые негрубыми системами ОДУ (например, незатухающий осциллятор или модель Вольтерра) – фазовый портрет зависит от начальных условий и представляет собой замкнутые линии в фазовом пространстве с одной неподвижной точкой типа центр;

– автоколебания – решение системы ОДУ, которое, независимо от начальных условий, стремится к определенной замкнутой линии в фазовом пространстве, называемой предельным циклом (модели Хопфа, Ван-дер-Поля, брюсселятора и трехвидовой конкуренции);

– «стохастические» колебания – «странный» аттрактор (например, Лоренца и Рикитаки).



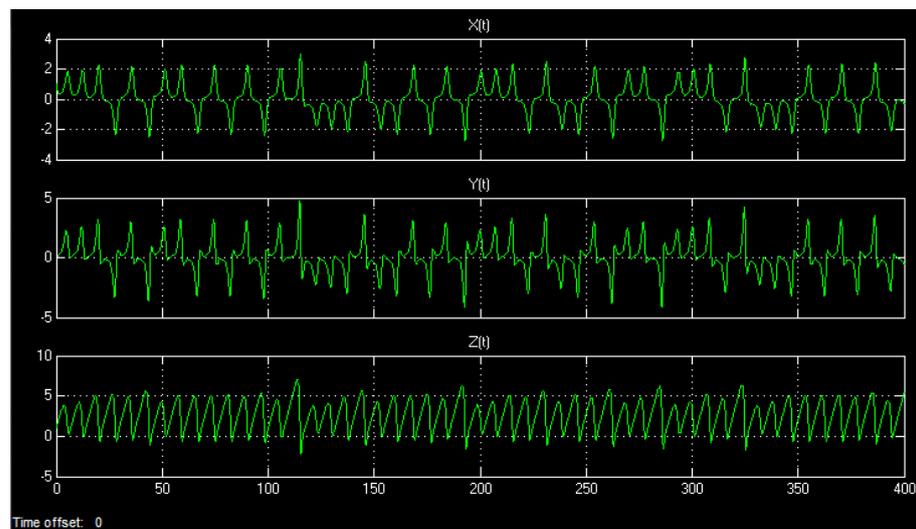
Рассмотрим модель Рикитаки несколько подробнее.

**Рис. 33. Динамо Рикитаки.**

Палеомагнитные исследования показали, что магнитное поле Земли претерпевает изменение направления (полярности) на обратное. В течение последних сотен миллионов лет смена направления происходит нерегулярным образом. Одна из моделей магнитогидродинамической теории земного динамо – модель Рикитаки (1955), описывающая систему из двух соединённых дисков динамо (рис. 33). На их валы действует постоянный момент силы. В динамо с двумя взаимосвязанными дисками, что ток из одной катушки диска перетекает в другую и производит возбуждение второго диска, и наоборот. В определенный момент система начинает сбивать и показывать непредсказуемое поведение. Эту модель используют для исследования связи больших вихрей магнитных полей в ядре Земли и хаотической инверсии геомагнитного поля Земли.

Эти рассматриваются как имитация двух больших вихрей в ядре Земли.

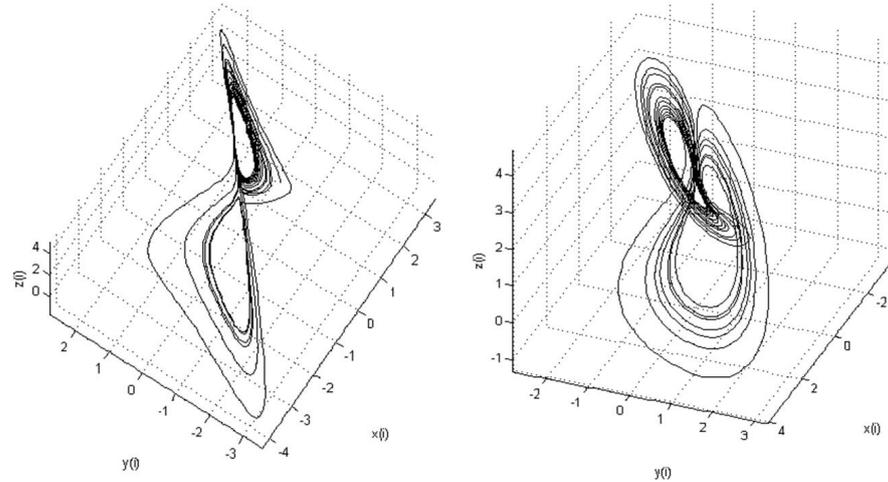
**Двухдисковое динамо Рикитаке – динамических систем третьего порядка с хаотическим поведением.**



**Рис. . Временная реализация системы Рикитаки.**

Стандартная (простая) модель Рикитаки не учитывает трение. Она описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + yz, \\ \dot{y} &= -\mu y + x(z - a), \\ \dot{z} &= 1 - xy. \end{aligned} \tag{10}$$



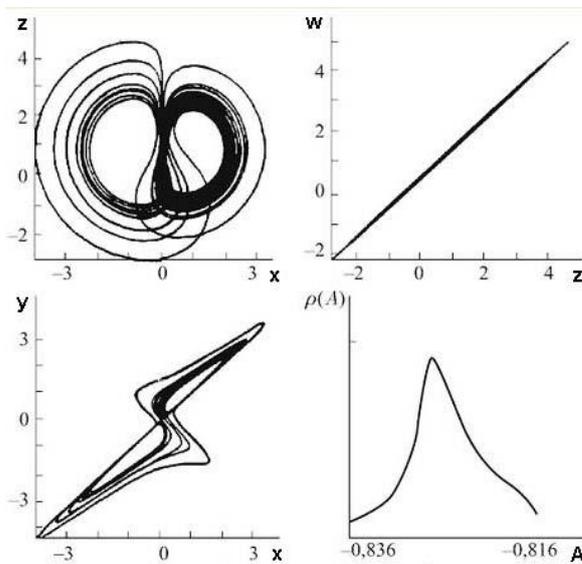
**Рис. 34. Некоторые реализации аттрактора стандартной модели Рикитаки.**

Динамо Рикитаки в чем-то похоже на аттрактор Лоренца, но это совершенно разные системы и описывают разные физические процессы!

Стандартная система Рикитаки обладает интегралом движения (сохраняется разность угловых скоростей дисков). Это приводит к тому, что различным значениям интеграла движения соответствуют различные установившиеся движения, что непонятно с физической точки зрения. Кроме того, она имеет неограниченные решения  $x=y=0$ ,  $z=w+A=t$ .

Обобщённая модель (10), учитывающая трение и несимметрию системы, не имеет этих недостатков. Её свойства существенно отличаются от характеристик стандартной модели, поскольку в ней для каждого диска учитывается вязкое трение. Система уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + yz, \\ \dot{y} &= -\mu y + xw, \\ \dot{z} &= 1 - xy - \sigma_1 z, \\ \dot{w} &= 1 - xy + \sigma_2 w \end{aligned} \tag{11}$$



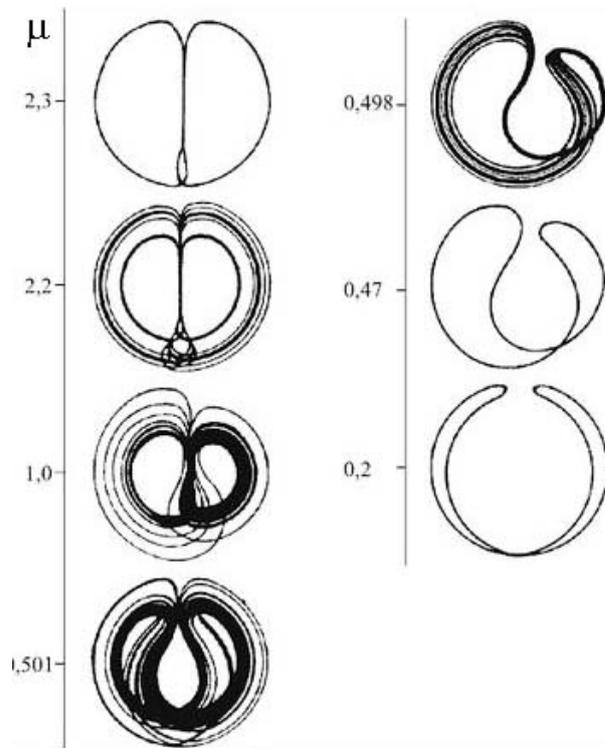
Здесь  $x$  и  $y$  – безразмерные токи,  $z$  и  $w$  – безразмерные угловые скорости дисков,  $\mu$  – коэффициент омической диссипации,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – коэффициенты трения. При  $\sigma_1=\sigma_2=0$  эта модель переходит в стандартную систему Рикитаки. Она обладает интегралом  $A=z-w$ . В ней обнаружено семейство странных аттракторов.

**Рис. 35. Типичный вид странного аттрактора в обобщённой модели Рикитаки. Параметры расчёта  $\mu=1,0$ ,  $\sigma_1=0,0004$ ,  $\sigma_2=0,002$ .**

Представление о типичном хаотическом аттракторе в системе (11) даёт рис. 35. Видно, что в проекции на плоскость

$\{z,w\}$  он представляет собой узкую полосу шириной 0,02 вокруг линии  $w=z+0,83$ , т.е. величина  $A=z-w$  почти не меняется. В этом случае эффективными упрощенными моделями являются одномерные отображения.

Типичная эволюция аттрактора при изменении параметра  $\mu$  показана на рис. 29. На



нём представлены проекции на плоскость  $\{z,w\}$ . При движении вдоль этой линии в пространстве параметров происходит бифуркации, связанные с возникновением и потерей симметрии, а также бифуркации удвоения периода.

**Рис 36. Эволюция аттрактора в обобщённой модели Рикитаки при изменении параметра  $\mu$ :  $\sigma_1=0,004$ ,  $\sigma_2=0,002$ .**

При уменьшении омического сопротивления  $\mu$  переход к хаосу происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода, так же как при увеличении трения  $\sigma$ . Размерность хаотического аттрактора в обобщённой модели Рикитаки  $3+\varepsilon$ , тогда как в стандартной модели  $2+\varepsilon$ . Кроме того, наряду со странными аттракторами или предельными циклами, при тех же значениях параметров существуют

устойчивые особые точки.

### 23.9 Аттрактор Носе-Гувера

Менее знаменитая, но не менее важная трехмерная динамическая система – термостат Носе-Гувера (*Nose-Hoover System*). Она используется в молекулярной теории как обратимая во времени термостатическая система.

**Термостат Носе-Гувера - детерминированный алгоритм для моделирования молекулярной динамики при постоянной температуре.**

Хотя тепловая ванна этого термостата состоит всего из одной воображаемой частицы, моделируемая система достигает реалистичного состояния постоянной температуры (канонический ансамбль). Поэтому терморегулятор Носе-Гувера используется как один из наиболее точных и эффективных методов моделирования молекулярной динамики при постоянной температуре.

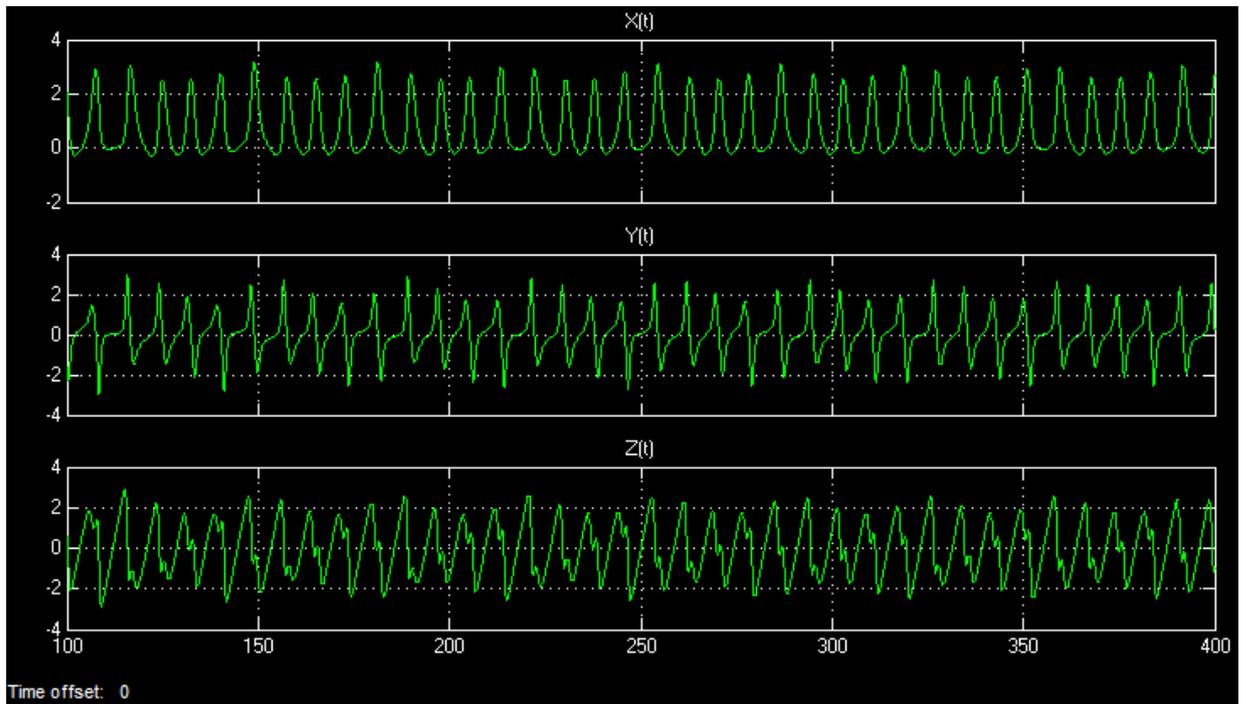
Термостат Носе-Гувера используется для поддержания постоянной температуры в системе. Уравнение, описывающее его работу, имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{v} = \omega_0^2 x - \gamma v \\ \dot{\gamma} = \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) \end{cases}, \quad (12)$$

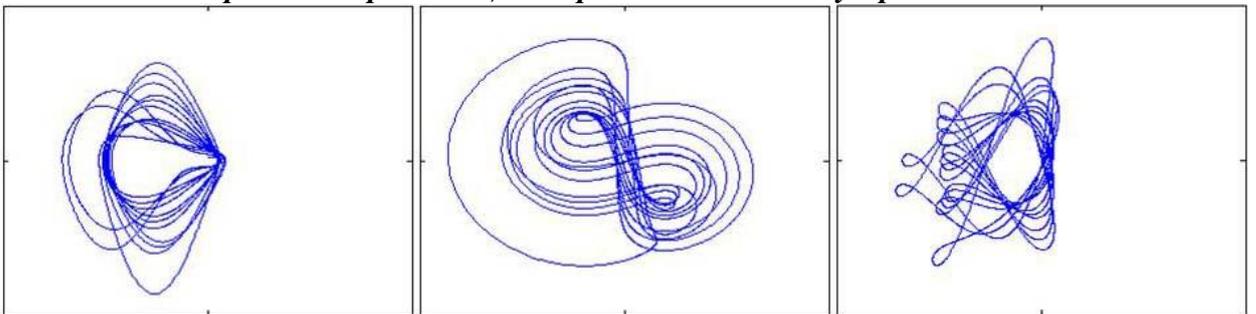
где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – частота;  $T_0$  – начальная температура системы;  $T$  – температура системы в данный момент времени;  $v$  – скорость тела;  $\tau$  – параметр термостата;  $\tau_0=1$  – масштаб для  $\tau_0$ ;  $c_0$  – масштаб жёсткости для  $c$ .

В теории динамических систем термостат Носе-Гувера описывается системой уравнений:

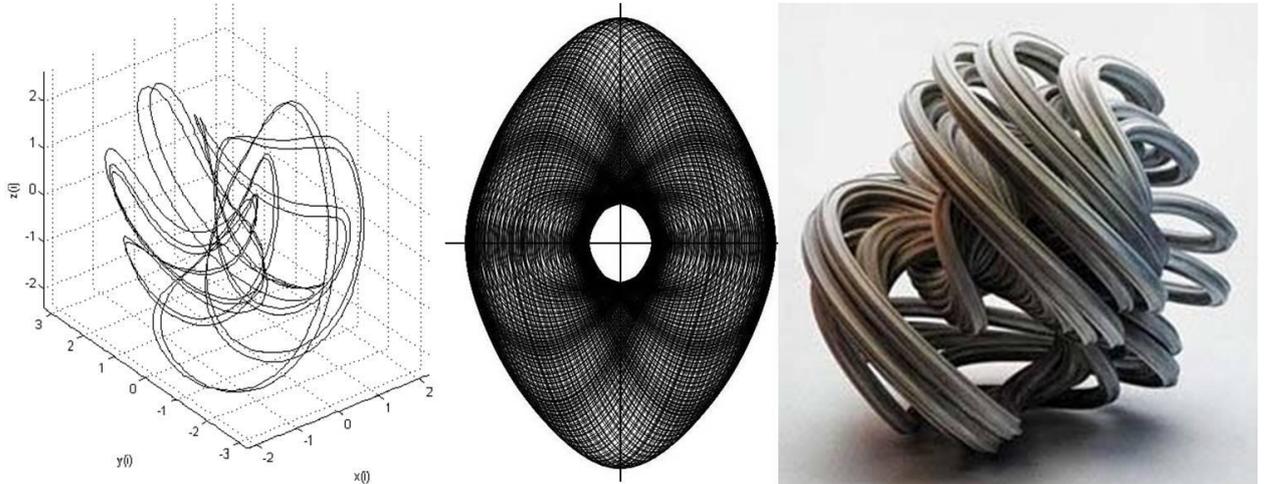
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= yz - x, \\ \dot{z} &= 1 - y^2 \end{aligned} \quad (13)$$



*Рис. 37. Временная реализация термостата Носе-Гувера:*



*Рис. 38. Двумерные проекции аттрактора Носе-Гувера.*



*Рис. 39. Некоторые представления аттрактора Носе-Гувера.*

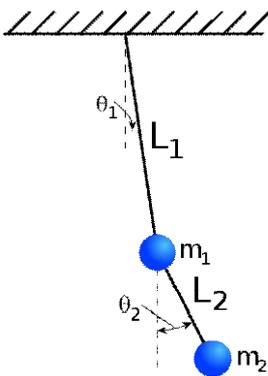
## 24. АТТРАКТОРЫ РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В предыдущих главах мы рассмотрели основные аспекты теории нелинейных эффектов и особенности возникновения в сложных системах процессов бифуркаций и детерминированного хаоса. К сожалению, большинство хаотических аттракторов, хотя и интересны с математической точки зрения, но никак не реализуются в реальных системах. Хотя, конечно, можно найти примеры практического применения теории хаоса. В данной главе мы остановимся на некоторых из них. На этот раз мы основное внимание уделим физическим особенностям хаоса в ущерб строгой теории (подробное описание приведённых в данной главе ситуаций требует многотомного издания).

### 24.1 Хаос в механическом маятнике

В технике широко используются колебательные системы, в том числе испытывающие вынужденные колебания – осцилляторы. Одним из примеров осциллятора является механический маятник. Ранее мы рассмотрели колебания математического маятника, приводящие к регулярному аттрактору. Теперь займёмся колебаниями тоже механических, но сложно устроенных маятников, описание которых требует привлечения странных хаотических аттракторов.

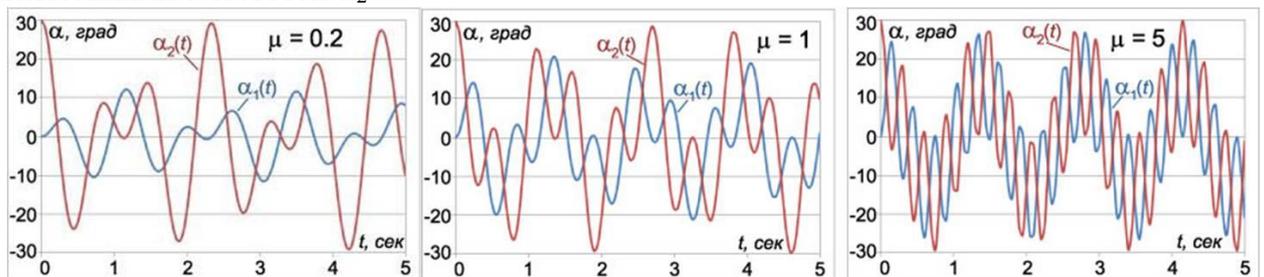
**Двойной маятник** – маятник с другим маятником, прикреплённым к его концу. Простая физическая система, проявляющая разнообразное динамическое поведение со значительной зависимостью от начальных условий. Движение маятника руководствуется связанными ОДУ. Для некоторых энергий его движение хаотично.



Существует несколько типов двойных маятников: оба плеча могут иметь одинаковую длину или разную; они могут быть математическими или физическими; движение может происходить в трёх измерениях или быть ограничено вертикальной плоскостью.

**Рис. 1. Двойной маятник.**

Напомним, что колебания простого маятника имеют регулярный характер; при малых отклонениях от равновесия такие колебания являются гармоническими и описываются функцией синус или косинус. В случае нелинейных колебаний период зависит от амплитуды, но регулярность движения сохраняется. Двойной маятник ведёт себя совершенно иначе. Малые колебания двойного маятника имеют периодический характер и описываются суммой двух гармоник с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , зависящими от параметров системы, но уже в режиме малых колебаний у него возникает эффект биений. В ходе биений энергия циклически переходит от одного маятника к другому. Когда один маятник почти останавливается, другой раскачивается с максимальной амплитудой. Через некоторое время маятники "меняются ролями" и так далее. Колебания с большей частотой  $\omega_1$  модулируются более низкочастотными колебаниями с частотой  $\omega_2$ .



**Рис. 2. Осцилляции двойного маятника ( $l_1=l_2$ ) в линейном режиме при различных значениях отношения масс элементов маятника (масс  $\mu=m_2/m_1$ ).**

При увеличении энергии характер колебаний маятников меняется принципиально – колебания становятся хаотическими. Несмотря на то, что двойной маятник можно описать системой нескольких ОДУ, т. е. вполне детерминированной моделью, в нём возникает хаотическое поведение (рис. 2, здесь полагали, что начальные углы маятников равны). Интересно, что в некоторых режимах в системе возникают устойчивые траектории, как, например, на рис. 3а, или компактные области притяжения, в которых маятник может пребывать продолжительное время (рис 3б).

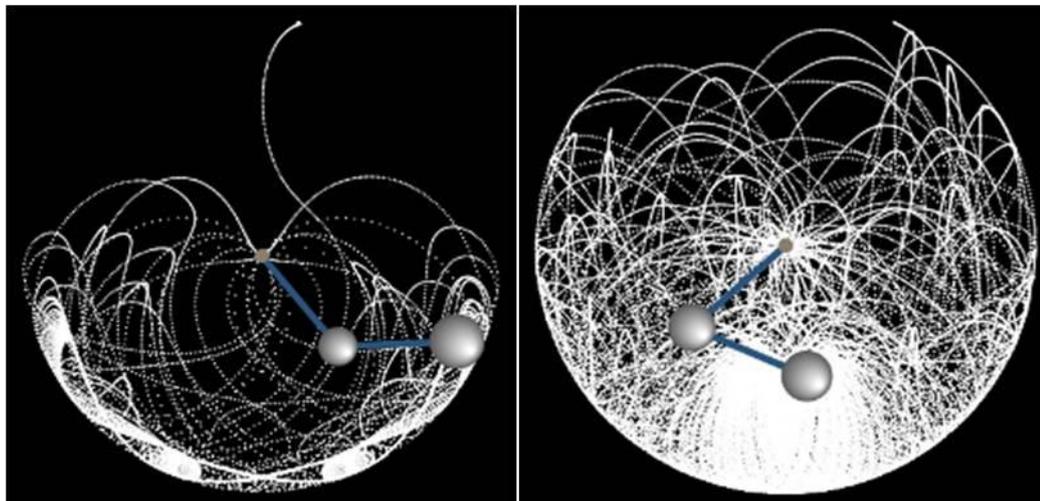


Рис. 3. Хаотическое движение двойного маятника при разных значениях  $\mu$  начального угла: а –  $\mu=2,75$ ,  $\alpha=171^\circ$ ; б –  $\mu=121$ ,  $\alpha=154^\circ$ .

**Маятник с осциллирующим подвесом – жёсткий маятник, подвес которого совершает принудительные колебания в вертикальном направлении, демонстрирует, в зависимости от частоты и амплитуды вынужденных колебаний точки подвеса, большое число разнообразных видов движения.**

Когда частота вынужденных осцилляций точки подвеса приблизительно вдвое больше частоты собственных колебаний маятника, нижнее положение равновесия становится неустойчивым: амплитуда первоначально сколь угодно малых колебаний маятника начинает прогрессивно нарастать со временем (*параметрический резонанс*).

Наряду с основным параметрическим резонансом, который происходит, когда на протяжении одного собственного колебания укладывается приблизительно два цикла осцилляций подвеса, возможны *резонансы высших порядков*; если два цикла возбуждения происходят на протяжении двух, трёх или другого целого числа собственных колебаний. При малых и умеренных амплитудах осцилляций подвеса возбуждаемые параметрические колебания маятника во всех случаях очень похожи на его собственные колебания такого же размаха: те и другие имеют почти одинаковую форму временной зависимости, причём период параметрических колебаний 'близок к периоду собственных колебаний маятника. Трение создает порог возбуждения: амплитуда принудительных осцилляций подвеса должна быть достаточно большой, чтобы снабжать маятник энергией, необходимой для компенсации потерь из-за трения. С увеличением трения возбуждать параметрические резонансы высоких порядков становится всё труднее

Другой возможный вид регулярного поведения маятника – это *полные перевороты* в одном направлении, синхронизированные с осцилляциями подвеса. Период такого неравномерного вращения либо равен периоду возбуждения, либо в целое число раз больше. Благодаря синхронизации переворотов с осцилляциями подвеса («фазовый захват») обеспечивается подпитка маятника энергией, необходимая для компенсации потерь на трение.

Более сложные виды регулярных установившихся движений маятника при параметрическом возбуждении состоят из нескольких колебаний, чередующихся с

переворотами в ту или другую сторону, также синхронизированных с осцилляциями подвеса. Различные конкурирующие между собой виды движений могут сосуществовать при одних и тех же значениях амплитуды и частоты колебаний подвеса. Это свойство нелинейных систем называют мультистабильностью. Какое именно движение из нескольких возможных установится после завершения переходного процесса, зависит от начальных условий: каждому установившемуся режиму соответствует свой «бассейн притяжения» на плоскости начальных состояний.

Когда амплитуда принудительных осцилляций подвеса достаточно велика, а их частота лежит в некоторых определенных интервалах, поведение маятника становится нерегулярным, *хаотическим* несмотря на строго периодический характер возбуждающего воздействия. Это пример *динамического хаоса*, когда нерегулярное, никогда не повторяющееся во времени поведение системы сочетается с полным детерминизмом её математического описания: при заданных начальных условиях решение соответствующего дифференциального уравнения единственно.

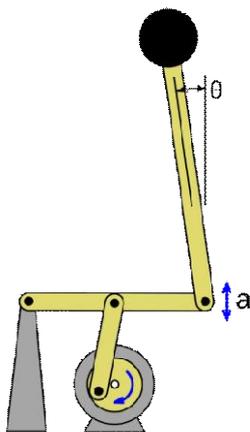
Маятник с осциллирующим подвесом – пример физической модели для исследования закономерностей как хаотических, так и разнообразных регулярных движений в простых нелинейных динамических системах.

Интересная черта в поведении жесткого маятника с осциллирующим подвесом заключается в *динамической стабилизации* перевернутого положения равновесия. При достаточно больших значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса приведенный в перевернутое положение маятник не обнаруживает тенденции к опрокидыванию. Более того, при умеренных отклонениях от вертикали маятник стремится к этому перевернутому положению. Если маятник отклонить от вертикали, он будет совершать сравнительно медленные колебания около перевернутого положения на фоне быстрых осцилляций подвеса. Стабилизирующий эффект вибрации подвеса известен с 1908 года, когда Стефенсон показал, что можно стабилизировать верхнее состояние равновесия маятником с вертикально осциллирующим подвесом. Капица исследовал проблему движения маятника с колеблющейся точкой подвеса в нелинейной постановке.

**Маятник П.Л.Капицы (1951) – система, состоящая из груза, прикреплённого к лёгкой нерастяжимой спице, которая крепится к вибрирующему подвесу.**

Особенностью маятника Капицы является то, что перевернутое (вертикальное) положение маятника может быть устойчивым в случае быстрых вибраций подвеса.

При неподвижной точке подвеса модель Капицы описывает обычный маятник, для которого имеются два положения равновесия: в нижней точке и в верхней точке. При этом равновесие математического маятника в верхней точке является неустойчивым; любое сколь угодно малое возмущение приводит к потере равновесия. Перевернутый маятник из неустойчивого становится устойчивым, если его точку подвеса колебать в вертикальном направлении с достаточно большой частотой. Капица экспериментально исследовал такой маятник, а также построил теорию динамической стабилизации, разделяя движение на «быстрые» и «медленные» переменные и введя эффективный потенциал.

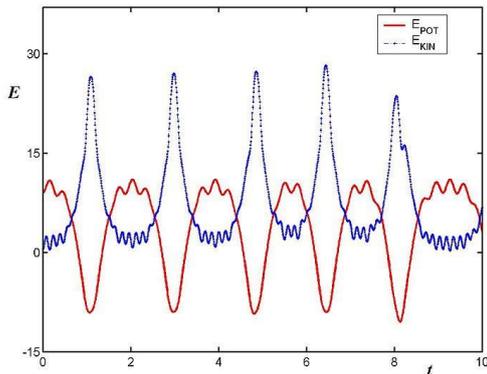


**Рис. 4. Одна из конструкций маятника Капицы: мотор приводит кривошип, который через шатун и рычаг передаёт вибрацию на перевернутый маятник.**

Маятник Капицы интересен тем, что в такой простой системе можно наблюдать параметрические резонансы, когда нижнее положение равновесия не является больше устойчивым и амплитуда малых отклонений маятника нарастает со временем. Также, при большой амплитуде вынуждающих колебаний в

системе могут реализовываться хаотические режимы, когда в сечении Пуанкаре наблюдаются странные аттракторы.

Движение маятника удовлетворяет уравнениям Эйлера-Лагранжа, описывающим эволюцию фазы маятника нелинейно из-за имеющегося в нём множителя  $\sin\varphi$ .



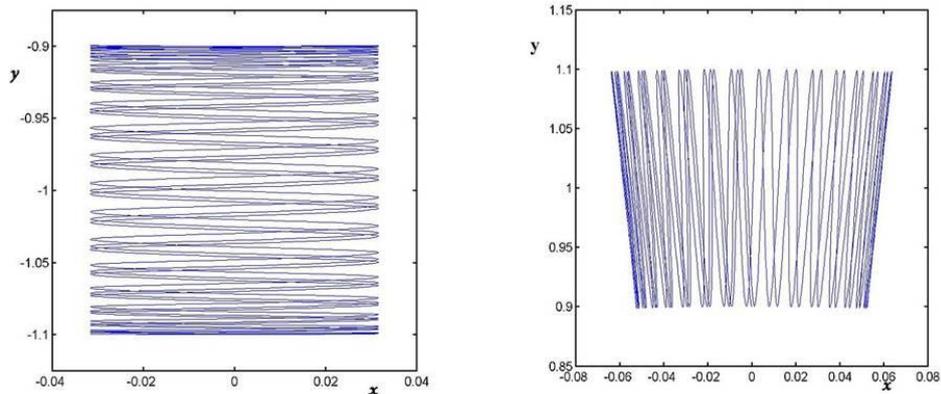
**Рис. 5. Характерные зависимости потенциальной и кинетической энергий от времени для маятника Капицы.**

Дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника Капицы:

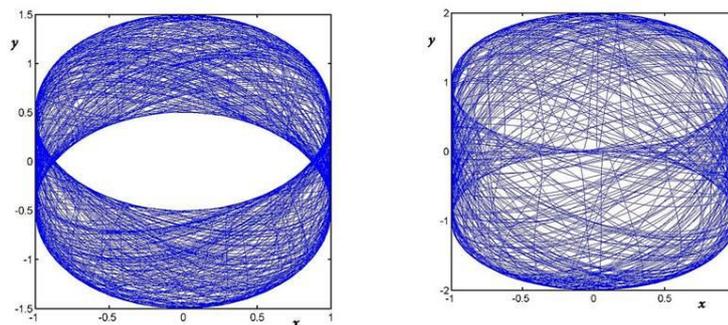
$$\ddot{\varphi} = -(av^2 \cos vt + g) \frac{\sin \varphi}{l}, \quad (1)$$

где  $v$  — частота вынуждающих вертикальных гармонических колебаний подвеса,  $a$  — амплитуда вынужденных колебаний,  $g$  — ускорение свободного,  $l$  — длина лёгкого стержня,  $\varphi$  — угол между стержнем и вертикальной осью.

Наличие нелинейного слагаемого может приводить к хаотическому поведению и появлению странных аттракторов.



**Рис. 6. Колебания маятника Капицы в глобальном (нижнем) минимуме (а) и в локальном (верхнем) минимуме (б).**



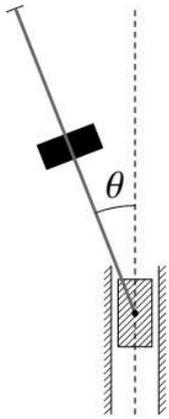
**Рис. 7. Портрет системы в координатном пространстве для маятника Капицы при относительно небольшой амплитуде вынуждающих колебаний (а) и при больших амплитудах осцилляций подвеса маятник обнаруживает разнообразные хаотические режимы.**

В.Н.Челомей исследовал явления динамической устойчивости неустойчивых состояний упругих систем в статике в экспериментах с вибрирующими жидкостями и твёрдыми телами. Он обратил внимание на то обстоятельство, что, подобно случаю с

маятником, вибрации могут повысить устойчивость по отношению к постоянным или медленно изменяющимся силам (так называемую статическую устойчивость) многих упругих систем с параметрическим возбуждением.

**Маятник Челомея – простой маятник с вибрирующим подвесом.**

**Рис. 8. Маятник Челомея.**



стержнем и шайбой.

Один из видов маятника Челомея состоит из стержня, способного поворачиваться вокруг определённой оси (оси подвеса), и твёрдого тела (шайбы). Надетая на стержень шайба имеет отверстие, диаметр которого несколько больше диаметра стержня, что позволяет шайбе свободно скользить по стержню. Под действием силы тяжести шайба падает. Однако, если придать шарнирной опоре этого стержня вертикальные колебания, шайба не падает, а остаётся почти в неподвижном положении на стержне в некотором фиксированном положении, как бы в невесомости, стержень стоит почти вертикально. Это объясняется действием усреднённых вибрационных сил и моментов. Опыт легко обобщается на случай двух или более шайб, а также на случай больших зазоров между стержнем и шайбой.

**24.2 Аттрактор Дуффинга**

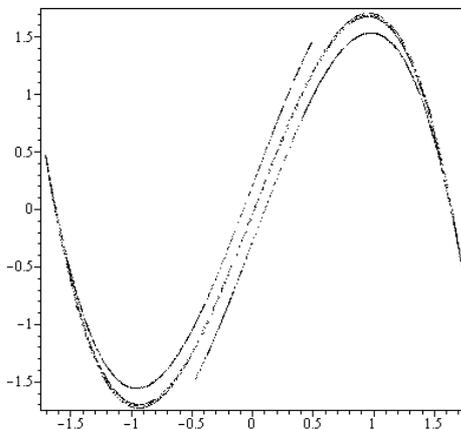
Уравнение Дуффинга описывает поведение вынужденного периодического нелинейный осциллятор с затуханием (демфированный):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + f(x) = e(t) \tag{2}$$

где  $k$  – коэффициент демфирования,  $f(x)$  – нелинейная восстанавливающая сила,  $e(t)$  – периодическая как функция периода  $T$ .

Периодические вынужденные колебания, описанные этим уравнением, предоставляют широкий спектр явлений, характерных для поведения нелинейных динамических систем: регулярное и хаотическое движение, сосуществующие аттракторы, регулярные и фрактальные границы областей притяжения, локальная и глобальная бифуркация и др.

Осциллятор Дуффинга (Duffing oscillator 1918) – простейшая одномерная нелинейная система, представляющая собой одномерную частицу, движущуюся в потенциале .



**Рис. 9. Отображение Дуффинга, демонстрирующее хаотическое поведение:  $a=2.75$  и  $b=0.15$ .**

При система сводится к обычному линейному осциллятору. Особенностью осциллятора Дуффинга является возможность получения хаотической динамики.

Уравнение движения для осциллятора Дуффинга имеет вид

$$m\ddot{x} = -ax - bx^3 \tag{3}$$

где  $x$  , соответственно – координата частицы и её масса.

Дискретная его версия известна как отображение Дуффинга.

**Отображение Дуффинга (отображение Холмса) для вынужденных колебаний осциллятора Дуффинга – динамическая система с дискретным временем.**

Отображение Дуффинга способно к хаотическому поведению; отображает точки плоскости  $(x_n, y_n)$  в новые точки

$$x_{n+1} = y_n \quad (4a)$$

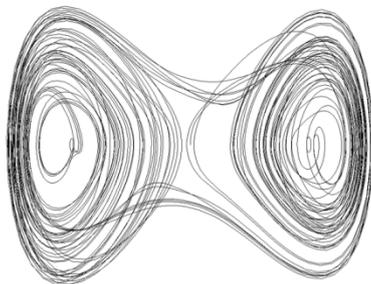
$$y_{n+1} = -bx_n + ay_n - y_n^3. \quad (4b)$$

где  $a$  и  $b$  - константы.

В отсутствие диссипации (трения), гармонический (линейный) осциллятор, находящийся под действием внешней периодической силы, испытывает резонанс, если частота этой силы совпадает с собственной частотой осциллятора. Вблизи резонанса осциллятор совершает колебания конечной амплитуды. Последняя пропорциональна и расходуется точно в резонансе.

В отличие от линейного осциллятора, осциллятор Дуффинга под действием внешней периодической силы испытывает бистабильное поведение.

При  $a=2,75$  и  $b=0,2$  в системе Дуффинга возникает хаотическое поведение.



**Рис. 10. Фазовый портрет двухъядерного осциллятора Дуффинга (дифференциальное уравнение, а не отображение), показывающее хаотическое поведение.**

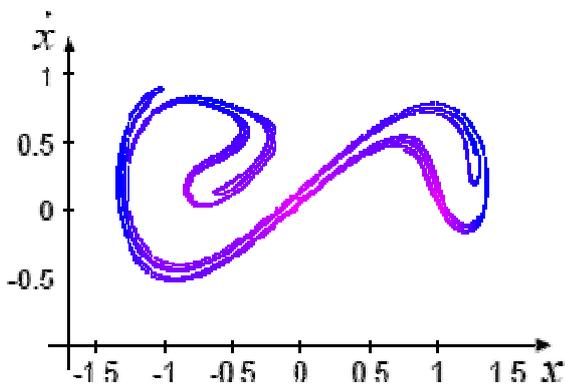
Один из важных примеров осциллятора Дуффинга – периодически возбуждаемый осциллятор с нелинейной упругостью, описывается уравнением

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + ax^3 = \gamma \cos \omega t, \quad (5)$$

где константа затухания  $\delta \geq 0$ .

Это уравнение описывает вынужденные колебания в различных системах с постоянным положительным коэффициентом затухания  $\delta$  и нелинейной возвращающей силой  $x^3$ , представляющей упрощенное выражение сложной симметричной пружины в механической системе, или магнитное насыщение в электрическом контуре с насыщенным стержнем индуктора.

Простая система (5) (генератор Ван дер Поля) способна к хаотическому поведению. При  $\beta > 0$  осциллятор Дуффинга можно интерпретировать как вынужденный осциллятор с пружиной, восстанавливающая сила которой записывается как  $F = -\beta x - \alpha x^3$  (рис. 11). При  $\alpha > 0$  пружина сжимается, а когда  $\alpha < 0$  – растягивается (это, однако, справедливо только для малых  $x$ ).



При  $\beta < 0$  осциллятор Дуффинга описывает динамику точечной массы в потенциале двойной ямы, и её можно рассматривать как модель периодически созданного стального пучка, который отклоняется к двум магнитам, как показано на рис. 12. В этом случае возможны хаотические движения (рис. 13). Их мы более подробно рассмотрим в следующем параграфе.

**Рис. 11. Хаотический аттрактор осциллятора Дуффинга. Собирая сечения Пуанкаре траектории для разных фаз, аттрактор осциллятора Дуффинга периодически меняется. Хаотический аттрактор содержит ровно три седловые неподвижные точки, одну прямо неустойчивого типа и две обратно неустойчивого типа.**

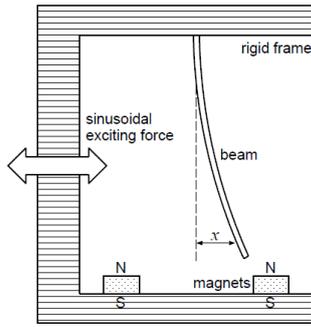
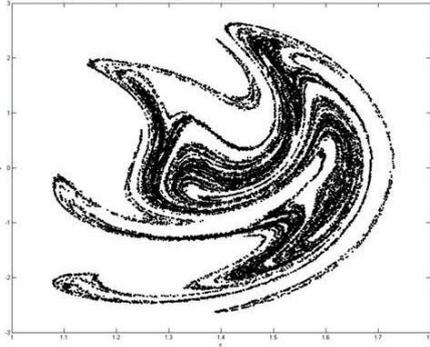


Рис. 12. Балка Муна (более подробно будет рассмотрена в главе, посвящённой сопромату). При  $\beta < 0$  осциллятор Даффинга можно рассматривать как модель периодически создаваемого стального пучка, который отклоняется к двум магнитам.

Различные формы уравнения Дуффинга используются для описания многих нелинейных систем: от маятника до нелинейного поведения изоляторов, балок, кабелей и электрических цепей. Уравнением Дуффинга удаётся аппроксимировать такие системы, как оптические волокна, микромеханические структуры, наномеханические изоляторы, роторы, призмы в потоках жидкости, летательный аппарат насекомого, системы ультразвуковой резки, пьезокерамика под электрическими полями



Практические примеры: электрическая цепь, трехфазный электрический генератор и др.

Рис. 13. *Отображение Пуанкаре, демонстрирующее хаотическое поведение.*

### 24.3 Осциллятор Ван дер Поля

Основными моделями для анализа периодических автоколебаний служат уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

(6)

и Рэлея

$$\ddot{y} - (\lambda - \dot{y}^2) + y = 0. \quad (7)$$

Самовозбуждение автоколебаний происходит при  $\lambda > 0$ . По мере увеличения  $\lambda$  осуществляется постепенный переход от слабонелинейных квазигармонических колебаний к релаксационным.

Осциллятор Ван дер Поля был предложен голландским инженером Бальтазаром Ван-дер-Полем, который нашёл устойчивые (релаксационные) колебания – «предельные циклы». Он в 1927 обнаружил, что на определенных частотах были зафиксированы шумы, всегда находящиеся рядом с собственными частотами волн. Это одно из первых наблюдений детеминированного хаоса.

Система уравнений Ван-дер-Поля имеет вид:

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} + \omega_k^2 = \mu f_k(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n), \quad (8)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $f_k(x, \dot{x})$  – аналитические функции переменных  $x, \dot{x}$  в  $2n$ -мерном открытом шаре радиуса  $R$ :

$$\sum_{k=1}^n (x_k^2 + \dot{x}_k^2) < R^2. \quad (9)$$

Здесь  $k$  – индекс-скаляр.

**Осциллятор Ван дер Поля** – осциллятор с нелинейным затуханием подчиняется нелинейному ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (10)$$

– координата точки, зависящая от времени ; – коэффициент, характеризующий нелинейность и силу затухания колебаний.

С помощью теоремы Льева можно доказать, что система имеет предельный цикл:

$$y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{\mu} \frac{dx}{dt} \quad (11)$$

Уравнения осциллятора Ван дер Поля для двумерного случая:

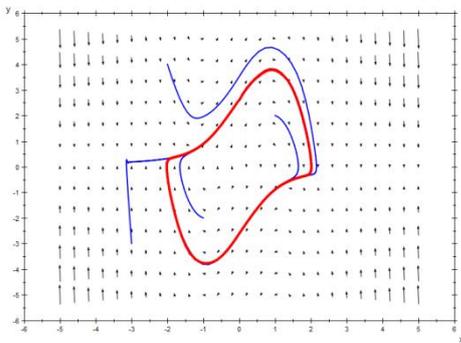
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu \left( x - \frac{1}{3} x^3 - y \right) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\mu} x \end{cases} \quad (12)$$

Ур.10 описывает свободные автоколебания одной из простейших нелинейных колебательных систем (осциллятора Ван дер Поля) и процесс их установления. Возможные режимы определяются параметром  $\mu$ : автоколебания существуют только при  $\epsilon > 0$ , их форма близка к гармонической при  $\mu \ll 1$  и имеет релаксационный вид при  $\mu > 1$ .

**Замечание.** Уравнение Ван дер Поля обладает простой динамикой – классический пример автоколебательной системы. Хаотические режимы в Ур.1 невозможны, но при достаточно простой его модификации (при введении дополнительного нелинейного члена) возникает хаос, но лишь в неавтономном режиме работы.

Ур.10 служит математической моделью (при ряде упрощающих предположений) лампового генератора на триоде в случае кубической характеристики лампы.

При любом  $\mu > 0$  в фазовой плоскости системы (10) существует единственный устойчивый предельный цикл, к которому при  $t \rightarrow \infty$  приближаются все остальные траектории (кроме положения равновесия в начале координат); этот предельный цикл адекватен автоколебаниям осциллятора Ван дер Поля. При малых  $\mu$  автоколебания осциллятора (10) близки к простым гармоническим колебаниям с периодом  $2\pi$  и с определенной амплитудой. При возрастании  $\mu$  автоколебания осциллятора (10) всё более отклоняются от гармонических колебаний. При больших  $\mu$  Ур.10 описывает релаксационные колебания с периодом  $1,614\mu$ . Возможные режимы определяются параметром  $\epsilon$ : автоколебания существуют только при  $\mu > 0$ , их форма близка к гармонической при  $\mu \ll 1$  и имеет релаксационный вид при  $\mu > 1$ .



**Рис. 14. Фазовый портрет осциллятора. Виден предельный цикл.**

У осциллятора Ван дер Поля существуют два интересных режима: при и при . Очевидно, что третьего режима – не существует, так как трение в системе не может быть отрицательным.

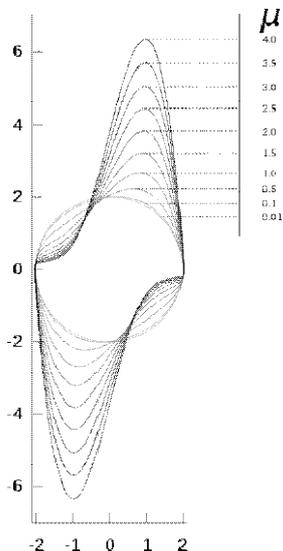
1) Когда , то есть осциллятор без затухания, то

уравнения преобразуются к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad (13)$$

Это уравнение гармонического осциллятора.

**Рис. 15. Изменение формы предельного цикла при изменении**



2) При система имеет некие предельные циклы. Чем дальше от нуля, тем колебания осциллятора менее похожи на гармонические.

Вынужденные колебания (т.е. колебания под воздействием внешнего периодического возмущения) осциллятора Ван дер Поля как с потерями энергии, так и без оных рассчитываются по формуле

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = A \sin(\omega t) \quad (14)$$

– амплитуда внешнего гармонического сигнала,  $\omega$  – его угловая частота,  $\mu$  – управляющий параметр.

Это уравнение предсказывает захват частоты (существование периодических колебаний) и биений (возможности почти периодических колебаний).

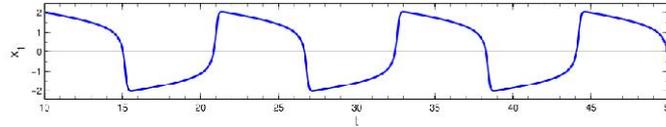


Рис. 16. Релаксационные колебания осциллятора.

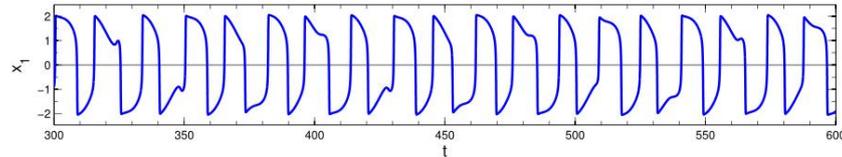


Рис. 17. Хаотическое поведение осциллятора при воздействии внешней гармонической вынуждающей силы.

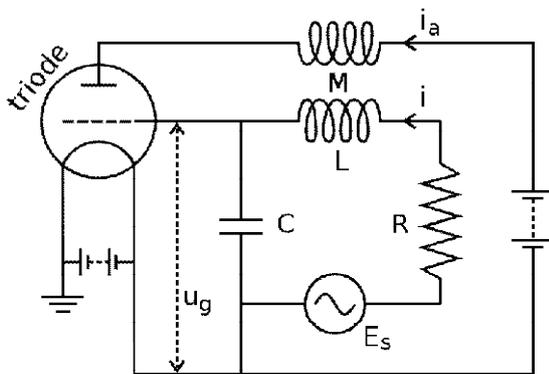


Рис. 18. Принципиальная схема на триоде.

При  $\mu=0$  в автономной системе имеет место бифуркация Андронова-Хопфа: при отрицательных значениях  $\mu$  единственная неподвижная точка устойчива, а при положительных значениях  $\mu$  – неустойчива и окружена устойчивым предельным циклом, являющимся геометрическим образом автоколебаний в фазовом пространстве.

Рис. 19. Карта динамических режимов системы Ван-дер-Поля с гармоническим внешним воздействием на плоскости частота – амплитуда воздействия для  $\mu=3$ .

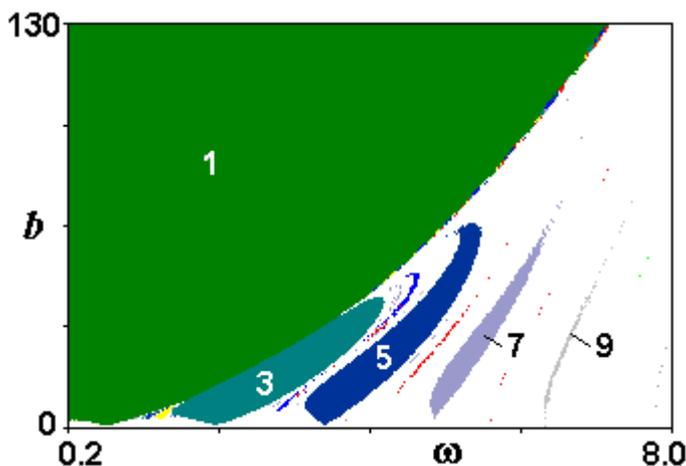


Рис. 19 демонстрирует характерную картину языков синхронизации (языков Арнольда). Однако внутреннее устройство этих языков иное, чем у стандартного синус-отображения окружности.

В Ур. 14 есть дополнительный член с кубической нелинейностью, включенный по аналогии с осциллятором Дуффинга. Эта нелинейность, характеризуемая

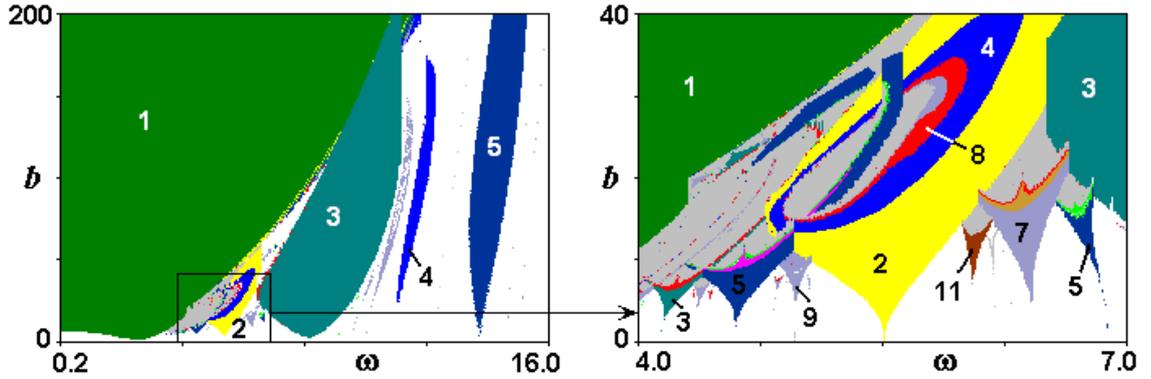
параметром  $A$ , отвечает за новый эффект в автономной системе – неизохронность колебаний, т.е. зависимость их периода от амплитуды. В системе Ван-дер-Поля–Дуффинга скорость изменения фазы зависит от квадрата амплитуды колебаний с коэффициентом пропорциональным  $A$ . Поэтому  $A$  – параметр неизохронности или параметр фазовой нелинейности.

На рис. 20 показана карта режимов неавтономной системы Ван-дер-Поля – Дуффинга для  $\mu=1$  при достаточно большом значении параметра  $A=2.5$ . Можно видеть, что по сравнению с предыдущей картой острия языков синхронизации существенно сдвинулись вдоль оси абсцисс в сторону больших частот, что является проявлением

неизохронности системы. Система языков, расположенная между областями периода 1 и 2 обладает выраженной характерной внутренней структурой с переходом к хаосу через удвоения периода (выделенный фрагмент карты).

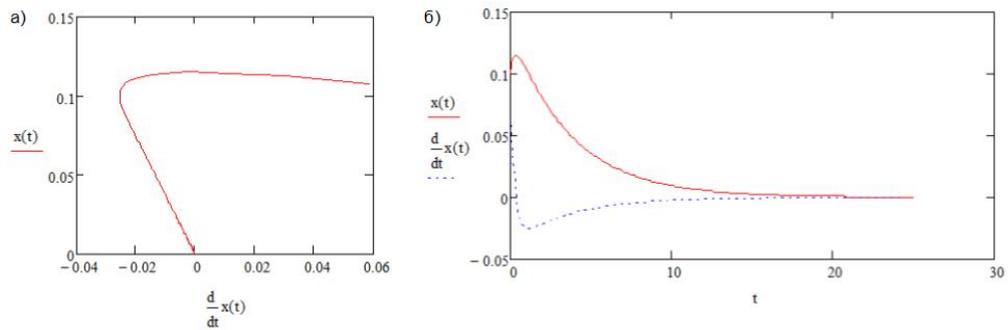
Уравнение Ван дер Поля применяется в физике, в биологии (модель Финц Хью-Нагумо) и в сейсмологии (моделирование геологических разломов).

Приведём некоторые результаты моделирования работы модифицированного генератора Ван-дер-Поля (программа *VanDerPol*, Д.Ю. Степанов, МИРЭА).



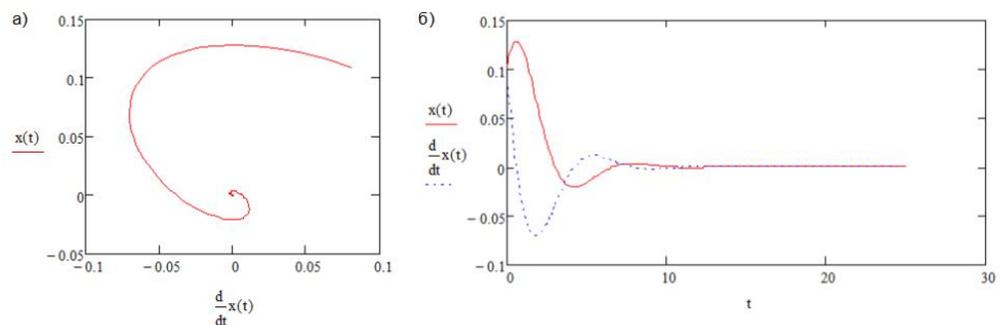
**Рис. 20.** Карта режимов неавтономной системы Ван-дер-Поля-Дуффинга для ( $\mu=1, A=2.5$ ).

При отрицательных значениях  $\mu < 0$  в системе наблюдается образование особой точки типа устойчивый узел (рис. 21).



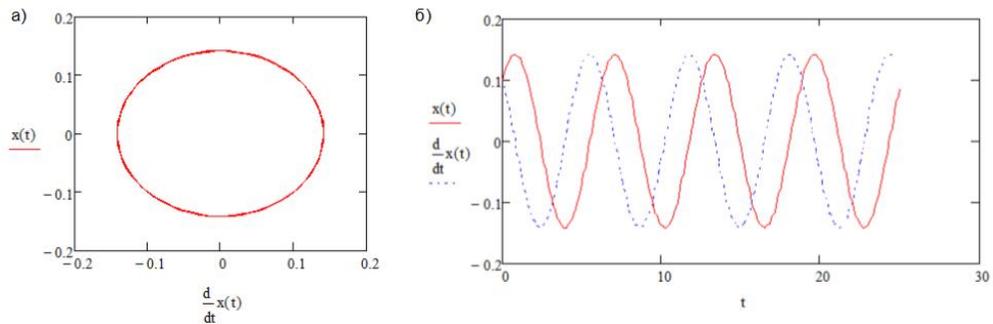
**Рис. 21.** Устойчивый узел,  $\mu < 0$ .

В дальнейшем при увеличении  $\mu$  ( $\mu < 0$ ) происходит превращение узла в устойчивый фокус. Фазовый портрет фокуса изображен на рис. 22.



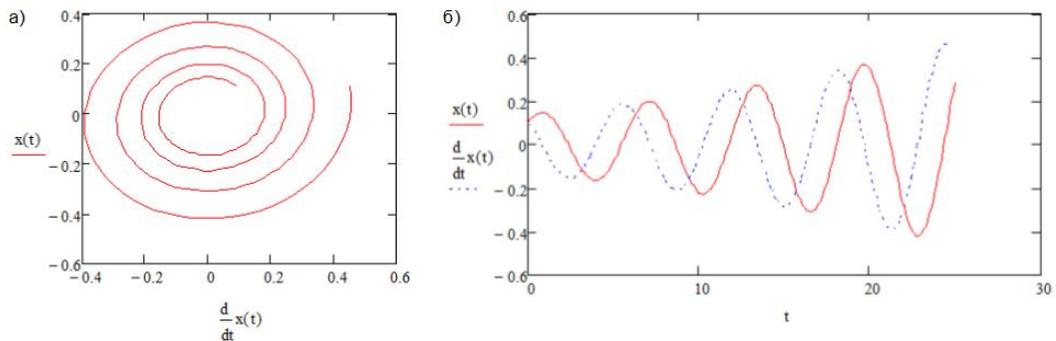
**Рис. 22.** Устойчивый фокус,  $\mu < 0$ .

Устойчивый предельный цикл (рис. 23) образуется при последующем увеличении значения  $\mu$ ,  $\mu < 0$ .



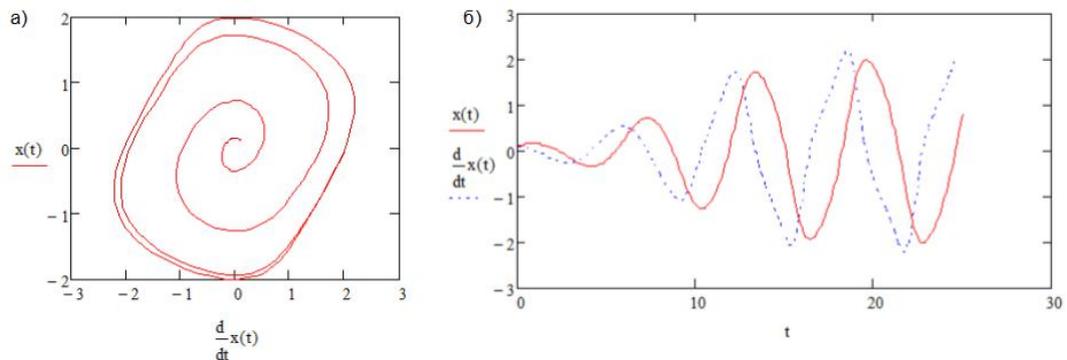
**Рис. 23. Устойчивый предельный цикл,  $\mu < 0$ .**

Увеличение  $\mu$  до положительных значений ( $\mu > 0$ ) приводит к потере устойчивости, в результате образуется особая точка вида неустойчивый фокус (рис. 24).



**Рис. 24. Неустойчивый фокус,  $\mu > 0$**

Дальнейшее увеличение  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) приводит к образованию неустойчивого предельного цикла (рис. 25).



**Рис. 25. Неустойчивый предельный цикл,  $\mu > 0$ .**

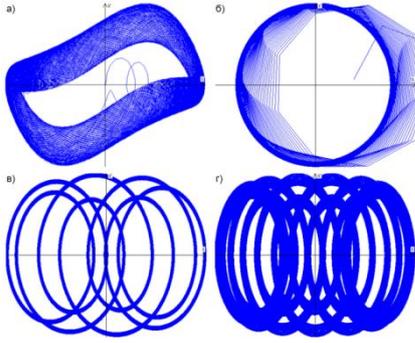
Модернизированный генератор Ван-дер-Поля позволяет наблюдать автоколебательный режим работы системы. В случае модернизированного осциллятора формула (14) преобразуется к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + A \cos(bt) \quad (15)$$

где  $x$  – координата точки, а  $\mu, A, b$  – коэффициенты ( $A > 0, 0 \leq b, b \leq 10$ ).

Известен генератор хаоса на основе осциллятора Ван дер Поля с двумя дополнительными цепями запаздывающей обратной связи. Осциллятор пребывает поочередно в режиме возбуждения и затухания в силу периодического изменения параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Возбуждение колебаний на каждой новой стадии активности стимулируется сигналом, который возникает в результате смещения на квадратичном нелинейном элементе первой и второй гармоник сигналов, поступивших по цепям обратной связи и порождённых на двух

предыдущих стадиях активности. Для разности фаз на последовательных стадиях возбуждения реализуется растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли) с хаотической динамикой. Предложенная система реализована в виде радиотехнического устройства.

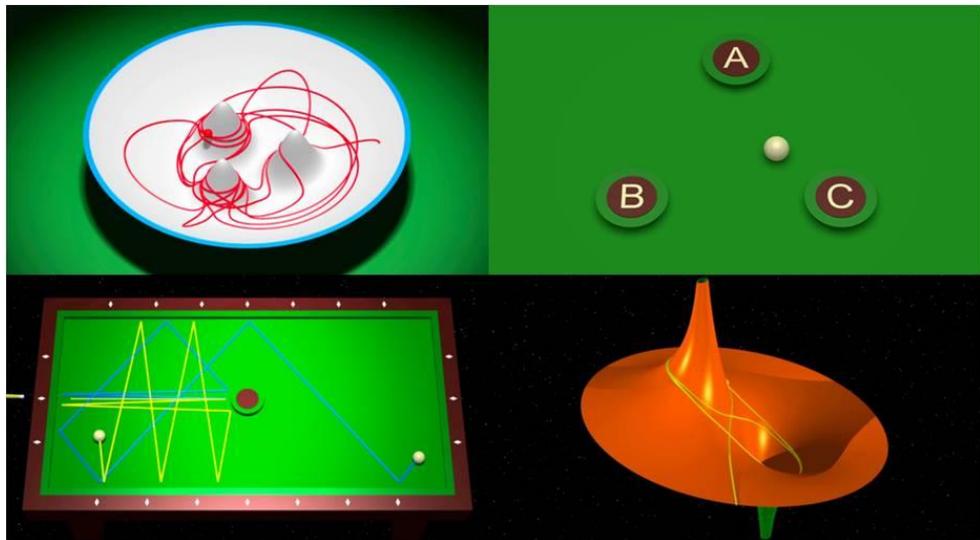


*Рис. 26. Примеры фазовых портретов модернизированного генератора Ван-дер-Поля.*

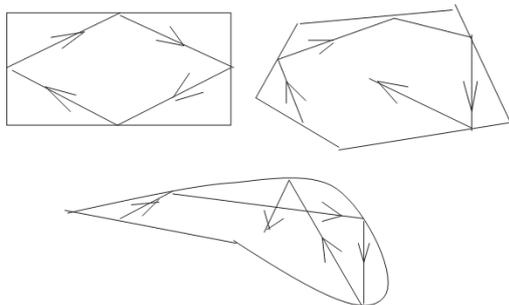
#### 24.4 Хаос в динамических бильярдах

Первые существенные результаты по исследованию явлений динамического хаоса были проведены на динамических бильярдах. А. Пуанкаре в 1880-х годах, при изучении поведения системы с тремя телами, взаимодействующими гравитационно, заметил, что могут существовать непериодические орбиты, которые с течением времени и не удаляются, и не приближаются к конкретной точке. Его работы положили начало теории катастроф – теории близкой к теории хаоса. Продолжая эти исследования, в 1898 Ж. Адамар опубликовал статью, посвящённую хаотическому движению свободной частицы, скользящей без трения по поверхности постоянной отрицательной кривизны. Он доказал, что в этом случае все траектории непостоянны и частицы в них отклоняются друг от друга по экспоненциальному закону с положительным показателем Ляпунова.

**Бильярд – динамическая система, в которой безмассовая точечная частица (например, молекула) движется в пределах ограниченной области. Частица перемещается путём чередования движений по прямой линии с зеркальными отражениями от бортов бильярдного стола. Когда частица достигает борта, она отражается от него с той же скоростью, а угол падения равен углу отражения. Между двумя отражениями частица движется линейно с постоянной скоростью.**



*Рис. 27. Динамические бильярды и хаотические траектории движений по ним шарика.*



*Рис. 28. Траектории частицы в некоторых динамических бильярдах.*

Математический бильярд – стол без луз, в игре участвует один шар, движущийся без трения и отражающийся абсолютно упруго.

Бильярды появляются как естественные модели во многих проблемах оптики, акустики и

классической механики. Самая известная модель статистической механики – бальцмановский газ упруго сталкивающихся твёрдых шаров в коробке можно легко свести к бильярду.

Бильярд – динамическая система с непрерывным временем. Однако динамика бильярда вполне может характеризоваться дискретной математикой (бильярдным отображением), которое преобразует координаты и угол падения точки отражения в координаты и угол падения в точке следующего отражения от границы. Бильярдными моделями являются гамильтоновы системы с потенциалом  $V(q)=0$  в бильярде  $\Omega$  и бесконечности вне конфигурационного пространства  $\Omega$ . Следовательно, фазовый объём сохраняется, и можно пренебречь наборами орбит с нулевым фазовым объёмом. В частности, множество всех орбит, попадающих в особые точки границы бильярдного стола, имеет нулевой фазовый объём, и поэтому бильярдная динамика хорошо определена на подмножестве фазового пространства имеющего полный фазовый объём.

Динамика бильярда полностью определяется формой её границы и демонстрирует все разнообразие возможных поведений гамильтоновых систем от интегрируемых до полностью хаотических. Гладкая компонента границы рассеивает, фокусирует или нейтральна, если она выпуклая внутрь (в сторону поля), наружу или плоская (имеет нулевую кривизну) соответственно. Если борт стола выпуклой стороной обращён в сторону поля бильярда, то он рассеивающий: частицы, падающие на него параллельным пучком, после столкновения с барьером веером разлетаются во все стороны. Напротив, пучок частиц, отражённый от вогнутого барьера (например, эллиптической формы) превращается в сходящийся, сфокусированный пучок.

В отличие от классического, стол для динамического бильярда может иметь произвольную форму: треугольную, многоугольную, окружность, эллипс, борта могут быть вогнутыми или выпуклыми, волнистыми и т.п., на столе могут располагаться препятствия (например, в виде одного или нескольких диков); более того – стол может быть многомерным! Кстати, некоторые теоретически исследуемые бильярды невозможно построить в реальности, например, бильярд Адамара, в котором движение шара происходит на Римановой поверхности постоянной отрицательной кривизны. Хотя движение шара вполне детерминировано (законы Ньютона), конечный результат может оказаться совершенно случайным (хаотичным).

Движение шара в классическом бильярде с плоским столом – прямая линия, с постоянной энергией, прерываемая отражениями от бортов. При столкновении с прямым бортом угол падения равен углу отражения. Последовательность отражений описывается отображением бильярда, которое полностью характеризует движение шара. При движении по неровному столу и отражению от искривлённых бортов (Риманова метрика не плоская), движение частицы идёт по геодезической линии.

**Геодезическая линия – кривая определённого типа, обобщение понятия «прямая» для искривлённых пространств. Конкретное определение геодезической линии зависит от типа пространства. Например, на двумерной поверхности, вложенной в евклидово трёхмерное пространство, геодезические линии – это линии, достаточно малые дуги которых, являются на этой поверхности кратчайшими путями между их концами. На плоскости это прямые, на круговом цилиндре – винтовые линии, прямолинейные образующие и окружности, на сфере – дуги больших окружностей. Геодезические линии активно используются в релятивистской физике. Например, пробное тело в общей теории относительности движется по геодезической линии пространства-времени.**

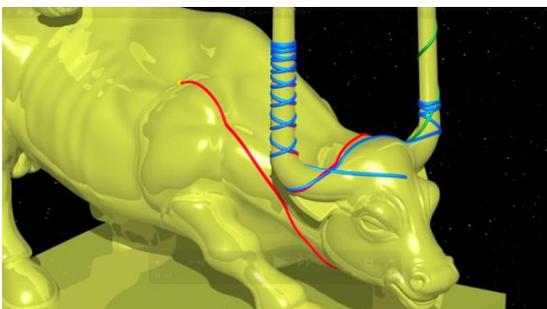
Большинство динамических бильярдов демонстрируют хаотичное поведение. Причина в том, что типичный бильярдный стол имеет по крайней мере одну негладкую компоненту границы и существенно влияет на динамику. Он имеет положительную энтропию Колмогорова-Синяя.

Приведём некоторые примеры динамических бильярдov.

**Бильярд Биркгоффа.** Стол овальной, треугольной формы или в виде полигона с закруглёнными углами (стадион), бильярдная система интегрируема (уравнения можно решить алгебраически). Биркгофф (1927) показал, что среди всех бильярдov внутри гладких выпуклых кривых интегрируются только бильярдy в эллипсах.

**Бильярд Адамара.** Движение точечной частицы (без трения) по поверхности с постоянной отрицательной кривизной (форма седловой поверхности). Модель точно разрешима, и описывает геодезические потоки по поверхности. Траектории крайне неустойчивы. Это пример детерминированного хаоса: все показатели Ляпунова положительны, небольшое изменение начальных условий вызывает значительные изменения в последующем развитии системы; два шара, расположенные рядом, после удара, приведшего их в движение, удаляются далеко друг от друга (по экспоненциальному закону).

**Бык Дюэма.** В начале XX века П. Дюэм представлял работу Адамара. В качестве наглядной иллюстрации, он рассмотрел шарик, который катится без трения по лбу быка с бесконечно длинными рогами. Движение шарика, катящегося по чаше с несколькими выпуклостями хаотично.



*Рис. 29. Бык Дюэма: шар катится по лбу быка с бесконечно длинными рогами. Приведены хаотические траектории шарика.*

**Бильярд Артина** рассматривает движение частицы по поверхности постоянной отрицательной кривизны с одним острым выступом. Включает эргодичность и сильное перемешивание. Все геодезические потоки неустойчивы. Уравнения точно разрешимы. Пример системы Аносова.

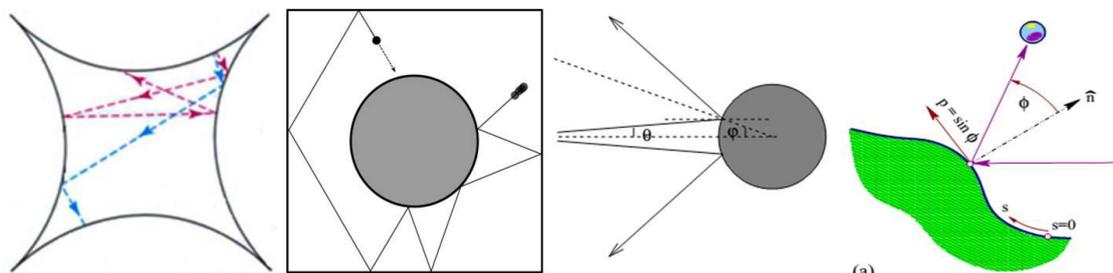
**Бильярд Синая** (1975) – рассеивающий, эргодический, перемешивающий, Бернулли бильярд, сильно хаотичный, имеет положительную энтропию Колмогорова-Синая, положительный показатель Ляпунова и экспоненциальный спад корреляций. Эти свойства вызваны гиперболичностью хаоса. Теория рассматривает движение частицы (шара) без трения между квадратными стенками. Посередине этого квадратного плоского (без каких-либо искривлений) стола помещено круглое препятствие с отражающими стенками (диск). Частица упруго отражается от диска и от стен квадрата. Уже через несколько столкновений со стенками движение шара становится хаотичным – координаты частицы рассчитать невозможно. Первоначально близкие траектории со временем резко расходятся. Система весьма чувствительна к начальным данным. Любая погрешность в исходных данных (а она есть всегда) с течением времени приводит к экспоненциальному росту ошибки вычислений. Прогноз поведения системы невозможен. Пример системы – движение сферической молекулы на торе или квадрате при упругих отражениях от других, закреплённых сферических молекул.

Я.Г. Синай рассмотрел бесконечномерную динамическую систему, отвечающую движению бесконечного числа распределённых по Пуассону точечных невзаимодействующих частиц, движущихся вне хаотически разбросанных рассеивателей. Он показал, что динамическая система, описывающая движение материальной точки на торе с конечным числом неподвижных рассеивателей, является К-системой (системой Колмогорова), а значит, имеет явно выраженные статистические свойства, т.е. эргодична (обладает перемешиванием всех степеней, а сопряжённая группа унитарных операторов в подпространстве функций с нулевым средним имеет счётно-кратный лебеговский спектр).

Неустойчивость ведёт к необратимости: система забывает свое прошлое состояние. С течением времени вся фазовая плоскость оказывается занятой траекториями.

Бильярд Синяя – взаимодействующая гамильтонова система, демонстрирующая физические термодинамические свойства: все его возможные траектории эргодические. Дисков на столе может быть несколько. Физическим аналогом бильярда Синяя является газ Лоренса – модель неравновесной статистической механики. Предложена Г.А. Лоренцом (1905) как модель электропроводности металлов.

**Газ Лоренса – динамическая система, описывающая поведение счётного числа частиц, свободно движущихся по плоскому столу между хаотически разбросанными неподвижными сферическими рассеивателями, от которых частицы отражаются по закону упругого удара (тангенциальная составляющая остаётся неизменной, а нормальная меняет знак). Его можно рассматривать как рассеивающий бильярд в бесконечномерном пространстве. Газом Лоренса иногда считают динамическую систему, порождённую движением одной частицы, свободно движущейся между неподвижными сферическими рассеивателями с упругим отражением от них.**



**Рис. 30. Траектории движения частицы в бильярде Синяя.**

Динамическая система типа газ Лоренса возникает при описании поведения идеальных газов и моделирования некоторых физических процессов, например, движение медленных нейтронов в тяжёлой жидкости, поведение смеси двух газов, один из которых состоит из лёгких молекул массы, а другой – из тяжёлых. Без действия внешнего поля динамический бильярд с вогнутыми или плоскими границами обычно хаотичен. Если включается гравитация, то часть фазового пространства может показать квазипериодическое поведение. Например, в квадратной коробке с круговым рассеивателем в центре, при достаточно большой гравитационной постоянной и ограниченной кинетической энергии частица не может достигнуть рассеивателя.

Бильярд Синяя (газ Лоренса) – термин, относящийся к изучению хаотических динамических свойств упругих шаров. Удивительным оказалось то, что газ из **двух (!)** твёрдых шаров сильно эргодичен (т. е. газ подчиняется гипотезе Больцмана и становится стохастическим, что позволяет использовать для описания его поведения основные законы термодинамики). Модель Синяя демонстрирует классический ансамбль Больцмана-Гиббса и по существу является максимально хаотичным бильярдом Адамара, который используется для анализа статистических свойств гиперболических динамических систем с особенностями.

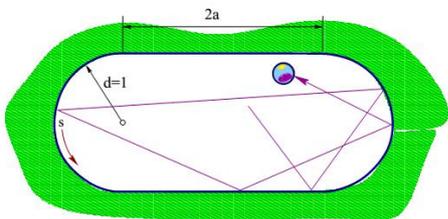
**Замечание.** Физике имеет место старый дуализм. С одной стороны газ состоит из атомов (квантово-механических) которые состоят из меньших компонентов, с другой стороны поведение совокупности атомов подчиняется законам статистической механики, которые никак не связаны с устройством атома. До сих пор не понятно, как происходит переход от детерминированных, обратимых по времени уравнений движения для точечных частиц к гладким, основанным на плотности, необратимым по времени уравнениям статистической механики. Обычно считается, что распределение Гаусса возникает из распределения Пуассона при большом числе частиц (порядка  $10^{23}$ ). Замечательное достижение Синяя заключается в доказательстве, что двух атомов достаточно, чтобы описать статистические свойства любого газа. Есть чему удивиться...

**Стадион Бунимовича** – плоский стол-стадион, ограниченный полукруглыми бортами. Частицы-шарики, начав движение параллельно из небольшой области,

постепенно «разбредаются» по всему бильярду, даже если не сталкиваются друг с другом. Расхождение траекторий во времени описывается показательной функцией. Система Бунимовича обобщает более широкий класс рассеивающих бильярдов, чем бильярд Синая. Эти бильярды содержат внутри себя области  $\Omega$  на евклидовой плоскости или двумерном торе с евклидовой метрикой, края которых имеют как рассеивающие, так и фокусирующие участки, т.е. переменную (по знаку) кривизну. Подобные области можно рассматривать как возмущение областей, внутри изучаемых бильярдов. Оказалось, что если возмущение мало, то бильярд внутри такой области  $\Omega$  является К-системой.

**Замечание.** Аналогия между рассеивающими бильярдами и геодезическими потоками в пространствах отрицательной кривизны связана с тем, что рассеивающие бильярды аналогичны геодезическим потокам на поверхностях, кривизна которых кое-где положительна. Если ранее полагали, что для реализации экспоненциальной расходимости траекторий (положительные показатели Ляпунова) требуется выпуклое препятствие типа шайбы, то Бунимович показал, что экспоненциальная расходимость может иметь место для орбит вне точки фокусировки вогнутой области.

Фокусирующие бильярды могут обладать такими же сильными хаотическими свойствами, как и рассеивающие.

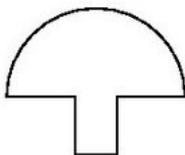


**Рис. 31. Стадион Бунимовича** – область, ограниченная двумя полуокружками радиуса  $d=1$ , соединенными двумя прямыми стенками длины  $2a$ . В точках, где прямые стены пересекают полуокружности, кривизна границы изменяется прерывисто; это особые точки потока. Длина  $a$  – единственный параметр.

Фокусирующие бильярды могут иметь наиболее регулярную динамику, с возможностью аналитических решений. При отражении от границы фокусировки параллельный луч лучей становится сходящимся. Хотя процессы фокусировки и рассеяния являются конкурирующими, тот и другой могут приводить к хаосу. В хаотическом поведении консервативных динамических систем имеется одна особенность: реализуется механизм дефокусировки, при котором узкий параллельный луч лучей после фокусировки из-за отражения от границы фокусировки проходит точку фокусировки и расходится (если свободный путь между двумя последовательными отражениями от границы достаточно длинный). Механизм дефокусировки работает при условии, что расхождение преобладает над фокусировкой. Механизм рассеяния возможен и в пространствах с размерностью больше 2.

### Бильярд с сосуществованием хаотической и регулярной динамики

**Рис. 32. Гриб Бунимовича.**

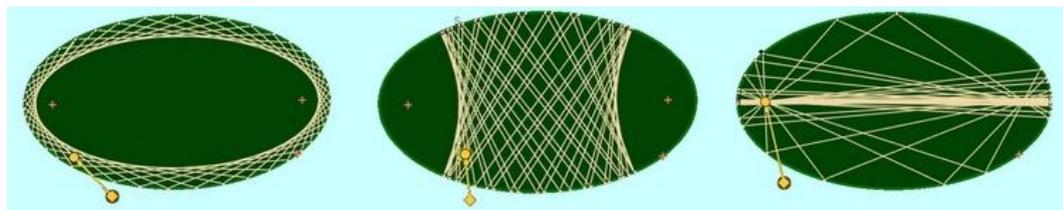


Примеры гамильтоновых систем с разделенным фазовым пространством – это бильярд в форме гриба. Самый простой гриб состоит из полукруглой шляпки, сидящей на прямоугольном стержне (рис. 32). У бильярда в виде гриба есть один интегрируемый остров, образованный траекториями, которые никогда не покидают шляпку, и система хаотична и эргодична на её дополнении. Объединение грибов – пример бильярда с произвольным (конечным или бесконечным) количеством островов, сосуществующих с произвольным (конечным или бесконечным) числом хаотических компонент.

**Обобщенный бильярд** описывает движение точечной частицы по плоскому столу с кусочно-гладкими бортами. Понятие введено Л.Д. Пустыльниковым в связи с оправданием второго закона термодинамики (закон увеличения энтропии). С физической точки зрения описывает газ, состоящий из многих частиц, перемещающихся в сосуде, стенки которого нагреваются или остывают.

**Квантовый бильярд** – возникновение квантового хаоса (мы его рассматривать не будем).

Проиллюстрируем теперь особенности возникновения хаотических движений шаров на бильярдном столе различной формы.



**Рис. 33. Траектории частиц на бильярдах овальной формы.**

**Круглый стол.** Если угол между диаметром и линией удара соизмерим с числом  $\pi$  (т.е.  $\alpha = n \cdot \pi / m$ ), то траектория будет периодической. Чем меньше знаменатель у дроби, тем меньше звеньев содержит период. Если отношение – иррациональное число, то траектория будет незамкнутой. При этом она как бы «заметает» кольцо внутри стола. В этом кольце она будет всюду плотной (т.е. в любой окрестности любой точки кольца обязательно окажется участок пути шарика). Однако, поведение шарика не будет хаотическим. Показатель Ляпунова отрицателен. Если мы запустим одновременно два шарика под слегка разными углами, то они будут двигаться совершенно синхронно, иногда чуть разбегаясь, иногда снова сходясь.

**Эллиптический стол.** Ситуация в целом похожа на предыдущий случай, но непериодическая траектория заметает либо эллиптическое кольцо, либо область между ветвями софокусной гиперболы-каустики. Если линия удара проходит через один из фокусов, то следующее звено пройдёт через другой фокус и со временем шарик будет всё сильнее «прижиматься» к главной оси эллипса.

**Произвольный овальный стол.** Если его граница гладкая и выпуклая, то возможны две периодические траектории – вдоль наибольшего и наименьшего диаметров, по аналогии с эллипсом. (Движение вдоль главной оси неустойчиво – малейшее отклонение приведёт к «разрушению» этого цикла). У гладкого выпуклого бильярда существуют периодические траектории любой наперёд заданной длины. Конечно, всегда найдутся и квазипериодические, плотные в некоторой области траектории. Но главное, возникнет хаотическое поведение. Обязательным условием хаотичности является плотность и перемешивание. Таким бильярдом и является стол-стадион Бунимовича: шары, начав двигаться параллельно из небольшой области, постепенно «разбредаются» по всему бильярду, даже если не сталкиваются между собой.

**Многоугольный стол.** Простейшим случаем многоугольника является бесконечный угол. Доказано, что шар, попадающий в любой угол, рано или поздно вылетит из него. То же можно сказать и про лазерный луч, попадающий в два поставленные под углом зеркала. Назовём многоугольник рациональным (р.м.), если его углы соизмеримы с числом  $\pi$ . В любом р.м. существует периодическая орбита. Р.м. четырёх типов: прямоугольник и треугольники с углами  $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ ,  $(\pi/2, \pi/4, \pi/4)$ ,  $(\pi/2, \pi/6, \pi/3)$  обладают теми же свойствами, что и круглый бильярд. Показатель Ляпунова для любого полигона стремится к нулю. (У круглого бильярда он отрицателен). Для невыпуклых многоугольников углы отражения принимают все возможные значения от 0 до  $2\pi$ .

## 24.5 Аттрактор Рёсслера

Простую трёхмерную модель динамики химических реакций, протекающих в некоторой смеси с перемешиванием, предложил непрaktикующий врач Отто Рёсслер (1976).

Система дифференциальных уравнений Рёсслера имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - r) \end{cases} \quad (16)$$

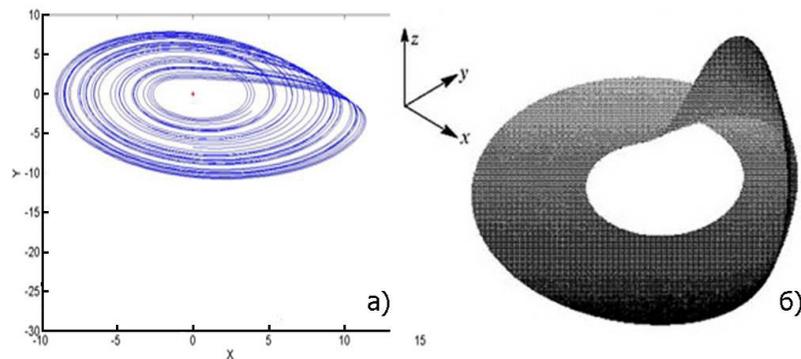
где  $a, b, r$  – положительные постоянные.

При значениях параметров и уравнения Рёсслера обладают устойчивым предельным циклом. При этих значениях параметров период и форма предельного цикла совершают последовательность удвоения периода. Сразу же за точкой возникает явление хаотического аттрактора. Чётко определённые линии предельных циклов расплываются и заполняют фазовое пространство бесконечным счётным множеством траекторий, обладающим свойствами фрактала.

Сам Рёсслер изучал систему при параметрах  $a$  и  $r$ , но также часто используются и значения  $b$ ,  $a$  и  $r$ . Иногда аттракторы Рёсслера строятся для плоскости, т. е. с  $b = 0$ . Обычно параметры  $a$  и  $b$  фиксируются, а параметр  $r$  является управляющим.



**Рис. 34. Странный аттрактор Рёсслера.**



**Рис. 35. Аттрактор системы Рёсслера при  $a=b=0,2, r=5,7$ : а – на плоскости, б – в объёме.**

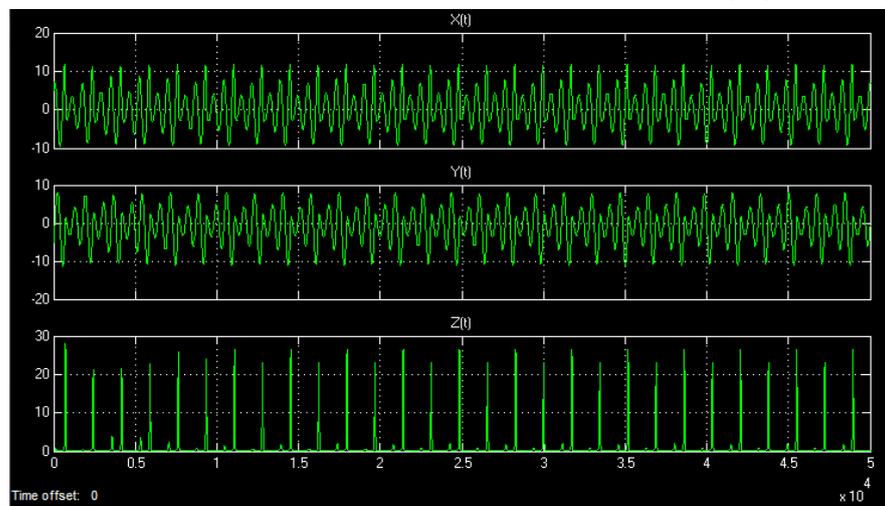
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x + \alpha y \end{cases} \quad (17)$$

Устойчивые решения для  $\alpha < 0$  могут быть найдены вычислением собственного вектора матрицы Якоби вида  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ , для которой  $\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$ .

Отсюда видно, что когда  $\mu$ , собственные вектора являются комплексными и имеют положительные вещественные компоненты, что и делает аттрактор неустойчивым. Теперь будем рассматривать плоскость  $z=0$  в том же диапазоне  $\mu$ . Пока меньше  $\mu$ , параметр удерживает траекторию близко к плоскости  $z=0$ . Как только  $\mu$ ,  $z$ -координата начнёт увеличиваться, а чуть позже параметр  $\mu$  тормозит рост  $z$ .

Для определения точки равновесия, три уравнения (17) приравняются нулю и  $x, y, z$ -координаты каждой точки равновесия находят, решая полученные уравнения. В итоге:

$$\begin{cases} x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \\ y = -\left(\frac{c^2 - 4ab}{2a}\right) \\ z = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \end{cases} \quad (18)$$



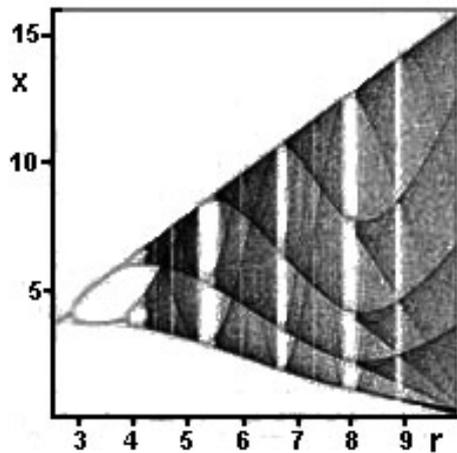
**Рис. 36. Временная реализация пространственных величин.**

Одна из неподвижных точек находится в центре аттрактора, а другие лежат сравнительно далеко от центра. Для аттрактора Рёсслера характерно наличие граничной точки проявления хаотических или периодических свойств. При определенных параметрах динамической системы колебания перестают быть периодическими, и возникают хаотические колебания. Для аттрактора Рёсслера характерна фрактальная структура в фазовой плоскости, т.е. явление самоподобия. Важно, что на аттракторе Рёсселя траектории не пересекают сами себя. Поверхности, образующие странный аттрактор делятся на отдельные слои, образуя бесконечное множество поверхностей, каждая из которых находится чрезвычайно близко к соседней. Можно допустить, что лента, образующая основание аттрактора Рёсслера подобна многослойному листу Мёбиуса (сколь угодно малой толщины). Имеет место бесконечное число слоев, плотно упакованных по строгому правилу, – своего рода фрактальный объект – множество Кантора. Фрактальная размерность этого множества (странного аттрактора) лежит в диапазоне  $d_f=2,01-2,02$ .

Поведение аттрактора Рёсслера зависит от значений управляющих параметров. При некоторых значениях система по периодической орбите стремится к неподвижной точке или ухлится в бесконечность. Количество периодов аттрактора Рёсслера определяется числом его витков вокруг центральной точки.

Зафиксируем  $\mu$ , и будем изменять  $\nu$ .

В итоге опытным путём получим такую таблицу:



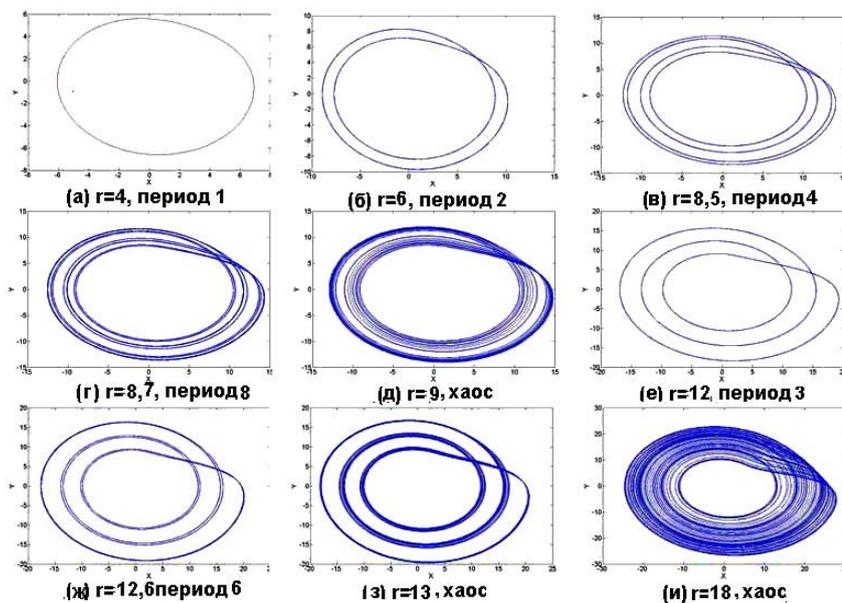
- $a \leq 0$ : Сходится к устойчивой точке.
- : Вращается с периодом 2.
- : Хаос (стандартный параметр уравнений Рёсслера).
- : Хаотичный аттрактор.
- : Аналогичен предыдущему, но хаос проявляется сильнее.
- : Аналогичен предыдущему, но хаос проявляется ещё сильнее.

**Рис. 37. Бифуркационная диаграмма аттрактора Рёсселя.**

Зафиксируем  $a$  и  $b$  и будем менять параметр  $r$ . При  $r < 3$  аттрактор неустойчив. Когда  $r$  станет больше 3, система уравнивается и достигает стационарного состояния.

Зафиксируем  $a$  и  $b$  и будем изменять  $r$ . При небольших  $r$  исходная периодическая орбита претерпевает бифуркации, при каждой из них число орбит удваивается. Система становится хаотичной. Например, при  $r=4$  аттрактор имеет период равный единице, и на диаграмме есть единственная линия, то же самое повторится когда  $r=3$  и так далее; пока  $r$  не станет больше 12: последнее периодичное поведение характеризуется именно этим значением, дальше повсюду идёт хаос. При переходе через точки бифуркации фазовые портреты аттрактора изменяются. Области типовых фазовых портретов на карте динамических режимов разделены между собой линиями бифуркаций (удвоения периода).

Если  $a=b=0.2$ , то периодические движения с периодами 1,2 и 4 могут быть обнаружены при  $r=2.6$ ; 3.5 и 4.1 соответственно. При  $r > 4.23$  возникают хаотические движения.



**Рис. 38. Поведение аттрактора Рёсселя при различных значениях  $r$ .**

Модель Рёсслера обладает свойствами линейного осциллятора с отрицательным коэффициентом затухания и обратной связью

$$y'' - a*y' + y = -z. \tag{19}$$

Она служит примером многомерных систем, динамика которых допускает аппроксимацию одномерным отображением. Если провести сечение Пуанкаре при  $y=0$  и построить на плоскости  $(x,z)$  одномерное отображение из точек  $X_n$ , т.е. построить график

зависимости  $X_{n+1}$  от  $X_n$ , то обращает на себя внимание сходство полученной кривой с квадратичным, или логистическим отображением. В модели Рёсслера наблюдается бифуркации типа удвоения периода.

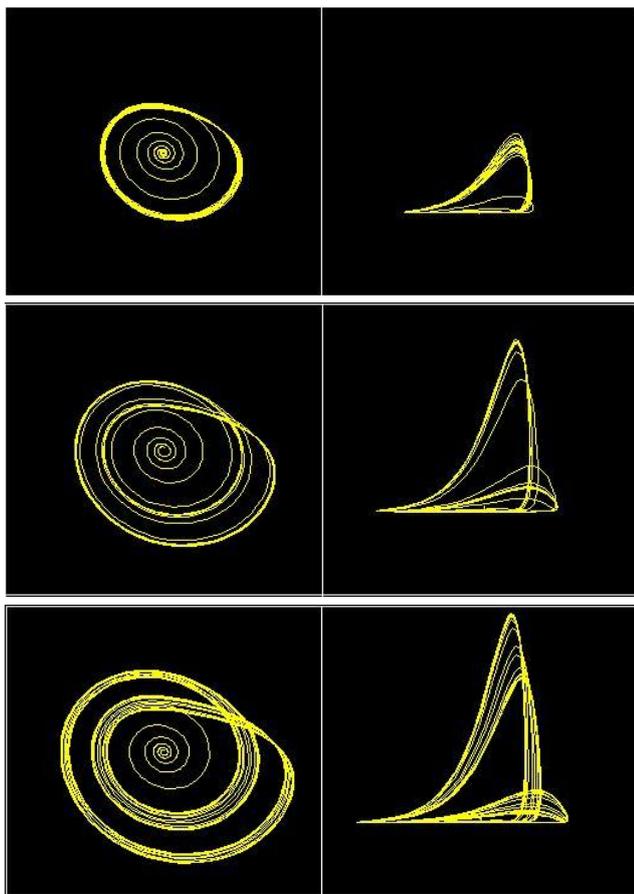
Аттрактор Рёсслера на некотором множестве в его фазовом пространстве имеет фрактальную (нецелую) размерность и на нём возникают хаотические режимы движения с чрезвычайной чувствительностью к начальным условиям. Хаотичность этой модели вызывается только её внутренним поведением и динамическими свойствами.

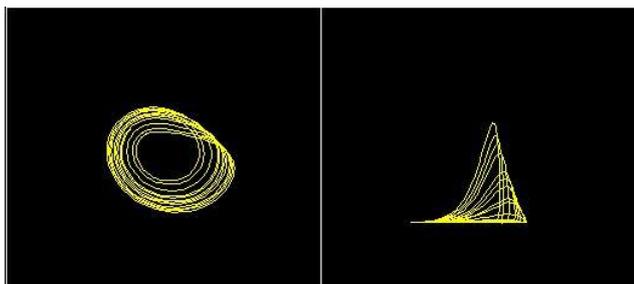
Рассмотрим поведение решения системы при изменении коэффициентов  $a$ ,  $b$ .

Циклы периодов 2 и 8 наблюдаются при значениях параметра  $r=2,2$  и  $r=2,32$ , соответственно, и нерегулярный аттрактор имеет место при  $a=0,5$ ,  $b=0,75$ ,  $r=2,35$ . При этих значениях параметров  $a$  и  $b$  с увеличением параметра  $r$  от значения  $r=1,375$  до  $r\approx 2,35$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. При больших значениях  $r=2,421$  и  $r=2,44$  начинаются циклы соответственно периодов 5 и 3, что свидетельствует о наличии субгармонического каскада в сценарии перехода к хаосу (по Шарковскому). Циклы периодов 5 и 3 идут при значениях параметра  $r=2,421$  и  $r=2,446$ , соответственно. Исследование сценария перехода к хаосу в данной системе проведем при фиксированных значениях параметров  $a=0,38$  и  $b=0,3$ .

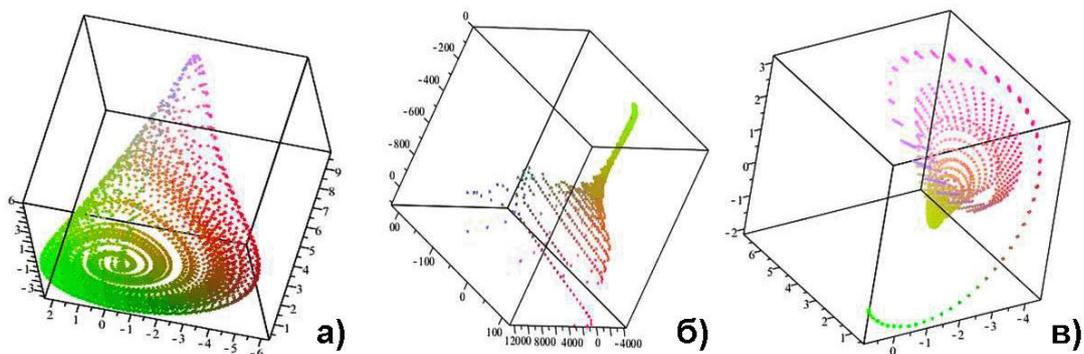
Аттрактор Рёсслера наблюдается во многих системах. Например, он применяется для описания потоков жидкости, а также при изучении поведения различных химических реакций и молекулярных процессов.

Теперь коротко остановимся на системе связанных осцилляторов Рёсслера. Эта система описывается системой шести дифференциальных уравнений первого порядка.

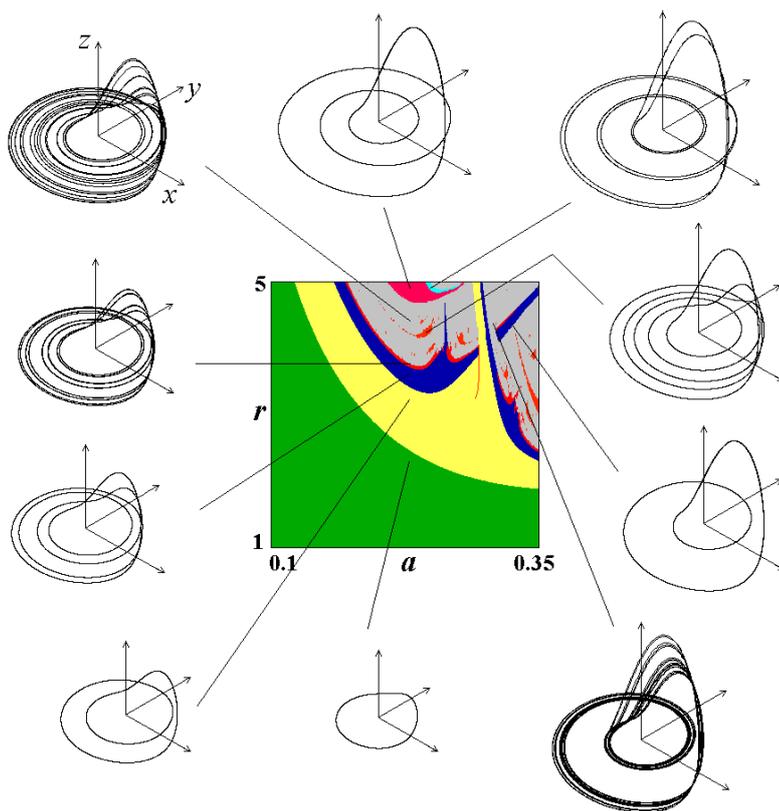




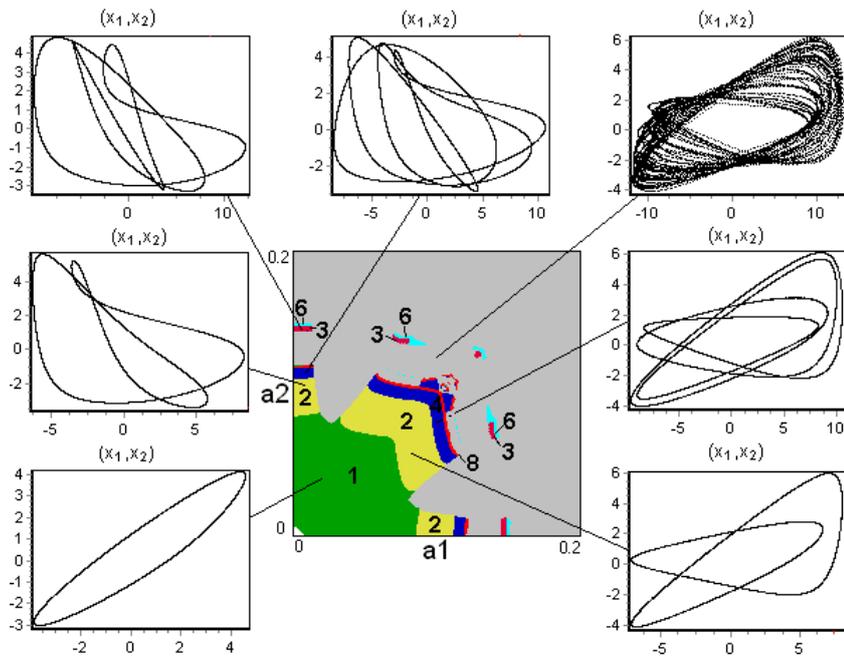
**Рис. 39.** Хаотическое поведение аттрактора Рёсслера.



**Рис. 40.** Моделирование аттрактора Рёсслера в MAPLE: а – общий вид; б – при  $a=0.5$ ;  $b=0.75$ ;  $r=1,375 - 2,35$ ; в - при  $a=0.5$ ;  $b=0.75$ ;  $r=2,421 - 2,446$ .



**Рис. 41.** Карта динамических режимов системы Рёсслера на плоскости параметров  $a$ ,  $r$  при  $b=0,2$  с показанными на периферии рисунка фазовые портретами аттракторов в различных областях.



**Рис. 42.** Карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Рёсслера.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -y_1 - z_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1) \\ \frac{dz_1}{dt} = b + (x_1 - c)z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -y_2 - z_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2) \\ \frac{dz_2}{dt} = b + (x_2 - c)z_2 \end{cases} \quad (20)$$

где  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ , подсистем,  $a_1, a_2, b, c$  – параметры осцилляторов,  $\mu$  – параметр диссипативной связи. На этой странице приводится карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров осцилляторов, умеющей устройство характерное для многих систем связанных осцилляторов ( $a_1, a_2$ ) при  $b=0.2, c=8.5, \mu=0.02$ . По периферии рисунка показаны фазовые портреты аттракторов в некоторых характерных точках плоскости параметров.

## 24.6 Системы Спротта

После Рёсслера идея конструирования простых эталонных систем была основательно проработана Д. Спроттом. Он перебрал большое число систем трёх дифференциальных уравнений первого порядка, правые части которых представлялись полиномами второй степени. Найденные Спроттом системы с хаотической динамикой представлены в табл. 1, где указаны также значения показателей Ляпунова для этих систем. Модель *A* обладает свойством сохранения фазового объёма и демонстрирует хаотическую динамику характерную для консервативных систем. Остальные модели диссипативные, и хаос ассоциируется с наличием странного аттрактора. Для систем *B* и *C* аттрактор подобен по виду аттрактору Лоренца, для остальных систем (*D-S*) – аттрактору Рёсслера.

Табл. 1. Модели Спротта.

Модель	Уравнения	Показатели Ляпунова
A	$\dot{x} = y, \dot{y} = -x + yz, \dot{z} = 1 - y^2$	0,014, 0, -0,014
B	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 1 - xy$	0,210, 0, -1,210
C	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 1 - x^2$	0,163, 0, -1,163
D	$\dot{x} = -y, \dot{y} = x + z, \dot{z} = xz + 3y^2$	0,103, 0, -1,320
E	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x^2 - y, \dot{z} = 1 - 4x$	0,078, 0, -1,078
F	$\dot{x} = y + z, \dot{y} = -x + y/2, \dot{z} = x^2 - z$	0,117, 0, -0,617
G	$\dot{x} = 2x/5 + z, \dot{y} = xz - y, \dot{z} = -x + y$	0,034, 0, -0,634
H	$\dot{x} = -y + z^2, \dot{y} = x + y/2, \dot{z} = x - z$	0,117, 0, -0,617
I	$\dot{x} = -y/5, \dot{y} = x + z, \dot{z} = x + y^2 - z$	0,012, 0, -1,012
J	$\dot{x} = 2z, \dot{y} = -2y + z, \dot{z} = -x + y + y^2$	0,076, 0, -2,076
K	$\dot{x} = xy - z, \dot{y} = x - y, \dot{z} = x + 0,3z$	0,038, 0, -0,890
L	$\dot{x} = y + 3,9z, \dot{y} = 0,9x^2 - y, \dot{z} = 1 - x$	0,061, 0, -1,061
M	$\dot{x} = -z, \dot{y} = -x^2 - y, \dot{z} = 1,7(1 + x) + y^2$	0,044, 0, -1,044
N	$\dot{x} = -2y, \dot{y} = x + z^2, \dot{z} = 1 + y - 2x$	0,076, 0, -2,076
O	$\dot{x} = y, \dot{y} = x - z, \dot{z} = x + xz + 2,7y$	0,049, 0, -0,319
P	$\dot{x} = 2,7y + z, \dot{y} = -x + y^2, \dot{z} = x + y$	0,087, 0, -0,481
Q	$\dot{x} = -z, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 3,1 + y^2 + 0,5z$	0,109, 0, -0,609
R	$\dot{x} = 0,9 - y, \dot{y} = 0,4 + z, \dot{z} = xy - z$	0,062, 0, -1,062
S	$\dot{x} = -x - 4y, \dot{y} = x + z^2, \dot{z} = 1 + x$	0,188, 0, -1,188

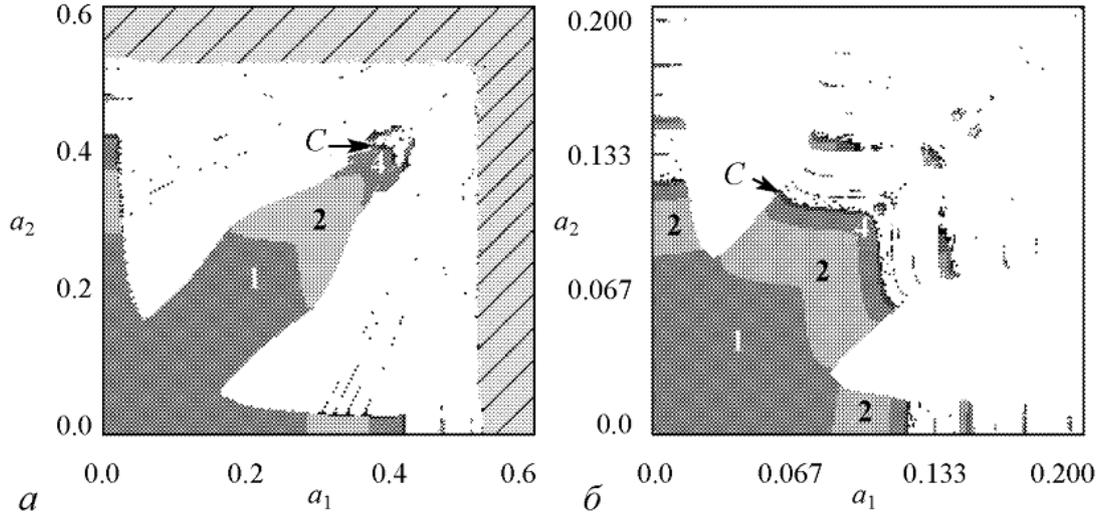
Системы Спротта, представленные в табл.1, относятся к искусственно сконструированным моделям нелинейной динамики. Данный набор можно рассматривать как ряд удобных для исследования потоковых систем с хаотической динамикой. Для автономных систем *B*, *C* аттрактор по своему виду подобен аттрактору Лоренца, для остальных систем – аттрактору Рёсслера. К системе Спротт-*A* относится аттрактор Нозе-Гувера (см. далее).

Характерной чертой систем, обозначенных как *D*, *E*, *F*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L*, *O*, *P*, *R*, *S*, является наличие одного управляющего параметра *a*, при вариации которого система демонстрирует переход к хаосу через удвоения периода. Эти варианты систем Спротта образуют семейство систем, которые при вариации параметров можно использовать для изучения двухпараметрического перехода к хаосу в связанных системах с удвоениями периода.

Осцилляторы Спротта исследуют численно с помощью метода карт динамических режимов. На таких картах оттенками серого обозначены периоды колебаний осцилляторов. Белый цвет соответствует хаотическому либо квазипериодическому поведению системы. Одним из оттенков обозначены области неустойчивой динамики системы, когда фазовые траектории уходят с течением времени на бесконечность. Эти области заштрихованы на рисунках.

К первой группе относятся системы Спротта *F*, *H*, *I*, *K*, *R*, *S*. Для примера на рис. 43, *a* показана карта динамических режимов двух связанных систем Спротта типа *H* в случае, когда связь осуществляется по всем трем переменным.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -y_1 + z_1^2 + \mu(x_2 - x_1), \\
\frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1), \\
\frac{dz_1}{dt} &= x_1 - z_1 + \mu(z_2 - z_1), \\
\frac{dx_2}{dt} &= -y_2 + z_2^2 + \mu(x_1 - x_2), \\
\frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\
\frac{dz_2}{dt} &= x_2 - z_2 + \mu(z_1 - z_2).
\end{aligned}
\tag{21}$$



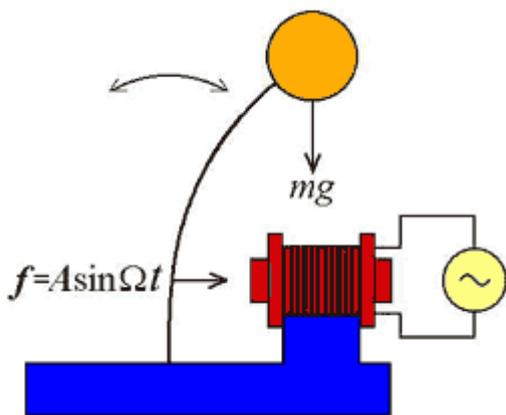
**Рис. 43. Карты динамических режимов:** *а* – связанных осцилляторов Спротта *H*, значение параметра связи  $\mu=0.01$ ; *б* – связанных осцилляторов Рёсслера, значение параметра связи  $\mu=0.01$ , при  $b=0.1$ ,  $c=8.5$ . *C* – конечная точка критической линии Фейгенбаума.

Описанные характерные черты устройства плоскости параметров демонстрируют и связанные осцилляторы Рёсслера

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -y_1 - z_1 + \mu(x_2 - x_1), \\
\frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1), \\
\frac{dz_1}{dt} &= b + (x_1 - c)z_1 + \mu(z_2 - z_1), \\
\frac{dx_2}{dt} &= -y_2 - z_2 + \mu(x_1 - x_2), \\
\frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\
\frac{dz_2}{dt} &= b + (x_2 - c)z_2 + \mu(z_1 - z_2).
\end{aligned}
\tag{22}$$

Соответствующая карта динамических режимов показана на рис. 43б.

Характерной особенностью устройства плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов этого типа является наличие конечных точек у фейгенбаумовских критических линий, которые лежат на границе области квазипериодической динамики. Эти точки на рис. 43 показаны стрелками и обозначены буквой *C*.



Метод карт динамических режимов не позволяет различать режимы квазипериодических и хаотических колебаний, которые на рис. 43 обозначены одним, белым цветом. Поэтому для проведения более подробного анализа были построены карты старшего ненулевого показателя Ляпунова. Мы останавливаться на этом не будем.

Рис. 44. Схема осциллятора Уеды.

### 24.7 Осциллятор Уеды

Хаос при вынужденных колебаниях нелинейного диссипативного осциллятора может быть сгенерирован в виде механических или электронных устройств. Примером является осциллятор Уеды (1980).

Уравнение осциллятора Уеды имеет вид:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = A \sin \Omega t \quad (23)$$

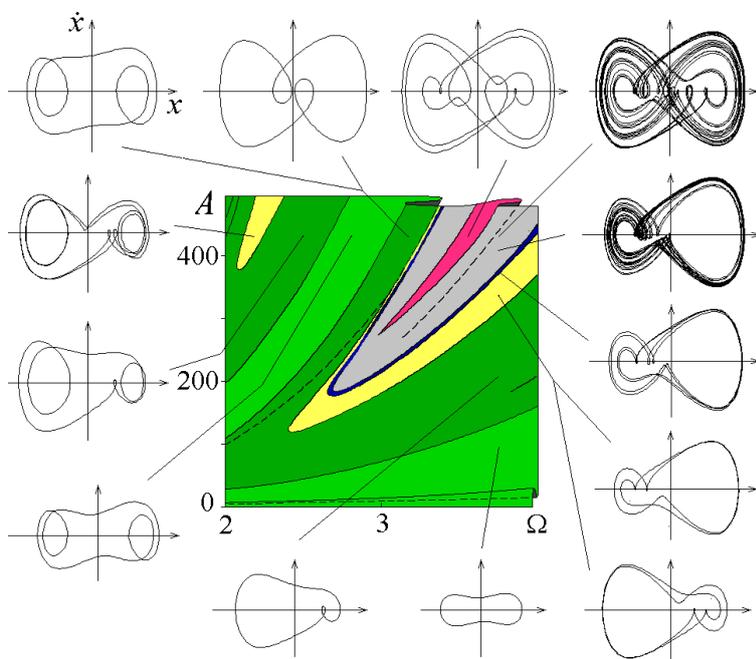


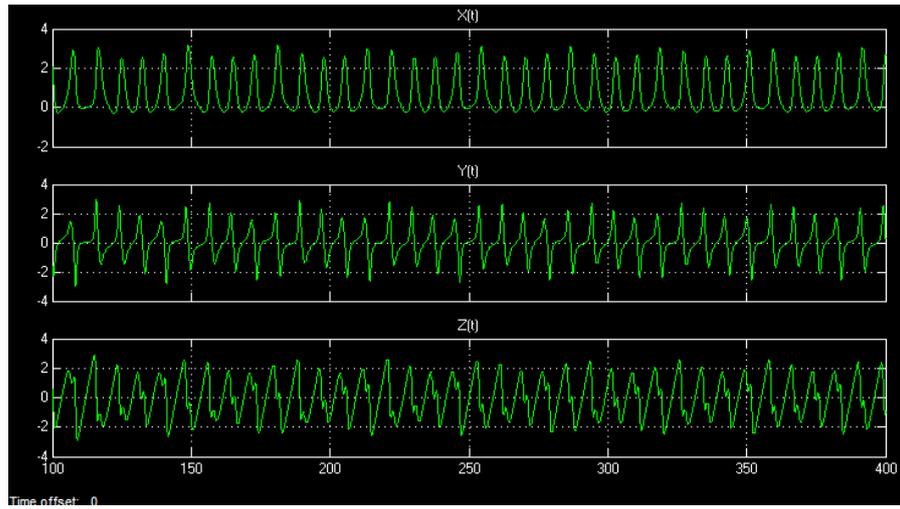
Рис. 45. Карта динамических режимов на плоскости параметров осциллятора Уеды. Цветами обозначены периодические режимы (зеленый – период равен периоду воздействия, желтый – удвоенный период, розовый – отношение периодов 3, синий – 4, красный – 8, и т.д.), серым цветом обозначен хаос. По периферии рисунка показаны фазовые портреты аттракторов в некоторых характерных точках плоскости параметров.

### 24.8 Аттрактор Нозе-Гувера

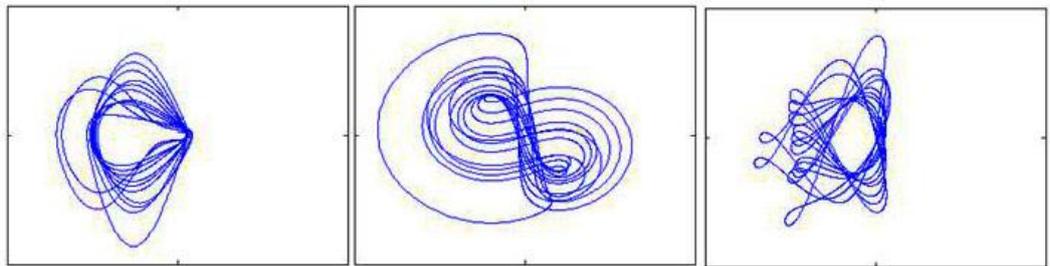
Трёхмерная нелинейная динамическая система, реализованная на основе аттрактора Нозе-Гувера (*Attractor Nose-Hoover*) – термостат Нозе-Гувера, используется для моделирования различных физических, химических и биологических процессов. Хотя тепловая ванна термостата Нозе-Гувера состоит всего из одной воображаемой частицы, моделируемые системы достигают реалистичного состояния постоянной температуры (канонический ансамбль). Поэтому терморегулятор Нозе-Гувера используется как один из наиболее точных и эффективных методов моделирования молекулярной динамики при постоянной температуре (как обратимая во времени термостатическая система). С целью достижения канонического распределения фиксируется средняя температура моделируемой системы, но при этом время учитывается флуктуация температуры с распределение, которой типично для канонического распределения.

Термостат Нозе-Гувера описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = yz - x \\ \dot{z} = 1 - y^2 \end{cases}$$



**Рис. 46. Двумерные проекции аттрактора Нозе-Гувера.**



**Рис. 47. Двумерные модели Нозе-Гувера.**

При решении системы (24) вводится гамильтониан с дополнительной степенью свободы для тепловой ванны  $s$ ;

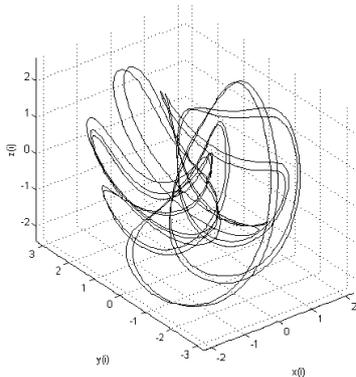
$$H(P, p_s, s) = \sum_i \frac{p_i^2}{2ms^2} + \frac{1}{2} \sum_{ij, i \neq j} U(r_i - r_j) + \frac{p_s^2}{2Q} + gkT \ln(s) \quad (25)$$

где  $g$  – число независимых степеней свободы импульса системы,  $R$  и  $P$  представляют все координаты, а  $Q$  – мнимая масса, которая определяется типом системы. Координаты  $R$ ,  $P$  и  $t$  в этом гамильтониане являются виртуальными. Они связаны с реальными координатами следующим образом:

$$R' = R, P' = \frac{P}{s} \text{ и } t' = \int \frac{d\tau}{s}, \quad (26)$$

где координаты с акцентом являются вещественными координатами. Средний размер ансамбля указанного гамильтониана равен среднему каноническому ансамблю.

Алгоритм Нозе-Гувера не способен генерировать каноническое распределение для одного гармонического осциллятора. Эта особенность алгоритма Нозе-Гувера побудила к разработке новых алгоритмов термостатирования – метода кинетических моментов, который контролирует первые два момента кинетической энергии.



**Рис. 48. Трёхмерная модель термостата Нозе-Гувера.**

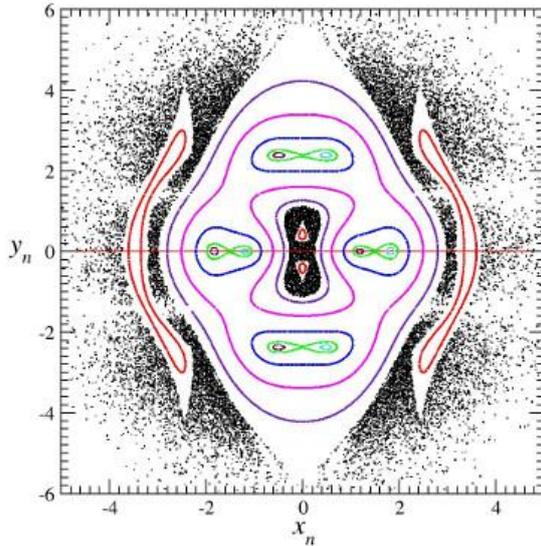
При использовании термостата Нозе-Гувера для моделирования молекулярной динамики при постоянной температуре исследуют влияние термостата на частицы исследуемой системы, описываемое при помощи неконсервативных сил, зависящих от импульсов виртуальных частиц.

Если система содержит  $N$  частиц ( $d$  степеней свободы) в данном объеме  $V$ , взаимодействующих (теплопередача) с внешней системой таким образом, что энергия  $E$  сохраняется, то уравнения, определяющие координаты  $Q$ , импульс  $P$  и эффективную массу  $s$  после преобразования координат, описываются системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ay \\ \dot{y} = x + yz \\ \dot{z} = d - y^2 \end{cases} \quad (27)$$

(это уравнение классифицируется как система Спротта  $A$ ).

**Рис. 49. Отображение Пуанкаре системы Спротта  $A$ .**



Эта система является консервативной системой, о чём свидетельствует её матрица Якоби

$$\mathcal{J}_{\text{Спротта}} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -1 & z & y \\ 0 & -2y & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

След этой матрицы имеет среднее значение

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} z \, dz = 0 \quad (29)$$

В зависимости от начальных условий решением может быть хаотическое море, квазипериодическое движение или периодическая орбита, о чём свидетельствует раздел Пуанкаре

$$\{(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \mid z_n = 0\}$$

для  $a = 0.2$  (рис. 49).

Систему (27) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = -cx + ay \\ \dot{y} = -ax + yz \\ \dot{z} = d - bz - y^2 \end{cases} \quad (30)$$

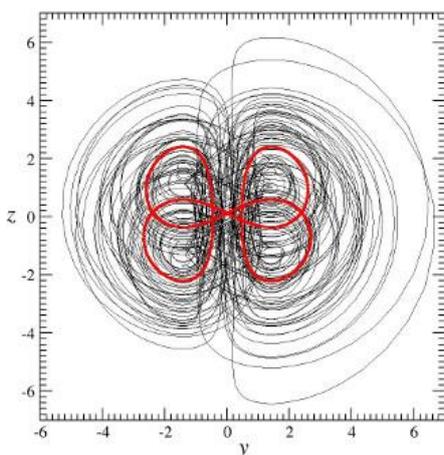
Якобиан которой есть матрица

$$\mathcal{J}_{\text{Спротта}} = \begin{bmatrix} -c & a & 0 \\ -a & z & y \\ 0 & -2y & -b \end{bmatrix} \quad (31)$$

со средним следом, равным  $-(b+c)$ .

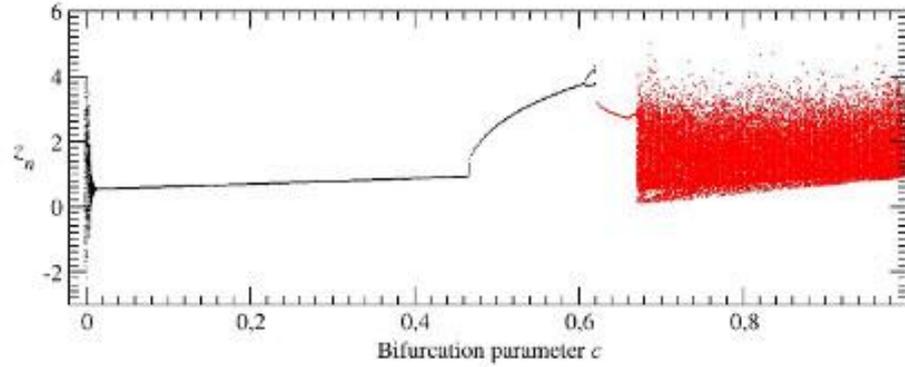
Хаотическое море в основном структурировано вокруг четырёх островов, соответствующих орбите периода-4 (рис. 50).

**Рис. 50. Хаотическое море, построенное вокруг орбиты периода-4.**



При  $a=1$ ,  $b=0$  и  $d=1$  вычисляется бифуркационная диаграмма при различных значениях параметра  $c$ : при  $c=0$  – консервативная динамика, при  $c=1$  – сильно диссипативная система (рис. 51). Консервативный случай

соответствует системе Спротт-  $A$ , а сильно диссипативный случай – это динамика типа Лоренса с хаотическим аттрактором, топологически эквивалентным аттрактору Лоренса. На бифуркационной диаграмме, не существует непрерывного перехода от моря хаоса ( $c=0$ ) к лоренц-подобному аттрактору ( $c=1$ ). Существует обширное окно с предельным циклом периода-1 и кризис при  $c=0,6$ . Вдоль этой линии пространства параметров нет хаотического аттрактора со слабой диссипацией.



*Рис. 51. Бифуркационная диаграмма от консервативной до диссипативной динамики.*

## Гл. 25. ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ

В математике теория катастроф родилась из союза теории особенностей и топологической динамики. В настоящей главе рассмотрены некоторые аспекты элементарной (от слова элемент) теории катастроф.

### 25.1 Топологические особенности, бифуркации и теория катастроф

С большой уверенностью можно утверждать, что в природе главенствуют два типа процессов: непрерывные и прерывные. Пример непрерывного процесса – нагревание жидкости с постоянной скоростью, проводящее к непрерывному увеличению её температуры. Подобные процессы являются «гладкими» и их развитие легко предсказать. Математический аппарат для таких процессов (дифференциальное исчисление) разработали И.Ньютон и Г. Лейбниц.

Прерывные процессы представляют собой резкое изменение выходного параметра. Например, лёд превращается в жидкость, жидкость закипает. Плавление и кипение – примеры катастроф. Поскольку прерывистые процессы связаны с внезапными изменениями, их гораздо труднее предсказать, чем непрерывные процессы.

*Позавчера температура на улице была  $-5^\circ$ , вчера –  $-10^\circ$ , сегодня –  $-15^\circ$ . Сколько будет завтра? Линейное приближение:  $-20^\circ$ . Я выхожу на улицу в шубе и валенках, а там  $+3^\circ$ ! Снег растаял, кругом ручьи, пот градом. Одиннадцать лет я однообразно ходил в школу, казалось, так будет всегда. Ан, нет! Всё разом кончилось: общежитие в институте в другом городе, армия, эмиграция... Регулярно сидели в пивной с друзьями, на футболе и на тебе: женился. Катастрофа? Катастрофа!*

Землетрясения, цунами, извержения вулканов, взрывы АЭС, падающие самолёты, переворачивающиеся корабли, сталкивающиеся автомобили, снежные лавины и сели, тайфуны и цунами, рождение детей, прыжки с трамплином, фазовые переходы, падение курсов акций, тяжёлая болезнь, революции и войны... Смерть, наконец. Имеет место нарушение стабильности, постоянства, порядка. Нарушения резкие, иногда - мгновенные. Можем ли мы их предсказать, предвидеть катаклизмы, их дату, силу и последствия? Нет!

Классическая математика надёжно предсказывает монотонное приближение будущего, считая катастрофы-революции-мировые войны досадными недоразумениями, некоторыми флуктуациями (шумами) на устойчивой в целом картине. Дифференциальное исчисление утверждает, что все зависимости можно описывать непрерывными функциями, причём такими у которых малое изменение аргумента приводит к небольшим изменениям результата. Естественно, что никаких катастроф не было и быть не могло.

Так продолжалось до конца 19-го века. Но в начале 20-го века ситуация стала меняться.

Математики постепенно занялись неустойчивыми моделями, приводящими к резкому нарушению равновесия. Появились работы, демонстрирующие, что неустойчивости столь же реальны, как и состояния гармонии. Оказалось, что любая система, развиваясь, проходит этапы перестройки, резкого изменения, сопровождающегося перегруппировкой сил, переустройством равновесия. Эти этапы характеризуются временным преобладанием одной из сил, что приводит к хаосу, разрушающему предыдущие структуры; затем происходит гармонизация, равновесие восстанавливается, но уже в новом, качественно ином состоянии. К радости ленивых метеорологов математики доказали, что погоду в принципе предсказать невозможно. Впрочем, как и любое другое будущее.

Одной из математических теорий, описывающих резкие переходы, является теория катастроф, которая зародилась в рамках теории динамических систем, как союз теории особенностей и динамики. Предмет её не определён, это скорее умонастроение, а не теория в обычном смысле. Однако рассмотрение типичности, структурной устойчивости, способ решения задач математического анализа геометрическими методами оказалось полезным, как для самой математики, так и для ряда её практических приложений.

**Теория катастроф – раздел математики, включающий в себя теорию бифуркаций дифференциальных уравнений (динамических систем) и теорию особенностей гладких отображений.**

Теорию катастроф считают ветвью геометрии.

Теория катастроф изучает особенности дифференцируемых отображений и эффекты, возникающие в особых точках отображений. Такие эффекты встречаются в физических, биологических, социальных, экономических, химических, логистических моделях, в которых в системе нелинейных уравнений, описывающих состояние равновесия, имеются особые точки. Теория катастроф изучает поведение системы при изменении параметров, приводящем к расщеплению положения равновесия на несколько близко расположенных состояний равновесия с меньшей степенью вырожденности.

Одной из задач теории катастроф является получение нормальной формы исследуемого объекта (дифференциального уравнения или отображения) в окрестности «точки катастрофы» и построенная на этой основе классификация объектов.

Начало математической теории катастроф положил Л. Эйлер в работах по теории устойчивости – дисциплине, изучающей закономерности поведения систем под действием внешних воздействий. Он впервые решил задачу устойчивости состояния равновесия механической системы — стержня, сжатого сжимающей силой.

Развитию теории особенностей способствовали работы Гюйгенса (теория эволют и эвольвент), Гамильтона (теория систем лучей), Кэли (зонтики, фронты и каустики), А. Максвелла (фазовые переходы), Гиббса (правило фаз), Н. Н. Семёнова (тепловой взрыв), Я. Б. Зельдовича (теория горения и космология), Пирси (волновая оптика), Койтера (теория упругости), Л. Д. Ландау (фазовые переходы второго рода) и т. д.

А. Пуанкаре (теория бифуркаций, включая построение «версальных деформаций») рассмотрел возможности нерегулярной динамики в детерминированных системах и показал, что незначительные изменения в начальных условиях могут приводить к совершенно непредсказуемым результатам. Он обнаружил, что многие дифференциальные уравнения вообще не имеют решения!

Важный вклад в теорию катастроф внесли А.М. Ляпунов (структурная устойчивость), А.А. Андронов (бифуркации аттракторов, структурная устойчивость, общая теория колебаний), тополог Х. Уитни (особенности гладких отображений). Непосредственно теорию катастроф создали Рене Том - теория особенностей и К. Зиман, изобретатель машины катастроф, специалист в области геометрической топологии и теории сингулярности.

Математическим источником теории катастроф служит раздел математики, называемый теорией особенностей гладких отображений, который занимается обобщением исследований функций на максимумы и минимумы. Это важно, поскольку минимумы и максимумы представляют собой критические точки функции во многом определяющие её поведение.

Основы теории особенностей гладких отображений были заложены в трудах тополога Х. Уитни в 1940-х – 1950-х годах, которым предшествовала лемма Морса о нормальной форме функции в окрестности невырожденной критической точки. В теории Уитни функции заменены отображениями, т.е. наборами нескольких функций нескольких переменных.

Термины «катастрофа» и «теория катастроф» были введены Р. Тома и К. Зиманом в конце 1960-х – начале 1970-х.

В конце 1960-х годов развитием этого направления занялся математик Р. Тома, который ввёл термин «катастрофа» для обозначения качественного изменения объекта при плавном изменении параметров, от которых объект зависит. Он предложил использовать топологическую теорию динамических систем, ведущую начало от работ Пуанкаре, для моделирования разрывных изменений в явлениях природы, и особенно в биологии; он указал на важность в этих рассуждениях требования структурной

устойчивости (нечувствительности к малым возмущениям). Тома показал, что, хотя число разрывных процессов в природе бесконечно, графики этих процессов можно разделить на несколько основных форм. Для процессов с участием четырёх переменных он обнаружил существование семи типов катастроф.

Термин «катастрофа», призванный заменить использовавшиеся до него термины «бифуркация», «перестройка», «метаморфоза», завоевал широкую известность после того, как в начале 70-х годов английский тополог К. Зиман предложил употребить название «теория катастроф» для соединения теории особенностей, теории бифуркаций и их приложений. Благодаря усилиям Зимана, который активно пропагандировал теорию катастроф, сравнивая её значение с изобретением математического анализа, популярность идеи Уитни и Тома резко выросла. Развитие теории катастроф в 1970-е – 1990-е годы связано в значительной степени с деятельностью В.И. Арнольда и его учеников.

Теория катастроф, как наука, появилась в книге Рене Тома "Структурная устойчивость и морфогенез" (1972). Он использовал топологическую теорию динамических систем для моделирования разрывных изменений в явлениях природы (особенно в биологии); он указал на важность учёта структурной устойчивости (чувствительности к малым возмущениям). При некоторых условиях из этого требования вытекает возможность описания изучаемой системы посредством одной из семи стандартных форм – элементарных катастроф.

Целью дальнейших работ в этом направлении явилось построение динамических систем с иерархической организацией, обеспечивающей устойчивость, взаимодействие со средой и эволюцию. Эту теорию стали применять ко всем нерешённым проблемам: устойчивость кораблей, психические явления, социальные и экономические процессы, химические реакции и т.д. и т.п. Казалось, что возникла теория, с помощью которой возможно предсказание любых катастроф. Если ньютоновская теория позволяет исследовать лишь плавные, непрерывные процессы, то теория катастроф даёт универсальный метод исследования всех скачкообразных переходов, различных внезапных качественных изменений.

Однако скоро наступило разочарование и теорию катастроф подвергли резкой критике. Хотя математикам теория катастроф нравится (она красива), но для инженеров и естествоиспытателей эта теория мало интересна. Дело в том, что теория катастроф, оказалась способна описать некий дискретный процесс только если модель содержит небольшое число переменных. Однако в реальных процессах такое редко встречается: природные процессы сложны и зависят от множества параметров. Теория катастроф используется для решения некоторых проблем физики, химии и техники, в биологии её успехи существенно меньше, а в гуманитарных науках она практически неприменима.

Конечно, теория катастроф иллюстрирует, как происходит разрушение моста при критических нагрузках, но дело в том, что, инженеры решили проблему устойчивости конструкций задолго до появления этой теории. Устойчивость кораблей и множество других задач были решены и решаются без какого-либо участия теории катастроф. Обычно наблюдается обратное. Когда все проблемы решены, тогда и появляется эта теория, объясняя некоторые аспекты происходящих явлений. Теория катастроф не позволяет ни предсказывать, ни управлять неожиданными событиями. Ни будущие войны, ни революции, ни конкретного индивида в случайной катастрофе предсказать нельзя. Пуанкаре умер от случайного аппендицита, Ляпунов застрелился, Тома - скончался от инфаркта. Своей жизнью они доказали бесполезность теории катастроф для практики.

Теория катастроф - это продолжение анализа и его развитие в собственных рамках (а не радикально новое направление). Она применима лишь в ограниченной и очень специальной области. В подавляющем числе случаев - это чисто качественная теория.

Если в эксперименте получена некоторая зависимость, то к ней можно подогнать Теория катастроф - мышление по аналогии.

Одно из направлений, где теорию катастроф можно рассматривать, как нечто полезное для практики, это - образование. Надо же что-то краткое писать в зачётке: синергетика, кибернетика, теория катастроф, либо что-то ещё такое же умное...

*Вопль студента, вылетающего из аудитории: "Спихнул катастрофы!", понятней идентичной по смыслу фразе: "Сдал экзамен по теории особенностей вещественнозначных гладких функций и топологии динамических систем".*

Полезна теория катастроф в анализе и управлении риском.

## 25.2 Элементы теории катастроф

*The last straw breaks the camel's back.*

*Последняя соломинка ломает спину верблюда.*

*Последняя капля переполняет чашу.*

Теория катастроф - часть качественной теории сложных нелинейных систем. Её основой является теория особенностей гладких (дифференцируемых) отображений, являющаяся обобщением задач на экстремум в математическом анализе. Элементарная теория катастроф сводит огромное многообразие ситуаций к небольшому числу стандартных схем. Анализ качественного поведения нелинейных динамических систем при изменении описывающих их параметров, позволяет описывать состояния, далёкие от равновесия, а также предсказывать резкую смену этих состояний. Теория катастроф – программа прогнозирования неустойчивости различных систем. Потеря устойчивости может быть катастрофична, даже если не приводит к гибели или разрушению системы, а лишь обуславливает переход к иной траектории развития.

Основными положениями теории катастроф являются:

- система является динамической, т.е. её состояние меняется во времени;
- принцип максимального промедления: система стремится сохранить своё состояние как можно дольше;
- текущее состояние системы зависит от того, каким образом система пришла в это состояние;
- траектория системы необратима, т. е. при изменении управляющих параметров системы на противоположные система не обязательно дойдёт до начального состояния.

Под сложными системами здесь понимаются нелинейные системы, свойства которых не сводимы к свойствам компонентов и проявляют вновь возникающие («эмерджентные»), *emerge* – возникать) черты. Сложные динамические системы включают флуктуирующие, случайным образом изменяющиеся компоненты. Отдельные флуктуации в системе с обратной связью, усиливаясь, вызывают разрушение прежнего состояния системы ("катастрофа"). Случайные воздействия в момент перелома (в точке бифуркации) могут подтолкнуть систему на новый путь развития; после же выбора одного из возможных путей, траектории развития, действует однозначный детерминизм – развитие системы предсказуемо до следующей точки бифуркации. Случайность и необходимость дополняют друг друга. Иногда в состояниях далёких от равновесия, слабые флуктуации или внешние возмущения усиливаются до огромных деформаций, скачкообразным образом разрушающих всю прежнюю структуру системы и переводящих её в иное состояние.

Особенности, бифуркации, катастрофы – термины, описывающие возникновение дискретных структур из гладких, непрерывных.

**Особенности – нарушения гладкости функции при каких-то значениях аргументов. В таких точках значения функции изменяются скачкообразно (происходят бифуркации).**

**Теория особенностей – обобщение исследования функций на максимум и минимум.**

**Катастрофа – скачкообразное изменение, возникающее в виде внезапного отклика системы на плавное изменение внешних условий.**

**Бифуркация (удвоение) – приобретение нового качества в движениях динамической системы при малом изменении её параметров. Бифуркация – раздвоение, разделение,**

**разветвление чего-либо. Состояние процесса в динамической системе, при котором резко возрастают флуктуации, и выход из которого возможен по двум существенно различным, трудно предсказуемым направлениям – хаотическому или упорядоченному.**

**Теория бифуркаций динамических систем – теория, изучающая изменения качественной картины разбиения фазового пространства, в зависимости от изменения параметра (или нескольких параметров).**

Катастрофа обладает такими элементами, как пространство управления, пространство переменных состояния и поверхность отклика.

Теория особенностей обобщает исследование экстремумов функций на случай нескольких функций любого числа переменных. Критической точкой функции  $y$  называется точка, в которой все первые частные производные равны нулю,  $dy/dx_i=0$ ; критическая точка называется невырожденной, если матрица  $d^2y/dx_i dx_j$  невырождена, т. е. её определитель отличен от нуля. У типичной функции все критические точки невырождены. Лемма Морса определяет «хорошие» критические точки для любого числа переменных. Морсовские критические точки обладают важным свойством: сохраняют тип при малых возмущениях. При обобщении этой леммы, возникает способ, позволяющий существенно понизить число переменных в рассматриваемой задаче.

Любая гладкая функция в окрестности каждой невырожденной критической точки приводится к одной из нормальных форм Морса,  $y=bx_1^2b...bx_n^2+C$ , гладкой заменой независимых переменных. Эти невырожденные особенности устойчивы: например, всякая функция, достаточно близкая к  $y=x^2$  (с производными), имеет в подходящей точке вблизи нуля подобную же особенность (невырожденную точку минимума). Все более сложные особенности неустойчивы. Например, вырожденная критическая точка функции  $y=x^3$  в нуле распадается на две при возмущении, превращающем  $x^3$  в  $x^3-\epsilon x$ . Типичные отображения поверхности на плоскость также имеют лишь устойчивые особенности, а именно, складку ( $y_1=x_1^2, y_2=x_2$ ) либо сборку Уитни ( $y_1=x_1^3+x_1x_2, y_2=x_2$ ).

У каждой из функций  $y=x^2, y=x^3$  и  $y=x^4$  есть нулевая первая производная в начале координат ( $x=0$  – критическая точка). Первая и третья функции имеют в критической точке минимальное значение, а вторая – точку перегиба. При внесении возмущений (небольшие изменения в значениях  $x$ ) в первую функцию никаких принципиальных изменений не происходит: сохраняется единственная критическая точка, которая лишь смещена на малую величину. Во втором и третьем случаях ситуация совсем иная. Вторая функция, для которой начало координат было точкой перегиба, приобретает две экстремальные точки, одна из которых соответствует минимуму, а другая – максимуму. Функция  $y=x^4$ , имевшая единственный минимум в начале координат, в результате малого возмущения имеет уже три критические точки. При этом начало координат становится точкой максимума, а в двух новых критических точках, сколь угодно близких к точке  $x=0$ , функция принимает минимальные значения. Функция  $y=x^2$  структурно устойчива, в функции  $y=x^3$  и  $y=x^4$  – структурно неустойчивы.

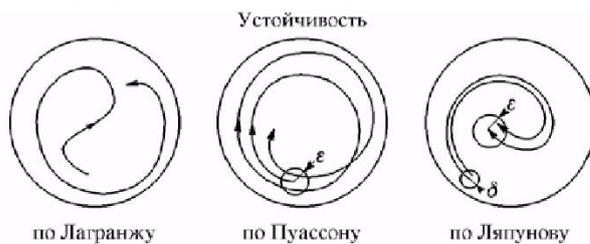
При анализе поведения динамической системы в первую очередь обращают внимание на её устойчивость, т.е. на реакцию динамической системы на малое возмущение её состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать во времени, система неустойчива. Если же малые возмущения затухают со временем, система устойчива.

**Устойчивость — способность системы сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий.**

В механике устойчивость характеризуется ответом на малое возмущение системы, находящейся в механическом равновесии.

Решение дифференциального уравнения называется устойчивым, если поведение решений с близким начальным условием «не сильно отличается» от поведения исходного решения. Существуют различные критерии устойчивости: устойчивость по Ляпунову, по Пуассону, по Лагранжу, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная и т.д. Теория

катастроф в основном изучает статические неустойчивости, т.е. связанные с действием потенциальной энергии.



**Рис. 1. Устойчивости по Лагранжу** (траектория остаётся в замкнутой области), **по Пуассону** (траектория многократно возвращается в  $\epsilon$ -окрестность стартовой точки) **и по Ляпунову** (две близкие на старте траектории остаются близкими всегда).

Понятие устойчивости необходимо для описания сложной, многокомпонентной системы, поскольку её развитие сопровождается потерей устойчивости некоторыми режимами её функционирования и рождением устойчивых систем. Одни структуры гибнут, рождаются новые, которые видоизменяются, совершенствуются и затем вновь уступают место новым. Изменения могут накапливаться плавно, а могут происходить скачком в виде катастроф. При "фазовых переходах" формирование новых структур сопровождается потерей устойчивости (даже разрушением) предшествующих. Система переходит из одного режима функционирования в другой режим. Старый режим потерял устойчивость, возник новый устойчивый режим, который может наследовать некоторые свойства предыдущего, а может быть и резко отличным. В таких случаях говорят о бифуркациях динамических систем.

Бифуркация означает качественные изменения объектов при изменении параметров, от которых эти объекты зависят. Термин катастрофа - синоним бифуркации, но более эмоционально окрашен. В математике и физике существует понятие грубости (структурной устойчивости системы): при малом изменении параметра грубая система хоть и изменяет в деталях режим функционирования, но не принципиально. Для грубых систем переход через точку бифуркации означает смену одного структурно устойчивого режима на другой. При этом в точке бифуркации система не является грубой: малое изменение параметра в ту или иную сторону приводит к резким изменениям состояния. Грубые системы могут быть весьма сложными и в пространстве параметров многомерной динамической системы могут существовать целые области негрубых систем.

В теории бифуркаций рассматриваются динамические системы, заданные уравнением

$$\dot{x} = F(x, \lambda), \quad (1)$$

где  $F$  — векторное поле в  $n$ -мерном фазовом пространстве  $\{x\}$ .

Поле зависит от  $k$ -мерного параметра  $\lambda$ . Множество состояний равновесия динамической системы (1)

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (2)$$

определяет  $k$ -мерную поверхность в  $(n+k)$ -мерном пространстве. В типичном случае эта поверхность гладкая, но её проекция на пространство управляющих параметров  $\{\lambda\}$  может иметь особенности. Знание геометрии типичных особенностей позволяет описывать происходящие при этом явления, например, скачкообразных переход системы в новое состояние равновесия при плавном изменении параметра.

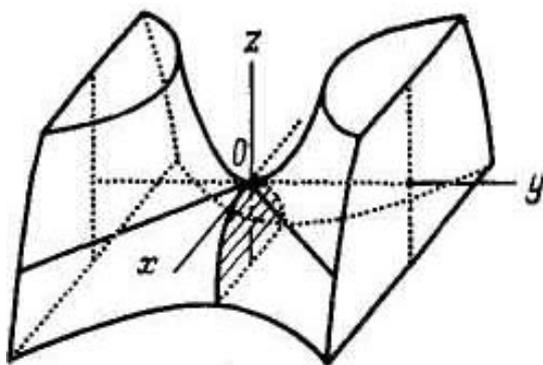
Возникновение диссипативных структур носит пороговый характер. Порядок — продукт флуктуации. Неустойчивость и пороговый характер самоорганизации связаны с нелинейностью дифференциальных уравнений, описывающих систему. Поскольку для линейных уравнений существует одно стационарное состояние, а для нелинейных — несколько, то пороговый характер самоорганизации связан с переходом из одного стационарного состояния в другое. Потеря системой устойчивости, есть катастрофа, т.е. скачкообразное изменение, возникающее при плавном изменении внешних условий. Каскад следующих друг за другом бифуркаций вводит систему в непредсказуемый режим; он ведёт к выбору между двумя решениями, затем четырьмя и т.д.; система начинает

колебаться в хаотическом, турбулентном режиме последовательного удвоения возможных состояний.

**Модальность.** Физическая система может иметь два или более различных физических состояния, т.е. описывающая систему потенциальная функция имеет более чем один локальный минимум в некоторой области изменения внешних управляющих параметров. В случае бимодальности для системы характерно одно из двух (или более) состояний. Катастрофа сборки (см. далее) становится бимодальной, если управляющие параметры лежат в пределах области сборки.

**Разрывность.** При разрывности между двумя состояниями оказывается сравнительно мало событий. Разрывность имеет место, если малые изменения какой-либо переменной (например, времени), вызывают большие изменения в поведении или состоянии.

**Недостижимость.** Если система находится в состоянии равновесия, которое оказывается морсовским  $i$ -седлом (рис. 2), то такое состояние является неустойчивым, поскольку существуют малые возмущения, приводящие к уменьшению значения потенциала. Всякий раз, когда потенциальная функция имеет более чем один локальный минимум, она должна иметь, по крайней мере, одно  $i$ -седло ( $c > 0$ ), которое является состоянием неустойчивого равновесия. Два слоя в области сборки, представляющие локально устойчивые минимумы, разделены срединным недостижимым слоем, представляющим неустойчивые локальные максимумы.



*Рис. 2. Морсовское седло.*

**Гистерезис** проявляется в том, что система обладает чётко выраженной замедленной реакцией на некое воздействие, причём эта реакция идёт по одному пути, когда воздействие возрастает, и по другому, когда оно убывает. Гистерезис имеет место, когда

физический процесс не является полностью обратимым, т. е. над той же самой точкой пространства управляющих параметров скачок из локального минимума 1 в локальный минимум 2 может и не произойти, в то время как скачок из локального минимума 2 в локальный минимум 1 имел место. Явление гистерезиса наблюдается, когда скачок с одного листа на другой не случается при тех же значениях управляющих параметров, что и возвратный скачок.

При **дивергенции** близкие начальные условия эволюционируют к значительно удаленным друг от друга конечным состояниям. Примером дивергенции (жесткой потери устойчивости) является катастрофа типа «складка». В отличие от мягкой потери устойчивости, при дивергенции решение покидает окрестность положения равновесия. Жесткая потеря устойчивости происходит при прохождении корней характеристического уравнения линеаризованной системы через ноль.

Модальность, недостижимость, катастрофические скачки, расхожимость и гистерезис обычно встречаются в совокупности. Они зависят от достижимости физической системой области пространства управляющих переменных, в которой потенциал имеет более чем один локальный минимум.

Поскольку в точках катастроф даже незначительные движения могут повлиять на эволюцию системы, то нужно знать далеко ли от такой точки находится система. Для этого следует изучить зависимость системы от внешних параметров, однако нередко экспериментатор не знает, каким уравнением описывается процесс. Тем не менее, существуют признаки того, что изучаемая система находится вблизи точки катастрофы (флаги катастроф):

- наличие нескольких различных (устойчивых) состояний;

- существование неустойчивых состояний, из которых система выводится слабыми воздействиями;
- возможность быстрого изменения системы при малых изменениях внешних условий;
- необратимость системы (невозможность вернуться к прежним условиям);
- гистерезис.

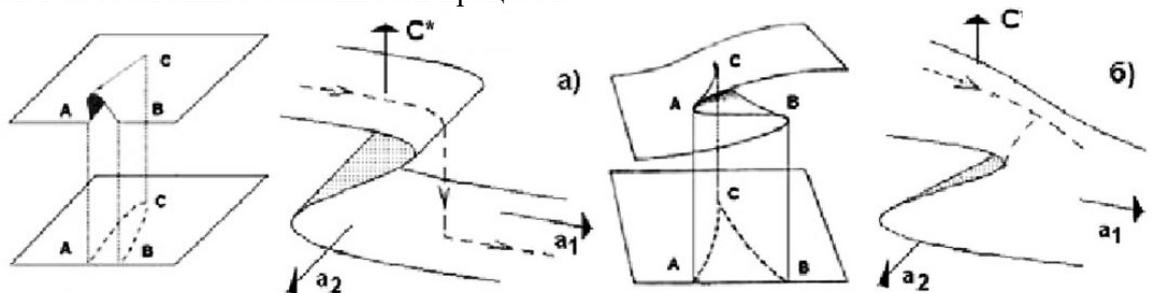
Теория катастроф направлена на описание качественных изменений в нелинейных системах далёких от равновесия системы. Она определяет область существования различных структур и границы их устойчивости. Её задачей является получение нормальной формы исследуемого объекта (дифференциального уравнения или отображения) в окрестности «точки катастрофы» и построение на этой основе классификации объектов.

### 25.3 Элементарные катастрофы

Отображение поверхности на плоскость – это сопоставление каждой точке поверхности точки плоскости. Если точка поверхности задана координатами  $(x_1, x_2)$  на поверхности, а точка плоскости координатами  $(y_1, y_2)$  на плоскости, то отображение задаётся парой функций  $y_1=f_1(x_1, x_2)$ ,  $y_2=f_2(x_1, x_2)$ . Отображение называется гладким, если эти функции гладкие (т.е. дифференцируемые достаточно число раз, например многочлены). Если система управляется двумя параметрами, то реализуются только два типа катастроф: «складка» (*fold*) и «сборка» (*cusp*). Возможны и другие типы, но они легко нарушаются при незначительных деформациях поверхности или направлений проектирования на плоскость.

Теория катастроф анализирует критические точки потенциальной функции, т. е. точки, где не только первая производная функции равна нулю, но и равны нулю производные более высокого порядка. Катастрофа типа «складка» характерна для триггерных систем. В катастрофе «сборка» есть как траектории без перескока, с плавным развитием, так и со скачком в развитии.

Для описания событий, происходящих вблизи бифуркационной границы удобно использовать системы самых простых уравнений, обычно – полиномиальных, которые описывают качественные особенности процесса.



**Рис. 3. Особенности гладких отображений Уитни: а – складка, б – сборка.**

Например, для системы, которая может быть описана одним автономным дифференциальным уравнением:

$$f(C) = \frac{dC}{dt} = aC + F(C) \quad (3)$$

где потенциал  $f(C)$  – нелинейная функция  $C$ ,  $C(t)$  – изменяющаяся во времени целевая функция (концентрация химического реагента, плотность популяции и т.п.);  $f(C)$  – потенциальная функция.

При  $dC/dt=f(C^*)=0$  достигается стационарное состояние, при котором концентрация в стационарном состоянии  $C^*$  – не зависит от времени. Условием бифуркации является  $a=0$ , т.е. отсутствие в правой части линейного члена. При нулевых значениях параметров в системе возникает вырождение, а при вариации параметров происходит бифуркация.

Рассмотрим основные свойства фундаментальных типов катастроф. Начнём с потенциальные функции, имеющей одну активную переменную (катастрофы типа  $A_2$ ).

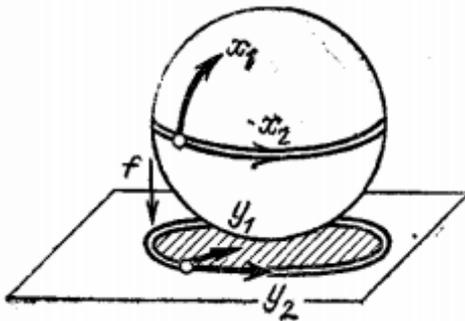
Гладкие фронты волн при движении в нелинейной среде или при отражении от препятствий образуют складки, при этом возникают сложные пространственные структуры. Число видов таких структур конечно, их классифицировали и присвоили каждому их них название, например, "ласточкин хвост", "пирамида", "кошелёк" (рис. 13).

Важно понимать, что катастрофа типа складка не описывает поведение системы на больших временах. Изображающая точка уходит из рассматриваемой области фазового пространства. Катастрофа складка не локализуема (то же относится к катастрофе «ласточкин хвост» с чётной коразмерностью).

**Складка** (предельная точка). Пример жёсткой потери устойчивости (дивергенции). Она имеет место при прохождении корней характеристического уравнения линеаризованной системы через ноль. В катастрофе типа складка пространство управления одномерно, а бифуркационное множество представляет собой точку.

Бифуркация седло-узел имеет место в однопараметрической системе, если же она происходит в двухпараметрической системе, то в фазометрическом пространстве ей соответствует особенность (катастрофа) типа складки в виде линии на плоскости параметров.

Катастрофа типа складка – особенность, возникающая, например, при проецировании сферы на плоскость в точках экватора (рис. 4). В подходящих координатах это отображение задаётся формулами  $y_1=x_1^2, y_2=x_2$ .



*Рис. 4. Складка проектирования сферы на поверхность.*

В простейшем случае особенности гладких отображений представляют собой функции двух переменных  $F(x,y)$ , которые в трёхмерном пространстве изображаются некоторыми поверхностями над плоскостью  $XU$ . Если поверхность образует складки так, что перпендикуляры к плоскости  $XU$  пересекают её два или более раза, то функция неоднозначна и может

испытывать скачки. Теория особенностей гладких отображений обобщает исследование экстремумов функций на случай нескольких функций любого числа переменных.

Катастрофа типа складка имеет место при изменении параметра  $a$  в уравнении

$$F(C)=C^3+aC \quad (4)$$

**Замечание.** Вместо Ур. (4) иллюстрировать образование складки можно уравнением  $f(C,b)=-C^3+C-b$ . Принципиально это дело не меняет: важно, чтобы  $C$  было в кубе (многочлен в потенциале третьей степени).

Пусть, например, связь двух переменных величин имеет вид (потенциал):

$$F(C)=aC-C^3/3, \quad (5)$$

где  $f(C)$  и  $C$  – переменные;  $a$  – параметр; множитель  $1/3$  в первое слагаемое введён для упрощения преобразований.

Производная (5) имеет вид:

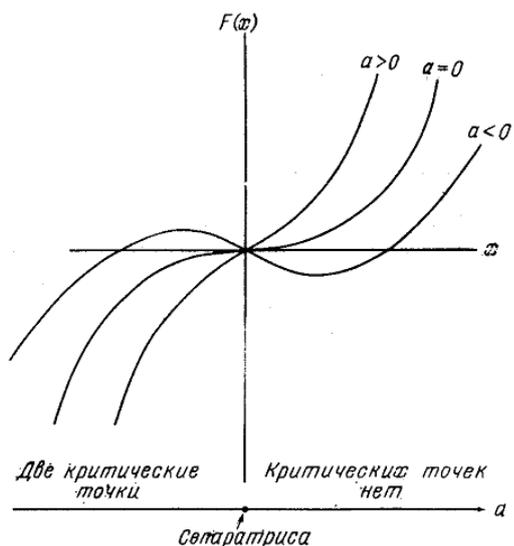
$$\frac{df}{dC} = a - C^2. \quad (6)$$

Уравнение (5) имеет два стационарных состояния:  $C_{1,2}^* = \pm\sqrt{a}$ . Линеаризуя (6) в окрестности стационарного состояния, найдём собственные значения  $L = \pm 2\sqrt{a}$ .

Поведение функции (5) определяется величиной параметра  $a$ . Если этот параметр положителен, то функция носит монотонный характер, её график – плавная монотонно возрастающая во времени кривая. Если параметр  $a$  уменьшается, то при нулевом его

значении меняется тип функции, характер связи в системе и поведение системы (бифуркация). При отрицательной величине параметра  $a$ , функция (5) представляет собой немонотонную функцию. Она имеет максимум и минимум при значениях  $C = \pm a$ , т.е. связь между переменными в определенной окрестности начала координат не однозначна: одному значению переменной  $f(C)$  соответствует три разных по величине значения переменной  $C$ . При плавном изменении переменной  $f(C)$  переменная  $a$  изменяется скачкообразно. Это и есть катастрофа.

$C_1^*$  (со знаком плюс) – неустойчивое состояние:  $C(t)$  уменьшается во времени. При  $a=0$  имеем  $C_1^*=C_2^*=0$ : и собственное значение в этой точке равно нулю. Бифуркация



имеет коразмерность 1, так как выделяется одним условием  $L(a)=0$ .  $C_2^*$  (со знаком минус) – устойчивое состояние, система развивается устойчиво и после некоторой флуктуации функция восстанавливает своё значение.

**Рис. 5. Траектории динамической системы.**

Все функции  $F(x; a) = \frac{1}{3}x^3 + ax$  с  $a > 0$  являются

функциями качественно одного и того же типа не имеющими критических точек. Все функции с  $a < 0$  также качественно подобны. Два качественно различных типа кривых имеют общую границу, сепаратрису  $a=0$ .

При  $a > 0$  все кривые качественно подобны – они не имеют критических точек (движение системы инфинитивно; при любых начальных условиях переменная  $C$  уменьшается со временем до минус бесконечности). Стабильного решения не существует.

Все кривые с  $a < 0$  также подобны и имеют две критические точки: одна стабильная (устойчивое равновесие) и одна нестабильная (неустойчивое равновесие). Поведение системы зависит от начальных условий. Если в начальный момент времени переменная  $C$  была меньше  $C_1^*$ , то она и впредь будет уменьшаться со временем до плюс бесконечности. Если в начальный момент времени переменная  $C$  была больше  $C_1^*$ , то со временем ее значение следовать до точки  $C_2^*$ , которая является аттрактором системы.

Точка  $a=0$  в пространстве управляющих параметров является **сепаратриссой**: стабильные и нестабильный экстремумы встречаются и аннигилируют. Когда система проходит через точку бифуркации типа «свёртка» ( $a=0$ ), стабильность решения при  $a < 0$  внезапно теряется, и система внезапно переходит в новое, отличное от предыдущего состояние. Катастрофа происходит при изменении параметра  $a$  от отрицательных значений к положительным для системы, состояние которой близко к точке  $C_2^*$ . Как только параметр  $a$  хоть немного превысит нулевое значение, равновесное состояние системы перестает существовать и значение переменной  $C$  уходит в минус бесконечность.

**Сепаратриса – траектория динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаяся к седловому состоянию равновесия при времени  $t \rightarrow \infty$  (устойчивая сепаратриса) или при  $t \rightarrow -\infty$  (неустойчивая сепаратриса).**

Если бифуркация седло-узел происходит в двухпараметрической системе, то в фазопараметрическом пространстве ей соответствует особенность (катастрофа) типа *складки* вдоль линии  $l$  на плоскости параметров.

Если связь между переменными, характеризующими поведение системы, описывается Ур.5, то в системе возможно проявление неустойчивости. Если параметр  $a$  положителен, но выявлена тенденция его уменьшения, то система приближается к катастрофе. Следует продолжить изучение системы и выявить условия и сроки наступления катастрофы, оценить её вероятные последствия. Тип элементарной

катастрофы, определяемой связью, которая описывается Ур.5, носит название катастрофы складки, поскольку в пространстве трёх координат – двух переменных и параметра  $a$  – поверхность, описываемая уравнением, имеет вид складки, начинающейся при  $a=0$  и углубляющейся по мере дальнейшего уменьшения параметра.

Предсказать появление элементарных катастроф можно, если известно регрессионное уравнение связей в системах. Если по уравнению детерминации, уровню значимости регрессионное уравнение одной из катастроф превосходит регрессионное уравнение связи устойчивого характера, то катастрофа возможна и можно дать её прогноз. *Флаги катастроф* представляют собой косвенные признаки, по которым можно судить о возможности наличия катастрофы в системе. Например, таким флагом может служить *аномальная дисперсия*. Признаком всевозможного приближения катастрофы является нарастание дисперсии величин, характеризующих систему.

Простая катастрофа «складка» хорошо иллюстрирует свойство бимодальности, представленное двумя ветвями складчатого многообразия, и свойство разрывности, представленное резкими скачками с одной ветви на другую, в особенностях  $a_1$  и  $a_2$ . Гистерезис иллюстрируется тем, что траектория системы при уменьшении  $a$  после пересечения особенности отличается от траектории, по которой движется система при увеличении  $a$ . Конкретная форма функции  $C(a)$  на многообразии, не важна – лишь бы в проекциях  $C$  на  $a$  сохранялась особенность типа складки.

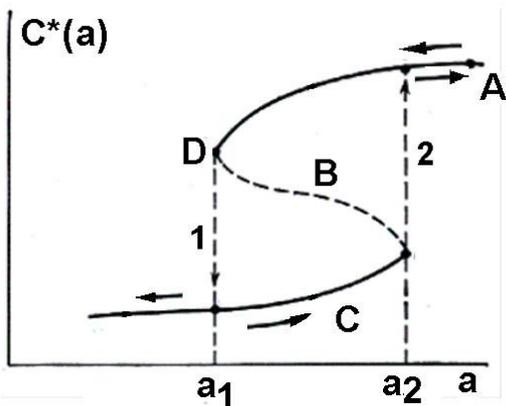


Рис. 6. Катастрофа типа складки. Сплошные линии – устойчивые ветви, пунктир – неустойчивая ветвь.

Рис. 6. Катастрофа типа складки.

Сплошные линии – устойчивые ветви, пунктир – неустойчивая ветвь.

Например, в случае полинома третьей степени (рис. 6) ветви  $A$  и  $C$  – устойчивы, а ветвь  $B$  неустойчивая. Это означает, что при плавном уменьшении параметра  $a$  от больших значений к малым, развитие системы будет идти по ветви  $A$  до точки  $D$ .

Катастрофа типа «складки» появляется в моделях, описывающих релаксационные колебания, «ждущие» режимы и триггерные системы (параметрическое переключение).

**Триггер (триггерная система) – класс электронных устройств, обладающих способностью длительно находиться в одном из двух устойчивых состояний и чередовать их под воздействием внешних сигналов.**

Модели, имеющие «складки», используются при описании автоволновых процессов и диссипативных структур, в моделях нагруженных арок, диссипативных структур, моделях релаксации. Физически катастрофа типа Складки реализуется при сходе лавины. Снег держится на склоне, пока его масса не превысит определённого значения, после чего происходит быстрое скатывание. Другой пример – обрыв верёвки. Верёвка может удерживать груз определённого веса, но после его превышения она обрывается.

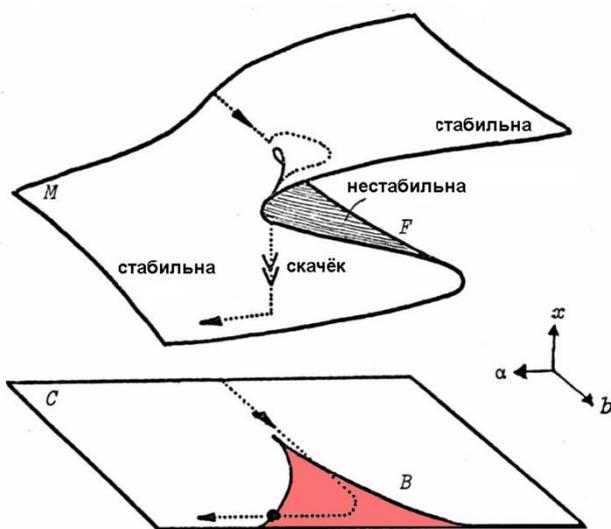
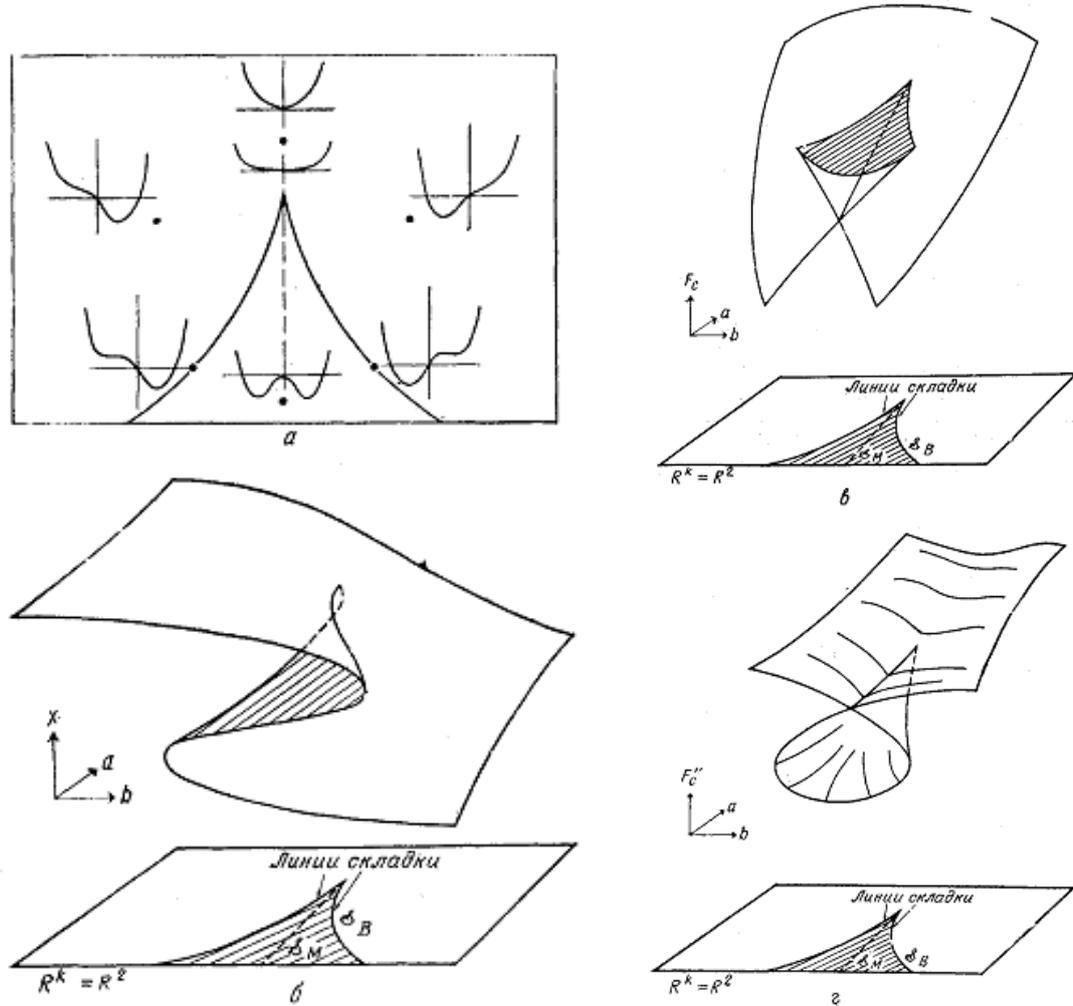


Рис. 7. Сборка. Красным закрашена область бифуркаций; граница области бифуркаций – полукубическая парабола.

Рис. 7. Сборка. Красным закрашена область бифуркаций; граница области бифуркаций – полукубическая парабола.

**Сборка** (симметричная бифуркация). Катастрофа типа сборка (вторая особенность Уитни) – трёхкратное равновесие (катастрофа типа  $A_3$ ). Трёхмерный график зависимости значения переменной в особой точке от параметров этого типа катастрофе напоминает сборку (морщинки) на одежде, чем она обязана названию. В сборке пространство управления двумерно, а пространство переменных состояния одномерно. Бифуркационное множество представляет собой сборку, а точка катастрофы – это точка сборки.

Критические, дважды вырожденные критические точки катастрофы  $A_3$  определяются приравниванием первой, второй и третьей производных  $F(x;a,b)$  нулю.



**Рис. 8. Складки и сборки:** а – функции семейства  $F(x;a,b)$  для различных значений управляющих параметров  $(a,b)$ ; б – двумерное многообразие катастрофы сборки. Проекция этого многообразия вниз на плоскость управляющих параметров представляет линию складки. Искажённая линия складки в плоскости управляющих параметров является тенью надскладочной части многообразия. Штриховая линия  $a < 0, b = 0$  в плоскости управляющих параметров представляет множество Максвелла или нелокальную сепаратрису и служит границей раздела между функциями, имеющими более глубокий левосторонний минимум, и функциями, имеющими более глубокий правосторонний минимум; в – изображение поверхности критических значений в плоскости управляющих параметров; г – изображение поверхности критической кривизны.

Диаграмма катастрофы «сборка» с точкой возврата (рис. 9), на которой показаны кривые (коричневые, красные) по переменной  $x$ , удовлетворяющие выражению для параметров  $(a, b)$ , кривые показаны для непрерывно изменяющегося параметра  $b$  при различных значениях параметра  $a$ . Вне геометрического места точек возврата (синяя

область) для каждой точки  $(a, b)$  в фазовом пространстве существует только одно экстремальное значение переменной  $x$ . Внутри точек возврата существует два различных значения  $x$ , которые дают локальные минимумы функции  $F(x)$  для каждой пары  $(a, b)$ . При этом указанные значения разделены локальным максимумом.

Сборка получается при проектировании на плоскость поверхности, изображённой на рис. 8. Эта поверхность задана формулой  $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$  в пространстве с координатами  $(x_1, x_2, y_1)$  и проектируется на горизонтальную плоскость  $(x_2, y_1)$ . В локальных координатах отображение задаётся формулами  $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2, y_2 = x_2$ .

На горизонтальной плоскости – проекции выделяется полукубическая парабола с точкой возврата (остриём) в начале координат. Эта кривая делит горизонтальную плоскость на две части: меньшую и большую. Точки меньшей части имеют три прообраза (в них проектируются три точки поверхности), точки большей части – лишь по одному, точки кривой – по два. При подходе к кривой из меньшей части два прообраза (из трёх) сливаются и исчезают (в этом месте особенность – складка), при подходе к острию сливаются все три прообраза.

Бифуркация имеет коразмерность 2 и требует для своего описания как минимум двух параметров. Потенциальная функция – полином 4-ой степени:

$$f(C) = C^4 + aC^2 + bC. \quad (7)$$

При таком потенциале движение всегда финитно, но количество аттракторов в зависимости от значения параметров может меняться от одного до двух.

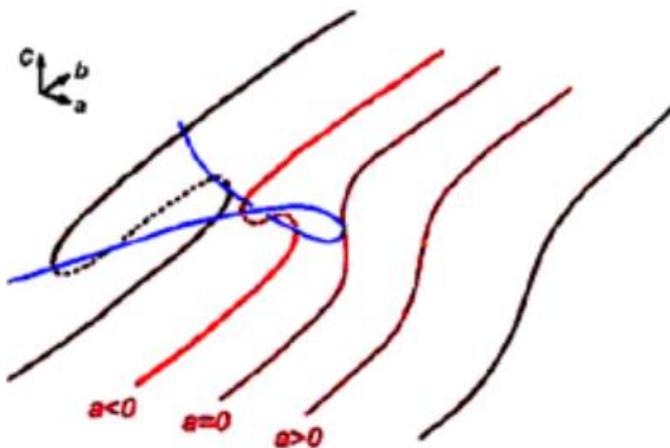
Производная от потенциала (уравнение равновесной поверхности):

$$\frac{df}{dC} = 4C^3 + 2aC + b \quad (8)$$

**Замечание.** Для простоты анализа форму потенциала часто выбирают  $F(C, a, b) = (1/4)C^4 + (1/2)aC^2 + bC$  производная которой  $\frac{df}{dC} = C^3 + aC + b$ , а из условия  $d^2f/dx^2 = 0$  следует  $3C^2 + a = 0$  и  $4a^3 + 27b^2 = 0$ . При значениях  $a$  и  $b$ , при которых  $4a^3 + 27b^2 < 0$ , имеют место три равновесия: два устойчивых, одно неустойчивое.

Критические, дважды вырожденные критические и трижды вырожденные критические точки катастрофы  $A_3$  определяются приравнением соответственно первой, второй и третьей производных потенциала к нулю.

Функция катастрофы сборки зависит от одной переменной состояния,  $C$ , и двух управляющих параметров:  $a$  и  $b$ . Сепаратриса сборки разделяет плоскость управляющих параметров на две области с одной и тремя критическими точками, её линии имеют



дважды вырожденные точки, а точка пересечения вырождена трижды. Потенциальные функции соответствуют некоторым точкам плоскости управляющих параметров.

**Рис. 9.** Форма сборки в пространстве параметров  $(a, b)$  вблизи точки катастрофы, показывающая бифуркацию, разделяющую области с одним и двумя устойчивыми решениями.

При положительных значениях параметров  $a$  и  $b$  система всегда имеет единственную устойчивую особую точку  $C=0$ . При отрицательных значениях параметров существует область, в которой особых точек три. При этом точка  $C=0$ , теряет стабильность. Эта область параметров ограничена бифуркационной кривой, уравнение которой

$$\frac{8}{27}a_1^3 + b_2^2 = 0 \quad (9)$$

Изменение состояния системы, т.е. катастрофа, происходит тогда, когда значения параметров пересекают эту кривую.

На рис. 9 представлена диаграмма катастрофы сборки, показывающая кривые (коричневые и красные) для  $C$ , удовлетворяющего уравнение  $df(C)/dC=0$  и параметров  $(a,b)$ , где параметр  $b$  изменяется непрерывно, а для параметра  $a$  показаны только несколько разных значений. За пределами сборки (синяя линия) каждой точке  $(a,b)$  в пространстве параметров соответствует только одно решение  $C$ . Внутри же сборки существуют по два различных значения  $C$ , соответствующих локальным минимумам  $f(C)$  для каждой точки  $(a,b)$ , разделённые значением  $C$ , соответствующим локальному максимуму.

Диаграмма катастрофы «сборка» с точкой возврата, на которой показаны кривые (коричневые, красные) по переменной  $C$ , удовлетворяющие выражению для параметров  $(a, b)$ , кривые показаны для непрерывно изменяющегося параметра  $b$  при различных значениях параметра  $a$ . Вне геометрического места точек возврата (синяя область) для каждой точки  $(a, b)$  в фазовом пространстве существует только одно экстремальное значение переменной  $C$ . Внутри точек возврата существует два различных значения  $C$ , которые дают локальные минимумы функции  $f(C)$  для каждой пары  $(a, b)$ . При этом указанные значения разделены локальным максимумом

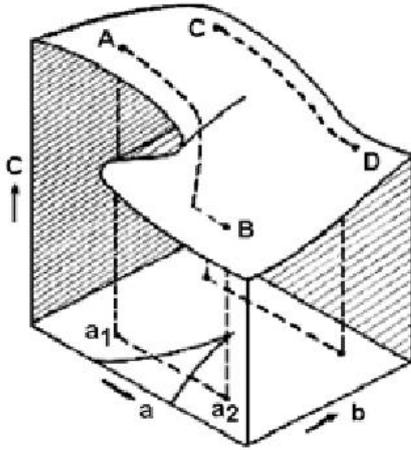
Сборка Уитни устойчива, т.е. всякое близкое отображение имеет в подходящей близкой точке подобную же особенность. Всякая особенность гладкого отображения поверхности на плоскость после подходящего малого воздействия рассыпается на складки и сборки.

При  $a=0$  на пространстве  $b=0$  имеет место бифуркация типа «вилка». Форма точек возврата в фазовом пространстве  $(a, b)$  около точки катастрофы, показывающая геометрическое место бифуркаций типа «свёртка», которое разделяет область с двумя стабильными решениями и область с одним решением. Геометрия точек возврата обычна для бифуркации типа «свёртка» при добавлении в управляющее пространство нового параметра  $b$ . Изменяя параметры, можно найти, что имеется кривая (синяя) точек в пространстве  $(a, b)$ , на которой теряется стабильность, то есть на этой кривой стабильное решение может внезапно «перепрыгнуть» на альтернативное значение (также стабильное). Но в геометрии точек возврата кривая бифуркаций заворачивает назад, создавая вторую ветвь, на которой уже это второе решение теряет стабильность, а потому может совершить «прыжок» назад на исходное множество решений. При повторном увеличении значения параметра  $b$  и последующем уменьшении его, можно наблюдать гистерезис в поведении петель, поскольку система следует по одному решению, «перепрыгивает» на другое, следует по нему и «перепрыгивает» на исходное. Однако это возможно только в области в параметрическом пространстве при  $a < 0$ . Если значение параметра  $a$  увеличивается, петли гистерезиса становятся меньше и меньше, пока значение  $a$  не достигнет 0. В этой точке петли исчезают (катастрофа с точкой возврата), и появляется только одно стабильное решение.

Можно рассмотреть процесс изменения параметра  $a$  при неизменном значении  $b$ . В симметричном случае при  $b=0$  можно наблюдать бифуркацию типа «вилы» при уменьшающемся значении параметра  $a$  одно стабильное решение внезапно разделяется на два стабильных решения и одно нестабильное. В это время физическая система проходит в область  $a < 0$  через точку возврата  $(a=0, b=0)$  (это – пример спонтанного нарушения симметрии). Вдали от точки возврата не существует внезапных изменений в физической системе, поскольку при прохождении по кривой бифуркации свёртки происходит только то, что становится доступным второе альтернативное решение.

В трёхмерном виде *сборка* изображена на рис. 10. Здесь снова предполагается, что система описывается переменной  $C$ , которая зависит от двух переменных  $a$  и  $b$ . Благодаря

наличие складки на поверхности, изображающей эту зависимость, поведение системы варьирует в соответствии со значениями  $a$  и  $b$ . Например, при изменении  $a$  от точки  $a_1$  к  $a_2$  система движется из точки  $A$ , пока не встретится с особенностью и не совершит «катастрофический» скачок на нижнюю часть поверхности, вдоль которой будет продолжать двигаться к точке  $B$ . С другой стороны, при движении системы от  $C$  к  $D$  то же самое изменение значений  $a$  не встречается с особенностью. Происходит или нет встреча с особенностью, зависит от относительных значений  $a$  и  $b$ .



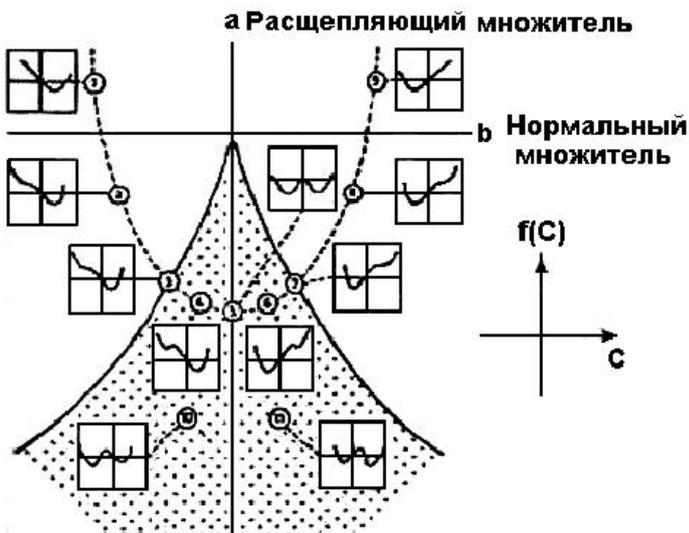
**Рис. 10. Изображение катастрофы «сборка».**

Бифуркация состоит в слиянии трех состояний равновесия – двух узлов и седла между ними (рис. 11). Система имеет три особых точки. Линейный анализ показывает, что при  $a > 0$  и любом  $b$  система имеет единственное состояние равновесия с отрицательным собственным значением, т. е. асимптотически устойчивое. При  $a < 0$  существует область значений  $b$  (заштрихованная область на бифуркационной диаграмме (рис. 11, где система имеет три состояния равновесия, причём одно неустойчивое состояние равновесия, а два -

устойчивые. Границы области бистабильности образованы линиями, соответствующими бифуркациям седло-узел, на которых два из состояний равновесия сливаются и исчезают. Линии сходятся в точке  $A$  ( $a=b=0$ ). Для Ур. (3) в точке  $A$  фазовый портрет представляет собой седло. В фазопараметрическом пространстве имеет место структура, называемая сборкой. Верхний и нижний лист сборки соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а средний – неустойчивому. На ребрах сборки имеют место катастрофы типа складки.

**Замечание.** Важное различие катастроф типа складки и сборки состоит в том, что складка не описывает поведение системы на больших временах. Изображающая точка уходит из рассматриваемой области фазового пространства, где справедлива формула (6.18). Катастрофа складка не локализуема.

На рис. 11 представлена сепаратрисса катастрофы сборки, определяемая

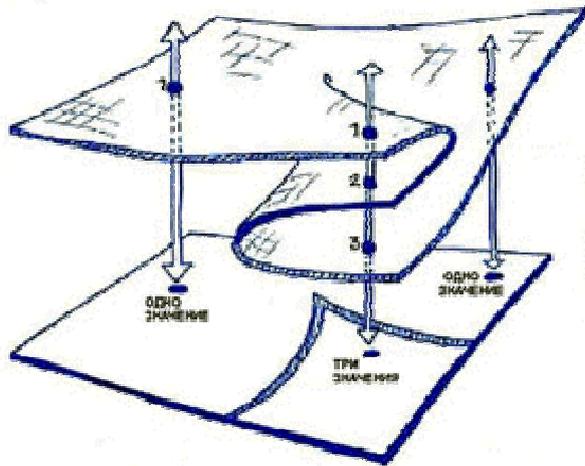


катастрофы сборки, определяемая уравнениями  $dF/dx=0$ ,  $d^2F/dx^2$ . Она разделяет плоскость управляющих параметров на две открытые области, представляющие функции с одной и тремя критическими точками. Линии сепаратриссы имеют дважды вырожденные точки, а точка пересечения — трижды вырождена. На рис. 11 изображены также потенциальные функции, соответствующие некоторым точкам плоскости управляющих параметров.

**Рис. 11. Катастрофа сборки:** Плоскость управляющих параметров.

Вне сборки есть только один корень, и он всегда отвечает минимуму потенциала  $f(C,a)$ . Внутри области есть три действительных корня: один из них соответствует максимуму (неустойчивое состояние), и два — минимуму, что можно проверить, исследуя вторую производную функции  $f$ . Заштрихованная область на рис. 11 является **областью катастроф**, а граница – бифуркационное множество, где локальный минимум исчезает.

Модели, содержащие катастрофу типа сборки, используются в механике конструкций, при описании ряда колебательных режимов, в динамике квантовых систем. Модели с функцией сборки встречаются в механике конструкций, при описании многих колебательных режимов, в динамике квантовых систем. Они используются при изучении



релаксационных автоколебаний малой амплитуды, колебательных режимов со смещением средней точки и диссипативных структур ступенчатого типа. Триггерные системы применяются для описания бистабильных режимов.

**Рис. 12. Многократная сборка.**

Ещё одним примером такой катастрофы является перемагничивание магнита. При температуре выше точки Кюри, что соответствует положительным значениям параметра  $a$ , Магнит не имеет собственного магнитного момента. При температуре ниже точки Кюри, магнит

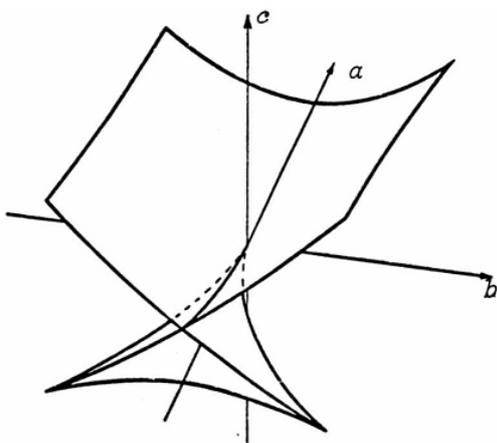
находится в магнитном состоянии и имеет собственный магнитный момент, который может быть ориентирован в произвольном направлении. При приложении магнитного поля, имеет направление, противоположное направлению намагниченности магнита, магнит сохраняет свои выводы, пока поле (которое может увеличиваться непрерывно) не достигнет определенного значения, при котором полюс магнита изменится на противоположный. Такое изменение будет очень быстрой, катастрофической для однодоменного магнита, хотя реальные магниты имеют много доменов, и их перемагничивание происходит не так быстро. Если изменить направление внешнего магнитного поля и построить график намагниченности, то на графике будет наблюдаться петля гистерезиса.

**Ласточкин хвост.** Слияние четырёх особых точек приводит к катастрофе типа «ласточкин хвост»,  $A_4$ ; фазовое пространство четырёхмерное. Имеет место в системах с одной переменной, но с тремя управляющими параметрами. Отобразить предмет, имеющий четыре измерения, сложно, поэтому изображают только бифуркационное множество.

Потенциал в катастрофе типа Ласточкин хвост:

$$f(C) = C^5 + aC^3 + bC^2 + cC \quad (10)$$

Управляющее пространство в трёхмерно. Каскад бифуркаций в фазовом пространстве состоит из трёх поверхностей бифуркаций типа «свёртки», которые встречаются на двух кривых бифуркаций с точками возврата, в конечном итоге встречающиеся в одной точке, представляющей собой бифуркацию типа «ласточкин хвост».



**Рис. 13. Ласточкин хвост в трёхмерном представлении. Пространство бифуркаций.**

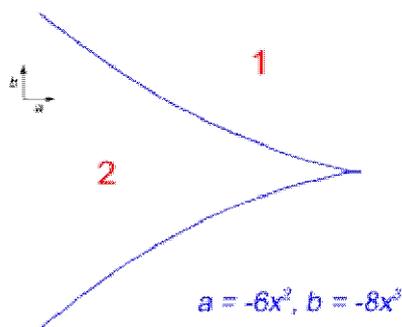
По мере прохождения значений параметров по поверхностям областей бифуркаций типа «свёртка» пропадает один минимум и один максимум потенциальной функции. В области бифуркаций с точкой возврата два минимума и один максимум замещаются одним минимумом; за ними бифуркации типа «свёртка» исчезают. В

точке ласточкиного хвоста два минимума и два максимума встречаются в одном значении

переменной  $C$ . Для значений  $a > 0$  за ласточкиным хвостом существует либо одна пара (минимум, максимум), либо не существует вообще никаких бифуркаций. Это зависит от значений параметров  $b$  и  $c$ . Две поверхности бифуркаций типа «свёртка» и две линии бифуркаций с точками возврата встречаются при  $a < 0$ , а потому исчезают в самой точке ласточкиного хвоста, заменяясь одной поверхностью бифуркаций типа «свёртка».

Ласточкин хвост – поверхность, образованная точками  $(a, b, c)$ , для которых многочлен  $P(C) = C^4 + aC^2 + bC + c$  имеет кратный корень.

Поверхность имеет особенность в виде ребра возврата и линии самопересечения, при этом ребро возврата имеет вид полукубической параболы, имеющей особенность в виде **точки возврата**. Поверхность разбивает пространство на три области, соответствующие числу вещественных корней многочлена. Именно, в области, имеющей вид криволинейной пирамиды, ребрами которой являются линия самопересечения и две ветви полукубической параболы, имеет четыре вещественных корня; в прилегающей к ней области – два и в оставшейся области – нуль.



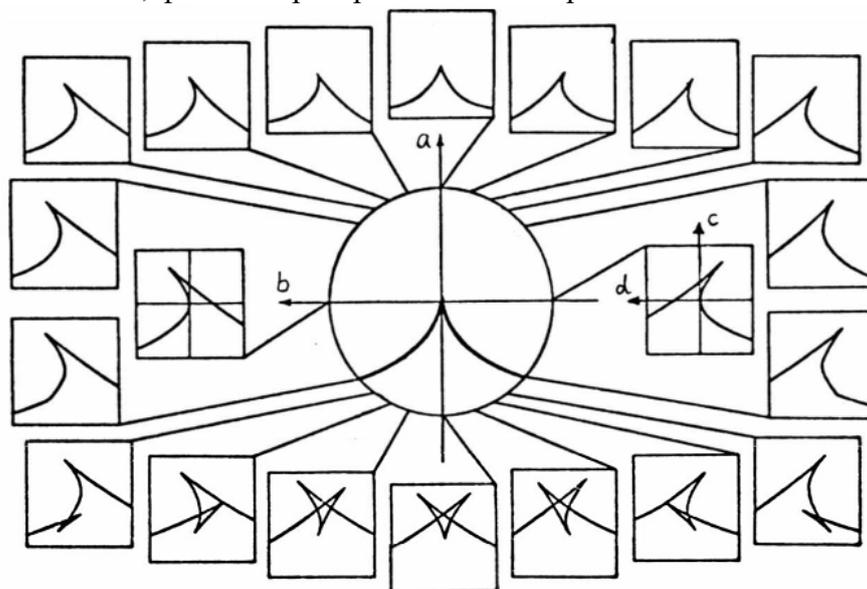
**Рис. 14.** Форма касп в пространстве параметров  $(a, b)$  вблизи точки катастрофы, показывающая местоположение бифуркаций складок, разделяющих область двумя устойчивыми решениями из области с одной.

**Точка возврата (касп)** – точка, в которой кривая имеет нулевой угол. В этой точке кривая разделяется на две (или более) ветви, имеющие в этой точке одинаковый направляющий вектор. Ветви в данной точке имеют общую касательную и движение вдоль них из данной точки изначально происходит в **одном и том же направлении**.

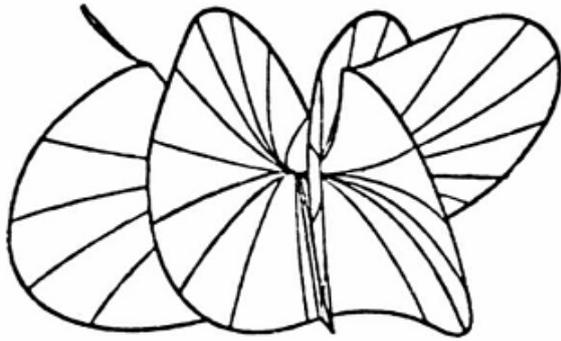
**одном и том же направлении.**

Поверхность «ласточкин хвост» постоянно встречается в теории особенностей в качестве универсальной модели. Например, такие же «ласточкины хвосты» имеют фронты типичных волн, распространяющихся в трёхмерном пространстве. В местах особенностей волны особенно сильны. Именно этими особенностями объясняются, в частности, радуга на небе и разрушительная ударная волна от сверхзвукового самолёта.

**Бабочка.** Катастрофа «бабочка» (как и катастрофа ласточкин хвост) – результат слияния пяти особых точек; фазовое пространство пятимерное.



**Рис.15.** Катастрофа бабочка. Поскольку пакет бифуркаций 4-мерный, то изобразить можно лишь 2-мерное поперечное сечение.

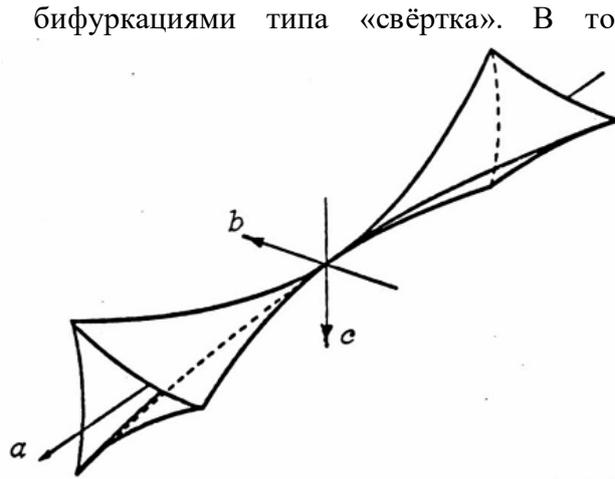


**Рис. 16. Катастрофа гиперболическая омбилика.** Бифуркационное множество состоит из двух взаимопроникающих листов, гладкая поверхность каждого из них развивает линию сборки.

Эта катастрофа задаётся семейством функций, зависящим от параметров  $a, b, c, d$ :

$$f(C) = C^6 + aC^4 + bC^3 + cC^2 + dC \quad (11)$$

В зависимости от значений параметров потенциальная функция может иметь три, два или один локальный минимум, причём все минимумы разделены областями с бифуркациями типа «свёртка». В точке «бабочка» встречаются три различные пространства (трёхмерных плоскости) таких бифуркаций типа «свёртка», две поверхности бифуркаций с точками возврата и кривая бифуркаций типа «ласточкин хвост». Все эти бифуркации пропадают в одной точке и преобразуются в простую структуру с точкой возврата тогда, когда значение параметра  $a$  становится положительным.



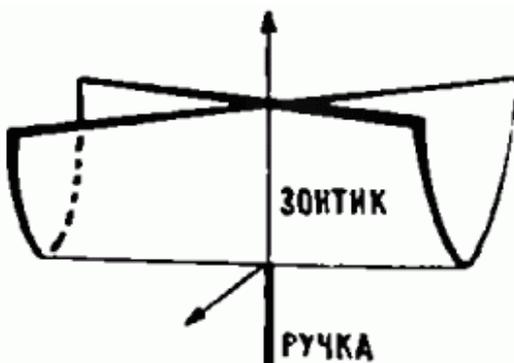
**Рис. 17. Эллиптическая омбилика.** Бифуркационное множество. Поперечные сечения есть 3-кратная сборка гипоциклоидов. Чьи сборки лежат вдоль трёх параболических линий.

**Омбилические катастрофы.** Перейдём теперь к бифуркациям на потенциальных функциях с двумя активными переменными. Омбилические катастрофы являются примерами катастроф второго порядка. Они, например, наблюдаются в оптике при отражении света от трёхмерных поверхностей. Сами по себе такие катастрофы тесно связаны с геометрией почти сферических поверхностей.

Эллиптическая и гиперболическая омбилики имеют трёхмерное пространство управления и двумерное пространство переменных состояния. У параболической омбилики – четырёхмерное пространство управления и двумерное пространство переменных состояния.

Рене Тома предложил рассматривать гиперболическую омбилическую катастрофу как разрушение волны, а эллиптическую омбилическую катастрофу — как процесс создания структур, похожих на волосяной покров.

**Омбилика (омбилическая точка) – локально сферическая точка на трёхмерной поверхности. В таких точках обе главных кривизны равны, и каждый вектор касательной является основным направлением. Омбилические точки обычно появляются в виде изолированных точек в эллиптических областях поверхности, т. е. таких, где гауссова кривизна положительна. Сфера является единственной поверхностью, на которой каждая точка является омбиликой.**



**Омбилика - точка округления (круговая точка).**

**Рис. 18. Катастрофа зонтик Уитни-Кэли.** Уравнению, задающему поверхность, удовлетворяет и отрицательная часть оси  $z$  - своего рода ручка зонтика.

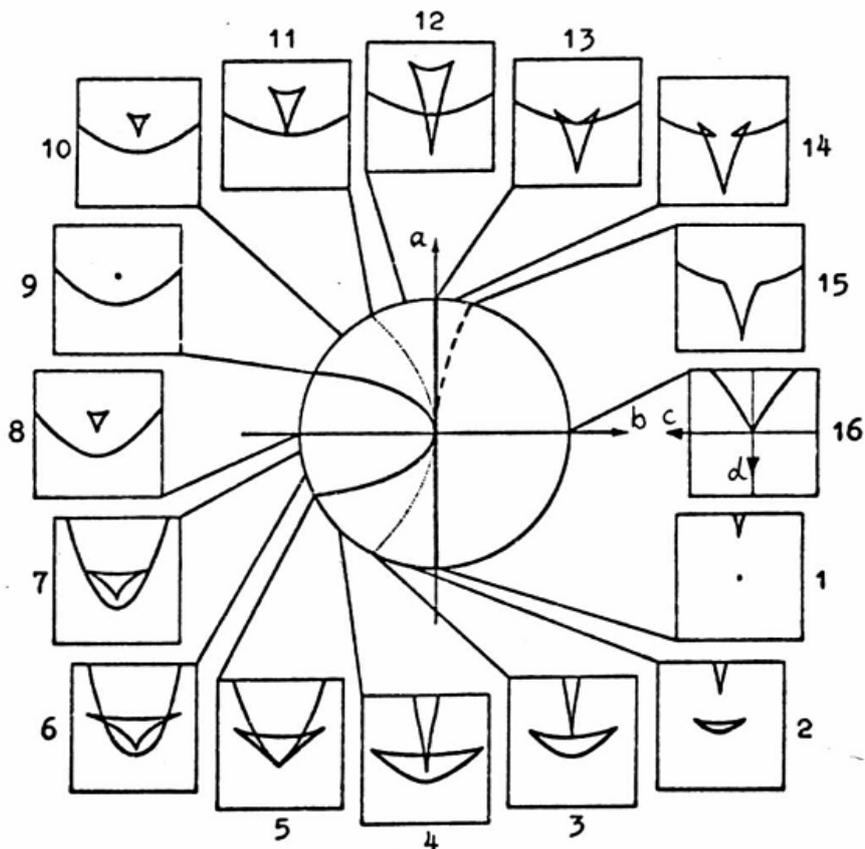


Рис. 19. Параболическая омбилика.

**Гиперболическая омбилика.** Эта катастрофа имеет три управляющих параметра и две активные координаты, поэтому равновесные поверхности лежат в пятимерном пространстве и их обычное изображение неосуществимо.

Гиперболическая омбилика задаётся уравнением:

$$f(C_1, C_2) = C_1^3 + C_2^3 + aC_1C_2 + bC_1 + cC_2. \quad (12)$$

**Эллиптическая омбилика**

$$f(C_1, C_2) = C_1^3/3 - C_1C_2^2 + a(C_1^2 + C_2^2) + bC_1 + cC_2. \quad (13)$$

**Параболическая омбилика**

$$f(C_1, C_2) = C_1^2C_2 + C_2^4 + aC_1^2 + bC_2^2 + cC_1 + dC_2. \quad (14)$$

На сечениях параболической омбилики можно видеть ласточкины хвосты, эллиптические и параболические омбилики. Это множество крайне редко используется на практике.

Катастрофы высоких размерностей содержат «субкатастрофы» меньших размерностей.

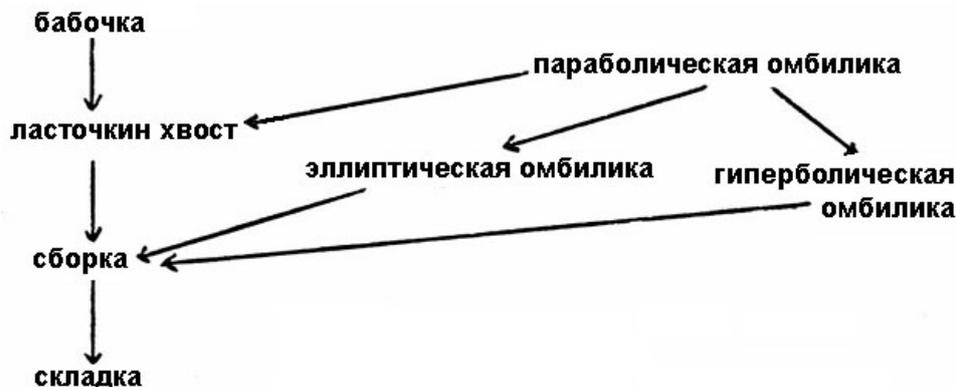


Рис. 20. Взаимосвязь различных типов катастроф.

## 25.4 Классификация катастроф

Типы катастроф для дискретных консервативных систем определяются потенциальной функцией. Для их классификации Р.Тома привлёк концепцию структурной устойчивости.

Если потенциальная функция зависит от трёх или меньшего числа активных переменных (обычно одна-две), и пяти или менее управляющих параметров, то в этом случае существует всего семь обобщённых структур описанных геометрий бифуркаций, которые можно разложить в ряды Тейлора при помощи диффеоморфизма (гладкой трансформации, обращение которой также гладко). Эти семь элементарных типов катастроф известны под именами, которые им дал Тома: складка, сборка, ласточкин хвост, бабочка, гиперболическая омбилика, эллиптическая и параболическая омбилика. Все 7 канонических катастроф имеют свои образы в каустиках.

Теория катастроф объяснила зависимость экспериментально наблюдаемых форм неустойчивости от числа управляющих параметров. Если имеется только один управляющий параметр  $\lambda$ , то можно наблюдать лишь катастрофу складки (предельная точка и асимметричная особенность). Если имеется независимое управление двумя параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то возможна сборка (особенности: устойчиво симметричная и неустойчиво симметричная). В случае независимого управления тремя параметрами  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  можно дополнительно наблюдать ласточкин хвост, гиперболическую омбилику (моноклиная и гомоклиная особенности), эллиптическую (антиклиная особенность) и параболическую омбилику. При четырёх управляющих параметрах может наблюдаться любая из семи катастроф.

**Классификационная теорема Тома:** В типичном случае гпараметрическое семейство гладких функций  $R^n \rightarrow R$  для всякого  $n$  и всех  $r \leq 5$  структурно устойчиво и эквивалентно вблизи любой точки одной из следующих форм:

1. Некритическая:  $u_1$ .

2. Невырожденная критическая (морсовская):

$$u_1^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad (0 \leq i \leq n);$$

3. Каспидные катастрофы

• **складка (A2):**  $u_1^3 + \lambda_1 u_1 + (M)$ ;

• **сборка (A3):**  $\pm(u_1^4 + \lambda_2 u_1^2 + \lambda_1 u_1) + (M)$ ;

• **ласточкин хвост (A4):**  $u_1^5 + \lambda_3 u_1^3 + \lambda_2 u_1^2 + \lambda_1 u_1 + (M)$ ;

• **бабочка (A5):**  $\pm(u_1^6 + \lambda_4 u_1^4 + \lambda_3 u_1^3 + \lambda_2 u_1^2 + \lambda_1 u_1) + (M)$ ;

• **вигвам (A6):**  $u_1^7 + \lambda_5 u_1^5 + \lambda_4 u_1^4 + \lambda_3 u_1^3 + \lambda_2 u_1^2 + \lambda_1 u_1 + (M)$ .

4. Омбилические катастрофы

• **эллиптическая омбилика ( $D_4^-$ ):**

$$u_1^2 u_2 - u_2^3 + \lambda_3 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_1 u_1 + (N);$$

• **гиперболическая омбилика ( $D_4^+$ ):**

$$u_1^2 u_2 + u_2^3 + \lambda_3 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_1 u_1 + (N);$$

• **параболическая омбилика ( $D_5$ ):**

$$\pm(u_1^2 u_2^2 + u_2^4 + \lambda_4 u_2^2 + \lambda_3 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_1 u_1) + (N);$$

• **вторая эллиптическая омбилика ( $D_6^-$ ):**

• **вторая гиперболическая омбилика ( $D_6^+$ ):**

• **символическая омбилика ( $E_6$ ).**

Здесь  $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^n$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in R^r$ ; символ (M) обозначает морсовскую функцию вида

$$u_2^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad (1 \leq i \leq n);$$

символ (N) обозначает морсовскую функцию вида

$$u_3^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad (2 \leq i \leq n).$$

Табл.1. Элементарные катастрофы Тома.

Тип катастрофы	$k$	Росток	Возмущение
$A_2$	1	$x^3$	$a_1x$
$A_{\pm 3}$	2	$\pm x^4$	$a_1x + a_2x^2$
$A_4$	3	$x^5$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
$A_{\pm 5}$	4	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$
$A_6$	5	$x^7$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$
$D_{-4}$	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
$D_{+4}$	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
$D_5$	4	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$
$D_{-6}$	5	$x^2y - y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$D_{+6}$	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$E_{\pm 6}$	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2$

Табл. 2. Канонические формулы потенциала в теории катастроф.

$k$	$n$	Каноническая форма $f(x, a)$	Название
1	1	$x_1^3 - ax_1$	Складка
2	1	$x_1^4 + a_1 \frac{x_1^2}{2} + a_2x_1$	Сборка
3	1	$\frac{x_1^5}{5} + a_1 \frac{x_1^3}{3} + a_2 \frac{x_1^2}{2} + a_3x_1$	Ласточкин хвост
4	1	$\frac{x_1^6}{6} + a_4 \frac{x_1^4}{4} + a_1 \frac{x_1^3}{3} + a_2 \frac{x_1^2}{2} + a_3x_1$	Бабочка
3	2	$x_1^3 + x_2^3 + a_3x_1x_2 - a_1x_1 - a_2x_2$	Гиперболическая омбилическая точка
3	2	$x_1^3 - 3x_1x_2^2 + a_3(x_1^2 + x_2^2) - a_1x_1 - a_2x_2$	Эллиптическая омбилическая точка
4	2	$x_1^2x_2 + x_2^4 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 - a_1x_1 - a_2x_2$	Параболическая омбилическая точка
5	1	$x_1^7 + a_1x_1^5 + a_2x_1^4 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2 + a_5x_1$	Вигвам
5	2	$x_1^2x_2 - x_2^5 + a_1x_2^3 + a_2x_2^2 + a_3x_1^2 + a_4x_2 + a_5x_1$	Вторая эллиптическая омбилическая точка
5	2	$x_1^2x_2 + x_2^5 + a_1x_2^3 + a_2x_2^2 + a_3x_1^2 + a_4x_2 + a_5x_1$	Вторая гиперболическая омбилическая точка
5	2	$1 \pm (x_1^3 + x_2^4 + a_1x_1x_2^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_2 + a_5x_1)$	Символическая омбилическая точка

В теории сингулярности есть объекты, которые соответствуют большинству других простых групп Ли.

Табл. 3. Потенциальные функции катастроф омбилического типа основных (элементарных) катастроф.

Тип омбилической катастрофы	Каноническая форма (потенциальная функция)
Эллиптическая омбилика	$V(x, y) = x^2y - y^3 + tx^2 + gy + hx$
Гиперболическая омбилика	$V(x, y) = x^2y + y^3 + tx^2 + gy + hx$
Параболическая омбилика первого типа	$V(x, y) = x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx$
Параболическая омбилика второго типа	$V(x, y) = (-1) \cdot (x^2y + y^4 + ay^2 + bx^2 + cy + gx)$
Вторая эллиптическая омбилика	$V(x, y) = x^2y - y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx$
Вторая гиперболическая омбилика	$V(x, y) = x^2y + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + gy + hx$
Символическая омбилика первого типа	$V(x, y) = x^3 + y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + gy + hx$
Символическая омбилика второго типа	$V(x, y) = (-1) \cdot (x^3 + y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + gy + hx)$

В.И. Арнольд предложил классификацию особенностей катастроф и получил удивительное совпадение с классификацией точечных групп, описывающих симметрию молекул, а также с правильными многогранниками в евклидовом пространстве и простыми группами Ли. Пока причины этих взаимосвязей до конца не выяснены.

A0 — несингулярная точка: .

A1 — локальный экстремум: устойчивый минимум или неустойчивый максимум .

A2 — складка

A3 — сборка

A4 — ласточкин хвост

A5 — бабочка

Ak — бесконечная последовательность форм от одной переменной

D4+ — кошелек = гиперболическая омбилика

D4- — пирамида = эллиптическая омбилика

D5 — параболическая омбилика

Dk — бесконечная последовательность других омбилик

E6 — символическая омбилика

E7

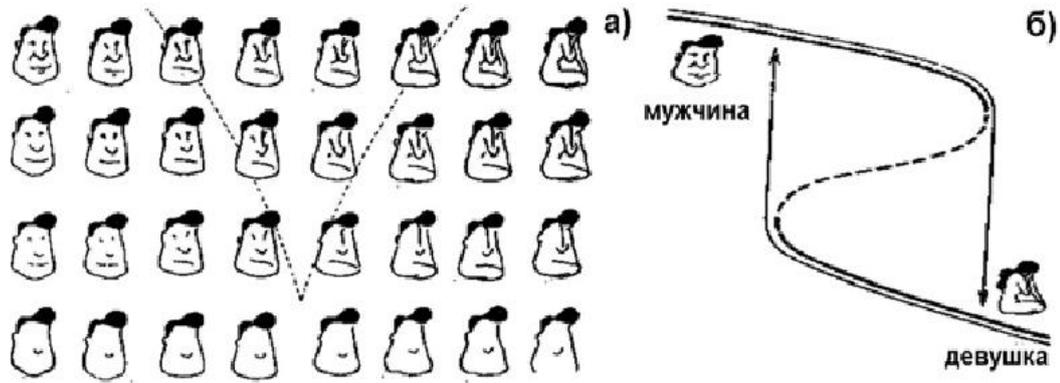
В открытых системах могут наблюдаться сложные, длительные хаотичные переходные режимы, скрытый порядок которых невозможно выявить без знания его алгоритма. Возможность существования «ложного» хаоса иллюстрируется рассмотренным нами ранее «возвращением Пуанкаре», в котором изображение, переведённое в цифровую форму, растягивается по диагонали, выходящие за пределы рамки участки отрезаются и вставляются вновь; после определенного числа таких преобразований распознаваемое изображение исчезает, а затем вновь возникает из казалось бы полного хаоса.

Довольно часто катастрофы встречаются в восприятии; это связано с существованием двусмысленных, или "мультистабильных", фигур. Например, среди фигур, показанных на рис. 2а, четвёртая слева в верхнем ряду воспринимается с равной вероятностью как мужское лицо и как фигура девушки. Интересно, что если эта фигура включена в последовательность (верхний ряд на рис. 2а), то восприятие средних фигур сдвигается в зависимости от порядка, в котором эта последовательность рассматривается: в сторону мужчины, если фигуру рассматривать слева направо, и в сторону девушки в противном случае.

**Замечание.** Катастрофы омбилического типа используются при моделировании взрывных процессов различной природы.

Теория катастроф позволяет свести огромное многообразие сложных ситуаций к небольшому числу точно изученных схем. Математические образы теории катастроф реализуются в волновых полях. Известны геометрические места точек, в которых происходит фокусировка волнового поля, называемые в оптике *каустиками*. При

пересечении каустик происходит скачкообразное изменение состояния – меняется число лучей, приходящих в данную точку пространства. Для одной-двух переменных и не более пяти управляющих параметров существует семь типов элементарных катастроф. Все семь канонических катастроф имеют в каустиках свои образы.

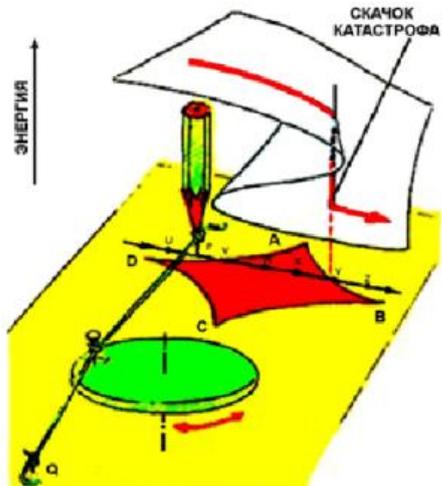


**Рис. 21. Катастрофы в восприятии.** На рис. 21б представлено одномерное сечение катастрофы сборки с принципом промедления.

### 25.5 Машина катастроф

Скачкообразный переход количества в качество, при котором непрерывно меняющиеся причины приводят к резким, прерывно меняющимся следствиям, т.е. когда ничтожное изменение начального состояния приводит к мгновенному, заранее непредсказуемому результату, наглядно демонстрирует "машина катастроф" Э.Зимана.

Эта машина состоит из диска, вращающегося вокруг вертикальной оси. К одной из точек на периферии диска прикреплены две резиновые нити. Свободный конец одной из нитей жёстко закреплён в точке  $Q$ , а свободный конец другой –  $P$  – может свободно перемещаться в плоскости, параллельной плоскости диска. Карандаш, прикреплённый к резинке в точке  $P$  рисует на бумаге, лежащей на дощечке. Перемещая карандаш, осуществляют вращение диска, так что состояние системы описывается положением карандаша и диска. Если  $P$  плавно перемещать вне ромбовидной области, диск будет плавно поворачиваться в ту или в другую сторону. Но когда  $P$  попадает в область  $ABCD$ , положение меняется. Предположим, точка  $P$  движется по линии  $UVWXYZ$  слева направо. При медленном движении точки диск плавно поворачивается. Но вот когда  $P$  выходит из ромба в точке  $Y$ , диск резко, скачком меняет угол поворота. Но когда  $P$  начинает перемещаться в обратном направлении по той же прямой, в точке  $Y$  никакого скачка не происходит! Он появляется на этот раз в точке  $V$ , там, где  $P$  выходит из ромба. Таким образом, поведение диска не меняется на прямо противоположное, когда  $P$  проходит прежний путь  $ZYXWVU$  в обратном направлении. Когда  $P$  попадает в любую точку, находящуюся вне ромбовидной области  $ABCD$ , у диска есть только одно положение устойчивого равновесия. Когда же  $P$  попадает внутрь этой области, устойчивых положений уже два.



**Рис. 22. Машина катастроф Зимана.**

При некоторых положениях острия карандаша малое изменение его положения способно вызвать «катастрофу», т. е. скачок диска в новое положение. Такие скачки происходят при исключительных («бифуркационных») положениях карандаша. Если отметить на листе бумаги места всех таких «катастроф», то получается «кривая катастроф» с четырьмя точками возврата. При

пересечении кривой катастроф скачок может происходить, а может и не происходить, в зависимости от того, по какому пути остриё карандаша обходило точки возврата кривой катастроф.

Состояние машины катастроф описывается тремя числами.

Для математического анализа работы такого устройства используется трёхмерное пространство, в котором по вертикальной оси откладывается энергия равновесных положений диска  $X$ , а по горизонтальным осям – координаты точки  $P$ . Возникает поверхность со складкой, изображающая собой совокупность всех равновесных положений диска. Проекция складки на плоскость образует часть ромбовидной области, примыкающей к точке  $A$ . Когда  $P$  находится вне заштрихованной области, каждому её положению соответствует одно-единственное значение  $X$  и одна-единственная точка на поверхности: состояние системы здесь описывается однозначной функцией. Но когда  $P$  оказывается внутри заштрихованной площади, одному положению  $P$  соответствуют три значения  $X$  на разных частях складки. Функция здесь перестает быть однозначной.

Такая модель хорошо объясняет поведение диска. При движении  $P$  слева направо  $X$  движется вдоль гладкой поверхности до тех пор, пока не достигается край перегиба. Дальнейшее нарастание координаты приводит к резкому перескоку  $X$  с верхнего на нижний уровень – так называемая «катастрофа» Тома. При движении  $P$  в обратном направлении – справа налево –  $X$  перемещается плавно по нижней поверхности складки, пока не достигнет её края. Дальнейшее изменение координаты приводит снова к «катастрофе» – скачку с нижнего на верхний уровень. Эта простейшая модель, в которой энергия равновесия зависит всего от двух независимых переменных – координат точки  $P$ .

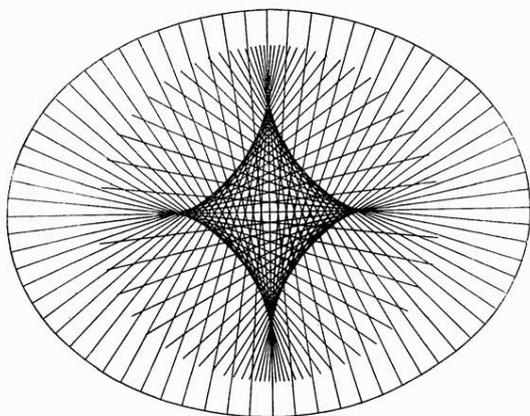
Состояние машины катастроф описывается тремя числами. Положение острия карандаша задаётся двумя координатами (они называются управляющими параметрами). Положение диска определяется ещё одним числом – углом поворота (внутренний параметр системы – управляемый параметр). Если все три числа заданы, и определены степени растяжения резинок, то определена потенциальная энергия всей системы. Диск

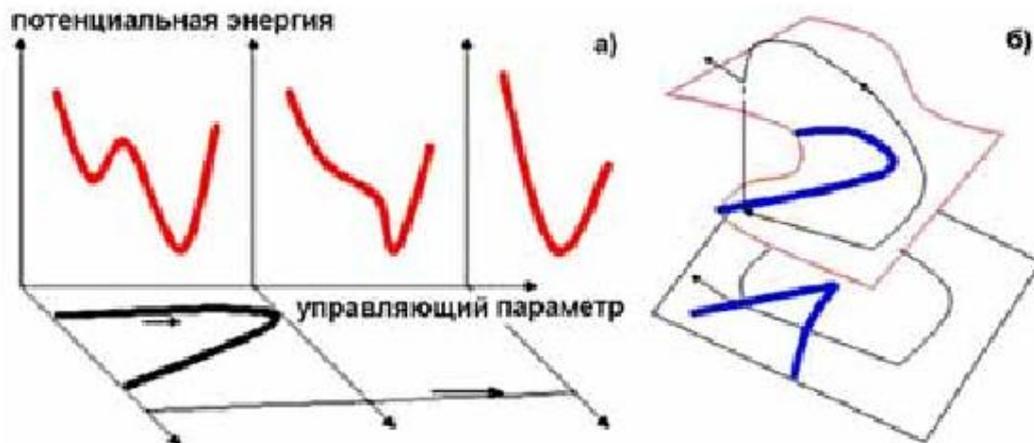
поворачивается так, чтобы эту энергию минимизировать. При фиксированном положении карандаша потенциальная энергия – функция от положения диска, т. е. функция, заданная на окружности. Эта функция может иметь в зависимости от значений управляющих параметров один или несколько минимумов.

**Рис. 23. Линии, рисуемые карандашом в машине катастроф.**

Если при изменении управляющих параметров положение минимума меняется плавно, то скачка не происходит. Скачок

происходит при тех значениях управляющих параметров, для которых локальный минимум исчезает, слившись с локальным максимумом; после скачка диск оказывается в положении, отвечающем другому локальному минимуму. Состояния, при которых диск находится в равновесии, образуют в трёхмерном пространстве состояний машины гладкую поверхность. Если проектировать эту поверхность на плоскость управляющих параметров вдоль оси внутреннего параметра, то получится следующая проекция (складка) – кривая катастроф. На рис. 24 видно, почему переход управляющих параметров через линию катастроф иногда вызывает, а иногда не вызывает скачок (это зависит от того, какой части поверхности отвечает положение диска). Пользуясь этим рисунком можно переходить с одного места поверхности равновесий на другое без скачков.

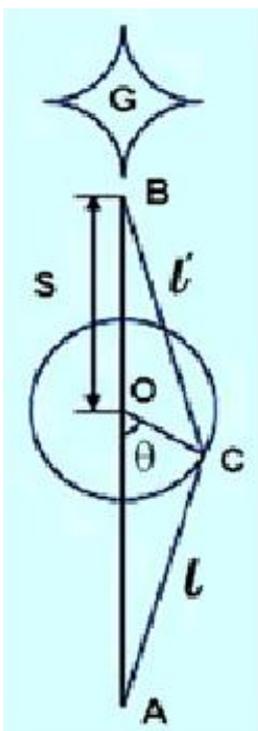




**Рис. 24. Параметры машины катастроф:** а – потенциальная энергия; б – поверхность равновесий машины катастроф.

Теория особенностей позволяет объяснить поведение машины и предсказать, в каких случаях «катастрофа» произойдет, а в каких нет. Пространство состояний машины трехмерно (два внешних параметра определяют положение карандаша, один внутренний — угол поворота колеса). Потенциальная энергия системы является функцией этих трёх переменных (по углу она периодична). При фиксированных значениях внешних параметров система минимизирует потенциальную энергию (локально). Возникающая зависимость между значениями внутренних и внешних параметров изображается в трёхмерном пространстве двумерной *поверхностью равновесий*. Поверхность равновесий образована критическими точками потенциальной энергии, рассматриваемой как функция внутреннего параметра при фиксированных значениях внешних. Эти критические точки при всевозможных значениях внешних параметров образуют поверхность в пространстве-произведении. Поверхность равновесия машины Зимана гладкая и расположена общим образом относительно проектирования на плоскость внешних переменных. Отображение проектирования имеет особенностями *складки* и *сборки Уитни* (а именно, 4 точки сборки, проектирующиеся в точки возврата кривой катастроф).

**Замечание.** *Кривая катастроф - проекция на плоскость сборки Уитни. Хотя сама поверхность геометрически не видна, и представляет собой поверхность в абстрактном пространстве состояний системы, всё же проекция особенности этой поверхности может быть наглядно изображена в виде кривой катастроф в левой части дощечки. Невидимое обнаруживает себя в видимом.*



Теория особенностей позволяет объяснить поведение машины и предсказать, в каких случаях «катастрофа» произойдет, а в каких нет. Пространство состояний машины трехмерно (два внешних параметра определяют положение карандаша, один внутренний – угол поворота колеса). Потенциальная энергия системы является функцией этих трёх переменных (по углу она периодична) При фиксированных значениях внешних параметров система минимизирует потенциальную энергию (локально). Возникающая зависимость между значениями внутренних и внешних параметров изображается в трёхмерном пространстве двумерной *поверхностью равновесий*.

**Рис. 25. К математической модели машины катастроф.**

Поверхность равновесий образована критическими точками потенциальной энергии, рассматриваемой как функция внутреннего параметра при фиксированных значениях внешних. Эти критические точки при всевозможных значениях внешних

параметров образуют поверхность в пространстве – произведении. Поверхность равновесия машины Зимана гладкая и расположена общим образом относительно проектирования на плоскость внешних переменных. Отображение проектирования имеет особенностями *складки* и *сборки* Уитни (а именно, 4 точки сборки, проектирующиеся в точки возврата кривой катастроф).

При подходе значений внешних параметров к кривой катастроф критические точки потенциальной энергии как функции на окружности перестраиваются. При пересечении кривой катастроф в её точке общего положения сливаются две критические точки потенциальной энергии – локальный максимум и локальный минимум. Система, находящаяся в устойчивом состоянии равновесия в точке локального минимума потенциальной энергии, остаётся в нём до момента бифуркации. В этот момент критическая точка становится неустойчивой, и система скачком переходит в другое состояние равновесия (отвечающее другому минимуму потенциальной энергии). Таким образом, будет ли скачок при пересечении линии катастроф, зависит от того, в каком из локальных минимумов потенциальной энергии находилась система до пересечения. В точке возврата линии катастроф сливаются три «листа» поверхности равновесий (два крайних отвечают локальным минимумам, а средний – локальному максимуму потенциальной энергии). Зная из теории Уитни, как эти листы переходят друг в друга вблизи точки сборки, легко прогнозировать скачки при различных путях обхода точек возврата кривой катастроф.

В этой задаче потенциальная энергия приобретает вид

$$U_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx, \quad (15)$$

где величины  $a$  и  $b$  не имеют принципиального значения.

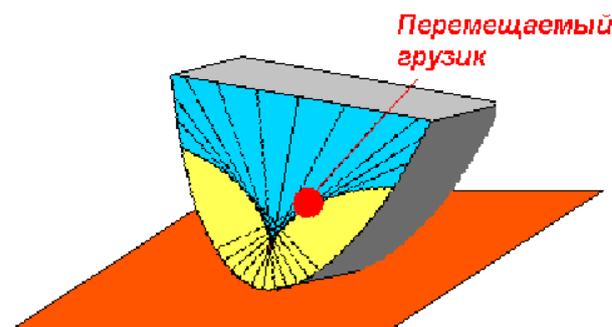
Это – катастрофа сборки.

## 25.6 Параболическая качалка

Рассмотрим простой пример физической системы, склонной к потере устойчивости – параболическую качалку. Простейшая качалка изготавливается путём вырезания двух кусков картона в форме параболы и скреплением их между собой (рис. 10). Прикрепим к ней грузик. Качалка наклонится и займёт некоторое положение равновесия. Если мы её толкнём, то она, либо займёт новое положение равновесия, либо вернётся в исходное. Если качалка находится в положении равновесия, то центр тяжести расположен точно по вертикали над точкой опоры. Когда качалка покоится на горизонтальной плоскости, эта плоскость будет касательной к параболе, так что центр тяжести лежит на соответствующей нормали (прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно к касательной). Некоторые из этих нормалей изображены на рис. 10.

Где бы ни располагался центр тяжести на нормали, построенной в заданной точке, он окажется над этой точкой и качалка с опорой на эту точку будет находиться в равновесии. Однако при одних положениях центра тяжести на этой нормали качалка после малых отклонений будет возвращаться в положение равновесия (т.е. равновесие

устойчиво), а при других она будет падать, как яйцо, поставленное на острый конец (равновесие неустойчиво).

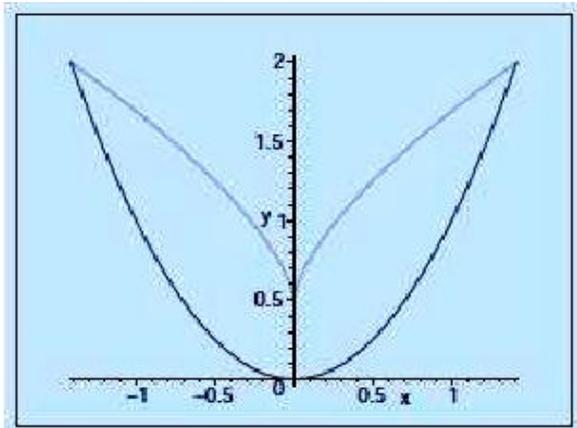


**Рис. 26 Параболическая качалка: управляющие параметры – координаты грузика, показанного красным кружком. Нанесены нормали – прямые, проходящие через точку касания перпендикулярно плоскости стола. При выходе из желтой области происходит “катастрофа” –**

скачкообразное изменение состояния.

Можно рассчитать, сколько положений равновесия имеет параболическая качалка при различных положениях груза и определить, как будет меняться положение равновесия, если непрерывно менять положение груза. В результате можно предсказать, когда малое изменение в положении центра тяжести приведёт к новому положению равновесия, лишь слегка отличающегося от первоначального, а когда оно приведёт к тому, что качалка начнёт катиться (катастрофа).

Параболическая качалка имеет один внутренний параметр  $q$  (угол между осью параболы и плоскостью стола) и два управляющих параметра  $a$  и  $b$ , задающих положения груза. При фиксированных значениях управляющих параметров положения равновесия системы соответствуют критическим точкам потенциальной энергии  $Vab(q)$ . Таким образом, задано двухпараметрическое семейство функций  $Vab(x)$ , и задача состоит в описании деформации множества критических точек  $S=\{x|Vab'(x)=0\}$  функций семейства при изменении параметров  $(a,b)$ .



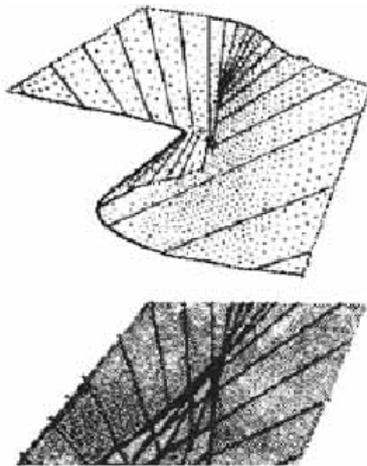
устойчивости кораблей.

Координаты центра масс  $(a,b)$ ,  $a$  и  $b$  – переменные управления, т.е. параметры, с помощью которых можно менять состояние системы. Множество значений этих переменных образует пространство управления.

**Рис. 27. Линия кратных корней в задаче "качалка".**

Математический аппарат аналогичен уравнению для машины катастроф, т.е. описывает каноническую сборку Уитни.

Его используют при описании



**Рис. 28. Поверхность катастрофы для качалки.**

Теория особенностей дифференцируемых отображений, получившая широкую известность под эффективным названием "теория катастроф", нашла применение в механике конструкций, метеорологии, аэро- и гидродинамике, оптике, теории кооперативных явлений, квантовой динамике, устойчивости кораблей, эмбриологии, социологии, лингвистике, экспериментальной психологии, экономике, геологии, теории элементарных частиц, а также в исследовании биений сердца, моделировании деятельности мозга, психических расстройств и т. п. Эта теория используется в исследовании возбуждения нервного волокна, перехода ламинарного течения в турбулентное, потери человеком самообладания, превращения жидкости в пар, деления биологических клеток, краха биржи и т.д. Теория катастроф подводит стандартную базу под описание качественных изменений в нелинейных уравнениях, моделирующих системы, далекие от равновесия. Она является основой анализа в теории бифуркаций, в теории переходов термодинамических систем в новые структурные состояния.