Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Химический факультет

Игорь Н. фон Бекман

д.х.н., профессор, заслуженный профессор МГУ

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ:

теория и практика

МЕТАНАУКА

ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМ

Материалы к курсу лекций и учебнику

Москва

- 2018 -

Аннотация

Учебник "Нелинейная динамика сложных систем" (или кратко "Эволюция систем") содержит систематический материал по основам теории нелинейной динамики сложных систем и её применению в синергетике, кибернетике, информатике, неравновесной термодинамике открытых систем, квантовой механике, кинетике, диффузии (классической и аномальной), диффузионной кинетике, в физике и химии твёрдого тела, а также для решения некоторых проблем материаловедения, метеорологии, турбулентности, экологии, геологии, химической технологии, ядерной индустрии, биологии, медицины и обществоведения. Рассмотрены основные компоненты нелинейной динамики: теория устойчивости, теория динамического хаоса, эргодическая теория и теория интегрированных систем. Обсуждены такие понятия, как фазовые пространства и портреты, регулярные, статистические, странные аттракторы и репеллеры, линейные и нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, отображения, регулярные и нерегулярные аттракторы, локальные и нелокальные бифуркации. Приведены способы описания плохо организованных систем, сложных структур, переходов типа порядок↔беспорядок, процессам самоорганизации и автоволновым колебаниям. Основное внимание уделено перспективам совмещения в рамках одного методического подхода различных способов диагностики разупорядоченных структур: видов энтропии (термодинамическая, статистическая и информационная энтропии, КС-энтропия Колмогорова-Синая, энтропия Реньи и энтропия Цаллиса и др.); элементов геометрии фракталов, скейлинга; статистических распределений Леви – Парето и дифференциальных уравнений с дробными производными. Продемонстрированы преимущества использования энтропии Кульбака-Лейблера для количественного описания непрерывного перехода от полуволнового дифференциального уравнения в частных производных (порядок) к диффузионному уравнению (беспорядок). В заключение даны методы описания процессов во временных "цветных" рядах с учётом их фрактальности и перемежаемости. Приведены примеры использования теории нелинейной динамики для решения различных прикладных задач.

Пособие написано по материалам курсов лекций, прочитанных автором в разное время на Химическом факультете МГУ, в некоторых отечественных и зарубежных вузах.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области математической физики, математической химии, физической химии, биологии и геологии, а также учёным инженерам, использующим методы нелинейной динамики в термодинамике, кинетике, материаловедении и диффузии.

Ключевые слова: статика, линейная и нелинейная динамика, эволюция, бифуркации и катастрофы, порядок, непорядок, беспорядок, хаос, статический, динамический и детерминированный хаос, термодинамика равновесная и неравновесная, консервативные (гамильтоновы) и динамические системы, открытые и закрытые системы, обратимые и необратимые процессы, равновесные и неравновесные системы, энтропия Больцмана, Планка, Гиббса, Шенонна, Цаллиса, Кульбака-Лернера, Реньи, Колмогорова, Неймана, Холево, эпсилон, отрицательная энтропия, антиэнтропия, экстропия, информация, информатика, информационные технологии, информация Хартли и Шеннона, квантовая информация, геометрия фракталов, скейлинг, самоподобие, синергизм и синергетика, процессы самоорганизации, обыкновенные дифференциальные уравнения (линейные и нелинейные), отображения, аттракторы и репеллеры (регулярные и нерегулярные, хаотические, странные, дикие, гиперболические, сингулярные), устойчивость, Ляпунов, неподвижные точки, фазовые траектории, циклы, бифуркации Пуанкаре, Андропова=Хопфа, транскритические и гомоклинические, сценарии перехода к хаосу, лестница Ломерея, паутина, отображение Бернулли, треугольное, тент, канторов репеллер, логистическое, Эно, пекаря, кот Арнольда, Икеды, Лоренса, Смейла-Вильямса, Плыкина, Дуффинга, Ван дер Поля, Рёсслера, порядок Шарковского, универсальность Фейгенбауэра, бильярды и др.

Оглавление

Аннотация ... 2

От автора ... 8

ПРЕДИСЛОВИЕ ... 11

ВВЕДЕНИЕ ... 13

1. СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ ... 17

2. ПОРЯДОК, НЕПОРЯДОК, БЕСПОРЯДОК И ХАОС ... 27

3. ТЕРМОДИНАМИКА ... 37

3.1 Начала термодинамики ... 38

3.2 Равновесная термодинамика ... 39

4. НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА ... 50

4.1 Диссипативные структуры, системы и среды ... 50

4.2 Термодинамика необратимых процессов ... 55

4.3 Линейная неравновесная термодинамика ... 58

4.4 Нелинейная неравновесная термодинамика ... 74

4.5 Статистическая термодинамика ... 80

5. ЭНТРОПИЯ ... 86

5.1 Определение и свойства энтропии ... 86

5.2 Энтропия в химической термодинамике ... 90

5.3 Энтропия в статистической физике ... 101

5.3.1 Энтропия Больцмана-Планка ... 103

5.3.2 Энтропия Гиббса ... 109

5.4 Тсаллис (Цаллис) энтропия (Революция в термодинамике) ... 114

6. ГЕОМЕТРИЯ ФРАКТАЛОВ ... 119

6.1 Элементы геометрии фракталов ... 121

6.2 Размерности фракталов ... 123

6.3 Примеры фракталов ... 128

6.4 Фракталы и энтропия ... 139

7. ИНФОРМАТИКА ... 141

7.1 Информация, информатика и информационные технологии ... 141

7.2 Теория информации ... 144

7.2.1 Информация Хартли ... 146

7.2.2 Энтропия Шеннона ... 149

7.3 Отрицательная энтропия, антиэнтропия, экстропия ... 163

7.4 Алгоритмическая теория информации ... 169

7.4.1 Энтропия Колмогорова 169
7.4.2 Эпсилон-энтропия 172
7.5 Энтропия Кульбака-Лернера 176
7.6 Энтропия Реньи 181
7.7 Квантовая информатика 191
7.7.1 Некоторые положения квантовой механики 191
7.7.2 Энтропия фон Неймана 197
7.7.3 Линейная энтропия 202
7.7.4 Сравнение энтропий Реньи, Цаллиса и Неймана 203
7.7.5 Энтропия Холево 204
8. СИНЕРГЕТИКА 206
8.1 Синергизм и синергетика 206
8.2 Детерминизм, случайность и неопределённость 210
8.3 Простые и сложные системы 212
8.4 Анализ систем 218
8.5 Параметры порядка (управляющие параметры) 219
8.6 Процессы самоорганизации 222
9. СИСТЕМЫ И ЗАКОНЫ ИХ ЭВОЛЮЦИИ 231
9.1 Статические системы 231
9.2 Динамические системы 232
9.3 Линейные динамические системы 240
9.4 Нелинейные динамические системы 241
9.5 Эволюция динамической системы 247
9.6 Математическое описание эволюции динамической системы 253
10. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОПИСАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 257
10.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения 257
10.2 Фазовое пространство и пространство состояний 262
10.3 Линейные ОДУ на плоскости 271
10.4 Нелинейные дифференциальные уравнения 281
11. ОТОБРАЖЕНИЯ 286
11.1 Системы с дискретным временем в отображениях 286
11.2 Итерации в исследовании динамических систем 291
11.3 Графические методы нахождения неподвижных точек и исследования их свойств 298
11.4 Многопараметрические отображения 304

11.5 Примеры некоторых важные отображений 305
12. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....314
12.1 Дифференциальные уравнения и особые точки 314
12.2 Классификация точек равновесия.....324
12.3 Фазовые портреты и особые точки нелинейных ОДУ.....333
12.4 Многомерные системы 336
13. РЕГУЛЯРНЫЕ АТТРАКТОРЫ И РЕПЕЛЛЕРЫ 337
13.1 Типы аттракторов 337
13.2 Фазовый объём.....348
13.3 Репеллеры 350
13.4 Осциллятор и осцилляции.....354
14. УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 364
14.1 Устойчивые и неустойчивые равновесия.....364
14.2 Устойчивость по Ляпунову (метод первого приближения).....368
14.3 Показатель Ляпунова.....372
14.4 Устойчивость нелинейной системы 374
14.5 Метод функций Ляпунова 377
14.6 Функция Ляпунова и энтропия 380
14.7 Асимптотическая устойчивость.....381
14.8 Устойчивость особых точек 382
14.9 Устойчивость особых точек 385
14.10 Устойчивость решений дискретных уравнений.....390
15. БИФУРКАЦИИ.....395
15.1 Бифуркации: основные понятия и классификация.....395
15.2 Элементы теории бифуркаций.....400
15.3 Простейшие бифуркации 413
16. БИФУРКАЦИИ ЦИКЛОВ.....424
16.1 Предельные циклы.....424
16.2 Устойчивость предельных циклов 425
16.3 Бифуркации устойчивых предельных циклов.....431
16.4 Бифуркация Пуанкаре-Андронова—Хопфа (бифуркация рождения цикла).....432
16.5 Бифуркация рождения пары устойчивых замкнутых траекторий.....444
16.6 Транскритическая (обмена устойчивостью между циклами) бифуркация.....445
16.7 Бифуркация исчезновения (рождения) пары замкнутых траекторий.....446
16.8 Бифуркация удвоения периода цикла 446

16.9 Бифуркация рождения (гибели) двумерного тора. 449
16.10 Гомоклиническая бифуркация рождения/исчезновения цикла 450
17. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС 451
17.1 Хаос статистический и динамический 451
17.2 Предсказание статического поведения системы 460
17.3 Сценарии перехода к хаосу 463
17.4 Примеры систем с хаосом 469
18. ХАОС В ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ 474
18.1 Бифуркационные диаграммы 474
18.2 Лестница Ламерея 477
18.3 Отображение Бернулли 482
18.4 Треугольное отображение 488
18.5 Отображение «тент» 489
18.6 Канторов репеллер 494
18.7 Детерминированная диффузия 495
19. ХАОС В ЛОГИСТИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ 498
19.1 Переход к хаосу через удвоение периода 498
19.2 Логистическое уравнение 499
19.3 Дискретное логистическое уравнение 500
19.4 Логистическое отображение 501
19.5 Бифуркационная диаграмма логистического отображения 516
19.6 Цикл периода 3 519
19.7 Фазовые диаграммы логистического отображения 521
19.8 Аттракторы и фракталы в логистическом отображении 522
20. ХАОС В НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ 526
20.1 Отображение $x_{n+1}=C+x_n^2$. 526
20.2 Отображение $x_{n+1}=a-x_n^2$. 531
20.3 Подобие окон периодической динамики 534
20.4 Порядок Шарковского 535
20.5 Универсальность Фейгенбаума 536
20.6 Устойчивость циклов одномерных отображений 540
20.7 Топологическая энтропия 541
20.8 Синус-отображение 542
20.8 Хаос в кубических одномерных отображениях 547
21. ХАОС В НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ 557

21.1 Отображение Эно (*Henon map*) 557
21.2 Отображение подковы и отображение пекаря 567
21.3 Отображение «кот Арнольда» (*Arnold's cat map*) 572
21.4 Отображение Икеды (*Ikeda map*) 579
22. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ АТТРАКТОРЫ 586
22.1 Хаос в консервативных и диссипативных системах 586
22.2 Регулярные и хаотические аттракторы 589
22.3 Квазиаттракторы 595
22.4 Хаотически аттракторы 596
22.5 Негиперболические хаотические аттракторы 598
22.6 Фрактальные аттракторы 600
22.7 Характеристика нерегулярных аттракторов 603
22.8 Странные нехаотические аттракторы 607
22.9 Сингулярные аттракторы 609
22.10 Многомерные нерегулярные аттракторы 613
22.11 Дикие аттракторы 613

Моим родителям:
Бекману Николаю Николаевичу
Бекман Валентине Аркадьевне

От автора

"Мир беспорядочно усеян упорядоченными формами. Таковы кристаллы, цветы и листья, разнообразные узоры из полос и пятен на мехах, крыльях и чешуе животных, следы ветра на песке и воде и т. д." – писал французский поэт и философ Поль Валери. Это, конечно, верно. Но реальность к этому не сводится. Мир также упорядоченно усеян беспорядочными формами. Хуже того – он же беспорядочно усеян беспорядочными формами. В мире нет абсолютного хаоса, как нет и абсолютного порядка. Где-то разупорядоченный порядок, где-то в той или иной степени упорядоченный хаос. В сложной системе одновременно присутствуют компоненты с разными типами порядка и разными типами беспорядка: с точки зрения частично организованного хаоса компонентов системы различаются как качественно, так и количественно. Вклады их в структуру варьируются в широком интервале. Не только в статике, но и в динамике, при эволюционном или катастрофическом переходе от одной структуры к другой. В процессах превращений имеют место переходы порядок 1 → порядок 2, порядок → беспорядок, беспорядок → порядок, беспорядок 1 → беспорядок 2. Именно соотношение порядок-беспорядок ответственно за устойчивость системы, за возможность и направление перехода из одного состояния в другое, за организацию и самоорганизацию.

В мире царствует монархоанархизм – анархия обеспечивает свободу движения и развития, а монарх (властелин, герой, природная сила) управляет порядком, гарантируя обществу свободу, степень анархии, необходимую ему для комфортного существования и развития.

Эти идеи нужно включить в систему образования. Оказалось, что кроме меня некому.

Я окончил Химический факультет МГУ, кафедру радиохимии. Докторские по химии защитил две: одну по радиохимии, другую по физической химии, профессор по званию – ядерная физика и физика элементарных частиц, руковожу я лабораторией экологической радиохимии. Эти обстоятельства существенно повлияли на выбор тематики моих лекций, учебников и монографий. Основных тем лекций которые я читал 50 лет в МГУ, в четырёх вузах Москвы и четырёх университетах за границей, было несколько: радиохимия, ядерная индустрия и медицина, диффузия, миграция и массоперенос, диффузионное материаловедение и экология (включая радиоэкологию). Первоначально это были совершенно разные курсы, читаемые в разных организациях и разным контингентам слушателей. Их можно найти на сайтах: http://profbeckman.narod.ru, http://becuniver.ucoz.ru и http://beckman4.wixsite.com/igor

Однако постепенно в моём сознании разные курсы начали сливаться. Сама собой возникла междисциплинарная тематика, которою я представлял уже не в прямом общении со студентами-аспирантами-докторантами, а основав в Интернете Междисциплинарный университет Бекмана – дистанционное образование по междисциплинарным направлениям (http://profbeckman.narod.ru). Эта тематика в первую очередь касалась эволюции хорошо упорядоченных, частично разупорядоченных и полностью хаотичных структур, переходам типа порядок-беспорядок-порядок-..., происходящим по внутренним причинам, или под влиянием внешних воздействий.

Попытки ввести подобную тематику в традиционные курсы (термодинамика и кинетика, информация, синергетика и т.п. оказались неэффективными, тем более, что междисциплинарность такого направления начала быстро разрастаться, охватывая всё большее число областей, причём как естественных, так и гуманитарных.

Легко убедиться, что понятия: хаос, беспорядок, непорядок, порядок принизывают живую и неживую материю. Они царствуют в физике, химии, биологии, медицине, технике, астрономии, в экономике, политике, социологии, юриспруденции, религии...

Как сказал тот же Поль Валери:

"Две опасности угрожают миру: порядок и беспорядок".

Опасности надо знать в лицо. Возникла необходимость в создании науки, занимающихся как устойчивыми состояниями (структурами) систем, так и их превращениями, переходами, сопровождающимися изменениями вида и степени упорядочения. Оно и было создано.

Мной и для меня.

Естественно, это направление научной мысли надо было как-то озаглавить. Например, "Хаосметрика", "Порядковедение" и т.п. Такие названия новой науки, конечно, неудачны, и к тому же не приспособлены к международному общению. Лучше заимствовать что-то из греческого языка, латыни, на худой конец – из английского. "Хаоснетика" (в стиле - кибернетика, синергетика) или, скажем "Хаосология" уже лучше. Но я обратился к немецкому, поскольку порядок важнее беспорядка, а для меня порядок – это *Ordnung* и только *Ordnung*.

Я родился через две недели после нападения Германии на Россию. Немцы несли нам Порядок, т.е. смерть, ибо мы можем существовать только в бардаке. Не суждена нам воля-вольная, но и порядок нам не нужен. (Вообще-то нужен, но – небольшой и желательно для других). С детства слышал угрозы наступающих оккупантов: *Ordnung muss sein* (должен быть порядок), *Ordnung, Ordnung über alles alles* (порядок, везде), *Ordnung ist das halbe Leben* (порядок – половина жизни, порядок – душа всякого дела), *Ordnung, Ordnung, liebe sie, sie erspart dir Zeit und Müh* (люби порядок, он сбережёт твоё время и твои силы. Порядок время бережёт), *in Ordnung* (в порядке) и т.д. и т.п. Спасало то, что всегда знал: немец (да и никто другой) нас не возьмёт:

Послушайте, ребята,

Что вам расскажет дед.

Земля наша богата,

Порядка в ней лишь нет.

Не было, нет, и Бог даст – не будет.

Впрочем, и полного беспорядка нет, и, похоже, не будет. Беспорядок с некоторым порядком или порядок с заметной долей беспорядка нас вполне устроит.

В конце концов, все российские революции это не переход одного типа порядка в другой, а смена одного типа (и степени) бардака на другой.

Вот это обстоятельство и следует зафиксировать в названии новой науки.

Я назвал её ОРДНУНГНЕТИКА. Её цель – через анализ и управление достижение оптимального для конкретной ситуации случайного или динамического хаоса, а задачи – создание неупорядоченного мира, комфортного мне, моей семье, государству, нашей цивилизации и всей Вселенной.

Орднунг, конечно орднунг!

Но без фанатизма...



Наука "орднунгнетика" имеет глобальный характер: супернаука, сверхнаука, меганаука, метанаука или что-то в этом роде. К сожалению, многие из этих терминов уже

заняты: **супернаука** – это почему-то нанотехнология (технология никогда не была и никогда не будет наукой!), или – глобальная экология (некогда модная, но теперь погибшая наука), **сверхнаука** – наука всех наук – это философия (только никем, кроме самих философов, таковой не признана), на звание сверхнауки одно время претендовала синергетика, но её скинули с пьедестала (обозвав по дороге лженаукой), **меганаука** сначала почему-то означала большой бизнес, требующий огромных затрат, потом к ней отнесли проекты создания исследовательских установок, финансирование создания и эксплуатации которых выходит за рамки возможностей отдельных государств (какое отношение установки имеют к науке?! Мне для занятий наукой вполне достаточно дивана или какого иного ложа), наконец, оказалось, что меганаука – это интерактивные развлекательные и познавательные шоу-программы для детей от 5 до 12 лет, **метанаука** универсальная наука; наука, претендующая на обоснование и изучение различных наук на основе особого, общего для них метаязыка.

Это всё – личные размышления, а нужно выходить в общество, кому-то что-то преподавать, концентрируя размытые по разным предметам идеи порядка-беспорядка в единый курс. Но ни в Минобразовании, ни в ВАКе такой специальности, как Орднунгнетика нет, ни один ВУЗ спецов по бардаку не готовит. А зря, в России есть, где развернуться! Единственно, что у нас подходит по названию к данной тематике – это "Нелинейная динамика", а на Западе – "Сложные системы". Чтобы как-то потрафить чиновникам и народу я назвал свой курс лекций и учебник "Нелинейная динамика сложных систем". Возможно добавлю "теория и практика" или "в естественных и гуманитарных науках". На самом деле речь идёт о статике и динамике, линейной и нелинейной, открытых и закрытых, простых и сложных системах, упорядоченных и хаотичных, равновесных и неравновесных, стационарных и нестационарных, претерпевающих любые трансформации (монотонная эволюция, бифуркации и катастрофы). Короче – обо всех известных миру структурах и системах, и о всех процессах, какие только можно себе представить. В название всё не включишь.

Поэтому: "Эволюция систем".

Метанаука такая.

P.S. ***Предупреждение!*** *Представленный на сайте материал – первый вариант текста, не отредактированный и не оконченный. Относиться к нему нужно осторожно: возможны опечатки, неточности формулировок, некорректные заимствования и прямые ошибки. В педагогических целях его использовать нельзя. Ждите, пока текст будет доведён до кондиции.*

Замечания и предложения приветствуются.

Вы думаете, всё так просто?
Да, всё просто. Но совсем не так.
А. Эйнштейн

ПРЕДИСЛОВИЕ

Научное направление под условным названием "Нелинейная динамика сложных систем" (или "Эволюция систем" или "Орднунгнетика") всё шире внедряется как в естественные, так и гуманитарные науки, и служит базой новых технологий. Возникла необходимость подготовки специалистов по данной метанауке. Предлагаемый учебник имеет целью ознакомление студентов с теоретическим описанием динамики простых и сложных, линейных и нелинейных систем, закрытых и открытых, равновесных и неравновесных, стационарных и нестационарных процессов, монотонных изменений, бифуркаций или катастроф, и способам применения математического аппарата нелинейной динамики для решения прикладных задач в термодинамике, синергетике, информатике, физике и химии твёрдого тела, диффузионной кинетики, материаловедения, метеорологии, экологии, геологии, биологии, медицине, экономики и обществоведения, а также химической технологии и ядерной индустрии. Последовательно изложены все основные компоненты нелинейной динамики: теория устойчивости, теория динамического хаоса, эргодическая теория и теория интегрированных систем. Рассмотрены особенности использования обыкновенных дифференциальных уравнений, отображений и теории случайных процессов для описания различных явлений неравновесной динамики. Приведены способы описания сложных систем, переходов типа порядок↔беспорядок, процессам самоорганизации и автоволновым колебаниям. Основное внимание уделено перспективам совмещения в рамках одного методического подхода различных способов диагностики разупорядоченных структур: видов энтропии, элементов геометрии фракталов, статистических распределений Леви-Парето и дифференциальных уравнений с целыми и дробными производными.

Сразу же отметим, что некоторые главы в учебнике носят вспомогательный характер. Это глава, посвящённая геометрии фракталов, глава по теории катастроф, глава по степенным законам в теории вероятности и глава по дифференциальным уравнениям с дробными частными производными. Сюда же можно отнести некоторые тексты по обыкновенным дифференциальным уравнениям, отображениям, фазовым пространствам и фазовым траекториям, аттракторам и репеллерам, бифуркациям, математической статистике, классической термодинамике. Предполагается, что с подобным материалом читатель был достаточно хорошо знаком ещё до того, как взял в руки этот учебник. Здесь они приведены лишь как напоминание о частично забытых сведениях и для уточнения формулировок.

На первом этапе учебник знакомит читателя с простыми и сложными, линейными и нелинейными, гамильтоновыми и консервативными системами, с порядком, непорядком и беспорядком в их структуре, со статистическим и динамическим (детерминированным) хаосом, с методами определения степени разупорядочения структуры, со сложными процессами в простых системах и с ещё более сложными процессами в сложных системах.

Далее приводятся более-менее известные сведения по равновесной и неравновесной, линейной и нелинейной, стационарной и нестационарной термодинамике закрытых и открытых систем, феноменологический и статистический подходы к описанию процессов в термодинамических системах. Основные принципы термодинамики трактуются как основа дальнейшего развития линейной и нелинейной динамики. К этой же части учебника можно отнести главу, посвящённую энтропии, точнее – нескольким именным энтропиям и их использованию в химической термодинамике, в статистической физике, математике, квантовой механике и т.п. с целью контроля степени разупорядоточения системы. Здесь же обсуждены перспективы внедрения в математика понятий отрицательная энтропия, антиэнтропии и экстропии.

Сравнительная эффективность двух методов оценки степени упорядоченности системы (энтропия и фракталы) иллюстрируется на примере таких научных направлений, как информатика, синергетика и кибернетика. Проводится сопоставление законов термодинамики с законами эволюции живых систем. Синергетика в данном учебнике рассматривается как наука о самоорганизации, возникающей в некоторых типах сложных (диссипативных, динамических) системах. Обсуждается связь синергетики с информатикой и значение в теории самоорганизации таких понятий, как энтропия, фракталы и хаос. Продемонстрированы особенности использования идей синергетики в естественных и гуманитарных науках.

Основная часть книги посвящена теории динамических систем и процессов (как линейных, так и нелинейных). Приводится техника описания изменяющихся во времени систем: обыкновенные дифференциальные уравнения, отображения, фазовые пространства и портреты, аттракторы (регулярные, сингулярные и странные) и репеллеры, локальные и нелокальные бифуркации диссипативных систем, катастрофы, методы исследования устойчивости структур и способы моделирования процессов нелинейной динамики. Здесь же вводятся понятия статистического и динамического (детерминированного) и квантового хаоса и даются их основные характеристики.

Теория динамических систем нашла применение в физической химии (термодинамике, кинетике, диффузии, адсорбции, катализе, газопроницаемости, перколяции и фильтрации пористых сред, материаловедении, в физике и химии твёрдого тела, в том числе – полимеров). Математический аппарат нелинейной динамики оказался полезен в характеристике структур Тьюринга и ячеек Бенара, и в описании процессов реакционной диффузии, автоволновых колебаний, турбулентности, колебательных химических реакций. В подобных системах для интерпретации процессов перехода порядок↔беспорядок помимо энтропии и фракталов привлекаются степенные законы, различные статистики Леви-Парето, дифференциальные уравнения с целыми и дробными частными производными. Приведены примеры некоторых практически важных ситуаций.

Заключительная глава учебника касается анализа временных рядов (гауссовский, марковский и винеровский процессы), в частности интерпретации эффекта перемежаемости, и участия в этом анализе некоторых аспектов геометрии фракталов. Представлены способы математического описания шумов: белого, красного (коричневого, броуновского), синего (голубого), фиолетового, оранжевого, зелёного, розового (фликкер, мерцательный), серого и чёрного.

Обсуждены перспективы развития теории и приложений нелинейной динамики в естественных и гуманитарных науках.

Учебник составлен на основе курсов лекций, читаемых автором в течение нескольких лет в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, и в некоторых других отечественных и зарубежных университетах для студентов и аспирантов.

Автор выражает признательность Э.М. Бекман и И.М. Бунцевой за постоянную помощь и поддержку.

Только дурак нуждается в порядке
– гений господствует над хаосом.

Если беспорядок на столе
означает беспорядок в голове,
то что тогда означает пустой стол?
А.Эйнштейн

ВВЕДЕНИЕ

Как ни странно, но наука развивается. Медленно, конечно, но всё же... На границе 2-го и 3-го тысячелетий ей было предсказали скорую смерть, но, похоже, погорячились.

Одно из перспективных направлений развития науки – разработка идей порядка, беспорядка и непорядка, хаоса, частичного порядка и частичного беспорядка, случайного или динамического (детерминированного) хаоса. Не менее важно исследование и управление трансформациями любых систем и структур при монотонной или катастрофической эволюции.

В сферу химии это направление внедрялось в рамках термодинамики, диффузионной кинетики, квантовой механики, химии твёрдого тела и химического материаловедения.

В настоящее время химическое материаловедение нуждается в описании структурных переходов (фазовых, изофазовых и др.) в наноматериалах, в аморфных и стеклообразных полность разупорядоченных телах (неорганические стёкла, полимеры, металлические стёкла, спиновые стёкла, керамика). Если раньше усилия были сосредоточены на описании переходов порядок-беспорядок (например, превращение кристалла с объёмоцентрированной решёткой в кристалл с гранецентрированной решёткой, или превращения кристалл-аморфное тело и обратно (аморфизация твёрдого тела, кристаллизация стекла и т.п.), то теперь в исследования вовлечены переходы типа аморфное состояние 1 $\rightarrow$ аморфное состояние 2 $\rightarrow$ аморфное состояние 3. Трудности исследования таких состояний заключаются в том, что традиционные методы исследования твёрдых тел, такие, как рентгеноструктурный анализ и электронная микроскопия оказываются бесполезными. Исследования ведутся прямыми методами дефектоскопии, например, методом диффузионно-структурного анализа.

Понятие частично упорядоченных систем широко используется в таких науках, как информатика, физическая статистика, миграция в природных и техногенных средах, транспортные процессы в живых организмах, медицинская физика, космофизика, геология, синергетика, кибернетика, социология, психология, политология и др. Оно применимо к простым системам, которых можно разделить на отдельные компоненты, но особенно перспективно в приложении к сложным системам, принципиально неразложимым на элементы.

В последнее время был достигнут некоторый прогресс в описании неупорядоченных систем и структур. В сфере интересов автора (диффузионная кинетика, химия твёрдого тела, материаловедение) это особенно заметно. В физической химии, например, возникла некая эйфория, появились даже публикации под бодрым названием: "Революция в термодинамике".

Описание превращений порядок$\leftrightarrow$беспорядок ведут с использованием таких понятий, как энтропия (термодинамическая энтропия Клаузиуса-Больцмана-Планка-Гиббса, информационная энтропия Шеннона, метрическая энтропия Колмогорова-Синая, эпсилон-энтропия Колмогорова, квантовая энтропия фон Неймана, энтропия Цаллиса, энтропия Реньи и другие), геометрия фракталов, распределения Леви-Парето, статистика аномальной диффузии, а также дифференциальные уравнения с дробными частными производными, зависящими от величины показателей фрактала. Важным достижением

явилось использование энтропии (расстояния) Кульбака-Лейблера для количественного описания (в рамках уравнений с пространственно дробными производными) непрерывного перехода от полуволнового уравнения в частных производных (полный порядок) к диффузионному уравнению (полный непорядок).

Насколько серьёзны достижения в исследовании плохоупорядоченных сред? Это – кратковременные успехи в локальных областях, или базовые принципы, которые требуют серьёзной модернизации учебников по физической химии, информатике и математической статистике? Объединятся ли эти прорывы в единый фронт? Возможно ли создание общего критерия частично упорядоченного хаоса, или мы так и будем пользоваться десятком критериев, каждый из которых справедлив только в какой-то своей области?

Накопленный теоретический материал позволяет говорить о возникновении новой науки – ордунгнетики, рассматривающей порядок в его развитии и/или разрушении. Экспериментальная проверка теорий осуществляется методами хауссометрии, позволяющими качественно и количественно диагностировать реальные системы в ходе их эволюции в пространстве и времени. Развитие ордунгнетики стимулируется и требованиями практической деятельности.

Термин "оргнунгнетика" не прижился, его вытеснила "нелинейная динамика", поглотившая неравновесную термодинамику, синергетику, кибернетику, теорию сложных систем и информатику. Теория нелинейной динамики включает все разделы современной математики. Нелинейная динамика в последнее время получила необычайно широкое применение для решения естественных и гуманитарных задач, в технике, промышленности, биологии и даже в медицине.

Нелинейная динамика своими корнями уходит в классическую механику, базирующуюся на законах Ньютона. Классическая динамика противопоставляется кинематике и трактуется как – раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения. Она оперирует такими понятиями, как масса, сила, импульс, момент импульса, энергия. В результате применения методов динамики к изучению движения конкретных объектов возник ряд специальных дисциплин: небесная механика, баллистика, динамика корабля, самолёта и т.п. С помощью законов динамики изучается также движение сплошной среды, т.е. упруго и пластически деформируемых тел, жидкостей и газов.

Постепенно термин "динамика" стали использовать для обозначения любых процессов, развивающихся во времени, зависимости от времени каких-то величин, не обязательно имея в виду конкретный механизм или причину этой зависимости. Сейчас под динамикой понимают состояние движения, ход развития, изменение какого-либо явления под влиянием действующих на него факторов. Динамика призвана найти закон, позволяющей по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени в некоторой точке пространства определить его будущее в любой последующий момент времени во всём рассматриваемом пространстве. Важным разделом динамики является системная динамика, направленная на изучение сложных систем. Это направление исследует поведение во времени и в зависимости от структуры элементов системы и взаимодействия между ними. В том числе: причинно-следственных связей, петель обратных связей, задержек реакции, влияния среды и других.

Динамика изучает системы, способные изменяться во времени. При этом под системой подразумевают любую совокупность взаимодействующих предметов любой природы, а под динамической системой – объект любой природы (физической, химической, биологической, социальной, экономической и т.д.), состояние которого может с течением времени изменяться (дискретно или непрерывно). Выделяют два класса динамических систем – консервативные (к ним относятся, например, механические колебательные системы в отсутствие трения) и диссипативные (устойчивые самоподдерживающиеся образования с характерными пространственно-временными

формами, возникающее в неравновесной открытой среде при условии рассеивания энергии, которая поступающей извне). Для диссипативных систем характерно то, что режим динамики, возникающий в системе, необычайно сильно зависит от начальных условий, проявляя апериодическое поведение, что делает невозможным предсказание её состояния в далёкой перспективе. Представленная самой себе система при больших временах не зависит от начального состояния (по крайней мере, при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах). Важной особенностью диссипативной системы является возможность возникновения в ней хаотической динамики (детерминированный хаос выступает как сверхсложная упорядоченность).

Изменение во времени может происходить эволюционно или революционно (катастрофически). В принципе, под эволюцией можно понимать рост, развитие, перемену, т.е. естественное изменение (обратимое или необратимое) живой и неживой системы или структуры с течением времени. Однако обычно под этим термином понимают постепенные количественные изменения, противопоставляя его развитию как качественному сдвигу, т.е. революции. Реальные системы изменяют свою структуру во времени путём чередования медленной и плавной эволюции с революционными (катастрофическими перерывами постепенности) изменениями, способными приводить как к усложнению (прогресс), так и упрощению (регресс) системы.

Такие эффекты как динамический хаос и феномен самопроизвольного нарушения симметрии с понижением её степени возникают в открытых нелинейных системах, т.е. в системах, которых протекают процессы описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями (обыкновенными или в частных производных).

Нелинейная динамика – научная дисциплина, изучающая общие закономерности нелинейных динамических систем и процессов. Обычно она изучает структуру и эволюцию сложных (т.е. не разлагаемых на отдельные составляющие) сложных систем, хотя естественно линейные и простые (разлагаемые на отдельные компоненты методами системного анализа) системы тоже находятся в сфере её интересов. Важность нелинейной механики заключается в том, что Мир в основном нелинеен и процессы, происходящие в нём – нелинейны.

Многие свойства нелинейных систем существенно отличаются от свойств линейной: нелинейная система не обладает свойствами суперпозиции (например, частота выходного сигнала зависит от его амплитуды), которая в линейной ситуации позволяет физику конструировать любое решение из определенного набора частных решений; обычно реализуется не один а множество различных режимов функционирования, которые зависят от начального состояния, параметров системы и внешних воздействий; возможны детерминированные процессы, которые внешне выглядят, как случайный процесс; при изменении управляющих параметров происходит смена режимов функционирования системы, причём система демонстрируют бифуркации и катастрофы (один режим теряет устойчивость, гибнет, ему на смену приходит другой и т.д.). Важным нелинейным эффектом является синхронизация колебаний. возможность улучшать характеристики или демонстрировать принципиально иные качества под воздействием шума.

Химические реакции с нелинейным кинетическим поведением могут порождать набор пространственно-временных явлений. К ним относятся периодические и хаотические изменения концентрации, бегущие волны химической реактивности и стационарные пространственные (Тьюринговые) закономерности. Некоторые нелинейные динамические явления в химических системах служат аналогами поведения, обнаруженного в биологических системах.

Нелинейная динамика аккумулирует достижения трёх наук: нелинейной термодинамики необратимых процессов, отвечающей на вопрос почему в открытых системах возникают диссипативные структуры; нелинейной динамики, объясняющей как именно возникают эти диссипативные структуры и по каким законам изменяются во

времени и пространстве; и синергетики – науки о процессах самоорганизации, но движется дальше поскольку занимается любыми системами (не только термодинамическими, характеризующимися большим числом частиц) и не только процессами самоорганизации, а процессами организации по целенаправленным действием внешних сил, как совместных, так и индивидуальных.

К математическому аппарату нелинейной динамики следует отнести: качественную теорию и бифуркационный анализ обыкновенных дифференциальных уравнений (непрерывное время) и дискретных отображений (дискретное время, итерированные карты, разностные уравнения), теорию фрактальной геометрии, математический анализ дробного исчисления, анализ временных рядов, (например, на основе вейвлет-анализа, на основе фликкер-шумовой спектроскопии и т.д.), теорию марковских цепей, теорию клеточных автоматов, статистику распределений с экспоненциальными хвостами, некоторые варианты эргодической теории и теории групп. Наглядность расчётов обеспечивается фазовых портретов и аттракторов и бифуркационными диаграммами. К сожалению нелинейные уравнения слишком сложны для аналитических исследований и основные результаты в этой области получены при численных расчётов на компьютере.

В предлагаемом учебнике будут рассматриваться простые и сложные, открытые и закрытые, равновесные и неравновесные системы, находящиеся в стационарном или нестационарном состоянии, линейные или нелинейные процессы, процессы самообразования и процессы идущие при внешних случайных и целенаправленных воздействиях, обратимые и необратимые, эволюционные и катастрофические.

Учебник, видимо, целесообразно было бы назвать "Линейная и нелинейная статика и динамика простых и сложных систем", но ради краткости и в угоду современной моды он назван просто "Нелинейная динамика".

1. СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ

Нелинейная динамика существенное внимание уделяет способам описания различного рода структур и систем, их эволюции (монотонной и/или катастрофической) во времени и пространстве, а также процессам, в которых участвуют сложные структуры.

Для большей однозначности понимания дальнейшего теста дадим определения основным понятиям.

Структура — определённая взаимосвязь, взаиморасположение составных частей, строение, устройство чего-либо. Это тип организации элементов и совокупность связей между частями объекта.

В философии: структура – совокупность связей между частями объекта, в физике: тонкая структура – группа близких уровней энергии и спектральных линий, различающихся из-за спин-орбитального взаимодействия, сверхтонкая структура – группа близких уровней энергии и спектральных линий, различающихся из-за взаимодействия магнитных моментов электронов и ядер, в математике – какой-либо новый объект, вводимый на некотором множестве, свойство элементов множества, в информатике – тип данных: запись, состоящая из нескольких переменных (или констант) разного типа, структура данных – программная единица, позволяющая хранить и обрабатывать множество однотипных и/или логически связанных данных в вычислительной технике, в материаловедении – материал или предмет, обладающий структурой в основном значении, т.е. состоящий из областей или слоёв разных веществ, расположенных специальным образом, в науках о Земле структура в петрографии – набор признаков горной породы, включающая в себя степень кристалличности, размеры и формы кристаллов, их взаимоотношения с другими кристаллами и вулканическим стеклом, а также внешними особенностями отдельных минеральных зёрен и их агрегатов, структура в структурной геологии и тектонике – пространственная форма залегания горных пород.

Система – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство. Система состоит из нескольких объектов одинаковой или разной природы, находящихся во взаимной связи и условно обособленных от окружающей среды. Свойства системы кардинально отличаются от функций и качеств составляющих её частей. Связи между элементами системы и упорядоченная совокупность ее функций составляют организацию системы.

Термин система употребляется, когда нужно подчеркнуть, что исследуемый объект является большим, сложным, не полностью сразу понятным, при этом целым, единым. В отличие от понятий «множество», «совокупность» понятие системы подчёркивает упорядоченность, целостность, наличие закономерностей построения, функционирования и развития. Система может быть либо высокоорганизованной (обладать развитой и сложной структурой), либо менее организованной (простая структура), либо хаотической (её элементы распределены случайно и, в среднем, однородно).

Система – совокупность элементов, порождающих целое; обособленная часть, фрагмент мира, вселенной, обладающий эмерджентностью относительной самодостаточностью.

Эмерджентность – наличие у какой-либо системы особых свойств, не присущих её элементам; несводимость свойств системы к сумме свойств её компонентов. Примеры: одно дерево — не лес, скопление отдельных клеток — не организм. Качества, присущие только самой системе и не присущие ни одной из её частей называются эмерджентными свойствами.

Для неё характерен закон сохранения: материя и энергия не возникают ниоткуда и не пропадают никуда. На создание системы затрачивается энергия, при разрушении системы выделяется энергия; на преобразование системы из простой в сложную затрачивается энергия; при упрощении системы выделяется энергия. Внутренняя энергия системы – энергия связи между элементами системы.

Системы классифицируют по их отношению к окружающей среде; по происхождению системы (элементов, связей, подсистем); по описанию переменных системы: по типу описания закона функционирования системы, по способу управления системой.

Известно много типов систем.

Автономная динамическая система – система, не зависящая явным образом от времени.

Автоколебательная система – динамическая система, преобразующая энергию источника в энергию незатухающих колебаний. Здесь основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния. Такие системы принципиально неконсервативны и нелинейны.

Адаптивная система (самоприспосабливающаяся система) – система, автоматически изменяющая данные алгоритма своего функционирования **и (иногда) свою структуру с целью сохранения или достижения оптимального состояния при изменении внешних условий; система, способная к адаптации. Различают пассивную адаптацию (реагирование системы на изменение окружающей среды) и активную (воздействие системы на окружающую среду).**

Адиабатически изолированная система (адиобатная система) – термодинамическая система, которая не обменивается с окружающей средой энергией в форме теплоты. Изменение внутренней энергии такой системы равно производимой над ней работе. Всякий процесс в адиабатически изолированной системе называется адиабатическим процессом. На практике относительная адиабатическая изоляция достигается заключением системы в адиабатическую оболочку (например, сосуд Дьюара). Реальный процесс может также считаться адиабатическим, если он протекает достаточно быстро, так, что за короткое время теплообмен с окружающими телами пренебрежимо мал.

Большая система – система, исследование или моделирование которой затруднено из-за большой размерности (множество состояний системы имеет большую размерность).

Вероятностная (стохастическая) система – система, в которой связи между элементами и событиями носят неоднозначный характер; система, выходы которой случайным образом, а не однозначно зависят от входов; связи между элементами носят вероятностный характер и существуют в виде вероятностных закономерностей. Это понятие противопоставляется понятию, характерному, например, для техники: «детерминированная», вернее, «строго (или жестко) детерминированная система». Детерминированные системы являются частным случаем вероятностных, причём вероятность является стопроцентной.

Гамильтонова система – частный случай динамической системы, описывающей физические процессы без диссипации. В ней силы не зависят от скорости. В механике гамильтонова система описывают движение при голономных (т.е. механических, налагающих ограничения только на положения или перемещения точек и тел системы) связях и силах, имеющих потенциал.

Гетерогенная система – неоднородная система, состоящая из однородных частей (фаз), разделённых поверхностью раздела. Однородные части (фазы) могут отличаться друг от друга по составу и свойствам. Число веществ (компонентов), термодинамических фаз и степеней свободы связаны правилом фаз. Фазы гетерогенной системы можно отделить друг от друга механическими методами. Примеры: жидкость — насыщенный пар; насыщенный раствор с осадком; многие сплавы.

Гомогенная система – однородная система, химический состав и физические свойства которой во всех частях одинаковы или меняются непрерывно (между частями системы нет поверхностей раздела). В гомогенной системе из двух и более химических компонентов каждый компонент распределен в массе другого в виде молекул, атомов, ионов. Составные части гомогенной системы нельзя отделить друг от друга механическим путём.

Детерминированная система – система, в которой связи между элементами и событиями носят однозначный, предопределенный характер.

Динамическая система –математическая абстракция, предназначенная для описания и изучения систем, эволюционирующих с течением времени; множество элементов, для

которого задана функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве каждого элемента системы, что позволяет изучать и описывать эволюцию систем во времени. Это многокомпонентная система, характер которой непрерывно меняется (эволюция во времени); при этом переход в новое состояние не может совершаться мгновенно, а требует некоторого времени; любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы. Состояние динамической системы в любой момент времени описывается множеством вещественных чисел (или векторов), соответствующим определённой точке в пространстве состояний. Эволюция динамической системы определяется детерминированной функцией, т. е. через заданный интервал времени система примет конкретное состояние, зависящее от текущего.

Динамическая система сложная – развивающиеся во времени и в пространстве целостные объекты, состоящие из большого числа элементов и связей и обладающие свойствами, которые отсутствуют у элементов и связей, их образующих.

Диссипативная система (структура) – открытая система, оперирующая вдали от термического равновесия в нелинейной области при критических значениях параметров системы. Это устойчивое состояние, возникающее в неравновесной среде при условии диссипации (рассеивания) энергии, которая поступает извне. Диссипативная система – стационарная открытая система или неравновесная упорядоченная структура, возникающая в результате самоорганизации.

Закрытая система – термодинамическая система, которая может обмениваться с окружающей средой теплом и энергией, но не веществом (массой), в отличие от изолированной системы, которая не может обмениваться с окружающей средой ничем, и открытой системы, которая обменивается с другими телами как теплом и энергией, так и веществом. Если закрытая система проста, т. е. содержит только один тип элементов, то количество этих элементов является постоянной величиной. Однако в системах, в которых идут химические реакции, могут существовать самые разные виды молекул, образующие и исчезающие в процессе реакции. Система закрыта, если общее количество каждых элементарных атомов сохраняется, независимо от того, частью какого типа молекул они являются. Функционирование закрытых систем определяется внутренней информацией.

Замкнутая (изолированная) система – система, для которой имеет место закон сохранения количества движения. Если внутренние силы не являются потенциальными, то замкнутая система не является консервативной. Это термодинамическая система, которая не обменивается с окружающей средой ни веществом, ни энергией. Изолированная система постепенно приходит в состояние термодинамического равновесия, из которого самопроизвольно выйти не может (нулевое начало термодинамики).

Изолированная система – система, не обменивающаяся с окружающей средой ни энергетически, ни материально.

Консервативная система – система с неизменным во времени запасом энергии; физическая система, работа консервативных сил которой равна нулю и для которой имеет место закон сохранения механической энергии, т. е. сумма кинетической энергии и потенциальной энергии системы постоянна. Объём в фазовом пространстве постоянен. Простейший случаем консервативной системы является гамильтонова система Примерами консервативной системы служит солнечная система и колеблющийся маятник (если пренебречь трением в оси подвеса и сопротивлением воздуха). В земных условиях, где неизбежно наличие сил сопротивления (трения, сопротивления среды и др.), вызывающих убывание механической энергии и переход её в другие формы энергии, например в тепло, консервативная система осуществляются лишь грубо приближённо. Например, приближённо можно считать консервативной системой колеблющийся маятник, если пренебречь трением в оси подвеса и сопротивлением воздуха. Консервативная система может не быть замкнутой, т. е. её движение может происходить в потенциальном силовом поле, образованном телами, не входящими в консервативную систему (например, колебания маятника в поле тяготения Земли).

Консервативная (потенциальная) сила – сила, действующая в потенциальных полях. Работа консервативной силы на замкнутом пути равна нулю, т.е. она не зависит от вида траектории, точки приложения этих сил и закона их движения, и определяется только начальным и конечным положением этой точки. Примеры консервативных сил – сила тяжести, сила упругости.

Линейная система – любая система, для которой отклик системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие. В математической модели линейной системы это означает, что оператор преобразования "вход-выход" линеен. Иногда линейное свойство системы называют принципом суперпозиции. Условия линейности: гомогенность – при изменении амплитуды входного сигнала в *k* раз также в *k* раз изменяется и амплитуда выходного сигнала; аддитивность – при суммировании входных сигналов результирующий сигнал на выходе будет равен сумме реакций от исходных сигналов; *инвариантность* – когда смещение входного сигнала во времени вызывает аналогичное смещение выходного сигнала; статическая линейность – когда основные законы в системе описываются линейными уравнениями; гармоническая верность – если на вход системы подать синусоидальный сигнал, то на выходе будет сигнал той же частоты. Свойства линейных систем: порядок установки линейных систем не влияет на результирующий сигнал; любая сложная система будет линейна, если составлена из линейных систем и блоков суммирования; перемножение сигнала на константу является линейной операцией, а перемножение двух сигналов – нелинейной.

Линейная динамическая система – система, эволюция которой во времени описывается линейным дифференциальным уравнением (для систем с дискретным временем -линейным разностным уравнением).

Неизолированная система – система, обменивающаяся с окружающей средой веществом и энергией.

Неконсервативная система – динамическая система с изменяющимся во времени запасом энергии называются неконсервативными.

Неконсервативная (диссипативная) сила: работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую. Такие силы зависят от вектора скорости (от его модуля или направления). Работа таких сил может приводить к выделению тепла (диссипации энергии). Типичные неконсервативные силы – силы трения и сопротивления.

Нелинейная система – динамическая система, в которой протекают процессы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями. Это – динамическая система, изменения на выходе которой не пропорциональны изменениям на входе; протекающие в такой системе процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (уравнение содержит член с порядком 2 и выше); меняет свои свойства под действием проходящих через них потоков (вещества, энергии, информации): не действует принцип суперпозиции (наложения), т. е. 2+2 не обязательно даёт 4. В отличие от линейной системы не обладает свойствами суперпозиции, частота выходного сигнала зависит от его амплитуды и др. Нелинейные системы могут казаться хаотичными, непредсказуемыми или противоречивыми, в отличие от простых линейных систем.

Неравновесная система – система, находящаяся далеко от равновесия (диссипативная система). Обычно находится в метастабильном состоянии, т.е. в состоянии длительного неустойчивого равновесия. Для неравновесных систем (открытых и закрытых) характерны неравновесные состояния, параметры и свойства которых являются функциями времени и/или пространства. В общем случае неравновесную систему нельзя охарактеризовать едиными значениями температуры и давления.

Открытая система – система, которая обменивается веществом, энергией и информацией с внешним по отношению к системе миром. В открытой системе внутренние процессы существенно зависят от условий среды, и она сами оказывает на ее элементы значительное влияние. Открытая система в равновесной статистической механике — это механическая система, число частиц в которой не остаётся постоянным. При определенных условиях открытая система может достигать стационарного состояния, в котором её структура

остаётся постоянной, в то время как система осуществляет со средой обмен веществом и/или энергией. Открытые системы в процессе взаимодействия со средой могут достигать состояния, определяющегося лишь собственной структурой системы и не зависящего от начального состояния среды. Скорость производства энтропии в открытой системе при постоянной температуре и давлении пропорциональна скорости уменьшения термодинамического потенциала Гиббса системы. В открытых системах, способных обмениваться с окружающей средой веществом, энергией или информацией идут процессы самоорганизации. Открытая система не может быть равновесной, потому её функционирование требует непрерывного поступления энергии и вещества из внешней среды, вследствие чего неравновесие в системе усиливается. В конечном итоге прежняя взаимосвязь между элементами системы, т. е. её прежняя структура, разрушается. Между элементами системы возникают новые согласованные связи.

Простая система – система, состоящая из небольшого числа элементов, не имеющая разветвленной структуры (нельзя выделить иерархические уровни).

Равновесная система – система тел, находящихся в термодинамическом равновесии; все силы, влияющие на систему, сбалансированы, система не претерпевает никаких изменений (имеет место динамический порядок).

Размножающаяся система *(в настоящее время термин относят исключительно к биологическим системам, хотя в будущем, возможно, удастся его применить и к неорганическим системам)* – система, способная перерабатывать неорганическое и органическое вещество для биосинтеза биологических макромолекул, клеток, организмов. Математически такие системы описываются путём включения в дифференциальные уравнения автокаталитических членов, определяющих возможность роста, возможность неустойчивости стационарного состояния в локальных системах и неустойчивости гомогенного стационарного состояния в пространственно распределенных системах.

Распределённая система – система, в которой (в отличие от точечной), процессы в разных её точках протекают неодинаково. В такой системе состояние меняется в различных точках пространства, а между отдельными точками существуют диффузионные связи или потоки.

Самонастраивающаяся система – динамическая адаптивная система, в которой запоминание информации (накопление опыта) выражается в изменении тех или иных её параметров, существенных для целей системы.

Самоорганизующаяся система – кибернетическая (или динамическая) адаптивная система, в которой запоминание информации (накопление опыта) выражается в изменении структуры системы. Основные свойства самоорганизующихся систем – открытость, нелинейность, диссипативность (рассеивание свободной энергии).

Саморазвивающаяся система – динамическая (кибернетическая) система, самостоятельно выбирающая цели своего развития и критерии их достижения; изменяет свои параметры, структуру и другие характеристики в заданном направлении.

Сложная система – система, состоящая из множества взаимодействующих составляющих (подсистем), вследствие чего сложная система приобретает новые свойства, которые отсутствуют на подсистемном уровне и не могут быть сведены к свойствам подсистемного уровня.

Сложная система – это система с разветвленной структурой и значительным количеством взаимосвязанных и взаимодействующих элементов (подсистем). Ей не хватает ресурсов (главным образом, информационных) для эффективного описания (состояний, законов функционирования) и управления системой – определения, описания управляющих параметров или для принятия решений в таких системах (в таких системах всегда должна быть подсистема принятия решений).

Сложная система – система с разветвлённой структурой, состоящая из множества взаимодействующих составляющих (подсистем), вследствие чего сложная система приобретает новые свойства, которые отсутствуют на подсистемном уровне и не могут быть сведены к свойствам подсистемного уровня. Сложной системе не хватает ресурсов (например, информационных) для эффективного описания состояний и законов функционирования и управления системой – определения, описания управляющих

параметров или для принятия решений в таких системах. Сложной иногда считают систему, для которой по трём её видам описания нельзя выявить её траекторию, сущность, и поэтому необходимо ещё дополнительное интегральное описание.

Статическая система – система, находящаяся в равновесии покоя.

Стохастическая (вероятностная) система – система, структура и функции которой являются по своей сущности вероятностными. Любые реальные системы являются стохастическими системами. Абстрактные представления о стохастических системах могут быть выражены детеминисткими моделями и вероятностными моделями. Детерминистские модели - безусловный инструмент детерминисткой методологии. Стохастические модели - адекватный инструмент вероятностной методологии. Вероятностная методология также не исключает обоснованное использование детерминистских моделей.

Термодинамическая система – совокупность тел, способных энергетически взаимодействовать между собой и с другими телами и обмениваться веществом и энергией. Все тела вне указанной совокупности представляют собой внешнюю среду. Это – выделяемая (реально или мысленно) для изучения макроскопическая физическая система, состоящая из большого числа частиц и не требующая для своего описания привлечения микроскопических характеристик отдельных частиц.

Точечная система – система, в которой изменения переменных во времени происходят одинаково во всех точках пространства, занимаемого системой (обычно – гомогенной).

Устойчивая динамическая система – динамическая система, состояние которой полностью определяется начальными условиями и внешними воздействиями в процессе развития.

Физическая система – объект физических исследований, такое множество взаимосвязанных элементов, отделенных от окружающей среды, что взаимодействует с ней, как целое. При этом под элементами следует понимать физические тела или другие физические системы.

Хаотическая система (в нелинейной динамике) – нелинейная система, при определённых условиях проявляющая хаотическое поведение, кажущееся случайным, хотя модель, описывающая систему, является детерминированной. Примерами подобных систем являются атмосфера, турбулентные потоки, некоторые виды аритмий сердца, биологические популяции, общество. Хаотические системы делятся на диссипативные (устойчивое состояние, возникающее в неравновесной среде при условии диссипации (рассеивания) энергии, которая поступает извне) и консервативные (с сохранением энергии). Поскольку такие системы теряют энергию постоянно, их фазовое пространство, т.е. пространственная территория, где развивается система – трансформируется в определенное состояние – аттрактор системы.

Химическая система – совокупность реагирующих, взаимодействующих веществ.

Частично открытая система - система, обменивающаяся с внешней средой и энергией, и веществом, однако не все составляющие вещества принимают участие в материальном обмене (например, из-за наличия полупроницаемых перегородок).

Эргодическая динамическая система – система, в которой фазовые средние совпадают с временными (математическое ожидание по временным рядам совпадает с математическим ожиданием по пространственным): при достаточном времени наблюдения такие системы описываются статистическими методами. Например, температура газа – мера средней энергии молекулы, рыночная цена компании – мера производных функций от данных бухгалтерской отчётности. Для определения параметров системы можно долго наблюдать за поведением одного её элемента, а можно за очень короткое время рассмотреть все её элементы (или достаточно много элементов). В обоих случаях получатся одинаковые результаты, если система обладает свойством эргодичности.

Дадим теперь определения некоторым процессам, в которые имеют место в разного рода структурах.

Автоколебательный процесс – процесс незатухающих колебаний в диссипативной динамической системе с нелинейной обратной связью, поддерживающийся за счёт энергии

постоянного, т. е. непериодического внешнего воздействия. Автоколебания отличаются от вынужденных колебаний тем, что последние вызваны периодическим внешним воздействием и происходят с частотой этого воздействия, в то время как возникновение автоколебаний и их частота определяются внутренними свойствами самой автоколебательной системы.

Адиабатический процесс – термодинамический процесс в макроскопической системе, при котором система не обменивается теплотой с окружающим пространством. Частный случай политропного процесса, так как при нём теплоёмкость газа равна нулю и, следовательно, постоянна. Адиабатические процессы обратимы только тогда, когда в каждый момент времени система остаётся равновесной (например, изменение состояния происходит достаточно медленно) и изменения энтропии не происходит. Обратимый адиабатический процесс для идеального газа описывается уравнением Пуассона. Адиабатический процесс идёт без теплообмена (в материально- и теплоизолированных системах), поэтому при неизменной энтропии в системе (энтропия постоянна) это изоэнтропий процесс.

Бифуркационный процесс – процесс, включающий в себя хотя бы одно бифуркационное событие.

Векторные процессы – процессы диффузии, теплопроводности, взаимодействия между включением и несущей фазой.

Винеровский процесс – математическая модель броуновского движения частицы в жидкости с непрерывным временем; однородный гауссов процесс с независимыми приращениями. Описывает броуновское движение частицы, совершающей беспорядочные перемещения под влиянием ударов молекул жидкости. Дисперсия зависит от массы частицы и вязкости жидкости.

Гауссовский процесс – вещественный процесс, чьи конечномерные распределения гауссовские.

Диффузионный процесс – марковский процесс с непрерывным множеством состояний.

Изобарный процесс – процесс, происходящий при постоянном давлении в системе.

Изотермический процесс – процесс, при котором температура системы не изменяется.

Изохронный процесс – процесс, происходящий при постоянном объёме системы.

Инфинитезимальный процесс – процесс, в котором разница начальных и конечных значений параметров системы бесконечно мала.

Изоэнтропийный процесс – тепловой процесс, происходящий при постоянной энтропии. Из обратимых процессов изоэнтропийным является только обратимый адиабатический процесс (необратимый адиабатический процесс не может быть изоэнтропийным). Однако и при необратимом процессе энтропия системы может сохранять постоянное значение, если вся производимая энтропия сразу удаляется с помощью теплообмена.

Квазистатический процесс – процесс перехода термодинамической системы из одного равновесного состояния в другое, столь медленный, что все промежуточные состояния можно рассматривать как равновесные, т.е. характеризующиеся очень медленным (в пределе — бесконечно медленным) изменением термодинамических параметров состояния. Процесс в какой-то степени приближенный к стационарности. Реализуется, если характерное время установления равновесия в системе много меньше характерного времени изменения равновесных параметров системы, определяемых воздействием на систему.

Колебательный процесс – периодический или почти периодический процесс, который повторяется через одинаковые или почти одинаковые промежутки времени.

Кооперативный процесс – процесс в многочастичной системе, связанный с когерентным (согласованным) взаимодействием большого числа частиц.

Марковский процесс – случайный процесс, эволюция которого после любого заданного значения временного параметра не зависит от эволюции, предшествовавшей , при условии, что значение процесса в этот момент фиксировано («будущее» процесса не зависит от «прошлого» при известном «настоящем»; «будущее» процесса зависит от «прошлого» лишь через «настоящее»).

Негэнтропийный процесс – процесс движения к упорядочиванию, к организации системы. По отношению к живым системам: для того, чтобы не погибнуть, живая система борется с окружающим хаосом путём организации и упорядочивания последнего, т. е. импортируя негэнтропию. Таким образом объясняется поведение самоорганизующихся систем.

Необратимый процесс – процесс, который нельзя провести в противоположном направлении через все те же самые промежуточные состояния. Все реальные процессы необратимы. Всякий необратимый процесс вызывается внешними условиями, в которых состояние тела оказывается неравновесным. Необратимость следует понимать в статистическом смысле. Энтропия замкнутой системы (включающей и термостаты) в таких процессах возрастает. Типичным примером необратимого процесса – переход системы из неравновесного состояния в равновесное.

Неравновесный процесс – процесс установления равновесия (термодинамического или статистического) в изолированной системе, находящейся в неравновесном состоянии. Если в такой системе существуют неоднородное поле температур, градиенты концентраций и скоростей упорядоченного движения частиц, то вызванные ими неравновесный процесс теплопроводности, диффузии, вязкого течения способствуют устранению различия свойств в разных частях системы и установлению равновесия. В неизолированных системах неравновесные процессы могут протекать стационарно (без изменений физического состояния системы. Пример: – теплопередача за счёт теплопроводности при постоянной разности температур).

Нестационарный процесс – случайный процессы, не удовлетворяющий условиям стационарности. Свойства нестационарных случайных процессов обычно не зависят от времени и могут быть установлены только путём усреднения в отдельные моменты времени по ансамблю выборочных функций, образующих процесс. Пример: процесс теплопроводности, характеризующийся изменением температуры тела не только в пространстве (от точки к точке), но и во времени. Нестационарный процесс имеет определенную тенденцию развития во времени; характеристики такого процесса зависят от начала отсчета, зависят от времени. Однако не все нестационарные случайные процессы являются существенно нестационарными на всем протяжении своего развития. Существуют нестационарные процессы, которые (на известных отрезках времени и с известным приближением) могут быть приняты за стационарные. Обычно случайный процесс в любой динамической системе начинается с нестационарной стадии – с «переходного процесса». После затухания переходного процесса система переходит на установившийся режим, и тогда случайные процессы, протекающие в ней, могут считаться стационарными.

Обратимый процесс – термодинамический процесс, который может проходить как в прямом, так и в обратном направлении, проходя через одинаковые промежуточные состояния, причем система возвращается в исходное состояние без затрат энергии, и в окружающей среде не остается макроскопических изменений. Такой процесс можно в любой момент заставить протекать в обратном направлении, изменив какую-либо независимую переменную на бесконечно малую величину. В обратимом процессе энтропия в замкнутой системе, включающей все участвующие в процессе тела, сохраняется. Энтропия подсистем при обратимом процессе может и меняться. Обратимые процессы обычно связаны с изменением внешних условий (а с ними и энергии системы), причём эти изменения должны быть настолько медленными, чтобы успевало установиться равновесное состояние системы, соответствующее моментальным значениям меняющихся параметров. Обратимые процессы дают наибольшую работу. Большую работу от системы вообще получить невозможно. На практике обратимый процесс реализовать невозможно. Он протекает бесконечно медленно, и можно только приблизиться к нему. Термодинамическая обратимость процесса отличается от химической обратимости: химическая обратимость характеризует направление процесса, а термодинамическая – способ его проведения.

Политропный процесс – термодинамический процесс, во время которого теплоёмкость газа остаётся неизменной.

Процессы переноса – особые необратимые процессы, возникающие в неравновесных системах в результате которых происходит пространственный перенос массы, энергии, импульса.

Переходный процесс в теории систем – реакция динамической системы на приложенное к ней внешнее воздействие с момента приложения этого воздействия до некоторого установившегося состояния. Примерами внешнего воздействия могут быть дельта-импульс, скачок или синусоида.

Равновесный процесс – тепловой процесс, в котором система проходит непрерывный ряд бесконечно близких равновесных термодинамических состояний. Равновесный тепловой процесс обратим, если его можно провести обратно и в телах, окружающих систему, не останется никаких изменений. Реальные процессы изменения состояния системы всегда происходят с конечной скоростью, поэтому не могут быть равновесными. Реальный процесс изменения состояния системы будет тем ближе к равновесному, чем медленнее он совершается, поэтому равновесные процессы называют квазистатическими. Всякий равновесный процесс является обратимым процессом и, наоборот, любой обратимый процесс является равновесным. В состоянии химического равновесия скорость прямой реакции равна скорости обратной реакции

Релаксации процесс – процесс установления термодинамического, а следовательно, и статистического равновесия в физической системе, состоящей из большого числа частиц.

Процесс самоорганизации – процесс, в ходе которого создается, воспроизводится или совершенствуется организация сложной динамической системы. Процессы самоорганизации могут иметь место только в системах, обладающих высоким уровнем сложности и большим количеством элементов, связи между которыми имеют не жесткий, а вероятностный характер. Самоорганизация – процесс упорядочения элементов одного уровня в системе за счёт внутренних факторов, без внешнего специфического воздействия (изменение внешних условий может также быть стимулирующим либо подавляющим воздействием). Результат – появление единицы следующего качественного уровня. В зависимости от подхода к описанию самоорганизации в определение включают характеристики системы, тип внутреннего фактора, особенности процесса.

Самопроизвольный процесс – процесс, который может протекать без затраты работы извне, причём в результате может быть получена работа в количестве, пропорциональном произошедшему изменению состояния системы. Самопроизвольный процесс может протекать или обратимо, или необратимо.

Скалярный процесс – химические реакции (поток – скорость реакции, а термодинамическая сила – химическое сродство) или, например, массоперенос к поверхности раздела фаз (поток – поток вещества к поверхности раздела фаз, а сила – движущая сила массопереноса).

Случайный процесс (вероятностный, стохастический) – семейство случайных величин, индексированных некоторым параметром, чаще всего играющим роль времени или координаты; поведение которого не является детерминированным, и последующее состояние такой системы описывается как величинами, которые могут быть предсказаны, так и случайными. На практике часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причём ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются стационарными. Любое развитие процесса во времени (неважно, детерминированное или вероятностное) при анализе в терминах вероятностей будет случайным процессом (иными словами, все процессы, имеющие развитие во времени, с точки зрения теории вероятностей, стохастические).

Сопряжённые процессы – несколько одновременно протекающих в открытой неравновесной системе необратимых процессов. Могут приводить к появлению новых эффектов. Например, от наложения тепло- и электропроводности появляется термоэлектричество, при наложении диффузии и теплопроводности – термодиффузия.

Стационарный процесс – процесс, который не зависит от времени. Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во времени неопределенно долго; при исследовании стационарного процесса в качестве начала отсчета можно выбрать любой

момент времени. В таком процессе на любом участке времени имеют место одни и те же его характеристики: стационарный процесс «не имеет ни начала, ни конца». Случайный процесс является стационарным, если его многомерная плотность вероятности зависит только от величины интервалов времени и не зависит от положения этих интервалов в области изменения времени; одномерная плотность вероятности не зависит от времени и двумерная плотность вероятности зависит от временных интервалов. Здесь все моменты одномерного распределения, в том числе математическое ожидание и дисперсия, постоянны

Термодинамический процесс – изменение состояния системы, которое характеризуется изменением ее термодинамических параметров. Может быть обратимым и необратимым, равновесным и неравновесным. Все количественные выводы термодинамики применимы только к равновесным состояниям и обратимым процессам.

Турбулентный процесс – вихревое движение жидкости или газа, при котором элементы (частицы) среды совершают неупорядоченные, хаотические движения по сложным траекториям, а скорость, температура, давление и плотность среды испытывают хаотические флуктуации. Пример: турбулентная диффузиям – перенос вещества в пространстве, обусловленный турбулентным движением среды

Управления процесс – совокупность отдельных видов деятельности, направленных на упорядочение и координацию функционирования и развития организации и её элементов в интересах достижения стоящих перед ними целей.

Устойчивый процесс (в теории вероятностей) – один из видов стохастического процесса. Он включает стохастические процессы, ассоциированные распределения вероятностей которых являются устойчивыми распределениями. Примеры: винеровский процесс или броуновское движение, нормальное распределение вероятностей, распределение Коши.

Флуктуационный процесс – процесс самопроизвольного перехода из более вероятных в менее вероятные состояния. В макроскопической системе только очень малые флуктуации обладают заметной вероятностью, однако в системе с небольшим числом степеней свободы возможны и флуктуации большого масштаба, в связи с чем применение термодинамических законов в таких системах становится незаконным.

Циклический процесс – марковский случайный процесс, протекающий в системе, в которой состояния связаны между собой в кольцо (цикл) с односторонними переходами.

Эволюционный процесс – процесс изменения (чаще всего совершенствования) чего либо во времени. Обычно речь идет о биологической эволюции изменении и возникновении видов живой природы

Эргодический процесс – стационарный случайный процесс, в котором при определении любых статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной бесконечно длинной реализации; процесс, для которого среднее по времени, полученное усреднением на достаточно большом, в пределе бесконечном, интервале по единственной реализации случайного процесса, сходится с вероятностью единица к соответствующей вероятностной характеристике, полученной усреднением по множеству реализаций.

2. ПОРЯДОК, НЕПОРЯДОК, БЕСПОРЯДОК И ХАОС

Хаос рождает жизнь, а порядок рождает привычку.
Генри Брукс-Адамс

Хаос и порядок так тесно связаны между собой, что их невозможно разделить.
Дипак Чопра. Путь волшебника

Порядок – суть явление Хаоса, которое из Хаоса рождается и
Хаосом же будет поглощено. Все попытки противопоставить
Порядок Хаосу обречены на провал, так как Хаос всеобъемлющ –
в нем есть возможность всего, и даже Порядка.
Порядок сам по себе невозможен, а в противопоставлении
Хаосу – бессмыслен, так как является лишь одной из ипостасей Хаоса.
Порядок – есть форма выражения Хаоса,
Хаос – отсутствие любого выражения вообще.
Следовательно, Порядка не существует.
Пихто Твердятич

Жизнь человейника - множество поступков (действий) его членов.
Это множество должно быть как-то упорядочено,
чтобы человейник мог жить как единое целое,
т.е. должен быть установлен и поддерживаться определенный порядок.
Члены человейника должны быть как-то защищены друг от друга.
А.А Зиновьев



Рис. 1. Порядок и беспорядок на пляже Германии: слева - утро, справа - вечер..

В мире есть порядок и упорядоченные в той или иной степени системы и структуры, есть непорядок, есть беспорядок и случайные явления, есть хаос, т.е. беспорядок в абсолюте.

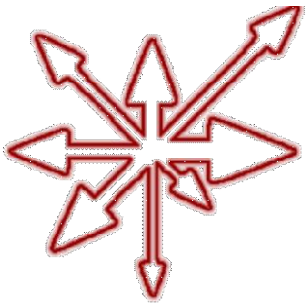


Рис. 2. Символ хаоса. Символ порядка ещё не придуман.

Порядок и хаос – это и противоположные, и взаимодополняющие понятия. Здесь имеет место единство противоположностей, равновесие (или неравновесие) между которыми определяет направление и темп развития или деградации структур в рассматриваемой системе.

Важно понимать, что во Вселенной господствует беспорядок, локально упорядоченный во времени и/или в

пространстве, со случайными процессами, которые частично предопределены и даже закономерны. Но не все и не всегда: правит нами случай.

Рассмотрим особенности порядка-беспорядка (в статике и динамике – при переходе их друг в друга) в конкретных науках, социальных и политических процессах.

Замечание. Хаос, детерменированный хаос, беспорядок, непорядок, бардак и т.п. – термины, обозначающие обычно некоторые общие свойства. Но не всегда! Часто это никак не связанные понятия: хаос к беспорядку никакого отношения может не иметь, а детерминированный (динамический) хаос - символ высшего порядка.

Начнём с порядка. Казалось бы с этим просто:

Порядок (κόσμος – космос и украшение, taxis – распорядок; расположение; последовательность, очерёдность) – гармоничное, ожидаемое, предсказуемое состояние или расположение чего-либо, состояние благоустройства и налаженности, систематичность правильность в расположении чего-нибудь, в ходе дел, совокупность предметов, стоящих по ряду, один за другим; ряд, шеренга, строй, чёткая организация какой-либо сферы действительности (примеры: математический порядок, политический и т. д.).

Упорядоченность – характеристика структуры, обозначающая степень взаимной согласованности её элементов.

Древние греки представляли природный мир как о пластически упорядоченное гармоническое целое. Они соединяли в понятии «космос» две функции – упорядочивающую и эстетическую. Согласно Платону, все в космосе, сверху донизу, содержит порядок. На одном конце космоса двенадцать богов следуют в самом строгом порядке во главе с Зевсом, который тоже «всё приводит в порядок. На другом конце космоса человек (и только он один из живых существ) от природы «обладает чувством порядка в телодвижениях и звуках".

В обыденном смысле под порядком понимают ситуацию, при которой каждая вещь находится на своём месте, причём для каждой вещи есть одно, предназначенное для неё место. Поэтому возможен только один способ установления идеального порядка. Наоборот, беспорядок можно создать множеством способов, причём разного качества.

Математический порядок – группировка всего многообразия величин в соответствии с математическими закономерностями. Политический порядок – установление жизненных отношений в зависимости от характера народа. Для физиков и химиков порядок – упорядоченное в пространстве расположение атомов или молекул. В идеальном кристалле каждый атом находится на своём месте, есть ближний и дальний порядок, нарушают его разнообразные дефекты: вакансии, междоузлия, дислокации, поры и трещины и т.п. В физике твёрдого тела порядок – расположение атомов, обладающее некоторой инвариантностью относительно сдвига. Обычно (например, методами рентгено-структурного анализа) характеризуется дальний порядок.

Замечание. К сожалению, определение порядка до сих пор не сформулировано: что есть порядок точно неизвестно. Зайдите в комнату творческой личности и оглянитесь. Что вы увидите? Полный бардак! Стол завален неизвестно чем, носки на полу, книги под диваном, пепельница на шкафу. Это порядок?! Это гармоничное, ожидаемое, предсказуемое состояние или расположение чего-либо?! Ни в коем случае. Это беспорядок? Нет! Хозяин точно знает где у него что лежит. Он с закрытыми глазами и в полной темноте найдет нужную вещь. А вот если кто-то в комнате уберётся и расставит всё по местам в идеальном порядке, вот тогда ничего найти не удастся - для творческой личности такой порядок - абсолютный хаос. *Раньше я жил один, и все мои вещи как попало валялись на своих местах. Теперь у меня появилась девушка, и все мои вещи аккуратно и красиво лежат неизвестно где*... **Возьмём лупу и начнём рассматривать картину маслом. Полный беспорядок. Отойдём подальше –"Сикстинская мадонна" Рафаэля. Никакой не беспорядок, а вполне порядок. Равно как "Последний вал" Айвазовского или "Чёрный квадрат" Малевича. Раз порядок – будет теория. Так что, дорогой читатель, как опишешь математически топологию мазков кисти в картине Репина Иван Грозный убивает сына, так сразу пиши мне. Обсудим.**

Под "порядком" обычно подразумевается множество элементов любой природы, между которыми существуют устойчивые ("регулярные") отношения, повторяющиеся или в пространстве, или во времени, или в том и другом. Повторяемость во времени означает повторяемость ("регулярность") тех движений и изменений, которые претерпевают указанные элементы. Соответственно "хаосом" обычно называют множество элементов, между которыми нет таких устойчивых (повторяющихся) отношений.

Замечание. Традиционная теория развития (диалектическая концепция Г. Гегеля и К. Маркса) рассматривала эволюцию как процесс перехода от одного порядка к другому. Однако, анализ революций в России показывает, что все изменения это не переход порядок 1 – порядок 2, а переход бардак 1 – бардак 2. Изменяется не тип порядка, а тип беспорядка.

Порядок в физической, экологической, экономической и в любой другой системе может быть двух видов: равновесный и неравновесный. При равновесном порядке система находится в равновесии с параметрами окружающей среды, при неравновесном порядке они различны. Равновесное состояние к которому приходит система самопроизвольно и при котором она становится нетрудоспособной, называется беспорядком.

Но в обществе всё сложнее: анархия, свобода и хаос рождают порядок.

Анархия – мать порядка, хаос – порядка отец.

"**Свобода не дочь, а мать порядка!**" – сказал как-то П. Ж. Прудон – теоретик революции. И был прав, ибо, как вы перейдёте из одного порядка в другой (хотелось бы – более совершенный), не сотворив предварительно сильный беспорядок? Ведь свободы в беспорядке гораздо больше, чем в порядке: помимо законных, установившихся путей появляются новые, неведомые дороги, ведущие к непредсказуемым последствиям.

Анархия – отсутствие в обществе централизованной насильственной власти. Это самоуправление во всех сферах жизни общества, при котором достигается максимально возможная степень свободы для каждого народа, территории, коллектива, для каждой отдельной личности.

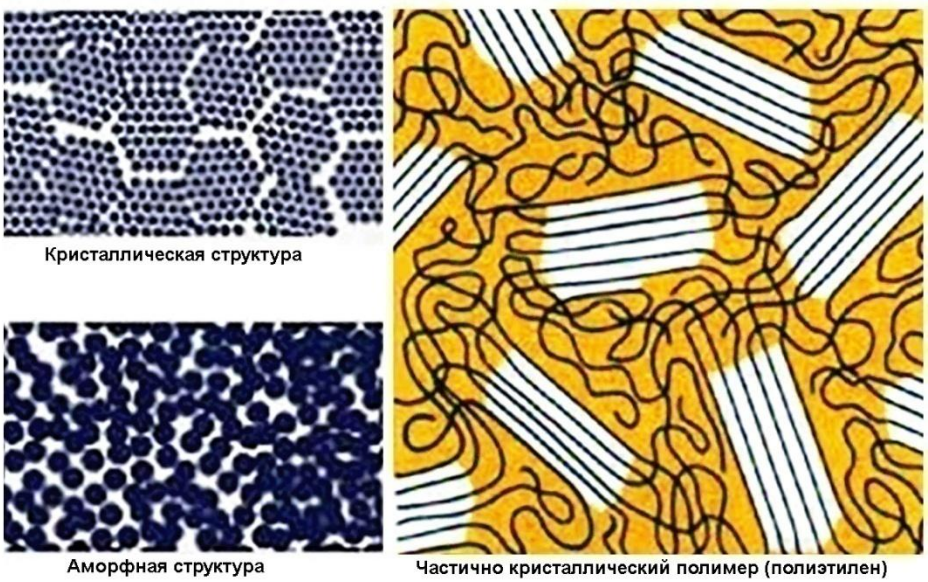


Рис. 3. Твёрдые тела с различной степенью упорядоточения.

Анархия – это невозможность расширения прав одной личности за счёт другой. В отличие от демократии, принципом которой, является подчинение меньшинства большинству, выявляемое путём голосования, анархия предоставляет любому меньшинству жить так, как вздумается, если оно при этом не ущемляет свободу других.

Поэтому лозунг "Анархия – мать порядка" означает, что анархия должна стать матерью будущего общественного порядка. Порядок будет основываться не на принудительном подчинении всех и каждого единой насильственной власти, а на добровольных взаимовыгодных соглашениях между отдельными лицами и группами на

принципе добровольной кооперации всех членов общества, при которой возникающие конфликты решаются третейским судом.

Беспорядок (кавардак, кутерьма, хаос, бардак) – отсутствие порядка.

Помимо беспорядка возможен ещё непорядок

Непорядок – нарушение должного порядка.

Беспорядок – предметная живопись темперамента.

Непорядок вовсе не означает беспорядок. В непорядке главное – отсутствие должного порядка. Пример: В больницах принято мыть пол каждый день. Если санитарка один день пропустила, то не смотря на то, что пол в полном порядке, это непорядок – нарушение дисциплины.

В естествознание термин непорядок ещё предстоит внедрить.

У порядка мало синонимов (возможно потому, что он редок) а у беспорядка – много: беспорядок, безалаберщина, беспутица, бестолковщина, бестолочь, неустройство, неурядица, нескладица, несогласие, ад, содом, разгром, столпотворение (вавилонское), светопреставленье, кавардак, каша, путаница, разноголосица, разногласие, расстройство, замешательство, ералаш, передряга, пертурбация, кутерьма, катавасия, сумятица, сутолока, базар, шабаш, кагал, хаос.

Вот хаосом и займёмся.

Хаос (неупорядоченность, бесформенность, бессистемность).– категория космогонии, первичное состояние Вселенной, бесформенная совокупность материи и пространства. В обыденном смысле хаос понимают как беспорядок, неразбериху, смешение.

Согласно в древнегреческой мифологии изначально мир представлял собой разверзшеюся бездну, беспредельную первобытную бесформенную массу, стихию, туман, ночь и мрак, совокупность материи и пространства, из которой возникли первые божества и всё существующее. Назывался он хаос (др.-греч. χάος от χαίνω – раскрываюсь, разверзаюсь), но о беспорядке речи не было. У Гесиода хаос – вообще пустое неизмеримое пространство. По учению орфиков, хаос и эфир возникли из безначального времени. Благодаря действию времени туман хаоса от вращательного движения принял яйцевидную форму, вместив в средину себя эфир, причем от быстрого движения яйцо созрело и раскололось на две половины, из которых возникли земля и небо. Другие под хаосом подразумевали воздушное и туманное мировое пространство, помещающееся между небом и землей, а также наполненную мраком подземную зияющую бездну.

В германской мифологии хаос – начало всех вещей. Они пытались придать ему какой-то образ, но трудно дать образ тому, что невообразимо, описать то, что не поддаётся описанию, и поэтому его называли Гимнунгагап. Это – огромная застывшая бездна, где всё существует в потенциале, а не в реальности; это бездонная пропасть, полная смёрзшейся пыли с глыбой льда в самом центре. Глыбу эту лижет существо, напоминающее корову, лижет до тех пор, пока не придаст облик первичным элементам, которые должны воплотиться. Нельзя сказать, что это абсолютный беспорядок.

Лишь в Талмуде при описании сотворения мира появляются идеи беспорядка «Десять вещей были созданы в первый день. Вот они: небо и земля, смятение и пустота, свет и тьма, дух и вода, свойство дня и свойство ночи». Эти идеи с небольщими изменениями перекочевали в библейский Ветхий Завет, который потом христиане заимствовали у евреев. Центральной догмой творения в христианстве является *Creatio ex Nihilo* – «сотворение из ничего», в которой Создателем, вызвавшим всё сущее из небытия, выступает Бог в своём волевом акте *productio totius substantiâ ex nihilo sui et subjecti* – переведя всё сущее из состояния небытия в состояние бытия. Бог при этом выступает первичной причиной существования мира.

Это "Ничего" в раннем христианстве стало интепретироваться как беспорядок, так что хаос оказался прочно сцеплен с беспорядком. Более того сейчас хаос - абсолютный беспорядок.

Хаос – предельный случай беспорядка: всё в нём правит случай.

Замечание. В физиологии встречается как «хороший» хаос, так и «плохой». Автор надеется, что хаос, постоянно возникающий вокруг него, - хороший.

Примерами случайного (стохастического) хаоса являются такие явления, как метание шарика в рулетке, подбрасывание монеты или игральной кости, броуновское движение частицы под случайными ударами мелких частиц, беспорядочные вихри турбулентности, белый шум. Являются ли эти примеры истинным хаосом, абсолютным беспорядком? По-видимому нет! Конечно здесь нет аттракторов, но мы можем подобрать к ним подходящее статистическое распределение, во многих случаях (но не во всех!) рассчитать математическое ожидание, дисперсию и высшие моменты, описать дифференциальными уравнениями с частными производными, и даже использовать некоторые элементы геометрии фракталов. Таким образом, видов хаоса есть много и мы можем отличить один тип хаоса от другого (хотя и не можем предсказать развитие хаотической системы). Между тем очевидно, что идеальный хаос единственен и к нему не могут быть применены какие-либо математические подходы.

Для количественного измерения хаотичности (неупорядоченности) некоторой системы в физике и математике (теории информации, математической статистике) часто используется понятие энтропии, которая одновременно характеризует информационную ёмкость системы.

Связи между элементами системы возможны различные виды связей (или не быть никаких связей).

Если при данном событии X в A могут произойти всевозможные события в B и если такая независимость наблюдается повсеместно, то перед нами хаос. Если же событие X в A ограничивает определенным образом то, что может произойти в B, то между A и B возникает связь. Если событие X в A ограничивает события в B однозначно (поворачиваем выключатель – зажигается лампа) связь A и B будет детерминированной. Если событие X в A ограничивает события в B так, что после события X в А могут произойти в B события Y или Z, причём Y после X в B происходит в 40 случаях из 100, а Z – в 60 случаях, то связь A и B является вероятностной.

Замечание. Связи между элементами системы могут быть детерминированными (к ним применимы законы классической динамики) и могут быть случайными (к ним применимы законы вероятности). В том и другом случае можно обнаружить порядок. Но возможны системы, в которых господствующие связи совершенно неопределены. Возможны! Но увы! Автор данного текста не может привести ни одного примера идеального хаоса и абсолютного беспорядка. Впрочем, как и порядка.

Детерминизм – теория, согласно которой определенные результаты полностью предопределены. Система детерминированного хаоса является системой, которая демонстрирует кажущиеся случайными результаты, даже тогда, когда эти результаты порождаются системой уравнений.

Примером одного порядка и совокупности разных типов хаоса являются монеты на столе (рис. 4.1). Под порядком естественно понимать ситуацию, по которой монеты одного достоинства все направлены цифрой вверх, ориентированы в одну сторону и образуют некую пространственную решётку.

Если мы потрясём стол, то порядок нарушится. При этом возможны такие виды беспорядка, как произвольная ориентация цифр при сохранении остального порядка, произвольное чередование орёл-решка, нарушение решётки, а так же одновременное нарушение всего и вся – полный хаос. Чем больше трясёшь, тем сильнее хаос. Снова получить порядок не удастся. Требуется использование разума. Кто-то считает, что порядок из хаоса может создать только Бог. Или его порученец на Земле... Ну, а кто-то верит в перспективы флуктуации. Хотя чтобы не говорила по этому поводу синергетика: ни внутренняя нестабильность, ни беспорядочные внешние воздействия не вернут монеты

в строгий порядок цифрой вверх. Самоорганизацией тут не пахнет. Может потому, что система не термодинамическая?

В природе существует как переход порядок→хаос, так и его противоположность хаос→порядок. В изолированных системах (но не всегда) идёт процесс перевода порядка в хаос. В открытых системах, через которые проходят потоки энергии, могут идти процессы самоорганизации и на фоне хаоса рождается порядок. Впрочем, чаще порядок рождается из другого порядка. Беспорядок не обязателен.



Рис. 4 Упорядоченное и разупорядоченное расположение монет на столе.

Самоорганизация – общая особенность систем, в которых элементы внутри системы влияют друг на друга, создавая порядок в системе.

Итак, в реальном мире есть две крайности: порядок и хаос. Порядок – чёткая, подчиняющаяся определенному порядку смена событий в окружающем нас пространстве и во времени, например, движение планет, вращение Земли, появление кометы Галлея на горизонте, размеренный стук маятника, поезда, идущие по расписанию. Есть в природе и беспорядок. Хаос может быть случайным и управляться вероятностными законами, но может быть детерминированным, т.е. внешне случайный, но в основе заданный строгими и отнюдь не случайными законами. Он может быть статическим (т.е. устойчивым и не изменяющимся во времени) или динамическим (изменяться во времени, переходить из одного типа хаоса в другой по эволюционным законам или по законам теории катастроф).

Примерами систем с детерминированным хаосом являются атмосфера, турбулентные потоки, некоторые виды аритмий сердца, биологические популяции, общество, как система коммуникаций и его подсистемы: экономические, политические и другие социальные системы, частично кристаллические полимеры и др. Важно, что поведение такой системы кажется случайным, хотя оно определяется детерминированными законами.

Детерминированный (динамический) хаос – абстрактное математическое понятие, обозначающее детерминированный процесс в детерминированной нелинейной системе, обусловленный свойством данной системы проявлять неустойчивость, чувствительную зависимость динамики системы от малых возмущений. Идеи детерминированного хаоса используются для характеристики сложных систем (в синергетике).



Рис. 5. Ordung und Unordung: порядок средь беспорядка.

Детерминированный (динамических) хаос, часто возникает в сложных структурах, которые принципиально нельзя разделить на отдельные составляющие. Его свойства: 1) существенная зависимость от начальных условий; 2) условие перемешивания (транзитивность); 3) регулярность (плотность периодических точек).

Как уже упоминалось, есть много типов беспорядка.

В литературе легко найти описание таких беспорядков, как структурированный беспорядок, организованный и структурированный хаос, слегка структурированный хаос, ограниченный хаос, упорядоченный, хаос случайный (шумовой), детерминированный и динамический, разупорядоченный порядок, структурированная турбулентность и т.д. и т.п. Все они требуют своих методов изучения и описания. Качественный и количественный анализ беспорядка ведут методами хаусометрии. При этом измеряется энтропия структуры (термодинамическая, информационная и др.), передача информации при переходе от одной структуре к другой, геометрия фракталов (для самоподобных структур), а теоретическое описание реализуют с использованием специальных математических подходов (распределения Леви, дифференциальные уравнения с дробными частными производными, странные аттракторы, бифуркации, теория катастроф и др., которые принято относить к сфере синергетики). Исследуются как процессы, ведущие к хаосу, так и процессы, ведущие к порядку, к самоорганизации системы

(достижения тут, правда, дольно жалкие: создание птенца из белка и желтка пока никому описать не удалось, не говоря уж об экспериментальном превращении яичницы в яйцо).



Рис. 6. Пространственный и информационный беспорядки.

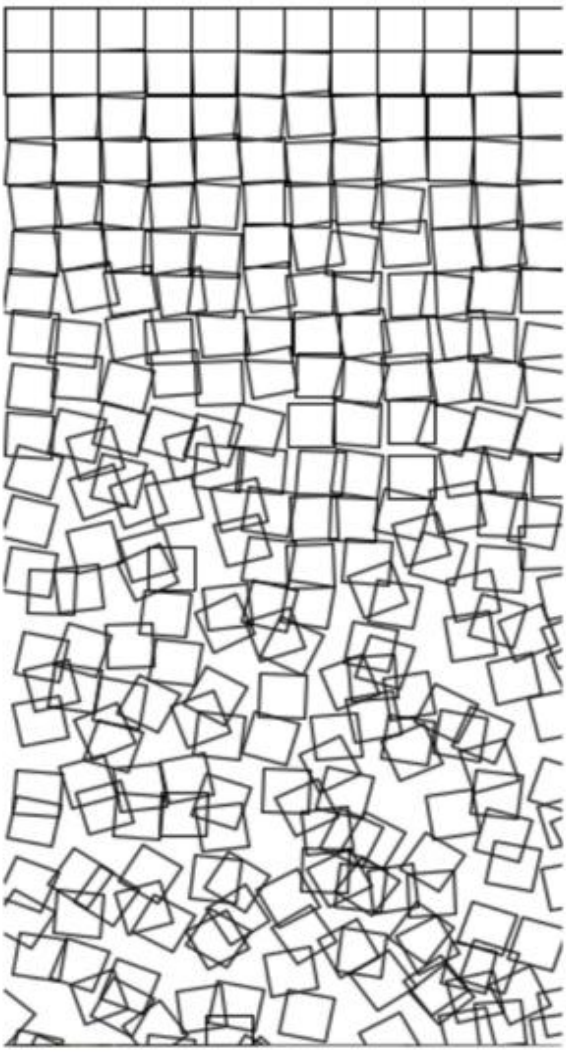


Рис. 7. Развитие беспорядка в пространстве и времени.

Несмотря на то, что понятия порядок-беспорядок обсуждаются со времен древних мифов, они до сих пор не обрели терминологической чёткости. Специфику и объём этих понятий не удалось строго определить ни в одной из наук (к примеру, в современной физике используются более десяти характеристик хаоса: молекулярный хаос. термодинамический хаос, диффузный хаос, диссипативный хаос, детерминированный

хаос, турбулентный хаос и др.). До сих пор не ясны границы применимости этих понятий и специфика их "преломления" при переходе из одних познавательных сфер в другие. В настоящие время это, скорее, даже не понятие, а некие понятийные пространства, где сопрягаются и пересекаются интуитивные представления, культурно-смысловые контексты, конкретно-научные интерпретации и их философское осмысление.

3. ТЕРМОДИНАМИКА

Термодинамика – палка о трёх началах.
NN
Под давлением всё ухудшается
Закон термодинамики Мёрфи

Классическая термодинамика – наука о взаимных превращениях теплоты и работы. Она изучает системы, в которых происходят обратимые процессы, сопровождающиеся тепловыми эффектами.

Термодинамика – раздел физики, изучающий наиболее общие свойства макроскопических систем и способы передачи и превращения энергии в таких системах. В термодинамике изучаются состояния и процессы, для описания которых можно ввести понятие температуры. Процессы, происходящие в термодинамических системах, описываются макроскопическими величинами (температура, давление, концентрации компонентов), которые вводятся для описания систем, состоящих из большого числа частиц, и не применимы к отдельным молекулам и атомам, в отличие, например, от величин, вводимых в механике или электродинамике. Законы термодинамики носят общий характер и не зависят от конкретных деталей строения вещества на атомарном уровне. Поэтому термодинамика успешно применяется в широком круге вопросов науки и техники.

Химическая термодинамика – раздел физической химии, изучающий процессы взаимодействия веществ методами термодинамики. Применение термодинамического подхода к химическим реакциям основано на том, что в фундаментальном уравнении Гиббса в качестве переменных можно использовать как независимые переменные – массы (количества вещества) компонентов, – если условия задачи не требуют детального рассмотрения химического равновесия, так и массы (количества вещества) составляющих веществ совместно с уравнениями связи, описывающими химические реакции, – когда требуется подробное описание химического равновесия.

Термодинамическая система – совокупность физических тел, способных обмениваться между собой и с другими телами (внешней средой) энергией и веществом. Все тела вне указанной совокупности представляют собой внешнюю среду.

Термодинамическая система состоит из очень большого числа молекул, атомов, электронов или других частиц, поэтому её состояние можно характеризовать макроскопическими параметрами: плотностью, давлением, концентрацией веществ, образующих термодинамическую систему. Это макроскопическая система не требует для своего описания привлечения микроскопических характеристик отдельных частиц. Единицей измерения числа частиц в термодинамической системе служит число Авогадро ($6.02 \cdot 10^{23}$ частиц на моль вещества), дающее представление о порядков величин. Ограничения на природу материальных частиц, образующих термодинамическую систему, не накладываются: они могут быть любыми. Для описания термодинамической системы используются *макроскопические параметры*, характеризующие не свойства составляющих её частиц, а свойства самой системы: температуру, давление, объём, магнитную индукцию, электрическую поляризацию, массу, химический состав компонентов и др.

Термодинамическая система может быть изолированной, закрытой, открытой, частично открытой или адиабатной.

Характеризуют термодинамическую систему параметры:

– Экстенсивный параметр, описывающий систему как целое. Зависит от количества вещества в системе и определяет ёмкость системы. Это масса и пропорциональные ей величины (например, объём), количество электрических зарядов и т.п. Экстенсивные величины имеют аддитивный характер (суммируются при объединении систем, например, общая масса системы равна сумме масс её отдельных частей).

– Интенсивный параметр не зависит от количества вещества (массы) и способен принимать вполне определённые значения в каждой точке системы. От его величины зависит состояние системы и интенсивность происходящих в ней процессов. Это температура, давление, концентрация, химический потенциал, электродвижущая сила и т.п. Интенсивные параметры при объединении систем выравниваются.

Экстенсивное свойство становится интенсивным, если его отнести к единице количества вещества. Так, масса и объём – экстенсивные величины, а плотность, удельный объём – интенсивные.

3.1 Начала термодинамики

Термодинамика базируется на нескольких основополагающих принципах, называемых началами (иногда – законами):

0. **Нулевое начало термодинамики** (1931) постулирует возможность (вне зависимости от начального состояния изолированной системы) установления в ней термодинамического равновесия, из которого она самостоятельно выйти не может; все части системы при достижении термодинамического равновесия имеют одинаковую температуру. Вводит и определяет понятие температуры.

1. **Первое начало термодинамики** (Ю.Р. Майер, Дж. Джоуль, Г. Гельмгольц – 1842) представляет закон сохранения и превращения энергии в применении к термодинамическим системам. Энергия (и теплота), не может появляться из ниоткуда или исчезать в никуда. Энергия в природе не уничтожается и не возникает вновь, а лишь переходит из одного вида в другой в эквивалентном количестве. Количество теплоты, полученное системой, идёт на изменение её **внутренней энергии** и совершение работы против внешних сил. Изменение внутренней энергии системы при переходе её из одного состояния в другое равно сумме работы внешних сил и количества теплоты, переданного системе и не зависит от способа, которым осуществляется этот переход. Запрещает вечный двигатель первого рода. Первый закон термодинамики – частный случай общего закона природы – закона сохранения и превращения энергии применительно к системам и процессам, сопровождающимся энергетическим обменом в форме теплоты.

2. **Второе начало термодинамики** (С. Карно, У. Томсон, Р. Клаузиус, 1824) устанавливает наличие в природе фундаментальной асимметрии, т.е. однонаправленности всех происходящих в ней самопроизвольных процессов. Определяет возможные направления и пределы протекания процессов в термодинамической системе. Накладывает ограничения на направление термодинамических процессов, запрещая самопроизвольную передачу тепла от менее нагретых тел к более нагретым (невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счёт охлаждения теплового резервуара). Вводит энтропию как характеристику системы (в виде закона неубывания энтропии). Запрещает вечный двигатель второго рода.

3. **Третье начало термодинамики** накладывает ограничения на процессы в макроскопических системах в окрестности абсолютного нуля температур. Абсолютного нуля температур достигнуть невозможно. В. Нернст (1906) предположил, что энтропия чистого кристаллического вещества при абсолютном нуле температуры стремится к постоянной величине, не зависящей от фазы, давления и других параметров. Планк (1911) полагал, что при абсолютном нуле энтропия любого однородного конденсированного вещества обращается в нуль. Третье начало не ограничивается случаями химических реакций или фазовых превращений, а позволяет определить абсолютное значение энтропии любого одиночного тела. Такое определение энтропии можно связать с квантовыми закономерностями, а именно с фиксированной величиной ячейки фазового пространства, что позволяет однозначно вычислить вероятность термодинамического состояния (число микросостояний) и, следовательно, энтропию. Третье начало термодинамики используют для точного определения энтропии. При этом энтропию равновесной системы при абсолютном нуле температуры считают равной нулю.

Известны разные формулировки основных законов термодинамики.

Карно: наибольший КПД теплового двигателя не зависит от рабочего тела и определяется только температурой, в пределах которой двигатель работает.

Клаузиус: невозможен самопроизвольный процесс передачи теплоты от тела с более низкой температурой к телу с более высокой, т.е. теплота не может переходить от холодного тела к теплому сама собой.

Гельмгольц: энергия в природе не уничтожается и не возникает вновь, а лишь переходит из одного вида в другой в эквивалентном количестве.

Кельвин (Томсон): невозможен процесс, результатом которого было бы совершение работы за счёт теплоты, взятой от одного какого-то тела; невозможно построить периодически действующую машину, единственным результатом которой было бы поднятие груза за счет охлаждения теплового резервуара; невозможно превратить теплоту какого-либо тела в работу, не производя никакого другого действия, кроме охлаждения этого тела. Нельзя создать вечный двигатель.

Больцман: энтропия не может уменьшаться в замкнутых системах, т.е. в тех, что не получают внешней энергетической подпитки. В адиабатически изолированной системе энтропия не может убывать; она либо возрастает, либо остаётся постоянной.

Оствальд: вечный двигатель второго рода невозможен (т.е. не существует машины, которая бы полностью превращала теплоту в работу).

Планк: суммарная энтропия всех тел, испытывающих изменения в том или ином естественном процессе, возрастает. Естественный процесс – необратимый процесс, противоположный обратимому или нейтральному процессу; невозможно вернуть систему в исходное состояние без внесения изменений в окружающую среду тела. Энтропия выступает в качестве меры «предпочтения», оказываемого природой конечному состоянию системы перед начальным, и тесно связана с необратимостью процессов. Развитие идеи Планка высвечивает динамический аспект второго начала термодинамики: изолированная система стремится к состоянию равновесия как к аттрактору, причём энтропия оказывается связанной с функцией Ляпунова (см. далее).

Постулат Клаузиуса (1850): Теплота не может самопроизвольно переходить от менее нагретого - тела к более нагретому; теплота не может перейти от холодного тела к горячему без каких либо других изменений в системе. Процесс, при котором не происходит других изменений, кроме передачи теплоты от горячего тела к холодному, является необратимым. Это явление называют рассеиванием или дисперсией энергии.

Постулат Кельвина: Процесс, при котором работа переходит в теплоту без каких либо других изменений в системе, необратим: невозможно превратить в работу всю теплоту, взятую от источника с однородной температурой, не проводя других изменений в системе. Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты в работу). Невозможно построить машину, все действия которой сводились бы к производству работы за счёт охлаждения теплового источника (вечный двигатель второго рода)

Из 2-го закона следует принципиальная необратимость физических процессов, а также неизбежная деградация любой замкнутой системы (все различные формы энергии переходят в конечном итоге в тепловую, после чего становятся невозможны никакие процессы).

3.2 Равновесная термодинамика

Классическая термодинамика занимается равновесными обратимыми стационарными процессами, протекающими в закрытой системе.

Равновесие – состояние системы, при котором в любой её точке не происходит изменение ни одного её параметра.

Равновесное состояние системы – состояние, в которое со временем приходит система при постоянных внешних условиях. Характеризуется неизменностью во времени термодинамических параметров и отсутствием в системе потоков вещества и теплоты.

Постоянство параметров не должно быть связано с протеканием какого-либо процесса, внешнего по отношению к системе.

Стационарное состояние относительно некоего рассматриваемого параметра - процесс, при котором неизменность этого параметра обусловлена одновременным протеканием в системе взаимокомпенсирующих процессов.

Французский инженер Сади Карно в 1824 дал теоретическое объяснение работы тепловых машин, дав основу будущего второго закона термодинамики. Он показал, что для получения работы в тепловой машине необходимы, по крайней мере, два источника теплоты с разными температурами. Карно предложил идеальный цикл тепловой машины, где используются два источника теплоты с постоянными температурами: источник с высокой температурой и источник с низкой температурой. Поскольку цикл идеальный, то он состоит из обратимых процессов теплообмена между рабочим телом и источниками теплоты, протекающим по двум изотермам, и двух идеальных адиабат перехода рабочего тела с одной изотермы на другую. Цикл Карно включает расширение и сжатие идущие при изотермическом (постоянная температура) и изоэнтропическом (постоянная энтропии) условиях). Тепловой двигатель преобразует разницу температур в механическую работу; если температура системы постоянна – работы она не совершает. Вместе с теплом всегда передаётся и энтропия. Круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат представляет собой самый экономичный цикл.

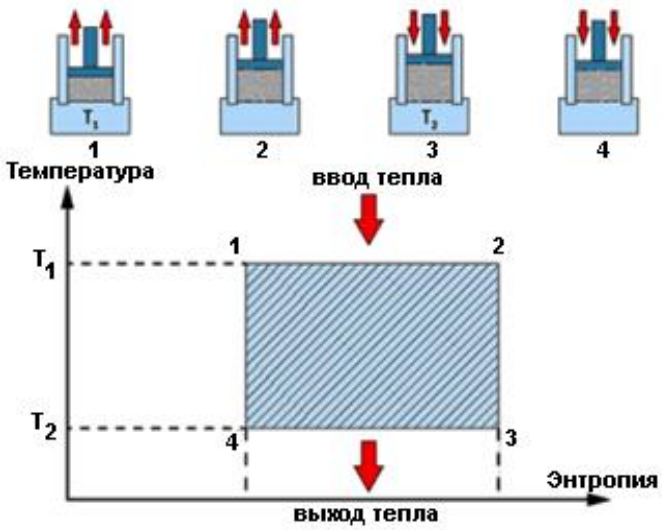


Рис. 1. Изменение температуры и энтропии при работе теплового двигателя

Описание работы цикла Карно опирается на его теорему.

Теорема Карно: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, наибольшим КПД обладают обратимые машины. Причем КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей и холодильников, равны друг другу и не зависят от конструкции машины и от природы рабочего вещества. При этом КПД меньше единицы.

Круговой процесс (цикл) – процесс, в результате которого термодинамическое тело возвращается в исходное состояние. В диаграммах состояния *P*, *V* и других круговые процессы изображается в виде замкнутых кривых. Это связано с тем, что в любой диаграмме два тождественных состояния (начало и конец кругового процесса) изображаются одной и той же точкой на плоскости.

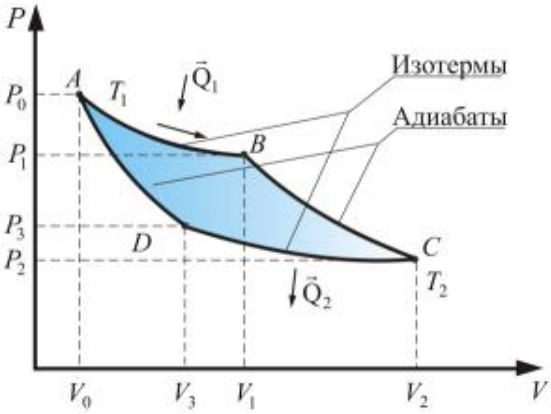


Рис. 2. Обратимый цикл Карно.

Объединение закона сохранения энергии со вторым законом термодинамики в цикле Карно определяет коэффициент полезного действия (КПД) для каждого цикла:

$$\eta \le \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (1)$$

где T_1 и T_2 – две температуры, между которыми осуществляется управление работой цикла.

В Ур.1 равенство относится к

обратимому процессу, а неравенство – к необратимому.

Пример: Если аппарат работает в диапазоне от 100 до 200 градусов по Цельсию, то максимально достижимый КПД ≈21%.

Тепло может переходить от холодного в теплое тело только при затрате работы – холодильники и тепловые насосы требуют источника энергии. Система при постоянной температуре не совершает работы. Для работы всегда необходим поток тепла между резервуарами при различных температурах. При постоянной температуре, потребление энергии пропорционально изменению степени беспорядка. Хаос не совершает работы.

Работа (*A*) – форма передачи и количественная мера направленного, упорядоченного движения. Система совершает работу над окружающей средой, если она действует против внешней силы, и, наоборот, окружающая среда действует на систему.

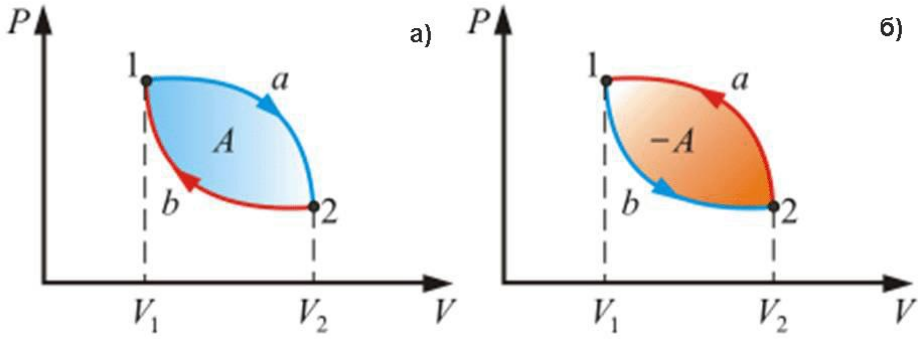


Рис. 3. Разбиение цикла, совершаемого идеальным газом, на процессы расширения (а) и сжатия (б) газа. Работа расширения (определяется площадью фигуры $1a_2V_2V_{11}$) положительна ($dV>0$), работа сжатия (определяется площадью фигуры $2b_1V_1V_{22}$) отрицательна ($dV<0$). Работа, совершаемая за цикл, определяется площадью, охваченной замкнутой кривой. Если за цикл совершается положительная работа $A = \oint PdV > 0$ (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется ***прямым***, если за цикл совершается отрицательная работа $A = \oint PdV > 0$, то обратным.

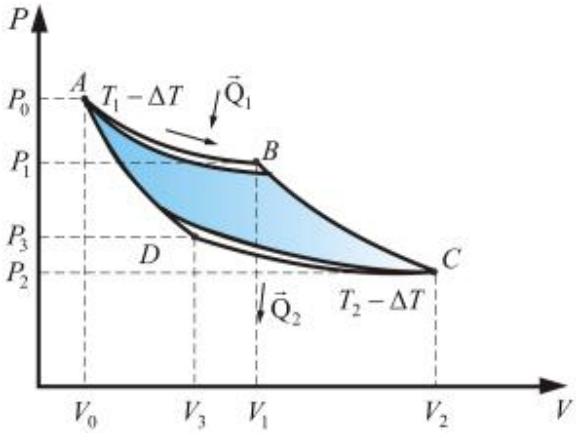


Рис. 4. Пример необратимого цикла. Площадь внутри фигуры *ABCD* уменьшилась из-за потерь; уменьшилась полезная работа цикла и КПД.

Теплота – энергия, которую получает или теряет тело в процессе теплообмена с окружающей средой; форма передачи и количественная мера неупорядоченного, хаотического движения. Передаётся путём теплопроводности, конвекции и/или излучением. Теплота – одна из основных термодинамических величин в классической феноменологической термодинамике. Количество теплоты входит в стандартные математические формулировки первого и второго начал термодинамики.

Количественное описание термодинамических процессов проводится с помощью термодинамических величин.

Связь между теплотой и работой для нециклических процессов может быть представлена в виде:

– дифференциальной формы $dU=\delta Q-\delta A$ (2а)

– интегральной формы $\Delta U=Q-A$. (2б)

Эти выражения представляют собой математическую формулировку первого закона термодинамики.

Внутренняя энергия (*U*) – полная энергия частиц, составляющих данное вещество –- слагается из кинетической и потенциальной энергий. Кинетическая энергия – энергия поступательного, колебательного и вращательного движения частиц; потенциальная энергия обусловлена силами притяжения и отталкивания, действующими между частицами.

Внутренняя энергия зависит от состояния вещества. Бесконечно малое изменение внутренней энергии dU – полный дифференциал функции состояния системы.

Энергию в тепловом цикле подразделяют на свободную и связанную

Свободная энергия – работа, совершаемая телом в обратимом изотермическом процессе; максимально возможная работа, которую может совершить система, обладая каким-то запасом внутренней энергии.

Связанная энергия – та часть внутренней энергии, которая не может быть превращена в работу, – это обесцененная часть внутренней энергии.

При работе, A, совершаемой системой при переходе из состояния 1 в состояние 2, при поглощении из внешней среды теплоты Q, то внутренняя энергия уменьшится на величину A, возрастёт на величину Q и в конечном состоянии будет равна

$$U_2=U_1+Q-A \qquad (3)$$

где U_1 и U_2 – внутренняя энергия системы в начальном (1) и в конечном (2) состоянии

$$\Delta U=U_1-U_2=Q-A \qquad (4)$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии: изменение внутренней энергии не зависит от способа проведения процесса, а определяется только начальным и конечным состоянием системы. Однако какая часть энергии пойдёт на совершение работы, а какая превратится в теплоту – зависит от способа проведения процесса: соотношения между работой и теплотой может быть различным. Если объём системы не меняется, то $\Delta U=Q_v$, где Q_v – теплота, поглощённая системой в условиях постоянного объёма.

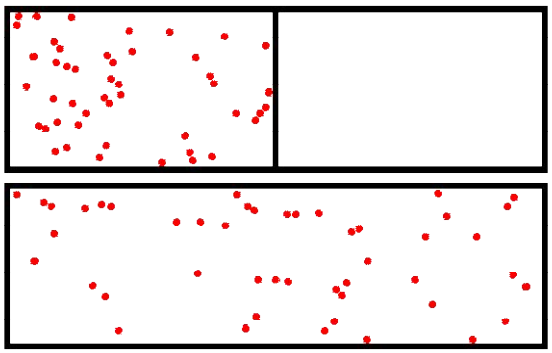


Рис. 5. Расширение газа – стремление к максимальному беспорядку.

В случае химической реакции, протекающей без изменения объёма системы, изменение внутренней энергии равно взятому с обратным знаком тепловому эффекту этой реакции.

При постоянном давлении и при условии, что в ходе процесса совершается только работа расширения ($A=P\Delta V$) изменение энтальпии

$$\Delta H=\Delta U+P\Delta V \qquad (5а)$$

или

$$\Delta U=\Delta H-P\Delta V \qquad (5б)$$

В этих условиях

$$\Delta H=Q_p \qquad (6)$$

где Q_p – теплота, поглощённая системой при постоянном давлении.

Энтальпия (тепловая функция, теплосодержание) – термодинамический потенциал, характеризующий состояние системы в термодинамическом равновесии при выборе в качестве независимых переменных давления, энтропии и числа частиц. Это энергия, доступная для преобразования в теплоту при определённом постоянном давлении.

В случае химической реакции изменение энтальпии равно взятому с обратным знаком тепловому эффекту реакции, проведенной при постоянной температуре и постоянном давлении.

Замечание. Энтальпия, как и внутренняя энергия, характеризует энергетическое состояние вещества, но включает энергию, затрачиваемую на преодоление внешнего давления, т.е. на работу расширения. Подобно внутренней энергии, энтальпия определяется состоянием системы и не зависит от того, каким путём это состояние достигнуто. В случае газов различие между ΔU и ΔH в ходе того или иного процесса может быть значительным. В случае систем, не содержащих газов, изменения внутренней энергии и энтальпии, сопровождающие процесс, могут быть значительными.

В произвольном цикле тепловой машины с газообразным рабочим телом, совершающей квазистатически (бесконечно медленно) циклический процесс, система последовательно получает малые количества теплоты dQ при соответствующих значениях абсолютной температуры. Общий цикл можно разбить серией адиабат и изотерм на ряд циклов (процесс трактуется как сумма очень большого, в пределе бесконечного, числа элементарных обратимых циклов Карно). В пределе круговой интеграл от приведенного количества теплоты dQ/T по всему циклу оказывается равным нулю (равенство Клаузиуса) независимо от конфигурации цикла; подынтегральное выражение $-Q/T$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции состояния, которую Р.Клаузиус (Рудольф Готтлиб) назвал энтропией S.

Функция состояния – в термодинамике некая функция, зависящая от нескольких независимых параметров, которые однозначно определяют состояние термодинамической системы. Значение термодинамической функции состояния зависит только от состояния термодинамической системы и не зависит от того, как система пришла в это состояние. Частным случаем функций состояний являются термодинамические потенциалы.

Энтропия (ἐντροπία – поворот, превращение, иногда переводится как конверсия преобразования) – функция состояния термодинамической системы, характеризующая направление протекания самопроизвольных процессов в этой системе и являющаяся мерой их необратимости.

Энтропия характеризует процесс превращения энергии. В тепловом двигателе в ходе преобразования тепловой энергии в работу тепловая энергия от нагревателя передаётся в машину, которая превращает её в работу. При этом часть теплоты уходит в холодильник. Эта энергия уже непригодна для совершения работы (если не воспользоваться ещё более "холодным" холодильником). Энергия, запасённая при более высокой температуре, обладает более высоким "качеством": она пригодна для совершения работы. Оказалось, что тепло никогда полностью не переходит в механическую работу. Для описания таких процессов закона сохранения энергии оказалось недостаточно, поскольку он не отражает необратимость. Потребовалась формулировка второго закона термодинамики и введение концепции энтропии, ибо именно этот параметр сохраняется в необратимых процессах. Энтропия правильно классифицирует тепловые двигатели в соответствии с их возможностями и может правильно предсказать обратимость в изолированных и замкнутых системах.

Клаузиус (1865) ввёл функцию состояния системы, являющуюся экстенсивным фактором теплоты (если считать температуру интенсивным фактором теплоты). Энтропия Клаузиуса – некая функция теплоты

$$\Delta S=f(Q), \qquad (7)$$

где Q – фактор интенсивности теплоты, а S – фактор ёмкости теплоты.

Изменение энтропии термодинамической системы при обратимом процессе – отношение изменения общего количества тепла, полученного системой (или отведённого от неё), находящейся в равновесии, ΔQ к величине абсолютной температуры, T:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \qquad (8)$$

Замечание. Данное равенство относится к изменению энтропии, не определяя саму энтропию.

Когда энергия Q_1 передаётся от нагревателя к холодильнику, энтропия убывает на величину Q_1/T_1и одновременно возрастает на величину Q_2/T_2. Энтропия характеризует условия, при которых запасается энергия: если энергия запасается при высокой температуре T_1, то её энтропия низка и качественно высока.

Формула (8) применима только для изотермического процесса (происходящего при постоянной температуре). В случае произвольного квазистатического (бесконечно медленного) циклического процесса изменение энтропии:

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad (9)$$

где dS – приращение (дифференциал) энтропии, а dQ – бесконечно малое приращение количества теплоты.

Дифференциальное определение энтропии основано на Ур.9. Это полный дифференциал термодинамической функции состояния системы S, малое изменение которой, dS, в равновесном процессе равно отношению количеству теплоты, dQ, сообщённого системе или отведённого от неё, к термодинамической температуре, T, системы; S задаёт координату обратимого теплообмена: его изменение является необходимым и достаточным признаком протекания данного процесса. Энтропия как функция системы не объясняет, какое её состояние она описывает. Известно только, что при нагревании системы dS>0, а при охлаждении dS<0.

Основное соотношение термодинамики (второй принцип термодинамики в дифференциальной форме):

$$dS \geq \delta Q/T, \qquad (10)$$

где знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства – к необратимым.

Энтропия S – функция состояния – тепловая координата системы.

Это одна из формулировок второго закона термодинамики: «***в замкнутой системе*** *энтропия не может убывать, а лишь возрастает, пока не достигнет максимума*».

Неравенство Клаузиуса (1854): количество теплоты, полученное системой при любом круговом процессе, делённое на абсолютную температуру, при которой оно было получено (приведённое количество теплоты), неположительно:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \qquad (11)$$

Для необратимых процессов интеграл от приведённой теплоты dQ/T по замкнутому пути всегда отрицателен. Неравенство Клаузиуса – следствие теоремы Карно: кпд частично или полностью необратимого циклического процесса всегда меньше, чем кпд обратимого цикла.

Подведённое количество теплоты, квазистатически полученное системой, не зависит от пути перехода (определяется лишь начальным и конечным состояниями системы). Для квазистатических процессов неравенство обращается в *равенство Клаузиуса:*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i}_{\text{квазистатический процесс}} = 0 \qquad (12)$$

Из дифференциального определения энтропии следует, что при выборе в качестве независимых переменных внутренней энергии U и объёма V частные производные энтропии. связаны с абсолютной температурой и давлением.

Для изолированной системы принцип неубывания энтропии можно выразить как

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \qquad (13)$$

Для неизолированной системы выражение для 2-го закона термодинамики принимает вид:

$$dS \geq 0. \qquad (14)$$

Введение понятия энтропии позволило представить 3-ий закон термодинамики как

$$\lim_{t \to 0} S \to 0. \qquad (15)$$

Внутренняя энергия системы U равна сумме ***свободной*** (F) и ***связанной*** *энергии* (TS):

$U=F+TS$, (16)

где F – изохорно-изотермический потенциал.

При одной и той же температуре связанная энергия тем больше, чем больше энтропия. Энтропия системы – мера обесцененности её энергии (т.е. мера той энергии, которая не может быть превращена в работу). При любом необратимом процессе энтропия увеличивается до того, пока не прекратятся какие-либо процессы, т.е. пока не станет F=0. И это произойдёт при достижении замкнутой системой равновесного состояния, т.е. когда все параметры состояния системы (P, T) во всех точках системы станут одинаковыми. Вывести систему из этого равновесного состояния, можно только затратив энергию извне.

При **изотермических процессах** изменение энтропии равно отношению сообщенной системе теплоты к абсолютной температуре. Например, изменение энтропии при испарении жидкости равно отношению теплоты испарения к температуре испарения при условии равновесия жидкости с её насыщенным паром.

Замечание. Термодинамическое определение энтропии применимо только к квазистатическим процессам (состоящим из непрерывно следующих друг за другом состояний равновесия).

Энтропия определена вплоть до произвольной аддитивной постоянной (т. е. определяется не сама энтропия, а только её изменение). Во 2-ом законе термодинамики начало отсчёта энтропии не определено (произвольно). Абсолютное значение энтропии позволяет установить третье начало термодинамики (теорема Нернста): при стремлении абсолютной температуры к нулю разность ΔS для любого вещества стремится к нулю независимо от внешних параметров. Поэтому энтропию равновесной системы любого вещества при абсолютном нуле температуры можно принять равной нулю (Планк, 1911). За начальную точку отсчёта энтропии принимают S_o=0 при T=0.

Замечание. Многие сейчас сомневаются в справедливости такого подхода.

При абсолютном нуле температуры система находится в основном квантово-механическом состоянии (состояние реализуется единственным микрораспределением). Следовательно, энтропия S при T=0 равна нулю. В действительности при всех измерениях стремление энтропии к нулю начинает проявляться значительно раньше, чем может стать существенной при T=0 дискретность квантовых уровней макроскопической системы, приводящая к явлениям квантового вырождения.

Теорема Нернста: энтропия любой системы при абсолютном нуле температуры всегда может быть принята равной нулю. Эта теорема – устанавливает, что энтропия физической системы при стремлении температуры к абсолютному нулю не зависит от параметров системы и остаётся неизменной.

Из третьего начала термодинамики следует, что абсолютного нуля температуры нельзя достигнуть ни в каком конечном процессе, связанном с изменением энтропии. К нему можно лишь асимптотически приближаться, поэтому третье начало термодинамики иногда формулируют как принцип недостижимости абсолютного нуля температуры.

Замечание. Энтропия связана с теплоёмкостью тела при постоянном давлении, C_p

$S=\int_0^T \frac{C_p dT}{T}$, $\lim_{T\to 0} S=0$. **Следовательно, теплоёмкость C_p также должно быть равна нулю, а поскольку теплоемкость это производная от внутренней энергии, которая никогда не обращается в 0, то температура =0К, в принципе не может быть достигнута. Из этого следует, что вблизи абсолютного нуля температур все реакции, совершающиеся в конденсированных системах, не сопровождаются изменением энтропии, т.е. для них ΔS=0.**

Из третьего начала термодинамики вытекает ряд термодинамических следствий:
При T=0 должны стремиться к нулю теплоёмкости при постоянном давлении и при постоянном объёме, коэффициенты теплового расширения и некоторые аналогичные величины.

Третье начало термодинамики относится только к равновесным состояниям

Справедливость третьего начала термодинамики одно время подвергалась сомнению, но позже было выяснено, что все кажущиеся противоречия (ненулевое значение энтропии у ряда веществ при T=0) связаны с метастабильными состояниями вещества, которые нельзя считать термодинамически равновесными. Третье начало термодинамики часто нарушается в модельных системах. Так, энтропия классического идеального газа стремится к минус бесконечности. Это говорит о том, что при низких температурах идеальный газ должен вести себя не в соответствии уравнению Менделеева - Клайперона. Таким образом, третье начало термодинамики указывает на недостаточность классической механики и статистики и является макроскопическим проявлением квантовых свойств реальных систем. Третье начало термодинамики используется для точного определения энтропии.

Поскольку величина dS является полным дифференциалом, то её интегрирование по любому произвольно выбранному пути даёт разность между значениями энтропии в начальном (A) и конечном (B) состояниях.

Интегральное определение энтропии (для обратимых процессов):

$$\int_A^B dS = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \qquad (17)$$

Интеграл задаёт собственно энтропию – величину изменения (потери) энергии S.

Теплота не является функцией состояния, поэтому интеграл от δQ зависит от выбранного пути перехода между состояниями A и B. Разность энтропий в двух произвольных равновесных состояниях A и B (заданных, например, значениями температур и объемов):

$$\Delta S = S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \qquad (18)$$

Интегрирование здесь ведётся вдоль пути любого квазистатического процесса, связывающего состояния A и B, при этом ΔS не зависит от пути интегрирования.

Для обратимых (квазистационарных) процессов выполняется основное термодинамическое соотношение (фундаментальное уравнение Гиббса):

$$dU = TdS - PdV + \sum_j \mu_j dN_j \qquad (19)$$

где U – внутренняя энергия, P – давление, V – объём, μ – химический потенциал, N – число частиц.

В более общем виде уравнение Гиббса имеет вид

$$dU = TdS - PdV + \varphi de + \sigma d\Omega + mgh + \sum_j \mu_j dN_j \qquad (20)$$

где φ – электрический потенциал, e – заряд, σ – коэффициент поверхностного натяжения, Ω – поверхность, mg – гравитационный потенциал, h – высота, μ_i – химический потенциал, Nj количество вещества. Независимыми являются экстенсивные величины S, V, e, Ω, h, N, а зависимыми T, P, φ, mg, μ.

Для обратимых процессов второе начало термодинамики – закон существования и сохранения энтропии. Работа необратимых процессов всегда меньше, чем обратимых (работа полностью необратимых процессов равна нулю). Для необратимых процессов второе начало термодинамики – закон существования и возрастания энтропии.

Важным классом процессов, в которых величина энтропии постоянна являются адиабатические обратимые процессы.

При **адиабатически обратимом процессе** энтропия не изменяется, так как при адиабатическом расширении газа за счёт увеличения объёма энтропия увеличивается, однако за счёт уменьшения температуры, которое при этом происходит, она уменьшается. Эти две тенденции полностью компенсируют друг друга. В адиабатической системе:

возможны только такие процессы, при которых энтропия либо остаётся неизменной (обратимые процессы), либо возрастает (необратимые процессы). При этом не обязательно, чтобы возрастала энтропия каждого из тел, участвующего в процессе. Увеличивается общая сумма энтропии тел, в которых процесс вызвал изменения. Энтропия может иметь не один, а несколько максимумов, при этом система будет достигать несколько состояний равновесия. Равновесие, которому соответствует наибольший максимум энтропии, называется абсолютно устойчивым (стабильным). Температура всех частей системы в состоянии равновесия одинакова. Значение энтропии в изолированной системе – мера внутренней стабильности. Чем больше численное значение энтропии, тем стабильнее система и тем меньше возможность спонтанных изменений. Каждое изменение состояния также приводит к изменению энтропии. Энтропия определяет меру необратимого рассеивания энергии, а также меру отклонения реального процесса от идеального.

При изотермических процессах изменение энтропии равно отношению сообщенной системе теплоты к абсолютной температуре. Например, изменение энтропии при испарении жидкости равно отношению теплоты испарения к температуре испарения при условии равновесия жидкости с её насыщенным паром; сообщаемое системе количество теплоты равно сумме приращения внутренней энергии dU и совершаемой системой работы $p\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V, \qquad (21)$$

где p – давление, V – объём системы.

Поскольку энтропия показывает, в какую сторону будет двигаться процесс в физическом отношении, то энтропию иногда воспринимают как стрелу времени.

При условии постоянства энергии энтропия системы максимальна, когда все части системы имеют одинаковую температуру – вариационный принцип максимальности энтропии в состоянии равновесия. Энтропия – монотонная выпуклая функция энергии, достигающая максимума в состоянии термодинамического равновесия; состояние системы, принятое за начало шкалы отсчёта энергии, есть одновременно состояние для начальных точек отсчёта температуры и энтропии.

Сообщаемое системе количество теплоты равно сумме приращения внутренней энергии dU и совершаемой системой работы $P\mathrm{d}V$, где P – давление, V – объём системы. Тогда дифференциальное определение энтропии принимает вид

$$dS = \frac{1}{T}\left(dU + PdV\right) \qquad (22)$$

откуда следует, что при выборе в качестве независимых переменных внутренней энергии U и объёма V частные производные связаны с абсолютной температурой и давлением соотношениями:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_V = \frac{1}{T} \qquad (23)$$

Термодинамика Гиббса использует энтропию в качестве независимой термодинамической переменной, а температура вводится как функция внутренней энергии и энтропии.

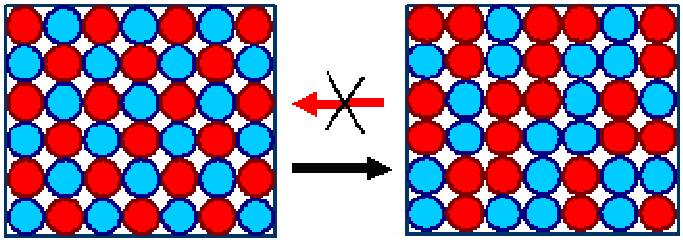


Рис. 6. В замкнутой системе переход от порядку к беспорядку (в данном случае в информационном, а не пространственном смысле), а самопроизвольный переход от беспорядка к порядку невозможен.

Свободная энергия Гиббса, G, – величина, показывающая изменение энергии в ходе химической реакции и определяющая

принципиальную возможность протекания химической реакции; её можно понимать как полную химическую энергию системы:

$G=U+PV-TS$ (24)

где U – внутренняя энергия, P – давление, V – объём, T – абсолютная температура, S – энтропия, TS – потерянная энергия, т.е. энергия, которая не пошла на совершение полезной работы.

Дифференциал энергии Гиббса для системы с постоянным числом частиц, выраженный в собственных переменных – через давление P и температуру T:

$dG=-SdT+VdP$ (25а)

Для системы с переменным числом частиц этот дифференциал записывается так:

$dG=-SdT+VdP+\mu dN$. (25б)

Здесь μ – химический потенциал, который можно определить как энергию, которую необходимо затратить, чтобы добавить в систему ещё одну частицу.

Связь с термодинамической устойчивостью системы

$TdS \geq dU+PdV$ (26)

При P=const, T=const. $d(U+PV-TS) \leq 0$, $d(G) \leq 0$.

В системе при постоянных температуре и давлении энергия Гиббса достигает минимального значения.

Знак и абсолютное значение ΔS важны для суждения о влиянии температуры на химическое равновесие. Возможны самопроизвольные экзотермические процессы ($\Delta G<0$, $\Delta H<0$), протекающие с уменьшением энтропии ($\Delta S<0$). Такие процессы распространены при растворении (например, комплексообразование).

Энергия Гиббса, G, для изотермической реакции

$G=H-ST$ (27)

Если реакция осуществляется при постоянном давлении и температуре (такой процесс называется изобарно-изотермическим), то изменение энергии Гиббса

$\Delta G=\Delta H-T\Delta S$ или $\Delta H=\Delta G+T\Delta S$ (28)

При обратимом и изотермическом проведении процесса ΔG равно по абсолютной величине, но обратно по знаку максимальной полезной работе, которую система производит в данном процессе

$\Delta G=-A_{макс}$ (29)

Полезной работой называется вся производимая в ходе процесса работа за вычетом работы расширения $P\Delta V$.

Характер изменения энергии Гиббса позволяет судить о принципиальной возможности осуществления процесса, его направлении и пределе протекания. При $\Delta G<0$ процесс может протекать – самопроизвольный процесс, при $\Delta G>0$ процесс протекать не может – несамопроизвольный процесс (иными словами, если энергия Гиббса в исходном состоянии системы больше, чем в конечном, то процесс может протекать, если наоборот – то не может). Если же $\Delta G=0$, то система находится в состоянии химического равновесия. При постоянстве T, V и T, P для необратимых процессов $dF<0$ и $dG<0$.

Например, химическое равновесие характеризуется минимальным значением изобарного потенциала

$\Delta G = 0, \quad \Sigma \mu_j dN_j$ (30)

Это – фундаментальное термодинамическое условие химического равновесия.

Замечание. Здесь речь идёт исключительно о принципиальной возможности протекания реакции. В реальных же условиях реакция может не начинаться даже при соблюдении неравенства $\Delta G<0$ (по кинетическим причинам).

Согласно правилу Вант-Гоффа стандартный изобарно-изотермический потенциал ΔG^o зависит от константы равновесия химического процесса, выраженной через парциальные давления, K_p:

$\Delta G^{o}=-RT\ln K_{p}$. (31)

Объединенная запись первого и второго начала термодинамики для обратимых процессов

$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + \delta A$ (32а)

а для обратимых и необратимых процессов:

$T\mathrm{d}S \geq \mathrm{d}U + \delta A$ (32б)

Если система изолирована , то $\delta Q=0$, а $\mathrm{d}S>0$, т.е. для необратимых процессов второе начало термодинамики – это закон существования и возрастания энтропии.

В изолированной системе самопроизвольные процессы сопровождаются увеличением энтропии и протекают до её максимального значения. Далее наступает равновесие, процессы прекращаются: энтропия – критерий термодинамического равновесия. Процессы, в которых энтропия уменьшается, возможны только в открытых системах. Количество возникшей энтропии – мера необратимости процесса.

Теория Гиббса имеет дело с многокомпонентными гетерогенными системами с переменными массами и составами, химическими превращениями и фазовыми переходами. Гиббс исходит из понятия энергии и принципа возрастания энтропии. Он рассматривал массу как термодинамическую переменную и считал, что внутренняя энергия однородной термодинамической системы есть функция энтропии, объёма и масс составляющих веществ (следствие уравнения Гиббса). Внутренняя энергия термодинамической системы и её независимые переменные – величины аддитивные; в состоянии равновесия при неизменности внутренней энергии, объёма и масс составляющих веществ энтропия системы максимальна. Это – **принцип равновесия Гиббса** (одна из составляющих второго начала термодинамики).

Устойчивость состояния равновесия для всех процессов, проходящих при постоянной температуре и давлении, имеет место, если изобарно-изотермический потенциал (потенциал Гиббса) в них достигает минимального значения. Для процессов, происходящих в условиях постоянства других величин: *S* и *V*, *S* и *P*, *T* и *V, U, V* или *H, P* – устойчивое состояние равновесия достигается при минимуме *U, H, F* и *S* соответственно.

4. НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

До сих пор мы рассматривали термодинамику закрытых и изолированных систем, находящихся в равновесных состояниях или вблизи них. Между тем известны многочисленные открытые системы, пребывающие в состояниях, весьма далёких от равновесия.

4.1 Диссипативные структуры, системы и среды

Обсудим теперь вид систем, которые по предложению И.Пригожина называются диссоциативными.

Замечание. В научных текстах циркулируют такие понятия, как динамическая система (задан закон эволюции во времени), диссипативная система (*открытая система вдали от равновесия*), сложная система (система, *которую невозможно разложить на отдельные составляющие*), неравновесная система (*система в метастабильном состоянии*), нелинейная система система (*система, в которой протекают процессы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями*), открытая система (*система, обменивающаяся веществом и энергией с внешним к системе миром*). Трудно понять, чем эти понятия отличаются друг от друга. По крайней мере далее мы будем рассматривать системы, которые одновременно являются диссипативными, динамическими, неравновесными, нелинейными и открытыми. Одним словом займёмся сложными системами с детерминировано хаотичной динамикой.

Открытые системы, содержащие химически реагирующие смеси и удерживаемые от релаксации к термодинамическому равновесию, проявляют способность к характерным коллективным эффектам. В частности, в них самопроизвольно зарождаются макроскопически упорядоченные состояния (диссипативные структуры). Основными результатами теории диссипативных структур является множественность состояний, различающихся по типу пространственной организации, возможность как спонтанных, так и индивидуальных переходов между этими состояниями, универсальное описание динамики становления макроскопической упорядоченности.

Открытые системы, в которых наблюдается прирост энтропии, называют диссипативными. В таких системах энергия упорядоченного движения переходит в энергию неупорядоченного хаотического движения, в тепло. Если замкнутая система (гамильтонова система), выведенная из состояния равновесия, всегда стремится вновь придти к максимуму энтропии, то в открытой системе отток энтропии может уравновесить ее рост в самой системе и есть вероятность возникновения стационарного состояния. Если же отток энтропии превысит ее внутренний рост, то возникают и разрастаются до макроскопического уровня крупномасштабные флюктуации, а при определенных условиях в системе начинают происходить самоорганизационные процессы, создание упорядоченных структур.

Диссипативность – особое динамическое состояние – качественно своеобразное макроскопическое проявление процессов, протекающих на микроуровне. Неравновесное протекание множества микропроцессов приобретает некоторую интегративную результирующую на макроуровне, которая качественно отличается от того, что происходит с каждым отдельным ее микроэлементом.

Диссипативная система – стационарная открытая система или неравновесная упорядоченная структура, возникающая в результате самоорганизации. Она характеризуется спонтанным появлением сложной, зачастую хаотичнойструктуры. Отличительная особенность таких систем — несохранение объёма в фазовом пространстве, т. е. невыполнение Теоремы Луивилля. В диссипативной системе энтропия увеличивается, а энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния. Системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или *с отрицательной диссипацией*. Такие системы рассматривают как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное.

Диссипативные структуры – устойчивые пространственно неоднородные структуры, возникающие в результате развития неустойчивостей в однородной неравновесной диссипативной среде. Термин предложен И. Пригожиным. Примеры: ячейки Бенара (чередование восходящих и нисходящих конвекционных потоков в жидкости), страты в плазме, неоднородные распределения концентраций в хим. реакторах, перистые облака и др. явления. Основы теории диссипативных структур сформулированы А. Тьюрингом (1952).

Диссипативные структуры являются результатом развития собственных внутренних неустойчивостей в системе. Процессы самоорганизации возможны при обмене энергией и массой с окружающей средой, т.е. при поддержании состояния текущего равновесия, когда потери на диссипацию компенсируются извне. Эти процессы описываются нелинейными уравнениями для макроскопических функций (Пригожин первым указал, что системы, далекие от равновесия, должны описываться нелинейными уравнениями).

Понятие *диссипативная структура* – подчёркивает тесную связь между структурой и порядком, с одной стороны, и диссипацией (рассеянием) с другой. В классической термодинамике рассеяние энергии при передаче тепла, при трении и т. п. всегда связывалось с потерями. Концепция диссипативной структуры внесла радикальные перемены в этот подход, показав, что в открытых системах рассеяние энергии становится источником порядка.

Диссипативная среда (поглощающая среда, среда с потерями), распределённая физическая система, в которой энергия упорядоченных (макроскопических) движений или полей необратимым образом переходит (диссипирует) в энергию неупорядоченных (хаотических) движений или полей. Одновременно происходит возрастание энтропии. Консервативная среда (среда без потерь) является идеализацией диссипативных сред со слабой диссипацией. Диссипация энергии в диссипативных средах - следствие общего закона возрастания энтропии, согласно которому любая замкнутая система стремится перейти в состояние термодинамического равновесия, в котором макроскопические движения исчезают. Поэтому фактически диссипативны все реальные среды.

Диссипация энергии - переход части энергии упорядоченных процессов (кинетич. энергии движущегося тела, энергии электрич. тока и т. п.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном счёте - в теплоту. Системы, в которых энергия упорядоченного движения с течением времени убывает за счёт диссипации энергии, переходя в др. виды энергии, например в теплоту или излучение, называются диссипативными. Для учёта процессов диссипации энергии в таких системах при определенных условиях может быть введена диссипативная функция.

Если диссипации энергии происходит в замкнутой системе, то энтропия системы возрастает. Диссипация энергии в открытых системах, обусловленная процессами уноса энергии из системы, может приводить к уменьшению энтропии рассматриваемой системы при увеличении полной энтропии системы и окружающей среды. Диссипация энергии в диссипативных средах обусловлена большим числом индивидуальных актов столкновений частиц среды, находящихся в хаотическом движении. Например, столкновения молекул в газах приводят к необратимым процессам внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности, с которыми связывается диссипация механической энергии. В то же время существуют диссипативные среды, в которых главную роль играют коллективные (и в этом смысле бесстолкновительные) механизмы диссипации энергии.

Различают слабую и сильную диссипацию в зависимости от значений параметра $W/\tau P$, где W – плотность энергии, P – плотность мощности потерь, τ – некоторое характерное время процесса, хотя, строго говоря, понятие запасённой энергии может быть установлено однозначно только в предельном случае среды без потерь (консервативной среды).

При феноменологическом описании необратимых процессов, приводящих к диссипации энергии вводят характеризующие их параметры диссипативной среде: коэффициент сдвиговой, объёмной, динамической и турбулентной вязкости, коэффициент теплопроводности, электрическая проводимость среды и др. В линейных диссипативных систем часто используют спектральное представление полей (движений) в виде суммы или интеграла по гармоническим функциям (составляющим), каждую из которых можно рассматривать как самостоятельно осуществимое движение. Параметры диссипативной среды, ответственные за диссипацию, определяют также и спектр флуктуации физических величин в диссипативной системе.

Особую роль в природных и в искусственно созданных условиях играют неравновесные диссипативные среды – среды, поглощение энергии в которых может компенсироваться поступлением её извне, через внешние поля и потоки (массы, заряда и т. п.); при этом можно различать изначальные и постоянно поддерживаемые отклонения функции распределения частиц по энергиям от равновесной. В неравновесных диссипативных средах возможны неустойчивые движения, обусловленные именно наличием диссипации. Например, вязкость способна оказывать дестабилизирующее воздействие на возмущения в пограничных слоях гидродинамич. течений. В ряде случаев такие неустойчивости приводят к установлению вынужденных колебаний и автоколебаний, т. е. таких самосогласованных колебательных движений, при которых поступление энергии из внешнего (обычно неколебательного) источника компенсируется диссипативными потерями. Например, в турбулентных течениях энергия потока передаётся сначала крупным вихрям, а затем, в результате нелинейных взаимодействий, – вихрям всё более и более мелкомасштабным. Так продолжается до тех пор, пока не вступит в игру вязкость, которая сглаживает градиенты скорости, преобразуя энергию вихрей в тепло. В неравновесных диссипативных средах возможно также образование диссипативных структур.

Диссипация энергии – переход части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и т. д.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном итоге – в тепло, т.е. – рассеяние энергии в неравновесной системе.

В отличие от равновесной структуры, диссипативная структура может существовать лишь при условии постоянного обмена со средой веществом, энергией и информацией. В результате этого обмена она поддерживает свою упорядоченность (низкую энтропию) за счёт усиления беспорядка во внешней среде. Синтез порядка и хаоса в диссипативной структуре имеет два аспекта: а) её "порядок" существует лишь за счёт "хаоса", вносимого в среду; б) благодаря своему "порядку" она приобретает способность адекватно реагировать на хаотические воздействия среды и этим сохранять свою устойчивость; в её упорядоченном поведении появляются "хаотические" черты, но эти черты становятся необходимым условием ее "упорядоченного" существования. В диссипативной системе происходят два противоположно направленных процесса: один (энтропийный) ведёт к разрушению её структуры, беспорядку и хаосу, а другой (антиэнтропийный) – к структуризации системы, росту ее упорядоченности. Таким образом, порядок возникает и существует во взаимосвязи с хаосом (как во внешней среде, так и внутри системы). Взаимосвязь хаоса и порядка – необходимое условие существования диссипативных систем.

Диссипативные структуры образуются в открытых системах, далеких от термодинамического равновесия, в результате флуктуации до макроскопического уровня. Их самоорганизация происходит в результате экспорта энтропии; возникновение пространственного или временного порядка аналогично фазовому переходу; переход в упорядоченное состояние диссипативной системы происходит в результате неустойчивости предыдущего неупорядоченного состояния при критическом значении некоторого параметра, отвечающем точке бифуркации; в точке бифуркации невозможно

предсказать, в каком направлении будет развиваться система, станет ли состояние хаотическим или она перейдет на новый, более высокий уровень упорядоченности.

Простейшие модели диссипативных структур описываются двумя динамическими. переменными *x, y*, зависящими от времени *t* и одной пространственной координаты *r*:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x,y) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = Q(x,y) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \qquad (1)$$

Система (33) описывает кинетику нелинейных процессов с учётом миграции компонент *x* и *y* (в частности, за счёт диффузии) в соседние области пространства. Величины D_x и D_y – коэффициенты диффузии, нелинейные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ описывают прирост и убыль компонент *x* и y. Если диссипативные структуры образуются на отрезке длины *L* ($0 \le r \le L$) с непроницаемыми концами, граничные условия имеют вид $\partial x/\partial r = \partial y/\partial r$ при $r = 0, L$.

Образование диссипативной структуры возможно при следующих условиях.

1) Одна из переменных (например, *x*) является "автокаталитической", другая (*y*) – "демпфирующей". Это значит, что в системе, линеаризованной вблизи стационарного состояния [такого, что $P(\bar{x},\bar{y}) = Q(\bar{x},\bar{y}) = 0$], величина $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}$ положительна, а величина $\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}}$ отрицательна. Величины $\partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$ также должны иметь разные знаки. Такие условия выполняются лишь в термодинамически неравновесных открытых системах; они относятся к области нелинейной термодинамики.

2) Коэффициент диффузии автокатализатора должен быть меньше коэффициента диффузии для демпфера (т. е. $D_x < D_y$).

При выполнении условий (1) и (2) однородное стационарное состояние $x = \bar{x},\ y = \bar{y}$ может терять устойчивость по отношению к гармоническим возмущениям с определённой длиной волны, соизмеримой с *L*. Значения параметров системы (1), при которых декремент затухания упомянутых возмущений обращается в нуль, называются бифуркационными, а само явление – бифуркацией Тьюринга. Система отбирает из внешних возмущений ограниченное число гармонических мод (в предельном случае одну), которые могут нарастать. Их нарастание стабилизируется нелинейными членами функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. При значениях параметров, близких к бифуркационным, образуется плавная гармоническая диссипативная структура. Вдали от точки бифуркациивозникают контрастные диссипативные структуры, которые состоят из узких участков резкого изменения автокаталитической переменной *x*, чередующихся с широкими участками плавного изменения переменных. При обратном соотношении между коэффициентами диффузии ($D_x >> D_y$) в системе возникают автоволны. Все модели диссипативных структур разбиваются на два класса, которые можно привести в соответствие с катастрофами типа "складка" и "сборка". Класс диссипативных структур определяется числом экстремумов функции, являющейся решением уравнения $P(x,\tilde{y}) = 0$.

В случае одного экстремума (складка) контрастная диссипативная структура состоит из ряда узких "пиков" автокаталитической переменной $x(r)$, разделённых длинными участками плавного изменения обеих переменных. Если имеется два экстремума (сборка), то возможно образование диссипативных структур ступенчатой формы, состоящих из широких участков повышенного и пониженного содержания автокатализатора; узкие границы между ними – фронты резкого изменения $x(r)$.

На отрезке длины *L* может существовать несколько различных периодических диссипативных структур, реализация каждого решения зависит от истории возникновения

диссипативной структуры. Контрастные диссипативные структуры весьма чувствительны к малым неоднородностям пространства, поэтому могут возникать достаточно стабильные непериодические структуры (в которых длины плавных участков различны). Теорию диссипативных структур используют для качественного описания явлений самоорганизации в природе. В частности, в биофизике её применяют для описания спонтанного возникновения структуры при развитии организма (морфогенез), пространственно неоднородного распределения особей в экологии и структуры колоний у ряда микроорганизмов.

Возникновение макроскопических структур обусловлено рождением, под действием крупномасштабных флуктуаций, коллективных типов движения (мод), их конкуренцией, подавлением одних и развитием тех, которые наиболее приспособляемы к данным условиям. Сходство процессов возникновения диссипативных структур с фазовыми переходами в равновесных системах дало основание называть их неравновесными (кинетическими) фазовыми переходами. Формальная общность кинетических и равновесных фазовых переходов заключается в кооперативном характере процесса, обусловленном тем, что в системе, обладающей бесконечным числом степеней свободы, находится одна или несколько таких, изменение которых подчиняет себе изменение остальных.

Таким образом, в отличие от неравновесной статистической физики замкнутых систем, где анализируются процессы релаксации, приближение к равновесному состоянию, термодинамика открытых систем рассматривает обратный процесс создания и эволюции все усложняющихся диссипативных структур, когда системы стремятся к менее вероятному состоянию, эволюционируют с уменьшением энтропии. Так как в процессе усложнения требуется все большее число параметров для их описания, то структуры приобретают индивидуальность, неповторимость. В обратном процессе возвращения к положению термодинамического равновесия поведение различных систем становится схожим и, в конце концов, единственным параметром, определяющим функции распределения, становится температура.

Диссипативные структуры можно разделить на временные, пространственные и пространственно-временные, которые могут возникать вдали от равновесия в нелинейной области, если параметры системы превышают критические значения. Примеры временных структур: периодические, колебательные и волновые процессы, Примеры пространственных структур: переход ламинарного течения в турбулентное, переход диффузионного механизма передачи тепла в конвективный, турбулентность, ячейки Бенара (чередование восходящих и нисходящих конвекционных потоков в жидкости), страты в плазме, неоднородные распределения концентраций в химических реакторах, перистые облака, сверхрешётка пор. Примеры пространственно-временных структур: режим генерации лазера и колебательные химические реакции и др.

Диссипативные структуры могут перейти в состояние термодинамического равновесия только путём скачка (в результате неравновесного фазового перехода).

Фазовый переход означает скачкообразное изменение физических свойств при непрерывном изменении внешних параметров. Неравновесный фазовый переход определяется флуктуациями. Они нарастают, увеличивают свой масштаб до макроскопических значений. Возникает неустойчивость и система переходит в упорядоченное состояние. Неравновесные фазовые переходы различной природы имеют общие характеристики. Упорядочение связано с понижением симметрии, что обусловлено появлением ограничений из-за дополнительных связей (корреляций) между элементами системы. Общее свойство кинетических фазовых переходов - наличие фундаментальной макроскопической переменной, позволяющей дать единое описание процесса упорядочения – параметра порядка. По своему физическому смыслу параметр порядка – это корреляционная функция, определяющая степень дальнего порядка в системе.

Диссипативные структуры – это высокоупорядоченные самоорганизующиеся образования в системах, далеких от равновесия, обладающие определенной формой и характерными пространственно-временными размерами, они устойчивы относительно малых возмущений. Важнейшие характеристики диссипативных структур – время жизни, область локализации и фрактальная размерность. Диссипативные структуры отличаются от равновесных тем, что для своего существования они требуют постоянного притока энергии извне, так как по определению, их самоорганизация связана с обменом энергией и веществом с окружающей средой. В диссипативной системе полная механическая энергия при движении убывает, переходя в другие формы, например в тепло. Соответственно диссипация энергии есть переход части энергии упорядоченного процесса в энергию неупорядоченного процесса, а в конечном итоге – в теплоту. Процесс перехода "устойчивость-неустойчивость-устойчивость" следующий. Первоначально устойчивая диссипативная структура, достигая в процессе эволюции системы порога неустойчивости, начинает осциллировать, а возникающие в ней флуктуации приводят к самоорганизации новой, более устойчивой на данном иерархическом уровне диссипативной структуры.

4.2 Термодинамика необратимых процессов

Процессы в открытых системах изучает неравновесная термодинамика и термодинамика необратимых процессов.

Необратимые процессы сопровождаются диссипативными эффектами, сущностью которых является производство (генерирование) энтропии в системе в результате протекания рассматриваемого процесса. Простейшее выражение закона диссипации имеет вид:

$$\overline{T} d_i S = \delta_i Q, \qquad (2)$$

где $\overline{T}$ – средняя температура, $d_i S$ – производство энтропии, $\delta_i Q$ – нескомпенсированная теплота Клаузиуса (теплота диссипации).

Обратимые процессы не сопровождаются диссипативными эффектами.

Микроскопическая теория обратимых и необратимых процессов развивается в статистической термодинамике. Системы, в которых протекают необратимые процессы, изучает термодинамика необратимых процессов.

Неравновесная термодинамика (термодинамика необратимых процессов) — раздел термодинамики, изучающий общие поведения систем вне состояния термодинамического равновесия и необратимые процессы. В таких системах имеют место разнообразные неравновесные процессы (теплопередача, диффузия, электрический ток, химические реакции и т.п.), которые являются необратимыми в термодинамическом смысле.

Открытая система — система, обменивающаяся веществом и энергией с внешним по отношению к системе миром, в отличие от закрытых и изолированных система, в которые и из которых ни вещество, ни энергия не могут войти или выйти. Эта система непрерывно взаимодействует с окружающей средой. Взаимодействие может принять форму информации, энергии или материальных преобразований на границе с системой.

Термодинамика неравновесных процессов направлена на описание эволюции системы во времени и свойств таких систем.

В отличие от физики замкнутых систем, где анализируются процессы релаксации, приближение к равновесному состоянию, термодинамика открытых систем рассматривает процесс создания и эволюции все усложняющихся диссипативных структур, когда системы стремятся к менее вероятному состоянию, эволюционируют с уменьшением энтропии. Так как в процессе усложнения требуется всё большее число параметров для их описания, то структуры приобретают индивидуальность, неповторимость. В обратном процессе возвращения к положению термодинамического равновесия поведение различных систем становится схожим и, в конце концов, единственным параметром, определяющим функции распределения, становится температура.

Условием необратимости процесса является неравенство соответствующих сил, действующих из системы и на систему.

Для неравновесных систем (открытых и закрытых) характерны неравновесные состояния, параметры и свойства которых являются функциями времени и/или пространства. В общем случае неравновесную систему нельзя охарактеризовать едиными значениями T и p.

Пусть f_i – свойство системы, тогда

Однородное состояние $\frac{\partial f_i}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} \neq 0$

Стационарное состояние $\frac{\partial f_i}{\partial r} \neq 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$

Неоднородное и нестационарное состояние $\frac{\partial f_i}{\partial r} \neq 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} \neq 0$

Равновесное состояние $\frac{\partial f_i}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$

Системы в термодинамике неравновесных процессов бывают однородными, непрерывными и прерывными.

Энтропия вне равновесия зависит от тех же величин и переменных, что и в состоянии равновесия (допущение существования локального равновесия). Возможно сопряжение различных термодинамических процессов, самопроизвольно и одновременно протекающих внутри системы. Для некоторых явлений переноса (теплопроводность, диффузия, термодиффузия, электрокинетические и другие явления переноса) потоки пропорциональны градиентам соответствующих сил. Однако это не всегда так.

Непосредственное применение второго начала классической термодинамики к открытым системам, в которых протекают неравновесные (необратимые) процессы, невозможно. Поэтому при описании неравновесных процессов используются другие подходы: 1) разбиение процессов, происходящих в системе, на **внешние** (контролируемые внешними к системе силами) и **внутренние** (самопроизвольные), т.е. раздельное рассмотрение изменений в системе, возникающих из-за действия внешних и внутренних термодинамических сил; 2) **сопряжение** (взаимовлияние) различных термодинамических процессов, самопроизвольно и одновременно протекающих внутри системы; 3) учёт **устойчивости** неравновесного состояния системы.

В неравновесной термодинамике используется понятие локальной величины.

Локальные макроскопические величины – величины, отнесённые к физически бесконечно малым частям системы. Физически бесконечно малая величина – конечная, но относительно малая часть целого. Применимо только для экстенсивных величин. Физически бесконечно малый объём должен быть велик по сравнению с расстоянием между молекулами и очень мал по сравнению с макроскопическими неоднородностями среды.

Локальное термодинамическое равновесие – термодинамическое равновесие, которое реализуется только в физически бесконечно малых частях системы. При этом макроскопические величины, характеризующие систему в целом, становятся функциями координат и времени.

Концепция **локального равновесия** предполагает, что равновесные термодинамические соотношения справедливы для термодинамических переменных, определенных в элементарном объеме, т. е. рассматриваемая система может быть мысленно разделена в пространстве на множество элементарных ячеек, достаточно больших, чтобы рассматривать их как макроскопические системы, но в то же время достаточно малых для того, чтобы состояние каждой из них было близко к состоянию равновесия. Данное предположение справедливо для широкого класса физических систем, что и определяет успех классической формулировки неравновесной термодинамики.

Замечание 1. Подход, основанный на локальном равновесии, – слишком грубое допущение для обширного класса систем и процессов, таких как системы с памятью, растворы полимеров, сверхтекучие жидкости, суспензии, наноматериалы, распространение ультразвука в газах, гидродинамика фононов, ударные волны, разреженные газы и т. д. Ограничения, накладываемые принципом локального равновесия на скорость процесса, снимаются в таких подходах к построению неравновесной термодинамики, как *рациональная термодинамика* и *расширенная неравновесная термодинамика*.

Замечание 2. В равновесной и неравновесной термодинамике вещество рассматривают как непрерывный объект. Явления, связанные с атомно-молекулярной природой вещества и учитывающие конечность числа частиц в локальных процессах, описываются статистической термодинамикой неравновесных процессов.

Замечание 3. Законы термодинамики необратимых процессов применимы во всех случаях, когда любая неоднородность, обусловленная неравновесностью состояния, имеет размер, намного превышающий характерный размер микроскопического строения вещества (средний свободный пробег для газов, среднее расстояние между ближайшими частицами для жидкостей и твёрдых тел).

Различают феноменологическую термодинамику неравновесных процессов и статистическую теорию неравновесных процессов. Напомним, что феноменологические теории описывают явление в общем виде – устанавливаются основные закономерности явления – без использования модельных представлений о строении вещества и молекулярно-кинетическом механизме явления. Молекулярно-статистическое обоснование термодинамики даёт статистическая теория неравновесных процессов. С её помощью обосновывается принцип локального равновесия, и устанавливаются границы его применимости, интерпретируются линейные законы и соотношения взаимности. Статистическая теория позволяет рассчитывать кинетические коэффициенты по молекулярным данным. В то же время эта теория не обладает такой общностью, как равновесная статистическая термодинамика, поэтому наиболее важные результаты получены для конкретных задач, преимущественно в теории газов.

Как уже неоднократно упоминалось, при самопроизвольных процессах в системах, имеющих постоянную энергию, энтропия всегда возрастает. Физический смысл возрастания энтропии сводится к тому, что состоящая из некоторого множества частиц изолированная (с постоянной энергией) система стремится перейти в состояние с наименьшей упорядоченностью движения частиц. Это и есть наиболее простое состояние системы, или термодинамическое равновесие, при котором движение частиц хаотично. Максимальная энтропия означает полное термодинамическое равновесие, что эквивалентно хаосу. Однако в открытой системе энтропия – не просто безостановочное соскальзывание системы к состоянию, лишенному какой бы то ни было организации. При определенных условиях энтропия становится прародительницей порядка.

Феноменологическая термодинамика неравновесных процессов подразделяется на линейную и нелинейную теории. Обычно в термодинамике неравновесных процессов рассматриваются три типа систем: однородные, прерывные и непрерывные. В однородных системах в любой момент времени интенсивные свойства (параметры состояния) – температура, давление, химический потенциал – одинаковы по всему объёму. Прерывные системы состоят из двух и более однородных частей, разделенных либо границей раздела фаз, либо вентилем (например, газы в сосудах, соединенных капилляром), так что свойства меняются скачком при переходе из одной части в другую. Непрерывными называются системы, интенсивные свойства которых – непрерывные функции координат точки внутри системы (полевые переменные) и времени.

Соотношения, характеризующие процессы переноса массы, энергии, заряда, энтропии и т.д., записываются в виде балансовых уравнений. Такие уравнения известны как для непрерывных, так и для прерывных систем. В них фигурируют величины двух типов, одни из которых трактуются как потоки, другие – как силы. Потоки определяют

скорость переноса физической величины (энергии, массы, энтропии и т.д.) через воображаемую единичную площадку или скорость химической реакции. Термодинамические силы порождают потоки. Для процессов переноса в непрерывных системах силы имеют характер градиентов (температуры, концентрации и т.п.), в прерывных – конечных разностей этих величин. Неравновесные процессы подразделяют на скалярные, векторные и тензорные, если потоки и силы являются соответственно скалярами, векторами или тензорами. В зависимости от этого для описания процессов используют скалярное, векторное поле или поле тензора 2-го ранга. К группе скалярных процессов относят химические реакции (скорость реакции в каждой точке внутри системы характеризуется скалярной величиной). К векторным процессам относят теплопроводность и диффузию (с ними связаны поля векторов потоков тепла и вещества). Пример тензорного процесса – вязкое течение.

Эволюция неравновесных систем сопровождается изменениями значений термодинамических параметров всей системы или её частей. Для неравновесных (как открытых, так и замкнутых) систем свойственны неравновесные состояния, параметры которых являются функциями времени и/или пространства. Например, в случае изотропности системы по температуре T и давлению p термодинамический потенциал Гиббса G всей системы - функция не только параметров T и p, но и времени t $G=G(T,p,t)$.

Неравновесную систему с пространственными неоднородностями описывают через **локальные** значения экстенсивных параметров, например потенциала Гиббса $g\left[T(\vec{r},t),\rho(\vec{r},t)\right]$, отнесенные к единичной массе вещества системы. При этом

$$G(t)=\int_V \rho(\vec{r},t)g(T(\vec{r},t),p(\vec{r},t))dV \qquad (3)$$

где $\rho(\vec{r},t)$, $T(\vec{r},t)$, $p(\vec{r},t)$ – плотность, температура и давление вещества в данной точке $\vec{r}$ системы в момент времени t, а интегрирование проводится по всему объёму V системы.

Функция $g(T,p,t)$ – **плотность распределения** изучаемой величины. Возможность разбиения термодинамических процессов, происходящих в системе, на внешние и внутренние основана на существенном различии масштабов времени, характерных для различных типов физических и химических процессов. Обычно неравновесность в системе существует только на **макроскопическом** уровне, в то время как на **микроскопическом** уровне происходят быстрые **процессы термической релаксации** каждой микроскопической части системы к состоянию, термодинамически устойчивому для этой физически малой части системы, причём эта релаксация происходит намного быстрее, чем другие неравновесные процессы.

Хотя значение внутренней энергии при нравновесных преобразованиях в системе остается неизменным, меняется соотношение либо между количественными мерами различных форм движения, либо между энергиями отдельных подсистем.

В системах, не находящихся в состоянии термодинамического равновесия возможны разнообразные неравновесные процессы (теплопередача, диффузия, электрический ток, химические реакции и т. п.), которые являются необратимыми в термодинамическом смысле.

4.3 Линейная неравновесная термодинамика

Частный случай неравновесной термодинамики – линейная неравновесная термодинамика необратимых процессов – рассматривает поведение термодинамической системы, находящейся вблизи равновесия.

Линейная термодинамика необратимых процессов – раздел термодинамики основанный на линейных соотношениях потоков и сил; в термодинамических соотношениях между потоками и движущими силами не учитываются члены порядка выше первого или принимается во внимание зависимость кинетических коэффициентов от термодинамических сил.

Нестационарные необратимые процессы могут протекать как в стационарных, так и нестационарных внешних условиях. В стационарных внешних условиях нестационарный необратимый процесс развивается в том случае, если начальное состояние тела не является стационарным, соответствующим данным условиям. В любой термодинамически изолированной системе необратимые процессы всегда нестационарны. Они возможны только в том случае, если начальное состояние системы не является равновесным, и направлены на установление этого состояния.

Стационарные необратимые процессы возможны только в стационарных внешних условиях. При стационарных необратимых процессах одна величина всё же со временем изменяется. Ею является энтропия, возрастание которой обусловлено вторым началом термодинамики: при любом, даже стационарном, но необратимом процессе всякое тело непрерывно производит энтропию.

Согласно второму началу термодинамики для всякой макроскопической системы можно ввести функцию состояния системы, S – энтропию системы, которая является экстенсивной величиной. Если система состоит из нескольких частей, то полная энтропия системы равна сумме энтропий каждой части.

Изменение энтропии системы при её переходе от произвольного начального состояния до предельного - равновесного

$$\Delta_i S = S - S^0 < 0, \qquad (4)$$

где S^o – энтропия в равновесии, S – энтропия неравновесного состояния.

В изолированной и закрытой системе неравновесный процесс происходит таким образом, что $\lim_{t\to\infty} S = S^0$. Для того, чтобы система была способна к релаксационным процессам, необходимо выполнение условия (4) в некоторый произвольный начальный момент времени. Это обеспечивается разностью уровней какого-либо термодинамического свойства: разностью температур различных подсистем, разностью химических потенциалов отдельных компонент и т.п. Если система не изолирована, то неравновесный процесс возможен и в условиях, когда $\Delta_i S = const$, причём значение *const* определяется условиями на границе системы (стационарные процессы).

К основным задачам термодинамики неравновесных процессов относят исследование балансов физических величин (энергии, массы, энтропии и др.) при переходах, превращениях и диссипации энергии, а также установление законов эволюции макроскопических систем. В этой связи в термодинамике неравновесных процессов появляется и играет важную роль время t – переменная, отсутствующая в равновесной термодинамике (равновесные в термодинамическом смысле процессы протекают бесконечно медленно).

Одной из центральных задач феноменологической **линейной** термодинамики неравновесных процессов является вывод замкнутой системы дифференциальных уравнений в частных производных, полностью описывающих поведение непрерывной системы во времени при протекании в ней неравновесных процессов. Поведение сплошной среды можно считать известным макроскопически, если известна зависимость от времени и координат температуры, плотности, концентрации (массовой доли) веществ и трех компонент вектора центра масс – всего (n+4) функций для n-компонентной системы. Замкнутая система уравнений получается в результате подстановки в балансовые уравнения вместо потоков их выражении по линейным законам. Из такой системы уравнений как частные случаи могут быть выведены все уравнения гидродинамики и теплопередачи.

Коротко остановимся на линейной теории стационарных неравновесных состояний.

Как уже упоминалось, общим свойством диссипативных систем является возрастание энтропии. В процессе эволюции системы к своему предельному состоянию — равновесию энтропия возрастает. Равновесного состояния достигает изолированная система, причём это состояние устойчиво. Помимо равновесных состояний существуют

устойчивые неравновесные состояния, которые могут быть достигнуты специальными условиями на границе системы. Это стационарные состояния. Например, вдоль границы поддерживается заданное распределение температуры. Устойчивые неравновесные, стационарные состояния возможны, очевидно, при нарушении изоляции системы, т. е. в неизолированных системах.

Под стационарным состоянием в термодинамике неравновесных процессов понимается такое состояние системы, которое не меняется во времени, но при котором, однако, наблюдаются макроскопические потоки: в стационарном состоянии параметры не зависят от времени, однако в системе продолжает происходить неравновесный процесс. Условия возникновения стационарных состоянии различны для прерывных и непрерывных систем. Для первых возможно задание и поддержание постоянными внешних сил, для вторых – лишь задание не зависящих от времени граничных условий.

Если изолированная система, выведенная из состояния равновесия и предоставленная самой себе, стремится к некоторому предельному состоянию – равновесию, то для неизолированных систем предельным состоянием является стационарное состояние. Стационарное состояние, к которому эволюционирует система, заведомо является неравновесным состоянием, в котором диссипативные процессы происходят с ненулевыми скоростями, но все величины, описывающие систему (такие как температура, концентрация), перестают в нём зависеть от времени. Не зависит от времени в стационарном состоянии и энтропия системы. Тогда изменение энтропии во времени становится равным нулю. Как уже упоминалось, полное приращение энтропии состоит из двух членов: потока энтропии и положительного производства энтропии. Поступающий из окружающей среды поток тепла или вещества определяет отрицательный поток энтропии, который компенсируется производством энтропии из-за необратимых процессов внутри системы. Отрицательный поток энтропии означает, что система поставляет энтропию внешнему миру. Следовательно, в стационарном состоянии система непрерывно увеличивает энтропию окружающей среды. Важно, что стационарные состояния в прерывных системах при данных внешних силах, препятствующих достижению равновесного состояния, характеризуются минимумом локального производства энтропии s (теорема Пригожина).

Можно показать, что существует функция термодинамических параметров, которая подобно энтропии, отражает поведение системы в окрестности устойчивого предельного неравновесного состояния, а самом стационарном состоянии принимает экстремальное значение. Согласно принципу минимального возникновения энтропии в роли такой функции для линейных процессов выступает производство энтропии σ. По мере приближения системы к стационарному состоянию при заданных постоянных условиях на границе, производство энтропии уменьшается и принимает минимальное значение σ_{min} в стационарном состоянии.

Этот принцип был сформулирован Пригожиным (1947) в виде теоремы.

Теорема Пригожина: стационарному состоянию линейной неравновесной системы (в условиях, препятствующих достижению равновесного состояния) соответствует минимальное производство энтропии. Если таких препятствий нет, то производство энтропии достигает своего абсолютного минимума – нуля. Состояние линейной системы, соответствующее минимальному производству энтропии, стационарно и устойчиво.

Диссипативная функция всегда положительна, за исключением случая термодинамического равновесия, когда равенство нулю всех термодинамических сил обусловливает и равенство нулю диссипативной функции.

Диссипативная функция (функция рассеяния) – функция, вводимая для учёта перехода энергии упорядоченного движения в энергию неупорядоченного движения, в конечном счёте – в тепловую, например, для учёта влияния сил вязкого трения на движение механической. системы. Характеризует степень убывания механической энергии этой системы. Диссипативная функция, делённая на абсолютную температуру, определяет скорость, с

которой возрастает энтропия в системе (производство энтропии). Имеет размерность мощности. Значение диссипативной функции в стационарном состоянии минимально; любое отклонение от стационарного состояния приведёт к его увеличению. В открытых системах диссипативная функция уменьшается во времени, а в стационарном состоянии не изменяется.

Стационарное состояние, к которому стремится система, отличается тем, что в нём перенос энтропии в окружающую среду настолько мал, насколько это позволяют наложенные на систему граничные условия. В этом смысле равновесное состояние соответствует тому частному случаю, когда граничные условия допускают исчезающе малое производство энтропии. Теорема о минимуме производства энтропии выражает свойство “инерции” неравновесных систем: если заданные граничные условия мешают системе достичь термодинамического равновесия (т. е. нулевого производства энтропии), то система переходит в состояние наименьшей диссипации, т.е переходит в состояние, настолько близкое к состоянию равновесия, насколько это позволяют обстоятельства.

Стационарное состояние совместимо с условиями минимального производства энтропии. При постоянных условиях на границе локальный потенциал может только уменьшаться со временем и принимает минимальное значение в предельном – стационарном – состоянии.

Для необратимых процессов интеграл от приведённой теплоты $\mathrm{d}Q/T$ по замкнутому пути всегда отрицателен (неравенство Клаузиуса). Это неравенство – следствие теоремы Карно: кпд частично или полностью необратимого циклического процесса всегда меньше, чем кпд обратимого цикла. Энтропия постоянна при замкнутых обратимых процессах, тогда как в необратимых – её изменение всегда положительно. Поэтому все необратимые процессы, происходящие в природе, сопровождаются уменьшением механической энергии, что в конечном итоге приведёт к тепловой смерти. Впрочем, Вселенная – открытая система и смерть ей не грозит.

Понятие энтропии применимо и к неравновесным состояниям, если отклонения от термодинамического равновесия невелики и можно ввести представление о локальном термодинамическом равновесии в малых, но ещё макроскопических объёмах. Такие состояния можно охарактеризовать термодинамическими параметрами (температурой, давлением и т. д.), слабо зависящими от пространственных координат и времени, а энтропию неравновесного состояния определить как энтропию равновесного состояния, характеризующегося теми же значениями параметров. Энтропия неравновесной системы равна сумме энтропий её частей, находящихся в локальном равновесии.

В открытой системе, не слишком удалённой от равновесия, в стационарном состоянии при неизменных внешних условиях скорость продуцирования энтропии минимальна и положительна.

Энтропия возрастает не только при подводе тепла извне, но и при возникновении её внутренних источников вследствие трения, экзотермических химических реакций, воздействия токами высокой частоты, индукционного нагрева и т.п., т.е. при превращении упорядоченных форм энергии в тепловую. Это отражается в уравнении баланса энтропии (уравнение Клаудиуса). Внутренние необратимые процессы всегда идут в направлении, уменьшающем производство энтропии.

Как уже упоминалось, для обратимого процесса величина работы определяется начальными и конечными состояниями системы и при этом она будет максимальной. Работа необратимого процесса всегда меньше работы обратимого процесса. Поскольку внутренняя энергия – функция состояния, то её изменение не зависит от характера процесса. При необратимом процессе часть изменения внутренней энергии не проявляется в виде работы. Обычно потерянная работа переходит в теплоту, т.е при необратимом протекании процесса возникает дополнительный (внутренний) источник теплоты $\delta Q^*=\delta A^*$ (звёздочкой отмечены некомпенсированные теплота и работа). Физический

смысл неравенства Клаузиуса $dS \geq \delta Q/T$ состоит в том, что в необратимых процессах появляется новый источник теплоты δQ^*.

Для адиабатических процессов, протекающих в открытой системе, в отличие от адиабатических процессов, протекающих в закрытой системе, полное изменение энтропии системы подчиняется уравнению Клаузиуса:

$$dS = d_eS + d_iS, \quad (5)$$

где $d_eS = \delta Q/T$ – "внешнее" изменение энтропии, связанное с равновесным (обратимым) теплообменом с окружающей средой); $d_iS = = \delta Q^*/T$ – "внутреннее" изменение энтропии обусловленное самопроизвольным протеканием в системе необратимых процессов (возрастание энтропии, обусловленное внутренними источниками тепла).

При этом $d_iS \geq 0$, где знак равенства относится к состоянию равновесия или к случаю обратимых (квазистатических) процессов. Величина d_iS играет центральную роль в термодинамике необратимых процессов.

Замечание. Ур.1 – следствие 2-го начала термодинамики. Если после подачи в систему энергии ΔQ её температура не изменилась, то произошли структурные изменения, количественная мера которых – энтропия $d_eS = \Delta Q/T$, $T = const$ – температура, при которой энергия идет на структурные изменения. Если система не равновесна, то распределение температуры в ней может быть неравномерным. Если она ещё и изменяется, то при анализе системы, время процесса разбивают на такие временные промежутки, когда можно считать её (температуру) постоянной, потом суммируют. Саму систему также разбивают на подсистемы, температура в которых в каждой точке одинакова.

Изменение энтропии открытой системы происходит либо за счет её увеличения вследствие самопроизвольного протекания термодинамически необратимых процессов внутри самой системы (d_iS), либо за счёт процессов обмена системы с внешней средой (d_eS). Для химически реакционноспособных систем изменение d_iS может быть вызвано спонтанным протеканием реакций внутри системы, в то время как d_eS – подводом или отводом из системы теплоты и/или некоторых реагентов. Считается, что d_iS и d_eS являются независимы.

В случае адиабатической изоляции, когда $dQ = 0$, $d_eS = 0$, $dS \geq 0$ или $d_iS \geq 0$. Обратимые процессы внутри системы происходят без изменения энтропии ($d_iS = 0$), необратимые преобразования сопровождаются возрастанием энтропии ($d_iS > 0$). Если тепловая изоляция отсутствует, то $d_iS \geq 0$ по-прежнему справедливо, а величина $d_eS = dQ/T$ может быть либо больше, либо меньше нуля в зависимости от характера взаимодействия с внешней средой (знака dQ), так что знак dS оказывается неопределённым.

К основным задачам термодинамики необратимых процессов относят исследование балансов физических величин (энергии, массы, энтропии и др.) при переходах, превращениях и диссипации энергии, а также установление законов эволюции макроскопических систем. В этой связи в термодинамика необратимых процессов появляется и играет важную роль время (t-переменная), отсутствующая в равновесной термодинамике (равновесные в термодинамическом смысле процессы протекают бесконечно медленно). Поэтому вместо Ур.1 рассматривается соотношение, задающее мощность неравновесного процесса (мощность источника энтропии, скорость производства энтропии):

$$\sigma = dS/dt = d_eS/dt + d_iS/dt, \quad (6)$$

Замечание. В термодинамике слабо неравновесных систем таким производство энтропии σ является термодинамическим потенциалом.

Соотношение (5) выполняться в любой момент времени; скорость общего изменения энтропии системы dS/dt равна сумме **скорости возникновения (производства) энтропии** внутри самой системы (d_iS/dt) и **скорости обмена энтропией** между системой и окружающей средой (d_eS/dt). Наряду с скоростью производства энтропии в системе $\sigma \equiv d_iS/dt$ используют связанную с ней величину β – **скорость**

диссипации (рассеяния) энергии в виде теплоты во всём объёме системы. Для системы, изотропной по температуре, $\beta = T\mathrm{d}_i S/\mathrm{d}t = T\sigma$ (где β - диссоциативная функция). При наличии в системе внутренних необратимых процессов $\sigma > 0$ и $\beta > 0$. Для изолированных систем обмен энергией и веществом с окружающей средой невозможен; поэтому изменение энтропии изолированной системы равно производству энтропии $\sigma \geq 0$. В открытой системе, находящейся в стационарном состоянии все параметры, в том числе и энтропия, не меняются во времени. Потоки энергии и вещества, поступающие в систему из окружающей среды, определяют отрицательный поток энтропии $-\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t$, который компенсируется производством энтропии благодаря необратимым процессам, протекающим внутри системы. Отрицательный поток энтропии означает, что в стационарном состоянии система непрерывно увеличивает энтропию окружающей среды.

Замечание. Стационарное состояние, к которому может эволюционировать открытая система, заведомо является неравновесным состоянием, в котором диссипативные процессы происходят с ненулевыми скоростями. Но все величины, описывающие систему (температура, концентрация и др.), перестают в нём зависеть от времени. Не зависит от времени в стационарном состоянии и энтропия системы. В стационарном состоянии производство энтропии неравновесных систем компенсируется отрицательным потоком энтропии из внешней среды $-\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t$, т.е. стационарность диссипативных процессов в системе поддерживается постоянным потоком извне вещества и энергии.

Положительное значение величины $\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t$ отвечает увеличению энтропии системы в результате обмена веществом и/или энергией с внешней средой. Отрицательное значение величины $\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t$ происходит, если отток положительной энтропии от системы во внешнюю среду (например, за счёт оттока из системы теплоты или части вещества) превышает приток положительной энтропии извне. Разбиение величины изменения энтропии открытой системы на две составляющие $\mathrm{d}_i S$ и $\mathrm{d}_e S$ обнаруживает принципиальные различия в термодинамических свойствах открытых и изолированных систем. Поскольку значение величины $\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t$ за счёт процессов обмена с внешней средой может быть как положительным, так и отрицательным, то, несмотря на выполнение неравенства $\mathrm{d}_i S/\mathrm{d}t > 0$, **общая энтропия открытой системы может как возрастать, так и убывать**.

Возможные режимы: 1) $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t > 0$; $\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t > 0$ или $\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t < 0$, но $|\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t| < \mathrm{d}_i S/\mathrm{d}t$; 2) $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t < 0$ $\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t < 0$ и $|\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t| > \mathrm{d}_i S/\mathrm{d}t$; 3) $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t = 0$ $\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t < 0$ и $|\mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t| = \mathrm{d}_i S/\mathrm{d}t$. В стационарном состоянии $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t = \mathrm{d}_e S/\mathrm{d}t + \mathrm{d}_i S/\mathrm{d}t = 0$; $\mathrm{d}S = \mathrm{d}_e S + \mathrm{d}_i S = 0$.

При описании изменения энтропии многофазной полидисперсной системы (6) переписывают в виде:

$$\rho \frac{dS}{dt} = \rho \frac{d_e S}{dt} + \rho \frac{d_i S}{dt}, \qquad (7)$$

где ρ – плотность смеси.

Производство энтропии в открытой системе идёт за счёт таких необратимых процессов, как вязкое взаимодействие в сплошной фазе; распространение тепла в сплошной фазе за счёт процесса теплопроводности; перенос массы в сплошной фазе за счёт процесса диффузии; теплообмен между сплошной и дисперсной фазами; вязкое взаимодействие между сплошной и дисперсной фазами; массообмен между сплошной и дисперсной фазами.

Возможность уменьшения общей энтропии открытой системы даже при наличии в ней необратимых процессов (т. е. при $\mathrm{d}_i S/\mathrm{d}t > 0$) разрешает противоречие между фактом существования живых организмов и необходимостью выполнения второго начала термодинамики. Развитие живых организмов, сопровождаемое упорядочением вещества, с точки зрения классической термодинамики есть самопроизвольное уменьшение энтропии живых систем, и противоречит второму началу термодинамики. Однако данное противоречие лишь кажущееся, поскольку увеличение энтропии определяет направление

самопроизвольных процессов только для изолированных систем, но не открытых, какими являются живые организмы. Уменьшение общей энтропии организмов при их развитии осуществляется при условии $d_eS/dt<0$, $|d_eS/dt|\geq d_iS/dt$ за счёт того, что во внешней среде идут сопряженные процессы с увеличением энтропии этой среды. Уменьшение энтропии живых систем в ходе усвоения пищи и/или энергии солнечного света сопровождается увеличением потенциала Гиббса. При этом приток «отрицательной» энтропии извне используется на увеличение организованности живых структур и одновременную потерю «организованности» ассимилируемых пищевых веществ. Основой жизнедеятельности организмов является динамическая диссипация энергии при деградации пищи, обеспечивающая высвобождение необходимой организму «свободной энергии».

Скорость производства энтропии за счёт протекания внутренних необратимых процессов

$$\sigma_i=d_iS/dt=-(1/T)(dG/dt)>0, \quad (8)$$

или, что то же, $\beta=T\sigma=-dG/dt>0$.

Уравнение баланса для энтропии запишется в следующем виде:

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t}=-div\bar{J}_s+\sigma_s, \quad (9)$$

где s – энтропия на единицу объёма, σ_s – производство энтропии на единицу объёма, J_s – плотность потока энтропии.

Полная производная энтропии по времени:

$$\rho(ds/dt)+\nabla J_s=\sigma\geq 0, \quad (10)$$

где ρ – плотность, s – удельная локальная энтропия, J_s – вектор потока энтропии.

Одновременно $dG/dt<0$, т. е. при спонтанной эволюции системы происходит уменьшение ее потенциала Гиббса $dG<0$.

Скорость производства энтропии и диссипации энергии в открытой системе при постоянных температуре и давлении пропорциональна скорости уменьшения ее свободной энергии (термодинамического потенциала Гиббса).

В частично равновесной (по T и p) системе единственной причиной необратимости, а значит и уменьшения ее потенциала Гиббса ($dG<0$) и увеличения энтропии за счет внутренних процессов ($d_iS>0$), являются химические реакции, самопроизвольное протекание которых приводит к изменению химического состава системы и соответствующему совершению работы.

Скорость производства энтропии в стехиометрическом химическом процессе пропорциональна произведению значений движущей силы процесса (химического сродства реакций) и скорости реакции.

Если в какой-нибудь части открытой системы с пространственной координатой $\vec{r}$ одновременно протекают различные необратимые процессы с общей плотностью приращения энтропии $d_is(\vec{r},t)>0$ в данной точке пространства, то общее приращение энтропии всей системы за счёт внутренних процессов выражается интегралом

$$d_iS=\int\rho(\vec{r},t)d_is(\vec{r},t)dV>0 \quad (11)$$

Величина $\sigma=d_is/dt$ – локальная скорость возникновения энтропии за счёт необратимых процессов, протекающих внутри выделенного элемента объёма, и называется локальным производством энтропии. Положительный знак производства энтропии ($\sigma>0$) определяется только необратимыми процессами (например, диффузией, теплопроводностью, вязкостью). Уравнение баланса энтропии – выражение второго начала термодинамики в термодинамике неравновесных процессов. Принцип локального равновесия утверждает, что каждый малый (но макроскопический) элемент объёма неравновесной в целом системы в любой момент времени находится в состоянии равновесия. Он базируется на той идее, что малые подсистемы релаксируют к равновесию гораздо быстрее, чем вся система. В рамках феноменологической теории этот принцип

носит характер основного постулата как в линейной, так и нелинейной термодинамики неравновесных процессов, т.к. он позволяет использовать фундаментальные. уравнения равновесной термодинамики для исследования неравновесных процессов.

При неизменных внешних условиях в неравновесной системе возможно установление стационарного состояния. Его особенность – неизменность во времени **внутренних** параметров системы и отсутствие (равенство нулю) потоков внутренних термодинамических параметров, характеризующих состояние системы. Значение этих параметров определяется протеканием **внутренних** необратимых процессов, возбуждаемых **внутренними** термодинамическими силами.

Существует взаимосвязь между скоростью производства энтропии за счёт самопроизвольных необратимых процессов внутри открытой системы и установлением в ней стационарного неравновесного состояния. При этом характер изменения во времени величины d_iS/dt позволяет установить наличие эволюции открытой системы к стационарному состоянию. Теория термодинамики неравновесных процессов позволяет ответить на вопрос об устойчивости неравновесных стационарных состояний к внешним возмущениям и самопроизвольным флуктуациям в системе, и даёт возможность исследовать эту устойчивость путём анализа изменения величины скорости производства энтропии при выводе системы из стационарного состояния.

Неравновесные процессы принято подразделять на скалярные, векторные и тензорные, если потоки и силы являются соответственно скалярами, векторами или тензорами. В зависимости от этого для описания процессов используют скалярное, векторное поле или поле тензора 2-го ранга. К группе скалярных процессов относят, в частности, химические реакции (скорость реакции в каждой точке внутри системы характеризуется скалярной величиной). К векторным процессам относят, например, теплопроводность и диффузию (с ними связаны поля векторов потоков тепла и вещества). Примером тензорного процесса служит вязкое течение. Уравнения балансов массы, импульса, полной энергии имеют смысл законов сохранения (баланс внутренней энергии суть первое начало термодинамики.

Принцип локального равновесия утверждает, что каждый малый (но макроскопический) элемент объёма неравновесной в целом системы в любой момент времени находится в состоянии равновесия. Он базируется на той идее, что малые подсистемы релаксируют к равновесию гораздо быстрее, чем вся система. В рамках феноменологической теории этот принцип носит характер основного постулата как в линейной, так и нелинейной термодинамике необратимых процессов, т.к. он позволяет использовать фундаментальные уравнения равновесной термодинамики для исследования неравновесных процессов.

Если в скалярных процессах параметры зависят только от времени (например, в системах с идеальным перемешиванием), то в векторных процессах существенным оказывается распределение концентраций, температур, например, по пространству. Для векторных процессов величина σ в сущности также вычисляется на основе уравнения Гиббса, при этом используется гипотеза о локальном равновесии (в состоянии локального равновесия вещество каждой малой части тела находится в состоянии теплового равновесия, однако равновесия между различными частями еще нет).

При вычислении σ используется уравнение баланса энтропии

$$\rho \frac{ds}{dt} = -div\vec{J}_s + \sigma, \quad \sigma \geq 0, \qquad (12)$$

где σ – производство энтропии на единицу объёма, $\vec{J}_s$ – поток энтропии на единицу поверхности в единицу времени, s – энтропия на единицу массы ($S=\rho s$), ρ – плотность вещества.

Замечание. Энтропия, естественно, никуда не течёт (это виртуальная функция состояния - её нельзя ни задать, ни измерить). Ни потока энтропии, ни его плотности не существует. Если в

открытой системе идёт какой-то необратимый процесс, то в ней возникает локальная неупорядоченность, приводящая к увеличению энтропии в этом месте с распространением на соседние области. Этот процесс можно описать как производство энтропии и поток энтропии в этой области. В систему подаётся энергия, приводящая к упорядочению или усложнению системы (в разных местах системы это может быть разным) - от источника энергии идёт поток отрицательной энтропии (негэнтропии). Могут идти совместно оба процесса – локальное равновесие – потоки положительной и отрицательной энтропии. Процессы упорядочения или усложнения, распространяющиеся в системе (разложение) интерпретируются, как потоки энтропии.

Уравнение Гиббса справедливо для макросистем. Гипотеза о локальном равновесии допускает, что эти уравнения можно применить и к бесконечно малым частям системы. Речь идёт о физически бесконечно малых частях системы, больших по сравнению с междумолекулярными расстояниями. Таким образом, допускается, что применительно к таким малым частям системы можно говорить о таких существенно макроскопических понятиях, как энтропия, производство энтропии и т.д.

В отличие от скалярных процессов, для векторных явлений характерна зависимость параметров не только от времени, но и от положения в пространстве $\vec{r}$.

Реальные системы часто обладают пространственной неоднородностью. В неизотропных и неравновесных в термодинамическом отношении системах возможно возникновение потоков вещества и/или теплоты. При расчете термодинамических сил в системах с пространственной неоднородностью используют понятие **дивергенции**. Под дивергенцией (расхождением) векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке (*x,y,z*) понимают скалярную величину

$$div\vec{a} = \vec{\nabla}\vec{a}^{i} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad (13)$$

где *P, Q, R* – компоненты вектора $\vec{a}(M)$.

Физический смысл дивергенции – это предел отношения **потока** векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую некоторую точку, к объему, ограничиваемому этой поверхностью, когда поверхность стягивается к точке.

$$Tds = du + \rho d\tilde{v} - \sum_{i} \mu_i dc_i, \qquad (14)$$

где s – локальная плотность энтропии; u – локальная плотность внутренней энергии; $\tilde{v} = \rho^{-1}$ – удельный объём (ρ – локальная плотность массы среды); μ_i и c_i – локальные значения химического потенциала и концентрации компонента i.

Помимо построения линейной термодинамики неравновесных процессов как локальной полевой теории, существует альтернативный подход, основанный на поисках и использовании вариационных принципов. Первый такой принцип сформулирован Онзагером (1931) и назван "принципом наименьшего рассеяния энергии". Он может быть записан в локальной форме (т. е. зависящей от положения элементарного объема) в представлении через потоки. Из вариационных принципов получены все уравнения линейной термодинамики неравновесных процессов. Принцип минимума производства энтропии представляет собой эквивалентную форму принципа минимума рассеяния энергии, записанную в энтропийном представлении применительно к стационарным состоянием.

Понятие термодинамической силы (сродства) X_i является центральным для термодинамики неравновесных процессов, так как оно эквивалентно понятию движущей силы конкретного необратимого процесса. Термодинамические силы возникают при пространственной неоднородности системы (например, по температуре, концентрации, давлению и т. п.) или в пространственно-однородных системах с химически реакционно-

способными компонентами, не достигшими термодинамического равновесия за счет соответствующих химических превращений.

Для изучения неравновесных процессов в термодинамике необратимых процессов используют систему уравнений, связывающих потоки, в которых потоки и силы определены так, что производство энтропии выражается стандартной билинейной формой:

$$\sigma = \sum J_i X_i, \qquad (15)$$

где J_i, X_i – соответствующие независимые скалярные потоки и силы, а в случае векторных или тензорных процессов – все декартовы компоненты соответствующих векторных и тензорных величин.

Вблизи термодинамического равновесия, когда движущие силы весьма малы, а сами процессы протекают достаточно медленно, величина термодинамической силы X и сопряженной с ней потоком J связаны простым линейным соотношением

$$J=LX, \qquad (16)$$

где L – некоторый коэффициент, **не зависящий от значения термодинамической силы** X. Обычно термодинамические силы – это градиенты интенсивных термодинамических параметров.

При небольших отклонениях от равновесия термодинамический поток можно представить в виде линейной комбинации термодинамических потоков и термодинамических сил:

$$J_i=L_{i1}X_1+L_{i2}X_2+L_{i3}X_3+...+ L_{ij}X_j+...+L_{iN}X_N, \qquad (17)$$

где X_i – движущая сила, сопряжённая с потоком J_i, определяет прямой эффект; X_j – движущая сила, характеризующая перекрёстный эффект; L_{ik} – феноменологические коэффициенты: L_{ii} – при прямом эффекте, L_{ij} $(i\neq j)$ – при перекрёстном эффекте.

Уравнения, выражающие зависимость потоков от сил, называются термодинамическими уравнениями движения или конститутивными уравнениями.

$$J_i=J_i(X_1,...,X_k) \qquad (18)$$

Феноменологические законы линейной термодинамики устанавливают пропорциональность потоков (J_i) соответствующим обобщенным силам (Xi),выступающим как причина указанных потоков; они записываются в форме

$$J_i = \sum_j L_{ij} X_j \qquad (19)$$

где L_{ik} – феноменологические коэффициенты, которые могут быть рассчитаны методами статистической физики (**коэффициенты взаимности Онзагера).**

Это – **линейные феноменологические уравнения взаимности Онзагера (**линейный закон Онзагера). Они получены разложением потоков J_i в ряд Тейлора по силам X_j вблизи точки равновесия, причем в этом разложении ограничиваются членом первого порядка. Взаимодействующие термодинамические процессы называют **сопряженными.**

Основой термодинамики необратимых процессов служит теория Онзагера, базирующаяся на гипотезе о затухании флуктуаций, согласно которой затухание флуктуаций в среднем происходит в соответствии с макроскопическими законами (18). Макроскопически одинаковые неравновесные (квазиравновесные) состояния системы, естественно, одинаково меняются со временем, независимо от способа получения состояния – в результате внешних манипуляций или спонтанных флуктуаций. Таким образом, при исследовании необратимых процессов мы можем воспользоваться приведенными в предыдущем параграфе результатами.

Первый постулат Онзагера: сумма произведений термодинамических потоков на соответствующие силы представляют собой диссипативную функцию, которая связана со скоростью продуцирования энтропии в единице объёма системы $\sum_i I_i X_i > 0$***, где*** $I_i = \sum_k I_{ik} X_k$

Второй постулат Онзагера: перекрёстные феноменологические коэффициенты равны между собой $L_{ik}=L_{ki}$.

Теорема Онзагера – утверждение о симметричности матрицы феноменологических коэффициентов, связывающей термодинамические потоки, являющиеся количественным описанием необратимых термодинамических явлений и силы, являющиеся количественным описанием причин, вызывающих необратимые термодинамические явления.

Теория Онзагера описывает реальные необратимые процессы, а не состояния.

Примерами феноменологически законов служат *закон Фурье* о пропорциональности теплового потока градиенту температуры, *закон Фика* о пропорциональности потока частиц градиенту концентрации, *закон Ома* и т.п. Возможны перекрестные явления, связанные с наложением различных потоков, типа термоэлектричества (электрический ток, пропорциональный градиенту температуры), термодиффузии и т.п.

Соотношения Онзагера играют важную роль в линейной термодинамике необратимых процессов. Например, если в системе протекают процессы теплопроводности и диффузии, то коэффициенты L_{12} и L_{21} связны с термодиффузией, т.е. с появлением градиента концентрации в первоначально гомогенной фазе под влиянием градиента температур.

Коэффициенты Онзагера $L_{ij}=(J_i/X_j)_{eq}$, (кинетические, феноменологические коэффициенты), являются функциями локальных параметров состояния (температуры, давления, химического потенциала и др.), однако не зависят от потоков и сил, входящих в Подобные Ур.51 зависимости хорошо известны; это – пропорциональность силы тока градиенту электрического потенциала (закон Ома), пропорциональность потока вещества градиенту концентрации (закон диффузии Фика), пропорциональность потока тепла градиенту температуры (закон Фурье). В перечисленных примерах потоки возникают под действием "собственных" (сопряженных) сил, чему в (19) соответствуют коэффициенты L_{ii}. Остальные коэффициенты $L_{ij}(i, j)$ описывают так называемые перекрестные явления, т.е. процессы возникновения потока под действием несопряженной ему силы. Примерами могут служить возникновение потока вещества под действием градиента температуры (термодиффузия) и наоборот – потока тепла под действием градиента концентрации (эффект Дюфура), явление термоэлектричества (эффекты Зеебека и Пельтье), электрокинетические явления и др. эффекты. Для таких процессов границы применимости линейных законов весьма широки. Это, однако, несправедливо для химических реакций, где скорость реакции ("химический поток") пропорциональна химическому сродству (сопряженная сила) лишь в непосредственной близости от химического равновесия.

На значения кинетических коэффициентов L_{ij} налагается ряд ограничений, обусловленных тремя независимыми группами причин. Одна группа причин связана с тем, что локальное производство энтропии s (диссипативная функция) в линейной термодинамике неравновесных процессов представляется квадратичной положительно определённой формой:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} J_i X_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij} X_j \right) X_i = \sum_{i,j} L_{ij} X_i X_j \geq 0 \qquad (20)$$

Положительность квадратичной формы (20) следует из второго закона термодинамики.

В изолированной системе энтропия системы не может убывать. Поэтому если обмен энергией и массой с внешней средой отсутствует, изменение энтропии системы равно производству энтропии:

$$\rho \frac{dS}{dt} = \rho \frac{dS^{(i)}}{dt} = \sigma > 0 \qquad (21)$$

и, следовательно, производство энтропии неотрицательно.

Положительная определенность производства энтропии ($s>0$) приводит к ограничениям:

$$L_{ij} > 0, \quad L_{ii}L_{ij} \geq \frac{1}{4}\left(L_{ij} + L_{ji}\right)^2. \qquad (22)$$

Другая группа ограничений связана с наличием в непрерывной системе элементов пространственной симметрии. Их влияние на характер протекания неравновесных процессов и кинетических коэффициентов составляет содержание принципа Кюри, согласно которому элементами симметрии определяются правила преобразования декартовых компонент потоков и сил при ортогональных преобразованиях координат.

Принцип Кюри (универсальный принцип симметрии) – общий принцип симметрии-диссимметрии, описывающий влияние симметрии на все физические свойства и выражающий симметрический аспект принципа причинности: совпадающие элементы симметрии причин сохраняются в симметрии следствий; причины всегда обладают меньшим или равным числом элементов симметрии, чем действия, которые они вызывают. Действие в одной и той же системе нескольких причин различной природы, каждая из которых обладает своей собственной симметрией, приводит к результату, который сохраняет лишь совпадающие элементы симметрии своих причин, причём следствия могут обладать более высокой симметрией, чем вызвавшие их причины. Если же результат обнаруживает определенное нарушение симметрии, то эта же диссимметрия должна проявляться в причинах, его породивших. Пьеро Кюри показал, что не только кристаллы и другие вещественные объекты, но также поля и вообще все без исключения физические явления могут иметь симметрию, которая описывается семью группами Кюри.

Для изотропных систем, свойства которых одинаковы во всех направлений, вследствие принципа Кюри, не может существовать перекрестных явлений между неравновесными процессами, принадлежащими к разным тензорным группам: потоки и движущие силы разной тензорной размерности не могут быть связаны друг с другом (изотропные системы). Например, причина-скаляр (скалярная сила) не может вызвать векторный поток и наоборот. Линейные соотношения и принцип симметрии феноменологических коэффициентов могут связывать термодинамические силы и потоки лишь одинаковой тензорной размерности. Значения коэффициентов взаимности L_{ij} отличны от нуля, если взаимодействующие термодинамические силы X_j имеют одинаковую пространственную размерность (являются либо скалярными, либо векторными величинами). По тензорной размерности необратимые процессы можно разделить на три группы: скалярные – химические реакции, теплообмен и массообмен между фазами; векторные – диффузия и теплопроводность в сплошной фазе, вязкое взаимодействие между фазами; тензорные – вязкое взаимодействие в сплошной фазе. Движущей силой химических реакций является химическое сродство, а потоком - скорость реакции.

Третья группа ограничений связана с наличием симметрии во времени и носит название соотношений взаимности Онзагера. Согласно этим ограничениям, матрица кинетических коэффициентов симметрична: $L_{ij}=L_{ji}$.

Соотношения взаимности означают, что влияние i-й силы на j-й поток точно такое же, что и влияние j-й силы на i-й поток. Они справедливы, если кинетические коэффициенты характеризуют связь потоков и сил одного типа (соответственно четные или нечетные функции) относительно изменения знаков скоростей частиц, образующих систему. В случае потоков и сил разного типа относительно указанной операции справедливы соотношения Казимира: $L_{ij}=-L_{ji}$. Соотношения взаимности выведены Л. Онзагером (1931) для скалярных процессов в изолированных системах на основе принципа микроскопической обратимости, теории флуктуации и линейных законов (теорема Онзагера).

Замечание. Если кинетические коэффициенты в соотношениях Онзагера постоянны (не зависят от движущих сил и потоков) то справедлива теорема Пригожина. Для реальных

систем она справедлива лишь приближённо, поэтому минимальность производства энтропии для стационарного состояния не является столь общим принципом, как максимальность энтропии для равновесного состояния. Линейные соотношения Онзагера справедливы в достаточно широкой области параметров для процессов теплопроводности и диффузии. Для химических реакций линейное предположение справедливо в узкой области вблизи состояния химического равновесия.

Как уже упоминалось, согласно теореме Пригожина состояние линейной системы, соответствующее минимальному производству энтропии, стационарно и устойчиво, т. е. в области применимости соотношений Онзагера (в линейной области) система с наложенными на неё граничными условиями (открытая система) эволюционирует к стационарному состоянию, характеризующемуся минимальным производством энтропии. Стационарное состояние, к которому необратимо стремится линейная термодинамическая система, должно отличаться тем, что в нём перенос энтропии в окружающую среду настолько мал, насколько это позволяют наложенные на систему граничные условия. В этом смысле равновесное состояние соответствует тому частному случаю, когда граничные условия допускают бесконечно малое производство энтропии. Теорема о минимуме производства энтропии отражает своеобразную инерцию системы: если граничные условия мешают системе достичь состояния термодинамического равновесия, она стремится к состоянию, настолько близкому к состоянию равновесия, насколько это ей позволяют обстоятельства, т.е. обмен веществом и энергией с окружающей средой.

Стационарное состояние может быть устойчивым, или неустойчивым. Под устойчивостью стационарного состояния системы понимают её невосприимчивость к случайным флуктуациям, то есть случайным кратковременным изменениям значений управляющих параметров системы (концентраций компонентов, температуры окружающей среды, скорости протока реагентов через реактор и т.п.). Если стационарное состояние системы является устойчивым, то случайные флуктуации не будут оказывать существенного воздействия на поведение системы. Если же стационарное состояние неустойчиво, тогда под воздействием случайных флуктуаций система самопроизвольно перейдёт в качественно новое состояние. (Способы исследования устойчивости системы мы рассмотрим в следующей главе).

Все термодинамические параметры (процессы) могут быть охарактеризованы собственными значениями скорости (потока) и движущей силы. Однако если в системе одновременно протекает несколько процессов, последние могут оказывать взаимное влияние друг на друга. В результате скорость каждого из них (поток каждого термодинамического параметра), будет зависеть не только от «своей» термодинамической силы, но и от движущих сил всех других процессов, происходящих в системе. Возможность взаимовлияния термодинамических процессов является принципиальной для построения термодинамики неравновесных процессов. Согласно принципу взаимодействия термодинамических процессов Онзагера скорости многих взаимодействующих необратимых процессов могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами:

$$J_i = \sum L_{ij} L_{ij} \nabla a_j , \qquad (23)$$

где a_j – интенсивные термодинамические параметры (T, p, μ и т. д.), а L_{ij} – коэффициенты, не зависящие от значения градиентов параметров a_j, т. е. термодинамических сил $X_j \sim \nabla a_j$.

Линейные соотношения между скоростью процесса и движущей силой справедливы в случае простой диффузии веществ или переноса теплоты за счет теплопроводности. Так, по закону Фика $d_c/dt = J_c = -D\,\nabla c$ имеем $\bar{J}_c \propto \vec{\nabla}\frac{\mu}{T} \propto \bar{X}_c$, а по закону Фурье $\frac{dQ}{dt} = J_Q = -\lambda \nabla T$ имеем $\vec{J}_Q \propto T\vec{\nabla} T \propto \vec{X}_Q$. Здесь c – концентрация

диффундирующего вещества, Q – количество переносимой теплоты, а коэффициенты D и λ не зависят от градиентов величин c и T. Вблизи термодинамического равновесия сходные линейные соотношения имеют место и для элементарных химических процессов, а также брутто-процессов, скорость которых пропорциональна

Если σ – локальное производство энтропии, производство энтропии в физически бесконечно малой части системы, то производство энтропии для всей системы выражается интегралом $\int_v \sigma dV$. В случае непрерывных систем стационарному состоянию отвечает минимум глобального производства энтропии (принцип минимум производства энтропии):

$$\left\{\frac{d_i S}{dt} = \int_V \sigma dV\right\}_{стац} = \min \qquad (24)$$

Если в системе одновременно протекают несколько процессов,

$$\beta = T\frac{d_i S}{dt} = \sum_k J_k X_k > 0 \qquad (25)$$

При $J_k = \sum_j L_{kj} X_j$ и $L_{kj}=L_{jk}$ и общая скорость диссипации энергии

$$\beta = T\frac{d_i S}{dt} = \sum_k \sum_j L_{kj} X_j X_k > 0. \qquad (26)$$

Данное **положительно определенное квадратичное** выражение называют **диссипативной функцией Рэлея–Онзагера**. В силу того что при протекании в системе необратимых процессов величина $\beta = T\frac{d_i S}{dt}$ всегда положительна, а значения независимых термодинамических сил произвольны, кроме соотношений взаимности для коэффициентов Онзагера справедливы также соотношения $L_{ij} \geq 0$; $L_{ij} > -\frac{L_{ij}X_i^2 + L_{jj}X_i^2}{2X_i X_j}$.

Знак недиагональных коэффициентов взаимности может быть произвольным. Обычно размерности термодинамических сил и коэффициентов Дж·с$^{-1}$. В линейном приближении скорость производства энтропии (или диссипации энергии) можно выразить и как квадратичную функцию потоков J_i:

$$\beta = T\frac{d_i S}{dt} = \sum_k \sum_j \tilde{L}_{kj} J_k J_j. \qquad (27)$$

Суммирование здесь ведётся по всем как «внутренним» (т. е. зависящим только от внутренних необратимых процессов), так и «внешним» (т. е. зависящим не только от внутренних процессов) переменным. К установлению стационарного состояния с $\bar{J}_i = 0$ для потока внутренних параметров a_i приводят **изменения внутренних** термодинамических сил X_i. В области линейной термодинамики условие достижения стационарного состояния по некоторой внутренней переменной i, т. е. равенство нулю соответствующего этой переменной потока $\bar{J}_i = 0$ и условие $\left(\frac{\partial \beta}{\partial X_i}\right)_{X_{j,j\neq i}} = 0$ эквивалентны.

Поскольку величина β – положительно определенное квадратичное выражение во всей допустимой области изменения независимого переменного X_i, то равенство нулю производной $(\partial\beta/\partial X_i)=0$ является **условием минимума** функции $\beta(X_1, X_2, \ldots X_m)$ по

переменной X_i. Аналогично получаем условия стационарности и для потоков других внутренних переменных. Например: $\bar{J}_k = 0$; $\left(\frac{\partial \beta}{\partial X_k}\right)_{X_{j,j\neq k}} = 0$

Соотношения взаимности Онзагера играют важную роль в термодинамике неравновесных процессов и находят использование в анализе мембранных, химических, каталитических и биологических систем вблизи термодинамического равновесия. Так, по этим отношениям и экспериментально определенным значениям коэффициентов L_{jk}, устанавливают количественную взаимосвязь между одновременно протекающими в системе процессами даже в отсутствие детальной информации о механизме рассматриваемых процессов. В ряде случаев (например, для сопряженных химических реакций) коэффициенты взаимности можно вычислить, исходя из конкретного механизма рассматриваемого процесса. Для многих типов химически реакционноспособных систем соотношения, аналогичные феноменологическим уравнениям взаимности Онзагера, справедливы и вдали от термодинамического равновесия.

Таким образом, вывод об эквивалентности условий минимума функционала ***P*** и достижения скорости справедлив для произвольной системы, в которой протекает любое количество процессов, связанных между собой линейными соотношениям взаимности Онзагера. При неизменных внешних условиях в стационарном состоянии открытой системы, близкой к термодинамическому равновесию, скорость производства энтропии является постоянной, положительной и минимальной. По мере самопроизвольной эволюции системы к стационарному состоянию возможно лишь **монотонное** уменьшение величины β, т. е. $d\beta/dt<0$.

Принцип минимума скорости производства энтропии является количественным критерием для определения направления самопроизвольных изменений в открытой системе, т. е. критерием её эволюции.

Критерий эволюции для линейных систем: внутренние неравновесные процессы всегда идут (развиваются) в направлении, уменьшающем производство энтропии.

В изотермической системе этот принцип эквивалентен принципу минимума скорости диссипации энергии. Если система находится вблизи равновесия, то характер изменения скорости прироста энтропии (или скорости «диссипации энергии») позволяет обнаружить переход системы в стационарное состояние. По мере движения системы из некоторого исходного состояния к стационарному состоянию величина $\beta=T d_iS/dt$ монотонно уменьшается. Однако значение β остается при этом положительным и постепенно приближается к минимальному постоянному положительному значению, которое отвечает достижению конечного стационарного состояния.

Вблизи термодинамического равновесия условием устойчивости стационарного состояния является неравенство $\delta\beta>0$ при любом **возмущении внутренних переменных**, значения которых определяются условием стационарности системы. **Любое отклонение от устойчивого стационарного состояния вызывает увеличение скорости производства энтропии.** Данный критерий устойчивости стационарного состояния выполняется для открытых систем, в которых значения потоков J_k и обобщенных термодинамических сил X_k для происходящих термодинамических процессов связаны соотношением взаимности Онзагера. Если в результате случайной флуктуации величины термодинамической силы X_i около её стационарного значения система незначительно отклонится от стационарного состояния, то вследствие справедливости неравенства $dP/dt<0$ в ней должны произойти такие внутренние изменения, которые повлияют на значение X_i и вновь возвратят систему к исходному стационарному состоянию.

Таким образом, если система находится в стационарном состоянии, то она не может самопроизвольно выйти из него за счет внутренних необратимых изменений. Это означает, что данное стационарное состояние является устойчивым, а самопроизвольное

возвращение в него при незначительных возмущениях аналогично проявлению принципа Ле-Шателье, являющемуся следствием устойчивости термодинамически равновесных состояний.

Принцип Ле Шателье – если на систему, находящуюся в устойчивом равновесии, воздействовать извне, изменяя какое-либо из условий равновесия (температура, давление, концентрация, внешнее электромагнитное поле), то в системе усиливаются процессы, направленные на компенсацию внешнего воздействия. Принцип применим к равновесию любой природы: механическому, тепловому, химическому, электрическому. Если внешние условия изменяются, это приводит к изменению равновесных концентраций веществ. В этом случае говорят о нарушении или смещении химического равновесия.

Из монотонного характера $d\beta/dt<0$ изменения величины β во времени в ходе эволюции системы следует, что **вблизи термодинамического равновесия в системе невозможны периодические автоколебательные процессы**. В самом деле, при эволюции системы по замкнутым траекториям меняющиеся термодинамические параметры системы (концентрации, температура и т. п.), а значит, и величины J_i и X_j стали бы периодически принимать одни и те же значения, что несовместимо с однонаправленным монотонным во времени изменением β и её постоянством в стационарной точке.

Вывод закона действующих масс из общих принципов термодинамики неравновесных процессов – важный результат, поскольку тем самым устанавливается взаимное соответствие между двумя областями физической химии – химической термодинамикой и химической кинетикой. Молекулярно-статистическое обоснование термодинамики неравновесных процессов дает статистическая теория неравновесных процессов. С её помощью обосновывается принцип локального равновесия и устанавливаются границы его применимости, интерпретируются линейные законы и соотношения взаимности. Статистическая теория позволяет рассчитывать кинетические коэффициенты по молекулярным данным. В то же время эта теория не обладает такой общностью, как равновесная статистическая термодинамика, поэтому наиболее важные результаты получены для конкретных задач, преимущественно в теории газов.

В термодинамике необратимых процессов проблема устойчивости состояний более важна, чем в термодинамике равновесных состояний.

Устойчивое состояние – состояние системы, которое после выведения системы из равновесия под влиянием малого воздействия извне, система возвращается в исходное равновесное состояние после прекращения этого воздействия.

В результате внешнего воздействия система может перейти из состояния равновесия в некоторое произвольное, но возможное (виртуальное) состояние, не произведя при этом полезной работы. Переход системы в виртуальное состояние сопровождается изменением внутренней энергии системы на величину ΔU и параметров состояния δV и δS. Если исходное состояние системы неустойчиво, то переход в виртуальное состояние вполне возможен. Тогда величины ΔU, δV и δS удовлетворяют неравенству

$$\Delta U - T_0\delta S + P_0\delta V \le 0, \qquad (28)$$

где P_0 и T_0 – параметры окружающей среды, находящейся в равновесии с системой.

Если состояние системы устойчиво, то никакие виртуальные изменения параметров не выведут систему из этого состояния и величины ΔU, δV и δS могут удовлетворять только обратному неравенству

$$\Delta U - T_0\delta S + P_0\delta V > 0, \qquad (29)$$

Полное изменение внутренней энергии можно представить в виде ряда Тейлора:

$$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!}\delta^2 U + \frac{1}{3!}\delta^3 U + \ldots, \qquad (30)$$

где $\delta^2 U$, $\delta^3 U$... – вторая, третья и т.д. вариации внутренней энергии.

Так как в состоянии равновесия $T=T_0$ и $P=P_0$, общее условие устойчивости равновесного состояния определяется через высшие вариации внутренней энергии

$$\frac{1}{2!}\delta^2 U + \frac{1}{3!}\delta^3 U + \ldots > 0. \qquad (31)$$

Условия устойчивости состояния

$$\delta^2 U > 0, \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_S < 0, \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0 \text{ или } \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) < 0 \qquad (32)$$

Таким образом, при уменьшении (увеличении) объёма давление в системе должно возрастать (убывать) и, наоборот, при повышении (уменьшении) давления системы объём системы должен уменьшаться (возрастать). Это условия термической и механической устойчивости. Феноменологическим законом, объединяющим все критерии устойчивости является принцип Ле-Шателье.

В определённых внешних условиях термодинамические системы могут существовать в неравновесных (метастабильных) состояниях, если они удовлетворяют условиям термической и механической устойчивости. Состояния, в которых вторая вариация термодинамических потенциалов отрицательна, являются совершенно неустойчивыми. В таких состояниях термодинамические системы существовать не могут, поскольку в них полностью нарушаются условия механической и термической устойчивости. Однако существуют особые условия термодинамических систем, в которых обращается в нуль не только первая вариация термодинамических потенциалов, но также вторая и третья, и только четвёртая вариация положительна. Такие предельные состояния систем, лежащие на грани между устойчивостью и полной неустойчивостью, называются критическими состояниями. В критических состояниях резко повышается роль флуктуаций – малых отклонений от термодинамического равновесного состояния, обусловленных её атомно-молекулярной природой.

Критическое состояние – предельное состояние равновесия двухфазной системы, в котором обе сосуществующие фазы становятся тождественными по своим свойствам. На диаграммах состояния критическому состоянию соответствуют предельные точки на кривых равновесия фаз – критические точки. Согласно правилу фаз Гиббса, критическая точка изолирована в случае двухфазного равновесия чистого вещества, а в случае, например, бинарных (двухкомпонентных) растворов критические точки образуют критическую кривую Значения параметров состояния системы, соответствующие критическому состоянию, называются критическими – критическое давление, температура, объём концентрация и т.д. С приближением к критическому состояния различия в плотности, составе и других свойствах сосуществующих фаз, а также теплота фазового перехода и межфазное поверхностное натяжение уменьшаются и в критической точке равны нулю.

4.4 Нелинейная неравновесная термодинамика

Нелинейная термодинамика неравновесных процессов изучает поведение термодинамической системы, находящейся вдали от состояния равновесия. Она представляет собой развитие теории необратимых процессов применительно к системам, находящимся вдали от термодинамического равновесия. Нелинейная термодинамика является по существу термодинамикой химических процессов. В нелинейной термодинамике неравновесных процессов сохраняет своё значение принцип локального равновесия. Балансовые уравнения составляются так же, как в линейной термодинамике неравновесных процессов, однако связь между потоками и силами носит нелинейный характер. Типичным примером являются химические реакции, которые адекватно могут быть описаны лишь методами термодинамики неравновесных процессов.

Векторные процессы называют нелинейными, если коэффициенты, характеризующие процесс и определяемые свойствами среды, зависят от термодинамических параметров. Например, в случае нелинейной теплопроводности коэффициент теплопроводности зависит от температуры. Термодинамическое описание векторных процессов обычно проводят методом локального потенциала. Для скалярных процессов нелинейность выражается в нелинейной зависимости потоков от термодинамических сил во временной области процесса, далёкой от равновесия. Такого рода нелинейность типична в кинетике сложных химических реакций.

Поведение систем в нелинейной области имеет ряд принципиальных отличий в сравнении с областью, где действуют линейные соотношения. 1) В системе перестают быть справедливыми соотношения взаимности Онзагера, появляется анизотропия свойств, даже если в равновесном состоянии система изотропна. 2) В то время как равновесные состояния и стационарные состояния вблизи равновесия описываются в терминах экстремумов некоторых термодинамических потенциалов, то в областях, сильно удаленных от равновесия, таких потенциалов найти не удается. 3) Если вблизи равновесия описание систем в термодинамике проводится через статистические средние физические величины, а флуктуации характеризуют спонтанные отклонения от средних, то вдали от равновесия уже флуктуации определяют значения средних. Вдали от равновесия фундаментальной для описания эволюции системы величиной является не производство энтропии, а скорость его изменения, точнее, та часть скорости изменения производства энтропии, которая связана с изменением термодинамических сил.

Замечание. В рамках термодинамики необратимых процессов определить конкретные границы применимости линейных соотношений невозможно. Эксперимент показывает, что для процессов диффузии и теплопроводности линейные соотношения справедливы в достаточно широкой области параметров. Для химических реакций линейные соотношения оказываются справедливыми только в очень узкой области, вблизи состояния химического равновесия. Тем не менее, если для описания состояния системы (независимо от того, какие процессы в ней протекают) применимы линейные соотношения, то это состояние условно характеризуют, как близкое к равновесию, а систему называют линейной.

Если в линейной области (т.е. в области применимости соотношений Онзагера) ситуация остаётся такой же, как и в равновесной, то в нелинейной области она меняется коренным образом: обобщение теоремы о минимуме производства энтропии для систем, в которых потоки уже более не являются линейными функциями сил, оказалось невозможным. Вдали от равновесия система по-прежнему может эволюционировать к некоторому стационарному состоянию, но это состояние уже не определяется с помощью надлежаще выбранного потенциала, аналогичного производству энтропии.

Как уже упоминалось, линейная неравновесная термодинамика описывает стабильное, предсказуемое поведение систем, стремящихся к минимальной активности в соответствии с питающими их внешними потоками. Из того, что линейная термодинамика допускает описание с помощью потенциала (а именно, производства энтропии), следует: при эволюции к равновесию или к стационарному состоянию система "забывает" начальные условия. Каковы бы ни были начальные условия, система рано или поздно перейдёт в состояние, определяемое граничными условиями. В результате реакция такой системы на любое изменение граничных условий становится предсказуемой.

Термодинамика необратимых процессов в традиционной форме применима в основном только к линейным процессам, протекающим, как правило, в окрестности термодинамического равновесия. В этой области скорость неравновесного процесса пропорциональна термодинамическим силам, выражение для которых строится с учетом членов второго порядка в разложении по термодинамическим параметрам отклонения энтропии от равновесия. Закономерностям линейной неравновесной термодинамики во всей временной области подчиняются процессы переноса, а в химической кинетике — лишь мономолекулярные реакции, да и то только при достаточно больших давлениях или

концентрациях. Реакции более высокого порядка описываются существенно нелинейным законом – законом действующих масс, который не может быть обоснован средствами линейной теории.

До тех пор пока состояние определяется минимумом потенциала (производства энтропии), его устойчивость гарантирована. Флуктуации могут вывести систему из этого минимума, но второе начало термодинамики вынудит её вернуться обратно: существование термодинамического потенциала делает систему невосприимчивой к флуктуациям. Потенциал описывает стабильный мир, в котором системы, эволюционируя, переходят в статичное состояние, установленное для них раз и навсегда. Но когда термодинамические силы, действуя на систему, становятся достаточно большими и вынуждают её покинуть линейную область, гарантировать устойчивость стационарного состояния или его независимость от флуктуаций невозможно. За пределами линейной области устойчивость уже не является следствием общих законов физики. Необходимо специально изучать, каким образом стационарное состояние реагирует на различные типы флуктуаций, создаваемых системой или окружающей средой. Неравновесная термодинамика не даёт ответа на вопрос, каким образом происходит потеря устойчивости прежнего состояния и переход к новому, но она позволяет выяснить, какие причины побуждают систему к этому переходу.

Для систем с фиксированными граничными условиями установлено фундаментальное неравенство:

$$\frac{d_X \beta}{dt} = \int dV \sum_i J_i \frac{dX_i}{dt} \le 0. \qquad (33)$$

Оно называется универсальным критерием эволюции" т. к. не требует предложений о характере связи между потоками и силами. Знак равенства отвечает нахождению системы в стационарном состоянии, знак неравенства – эволюции системы к этому состоянию.

Важнейшим результатом нелинейной термодинамики неравновесных процессов явилось открытие возможности спонтанного возникновения в системах, удаленных от равновесия, устойчивых пространственных и временных структур. Оказалось, что в условиях сильной нелинейности во взаимосвязи термодинамических параметров в открытых сильнонеравновесных системах имеет место самоорганизация. Возникающие здесь структуры называют диссипативными; им соответствуют те решения дифференциальных уравнений для потоков, которые лежат за пределами термодинамической ветви решений. Диссипативные структуры существуют благодаря обмену энергией и веществом между системой и окружением. Они характеризуются низкой энтропией, к ним не применим принцип Больцмана, согласно которому состояние с большей энтропией более вероятно. Типичный пример временной упорядоченности - возникновение периодических режимов в гомогенных химических реакциях (колебательные реакции).

Развитие теории термодинамики сильнонеравновесных систем было начато работами И. Пригожина и П. Гленсдорфа (1954). Особый интерес к этой области возник после того, как было обнаружено, что при наличии сильной нелинейности во взаимосвязи термодинамических параметров в таких системах в ряде случаев возможна спонтанное возникновение упорядоченных структур, т. е. **самоорганизация** сильнонеравновесных открытых систем. Примерами являются: образование ячеистой структуры в неоднородно нагретом горизонтальном слое жидкости, возникновение турбулентности, вихрей, «осциллирующие» каталитические реакции. Во всех явлениях образования упорядоченных структур при протекании необратимых процессов в сильнонеравновесных открытых системах общим является совместное (кооперативное) движение или химическое превращение больших групп молекул. Иногда для подчеркивания особенностей таких процессов используют термин «синергетика», физическая природа

которой состоит в том, что в нелинейной области, вдали от равновесного состояния, система теряет устойчивость и малые флуктуации приводят к новому режиму – согласованному движению или превращению сразу многих частиц.

При рассмотрении нелинейных эффектов в различных областях физических явлений в теории широко практикуется формальная запись уравнений в том же виде, как и для линейных эффектов, но не с постоянными коэффициентами, а такими, что нелинейность как раз и проявляется через эти коэффициенты (И.Пригожин и П.Гленсдорф). Вдали от равновесия фундаментальной для описания эволюции системы величиной является не производство энтропии, а скорость его изменения, точнее та часть скорости изменения производства энтропии $d_X\beta$, которая связана с изменением термодинамических сил. Для систем с фиксированными граничными условиями установлено фундаментально неравенство:

$$\frac{d_X\beta}{dt} = \int dV \sum_i J_i \frac{dX_i}{dt} \le 0. \qquad (34)$$

Оно называется универсальным критерием эволюции, т. к. не требует предложений о характере связи между потоками и силами. Знак равенства отвечает нахождению системы в стационарном состоянии, знак неравенства-эволюции системы к этому состоянию.

Важно, что неравновесность приводит к возникновению структур нового типа — диссипативных структур, весьма важных для понимания когерентности и организации в неравновесном мире, в котором мы живём: неустойчивость однородного (дифференцирующая сила) – творец организации. Эти структуры называются диссипативными; им соответствуют те решения дифференциальных уравнений для потоков, которые лежат за пределами термодинамической ветви решений. Диссиативные структуры существуют благодаря обмену энергией и веществом между системой и окружением. Они характеризуются низкой энтропий, к ним не применим принцип Больцмана, согласно которому состояние с большей энтропией более вероятно. Типичный пример временной упорядоченности – возникновение периодических режимов в гомогенных химических реакциях.

Возможность самоорганизации в сильнонеравновесных системах имеет важнейшее значение для катализа и биологии. Это связано с тем, что любые функционирующие катализаторы, а также живые организмы представляют собой сильно неравновесные химически реакционноспособные системы, в которых могут существовать большие градиенты концентраций химических веществ, а иногда и температуры, давления, электрического потенциала и т. п. Вывод о возможности самоорганизации материи в условиях сильной неравновесности выявило путь, по которому законы природы приводят к появлению определенного порядка в равновесных системах и затем к усложнению и развитию образовавшихся упорядоченных структур. В сложных сильнонеравновесных системах с особыми каталитическими свойствами их элементов возможно возникновение процесса записи информации в виде некоторого молекулярного кода. Такой процесс делает возможным самовоспроизведение этих каталитических структур. Нелинейная неравновесная термодинамика - неотъемлемый элемент физико-химического обоснования всех гипотез о путях возникновения и эволюции жизни.

Нелинейная термодинамика неравновесных процессов изменила статус второго начала термодинамики. Оказалось, что в открытых системах вдали от равновесия это начало определяет не только необходимость разрушения имеющихся структур, но и возможность создания новых. Отражая необратимость всех реальных процессов, второе начало выражает закон развития материи. Такое понимание второго начала термодинамики снимает кажущееся противоречие между декларируемой этим началом необходимостью возрастания энтропии и, следовательно, беспорядка в изолированной системе и теорией биологической эволюции, предполагающей возникновение все более

сложных и самовоспроизводящихся структур в живой природе. Причины возможности эволюции живых систем заключены не только в том, что живая система является открытой, поскольку вместе с окружающей средой она образует закрытую систему, энтропия которой также возрастает при усложнении живой системы, но и в свойстве материи самоорганизовываться в условиях больших потоков энергии и вещества.

При самоорганизации некоторое время существует диссипативная структура, нарушающая симметрию: если стационарное состояние $X_1 > X_2$ возможно, то симметричное состояние с $X_2 > X_1$ также возможно и ничто в макроскопических уравнениях не указывает на то, какое из двух состояний реализуется. Малые флуктуации уже не могут обратить ситуацию. Системы с нарушенной симметрией, коль скоро они возникают, устойчивы.

В диссипативных структурах взаимосвязаны: функция, выражаемая физическими или химическими уравнениями, пространственно-временная структура, возникающая из-за неустойчивостей, и флуктуации, “запускающие” неустойчивости. Взаимодействие между этими тремя аспектами приводит к весьма неожиданным явлениям, в том числе к возникновению порядка через флуктуации.

Процесс самоорганизации представляет собой последовательность неравновесных фазовых переходов. Переходы возникают при изменении значений одного или нескольких управляющих – бифуркационных – параметров. Полагают, что в процессе самоорганизации энтропия системы уменьшается. Это, однако, не подтверждено ни расчётами, ни экспериментом. Вопрос остаётся открытым.

Многие химические превращения происходят вдали от термодинамического равновесия, т. е. вдали от области применимости соотношений линейной неравновесной термодинамики. Для их описания приходится использовать не столько термодинамические методы, сколько прямые кинетические методы описания системы, на базе дифференциальных уравнений. Для эволюции динамических систем, описываемых жесткими кинетическими схемами с детерминированным поведением во времени, понятие скорости производства энтропии, в отличие от систем вблизи равновесия, не имеет решающего значения. Действительно, траектории эволюции таких систем жестко детерминированы и конечные состояния в ходе такой эволюции обычно нельзя предсказать путем сравнения статистической упорядоченности начального и конечного состояния системы. Возможность и пути достижения того или иного конечного состояния определяются начальными условиями и конкретным набором дифференциальных уравнений, описывающих кинетику превращений.

Кинетической особенностью систем, функционирующих вдали от термодинамического равновесия является **кинетическая** необратимость как всего процесса, так и отдельных его стадий.

Нахождение термодинамических критериев устойчивости стационарных состояний вдали от термодинамического равновесия основано на анализе термодинамических сил, возникающих в системе при отклонении от этого состояния: если система находится в устойчивом стационарном состоянии, то при отклонении из этого состояния в ней должны возникнуть силы, стремящиеся вернуть систему в первоначальное положение.

Рассмотрим простейшие химические реакции.

Если в стационарном состоянии скорости v химического процесса и химического сродства A_r были функциями некоторых внутренних переменных и задавались значениями $v = \bar{v}; A_r = \bar{A}_r$. При небольшом возмущении (флуктуации) некоторых "внутренних" параметров в системе значения v*, A_r* в возмущённом состоянии станут равными $v^* = \bar{v} + \delta v, A_r^* = \bar{A}_r$, где δv и δA_r - величины отклонения от стационарной точки по переменным v и A.

Если начальное стационарное состояние было устойчивым и находилось вблизи термодинамического равновесия, происходящее при этом приращение скорости

диссипации энергии δβ, равное произведению величин δv(=δJ) и δA_r (= δX), должно быть положительным:

$$\delta\beta=\delta J\cdot\delta X=\delta v\delta A_r>0 \qquad (35)$$

Положительный характер величины δβ соответствует тому, что система в возмущенном состоянии начинает диссипировать энергию с бóльшей скоростью и поэтому самопроизвольно возвращаться из возмущенного состояния к исходному устойчивому стационарному состоянию. Нарушение данного критерия означает, что исходное состояние не было устойчивым, и поэтому, покинув его, система не вернется назад. Иными словами, если величина избыточного производства энтропии отрицательна δβ=δvδA_r<0, то возникшая в стационарном состоянии флуктуация будет «уводить» от него систему все дальше, что и означает неустойчивый характер состояния.

Можно показать, что обратимая бимолекулярная химическая реакция

$$A_1 + A_2 \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{}} A_3 + A_4, \qquad (36)$$

где A_i – независимые реагенты-интермедиаты более сложного брутто-процесса, имеет устойчивое стационарное состояние.

Напротив, в **автокаталитических реакциях** при возникновении флуктуаций в A_1 относительно её стационарного значения возможно нарушение условия устойчивости (62). Это происходит за счёт того, что флуктуация в движущей силе реакции и приращение скорости реакции за счет этой флуктуации имеют разные знаки.

В общем случае стационарное состояние элементарной химической реакции **всегда устойчиво**, если «флуктуирующий» промежуточный компонент входит только в одну из реакционных групп.

Удалённость состояния реакционноспособной системы от термодинамического равновесия не позволяет непосредственно использовать следствия теоремы Пригожина, выведенные для «линейной» неравновесной термодинамики. Тем не менее, даже для сильнонеравновесных систем приёмы термодинамики неравновесных процессов позволяют делать важные заключения о свойствах системы, в том числе в ряде случаев об устойчивости стационарных состояний сложных брутто-процессов.

Необходимыми условиями для неустойчивости стационарного состояния химически реакционноспособной системы являются: 1) наличие как минимум одной элементарной химической реакции, которая осуществляется вдали от парциального термодинамического равновесия (т. е. кинетически необратимой стадии); 2) наличие как минимум одной стадии с нелинейными по интермедиатам превращениями.

В открытых сильнонеравновесных системах линейные соотношения Онзагера не выполняются. Универсальным критерием эволюции таких систем является обобщение принципа минимальной скорости производства энтропии на нелинейные процессы.

Как уже упоминалось, в области линейной неравновесной термодинамики (т. е. действия линейных соотношений Онзагера) стремление системы к стационарному состоянию характеризуется монотонным уменьшением скорости производства энтропии (скорости диссипации энергии) в результате внутренних необратимых процессов: d$\beta\le 0$ и $d\beta/d_t<0$. Вдали от равновесия самопроизвольная эволюция характеризуется монотонным уменьшением величины $d_X\beta$. Это записывается в виде $d_X\beta\le 0$ или $\frac{d_X\beta}{dt}\le 0$. Знак равенства соответствует достижению стационарного состояния, после чего уже не происходит дальнейших изменений $d_X\beta$ ($d_X\beta_{стац}=0$). Это соответствует равенству нулю тех потоков, которые вызваны внутренними термодинамическими силами.

Согласно **универсальному критерию эволюции Гленсдорфа–Пригожина**, в любой неравновесной системе с фиксированными граничными условиями самопроизвольные процессы идут так, что скорость изменения скорости производства

энтропии, обусловленного самопроизвольным изменением термодинамических сил за счет процессов внутри системы (т. е. за счёт изменения значений «внутренних» переменных), уменьшается.

Универсальный критерий эволюции – косвенное следствие второго начала термодинамики для неравновесных процессов. Он определяет только ту часть прироста скорости производства энтропии, которая связана с изменением термодинамических сил за счет процессов внутри системы. Поэтому в общем случае он не позволяет ввести такую функцию состояния, которая в стационарном состоянии при малых (спонтанных) отклонениях от равновесия имела бы экстремум, подобно энтропии, энергии Гиббса или другим термодинамическим потенциалам. Тем не менее, в некоторых случаях $d_x\beta$ приобретает свойства полного дифференциала, что позволяет и в сильнонеравновесной области ввести функции типа локальных потенциалов с экстремальными свойствами. В открытых системах вдали от равновесия в нелинейной для термодинамики области возможно возникновение упорядоченных структур при протекании необратимых процессов. Эти структуры, возникающие при превышении некоторыми «управляющими» параметрами системы определенных критических значений есть диссипативные структуры. Различают пространственные, временные и пространственно-временные диссипативные структуры.

Как уже упоминалось, вблизи термодинамического равновесия в системе невозможны периодические процессы. Следовательно, устойчивое стационарное состояние в системах, находящихся в области линейной термодинамики, характеризуется особой точкой, для которой эволюция системы при её незначительном отклонении из этой точки обязательно приведет систему снова в эту же точку. Если эволюция системы описывается одним внутренним параметром (например, концентрацией единственного существующего интермедиата), возможны только устойчивость или неустойчивость стационарного состояния. Однако периодические процессы (осцилляции) в такой системе возникнуть не могут.

Существует возможность наличия у открытой системы множественности стационарных состояний и переходы из одного состояния в другое. Мы их рассмотрим в главе, посвящённой нелинейной динамике и синергетике.

Устойчивость нелинейных необратимых процессов в стационарном состоянии обычно интерпретируют в рамках теории устойчивости Ляпунова. Эту теорию мы применим в последующих главах, здесь только отметим, что устойчивость, вытекающая из принципа Пригожина, есть частный случай устойчивости по Ляпунову. Если стационарное состояние реализуется в нелинейной области и при этом поток энтропии нельзя разбить на две независимые части, то такое состояние может быть устойчивым или неустойчивым в смысле Ляпунова, а значит вдали от равновесия появляется возможность существования неустойчивых стационарных состояний.

Молекулярно-статистическое обоснование термодинамики необратимых процессов даёт статистическая теория неравновесных процессов. С её помощью обосновывается принцип локального равновесия и устанавливаются границы его применимости, интерпретируются линейные законы и соотношения взаимности. Статистическая теория позволяет рассчитывать кинетические коэффициенты по молекулярным данным. В то же время эта теория не обладает такой общностью, как равновесная статистическая термодинамика, поэтому наиболее важные результаты получены для конкретных задач, преимущественно в теории газов.

4.5 Статистическая термодинамика

Статистическая термодинамика – раздел статической физики, посвященный обоснованию законов термодинамики на основе законов взаимодействия и движения составляющих систему частиц.

Для систем в равновесном состоянии статистическая термодинамика позволяет вычислять термодинамические потенциалы, записывать уравнения состояния, условия фазовых и химических равновесий. Неравновесная статистическая термодинамика даёт обоснование соотношений термодинамики необратимых процессов (уравнений переноса энергии, импульса, массы и их граничных условий) и позволяет вычислять входящие в уравнения переноса кинетические коэффициенты. Статистическая термодинамика устанавливает количественную связь между микро- и макросвойствами физических и химических систем.

Для статистического описания макроскопических систем Дж. Гиббсом (1901) предложено использовать понятия статистического ансамбля и фазового пространства, что позволяет применять к решению задач методы теории вероятности. Статистический ансамбль - совокупность очень большого числа одинаковых систем многих частиц (т. е. "копий" рассматриваемой системы), находящихся в одном и том же макросостоянии, которое определяется параметрами состояния; микросостояния системы при этом могут различаться. Основные статистические ансамбли: микроканонический, канонический, большой канонический и изобарно-изотермический.

Микроканонический ансамбль Гиббса используется при рассмотрении изолированных систем (не обменивающихся энергией E с окружающей средой), имеющих постоянный объем V и число одинаковых частиц $N(E, V)$ и N – параметры системы). Канонический ансамбль Гиббса используется для описания систем постоянного объема, находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой (абсолютная температура T) при постоянном числе частиц N (параметры состояния V, T, N). Большой канонический ансамбль Гиббса используется для описания открытых систем, находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой (температура T) и материальном равновесии с резервуаром частиц (осуществляется обмен частицами всех сортов через "стенки", окружающие систему объёмом V). Параметры состояния такой системы: V, T и μ – химический потенциал частиц. Изобарно-изотермический ансамбль Гиббса используется для описания систем, находящихся в тепловом и механическом равновесии с окружающей средой при постоянном давлении P (параметры состояния T, P, N).

Фазовое пространство в статистической механике – многомерное пространство, осями которого служат все обобщенные координаты q_i и сопряженные им импульсы $p_i (i = 1,2,..., M)$ системы с M степенями свободы. Для системы, состоящей из N атомов, q_i и p_i соответствуют декартовой координате r_j^{α} и компоненте импульса p_j^{α} ($\alpha = x, y, z$) некоторого атома j и $M = 3N$. Совокупность координат и импульсов обозначаются q и p соответственно. Состояние системы изображается точкой в фазовом пространстве размерности 2M, а изменение состояния системы во времени – движением точки вдоль линии, называется фазовой траекторией. Для статистического описания состояния системы вводятся понятия фазового объема (элемента объема фазового пространства) и функции распределения $f(p, q)$, которая характеризует плотность вероятности нахождения точки, изображающей состояние системы, в элементе фазового пространства вблизи точки с координатами p, q.

Функция распределения $f(p, q)$характеризует плотность вероятности реализации данного микросостояния (p, q) в элементе объема dГ фазового пространства. Вероятность пребывания N частиц в бесконечно малом объёме фазового пространства равна:

$$d\Gamma_N = \frac{dpdq}{N!h^{3N}}, \qquad (37)$$

где $d\Gamma_N$ – элемент фазового объема системы в единицах h^{3N}, h – постоянная Планка; делитель $N!$ учитывает тот факт, что перестановка тождеств. частиц не меняет состояния системы.

Среднее значение $\langle A \rangle_\tau$ в момент времени t (т.е. по бесконечно малому интервалу времени от t до $t+dt$)любой физ. величины $A(p, q)$, являющейся функцией координат и

импульсов всех частиц системы, с помощью функции распределения вычисляется по правилу (в т.ч. и для неравновесных процессов):

$$\langle A \rangle_\tau = \int A[p(\tau), q(\tau)] f(p,q,\tau) d\Gamma_N \qquad (38)$$

Интегрирование по координатам проводится по всему объёму системы, а интегрирование по импульсам от -, до +,. Состояние термодинамического равновесия системы следует рассматривать как предел *t*. Для равновесных состояний функции распределения определяются без решения уравнения движения составляющих систему частиц.

В микроканоническом ансамбле Гиббса все микросостояния с данной энергией *E* равновероятны и функция распределения имеет вид:

$$f(p,q) = \kappa\delta[H(p,q)-E], \qquad (39)$$

где δ – дельта-функция Дирака, $H(p,q)$ – функция Гамильтона, представляющая собой сумму кинетических и потенциальных энергий всех частиц; постоянная к определяется из условия нормировки функции $f(p, q)$.

В каноническом ансамбле Гиббса вероятность нахождения системы в микросостоянии, определяемом координатами и импульсами всех *N* частиц или значениями $E_{i,N}$, имеет вид: $f(p, q)=\exp\{[F-H(p, q)]/kT\}$, где *F* – свободная энергия (энергия Гельмгольца), зависящая от значений *V, T, N*: $F=-kT\ln Z_N$, где Z_N – статистический интеграл, определяемый из условия нормировки функции $f(p, q)$:

$$Z_N = \sum_i \exp\left(-\frac{E_{i,N}}{kT}\right) \qquad (40)$$

В изобарно-изотермическом ансамбле Гиббса функция распределения и статистическая сумма *Q*, определяемая из условия нормировки, имеют вид:

$$f(p,q)=\exp\{[G-H(p,q)-PV]/kT\},\ G=-kT\ln Q; \qquad (41а)$$

$$Q = \int_V \sum_i \exp\left[-E_{i,N}/kT\right] dV \ \text{ или } \ Q = \int_V Z_N \exp(-PV/kT) dV \qquad (41б)$$

где *G* – энергия Гиббса системы (изобарно-изотермич. потенциал, свободная энтальпия).

Для вычисления термодинамической функции можно использовать любое распределение: они эквивалентны друг другу и соответствуют разным физическим условиям. Микроканоническое распределение Гиббса применяется главным образом в теоретических исследованиях. Для решения конкретных задач рассматривают ансамбли, в которых есть обмен энергией со средой или обмен энергией и частицами. Статистические суммы Z_N и *Q* позволяют определить энергию Гельмгольца *F*, энергию Гиббса *G*, а также термодинамические свойства системы, получаемые дифференцированием статистической суммы по соответствующим параметрам: внутреннюю энергию, энтальпию, энтропию, теплоёмкость при постоянном объеме и при постоянном давлении и т.д.

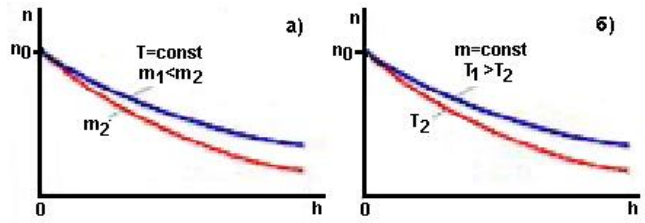


Рис. 1. Распределение Больцмана (зависимость концентрации молекул от высоты над уровнем Земли: а – влияние массы молекулы; б – влияние температуры. *Молекулы равномерно распределяются по высоте с увеличением температуры и уменьшением массы.* $n = \frac{n_0}{kT}\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$, где *P* — давление на высоте *h, M* — молярная масса, *R* — газовая постоянная.

В величины имеют и статистический смысл. Так, внутренняя энергия отождествляется со средней энергией системы, что позволяет рассматривать первое начало термодинамики как закон сохранения энергии при движении составляющих систему частиц; свободная энергия связана со статистической суммой системы, энтропия -

с числом микросостояний в данном макросостоянии, или статистическим весом макросостояния, и, следовательно, с его вероятностью. Смысл энтропии как меры вероятности состояния сохраняется по отношению к произвольным (неравновесным) состояниям. В состоянии равновесия энтропия изолированной системы имеет максимально возможное значение при заданных внешних условиях (E, V, N), т. е. равновесное состояние является наиболее вероятным состоянием (с максимальным статистическим весом). Поэтому переход из неравновесного состояния в равновесное есть процесс перехода из менее вероятных состояний в более вероятное. В этом заключается статистический смысл закона возрастания энтропии, согласно которому энтропия замкнутой системы может только увеличиваться. При температуре абсолютного нуля любая система находится в основном состоянии, в котором S=0. Это утверждение представляет собой третье начало термодинамики.

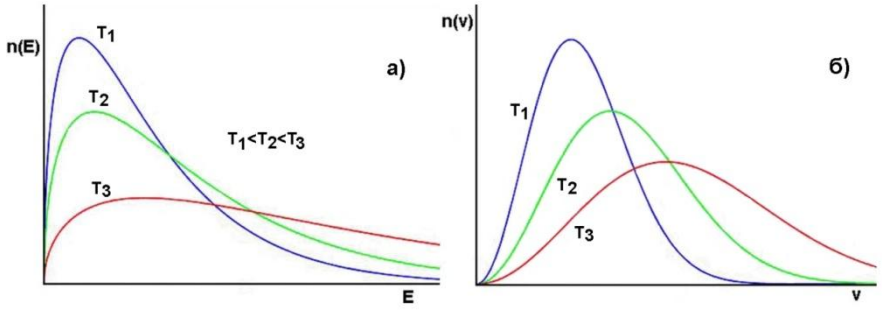


Рис. 2. Влияние температуры на форму распределения Максвелла-Больцмана для энергии (а) $dn_E = 4\pi N\left(\frac{m}{\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)dv$ ***и абсолютных значений скорости частицы (б)*** $n(v)dv = 4\pi N\left(\frac{m}{\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$

Расчёт статистических сумм большинства систем представляет сложную задачу. Она существенно упрощается в случае газов, если вкладом потенциальной энергии в полную энергию системы можно пренебречь.

В статистике Больцмана рассматривается распределение частиц идеального газа по импульсам и координатам в фазовом пространстве одной частицы, а не в фазовом пространстве всех частиц, как в распределениях Гиббса. В качестве минимальной единицы объема фазового пространства, имеющего шесть измерений (три координаты и три проекции импульса частицы), выбирают объем больший, чем h^3. Среднее число частиц n_i идеального газа, находящихся в состоянии с энергией E_i, описывается функцией распределения Больцмана:

$$n_i = \exp[(\mu - E_i)/kT]. \qquad (42)$$

Для частиц, которые движутся по законам классической механики во внешнем потенциальном поле $U(r)$, статистически равновесная функция распределения $\phi_1(p,r)$ по импульсам p и координатам r частиц идеального газа имеет вид: $\phi_1(p,r)=\kappa \exp\{-[p^2/2m + U(r)]/kT\}$. Здесь $p^2/2m$ – кинетическая энергия молекул массой m, постоянная κ определяется из условия нормировки. Данное выражение есть распределение Максвелла-Больцмана, а распределение Больцмана:

$$n(r) = n_0 \exp[-U(r)]/kT], \qquad (43)$$

где $n(r)=m\phi_1(p, r)dp$ – плотность числа частиц в точке r (n_0 – плотность числа частиц в отсутствие внешнего поля). Распределение Больцмана описывает распределение молекул в поле тяготения (барометрическая формула), молекул и высокодисперсных частиц в поле центробежных сил, электронов в невырожденных полупроводниках, а также используется для расчета распределения ионов в разбавленных растворах электролитов и т. п. При $U(r)$ =0 из распределения Максвелла-Больцмана следует распределение Максвелла,

описывающее распределение по скоростям частиц, находящихся в статистическом равновесии.

Статистическая сумма идеального газа в каноническом ансамбле Гиббса выражается через сумму по состояниям одной молекулы Q_1:

$$Z_N = \frac{Q_1^N}{N!}; \quad Q_1 = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \qquad (44)$$

где E_i – энергия i-го квантового уровня молекулы, g_i – статистический вес i-го уровня. В общем случае отдельные виды движения электронов, атомов и групп атомов в молекуле, а также движение молекулы как целого взаимосвязаны, однако приближенно их можно рассматривать как независимые. Тогда сумма по состояниям молекулы может быть представлена в виде произведения отдельных составляющих, связанных с поступательным движением ($Q_{\text{пост}}$) и с внутримолекулярным движениями ($Q_{\text{вн}}$):

$$Q_1 = Q_{\text{пост}} \cdot Q_{\text{вн}}, \; Q_{\text{пост}} = \lambda(V/N), \qquad (45)$$

где $\lambda=(2\pi mkT/h^2)^{3/2}$. Для атомов $Q_{\text{вн}}$ представляет собой сумму по электронным и ядерным состояниям атома; для молекул $Q_{\text{вн}}$ – сумма по электронным, ядерным, колебательным и вращательным состояниям.

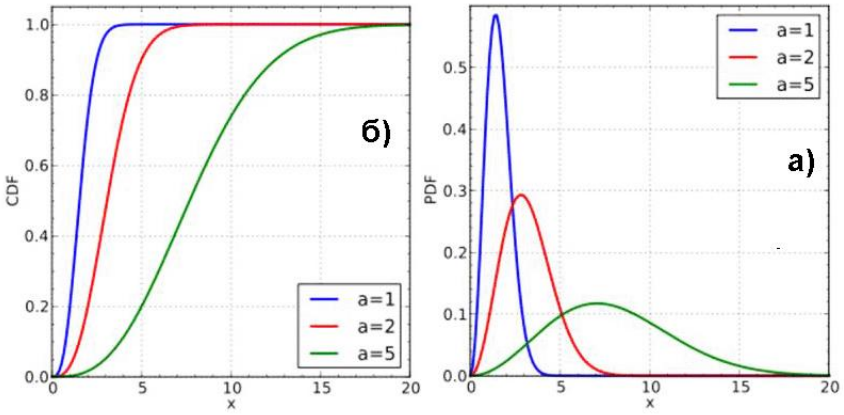


Рис. 3. Распределение Максвелла-Больцмана в: б) – в интегральной $F(v) = erf\left(\frac{v}{\sqrt{2}a}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ve^{-\frac{v^2}{2a^2}}}{a}$ ***и а) – дифференциальной*** $f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v^2 e^{-\frac{v^2}{2a^2}}}{a^3}$ ***формах,*** $a = \sqrt{kT/m}$.

Физическая кинетика – раздел статистической физики, который даёт обоснование соотношениям термодинамики необратимых процессов, описывающим перенос энергии, импульса и массы, а также влияние на эти процессы внешних полей. Кинетические коэффициенты - макроскопические характеристики сплошной среды, определяющие зависимости потоков физических величин (теплоты, импульса, массы компонентов и др.) от вызывающих эти потоки градиентов температуры, концентрации, гидродинамические скорости и др. Необходимо различать коэффициенты Онзагера, входящие в уравнения, связывающие потоки с термодинамическими силами (термодинамические уравнения движения), и коэффициенты переноса (диффузии, теплопроводности, вязкости и т. п.), входящие в уравнения переноса. Первые могут быть выражены через вторые с помощью соотношений между макроскопическими характеристиками системы.

Для расчёта макроскопического коэффициента переноса необходимо провести усреднение по вероятностям реализаций элементарных актов переноса с помощью неравновесной функции распределения. Задача сложная, мы ею в данной книге заниматься не будем. Если система находится в статистическом равновесии, интеграл столкновений равен нулю и решением кинетического уравнения Больцмана будет распределение Максвелла. Для неравновесных состояний решения кинетического

уравнения Больцмана обычно ищут в виде разложения в ряд функции $\phi_1(u, r, t)$ по малым параметрам относительно функции распределения Максвелла.

Анализ решений кинетического уравнения Больцмана позволяет обосновать область применимости условия локального термодинамического равновесия и определить вклады в поток, обусловленные неравновесностью потока. Неравновесный поток импульса даёт сдвиговую вязкость. Плотность потока энергии пропорциональна градиенту температуры (обычная теплопроводность), а в случае смеси газов она содержит член, пропорциональный градиенту концентраций(эффект Дюфура). Поток вещества в смеси газов содержит член, пропорциональный градиенту концентрации (обычная диффузия), и член, пропорциональный градиенту температуры (термодиффузия). Физическая кинетика даёт для этих коэффициентов пропорциональности выражения через эффективные сечения столкновения, следовательно через потенциалы межмолекулярных взаимодействий. Коэффициенты переноса удовлетворяют принципу симметрии, выражающему симметрию уравнений механики относительно изменения знака времени (теорема Онзагера).

Для расчёта коэффициента переноса в газообразных, жидких и твёрдых фазах, а также на границах раздела фаз активно используются разнообразные варианты метода молекулярной динамики, который позволяет детально проследить за эволюцией системы от времен $\sim 10^{-15}$с до $\sim 10^{-10}$с.

Для систем с химическими реакциями на характер распределения частиц большое влияние оказывает соотношение между характерными временами переноса реагентов и их химические превращения. Если скорость химического превращения мала, распределение частиц не сильно отличается от случая, когда реакция отсутствует. Если скорость реакции велика, ее влияние на характер распределения частиц велико и использовать средние концентрации частиц (т.е. функции распределения с n=1), как это делается при использовании закона действующих масс, нельзя. Необходимо более детально описывать распределение реагентов с помощью функций распределения ϕ_n с n>1. Важное значение при описании реакционных потоков частиц на поверхности и скоростей диффузионно-контролируемых реакций имеют граничные условия.

5. ЭНТРОПИЯ

5.1 Определение и свойства энтропии

Из всех неприятностей,
скрывающихся в законах физики,
энтропия – самая подлая.
Дэвис Эрик



После того, как Карно показал, что в тепловых машинах теплота, полученная от источника тепла, не может быть полностью переведена в механическую работу, а часть ее должна быть передана третьему телу – холодильнику, были сформулированы законы термодинамики и Клаудиусом введено понятие энтропия. Первый закон термодинамики не даёт критериев направления самопроизвольных и несамопроизвольных процессов и условий, при которых наступает состояние равновесия, лишь второй закон и энтропия дали строгий критерий направления самопроизвольных процессов.

Энтропия – часть внутренней энергии замкнутой системы, которая не может быть использована, в частности не может перейти или быть преобразована в механическую работу; функция состояния термодинамической системы, характеризующая направление протекания самопроизвольных процессов в этой системе и являющаяся мерой их необратимости.

Ранее полагали, что энтропия определяет состояние системы с позиции ее внутренней упорядоченности: чем больше хаос в системе, тем выше ее энтропия. Теперь эти утверждения оспорены: обнаружено множество процессов, одновременно ведущих и к росту энтропии и улучшению порядка. Теперь только **на бытовом уровне** принимается, что энтропия - мера беспорядка, неопределенности и хаоса. В целом это не соответствует действительности. Определений энтропий много, но не в одном из них не упоминается о порядке или беспорядке системы, тем более – об их мере. Энтропия используется, если интенсивность выравнивания энергетических параметров в изолированных материальных системах. Выравнивание энергий наиболее вероятно. Поток энтропии всегда сопровождается потоком энергии. В большинстве (но не в любых!) случаев события в системах развиваются по наиболее вероятному сценарию: объекты системы переходят из состояния менее устойчивого равновесия в состояние более устойчивого, с порядком это никак не связано.

Так как значение энтропии зависит от множества сопутствующих условий, было введено понятие «стандартная энтропия». Обычно значения стандартной энтропии рассматривают при давлении в одну атмосферу и температуре в 25°C. При повышении температуры данный показатель растёт.

Замечание 1. В некоторых учебниках по термодинамике утверждается, что выпускники физических и химических университетов не понимают, что такое энтропия, в других – что энтропию мало кто понимает, и, наконец, в третьих – что энтропию вообще никто не понимает. Последнее утверждение является истинным. Что есть энтропия никто до сих пор не определил, т.к. понимать тут нечего: в понятии энтропия никакого смысла нет, это нечто типа теплорода, флогистона, эфира, т.е. что-то внешне умное, полезное для спекуляций, но за которым ничего реального не стоит. Энтропия вводится, чтобы зафиксировать печальный факт, что при превращении тепла в работу, часть энергии куда-то делась и полезную работу не совершила. Куда она пропала неизвестно. Никакой физики-химии здесь нет. *Это история мужика, который получил 1000 рубл зарплаты, на 200 купил бутылку водки, а пришёл домой – денег нет. Где гулял, с кем общался, с кем пил – не помнит. Факт только, что деньги были, а теперь нет. Энтропия приключилась! Так жене и надо объяснить. Ибо против науки не попрёшь...* Измерив количество тепла, объём сосуда, давления газа в нём, мы рассчитаем

некую величину, которую назовём энтропией. Но, если объём и прочие параметры мы можем измерить, а при случае и потрогать, то энтропия не дана нам в ощущениях. Имеет место только манипуляция с математическими формулами (модное увлечение современных физиков). Аналоги: чёрные дыры, нейтронные звёзды, тёмная материя, разбегающаяся Вселенная, потепление климата, холодный термоядерный синтез, снежный человек, неопознанные летающие объекты... то – чего нет в материальном мире, но что так приятно обсуждать и моделировать. Можно утешиться тем, что мы до сих пор не знаем, что такое время, а пользуемся им. Энтропия – разница между идеалом и реальностью, это величина усушки и утряски. Больше ничего ценного о ней сказать нельзя, хотя формул наворотить, конечно, можно много.

Замечание 2. Физический смысл энтропии неизвестен. Согласно Британской энциклопедии: "*Полезность понятия энтропии ограничена тем, что оно не соответствует непосредственно какому-либо поддающемуся измерению физическому свойству, а является просто математической функцией, с помощью которой определяется абсолютная температура*".Смысла в "энтропии" ничуть не больше, чем в средневековом "теплороде". Скорее всего меньше...

Замечание 3. Когда Клаузиус разбирался в причинах, почему тепловом двигателе только часть тепла превращается в работу, он искал название куда-то утекающей энергии. Ему советовали назвать эту термодинамическую функцию "теплородом", что хоть как-то соответствовало физике процесса, или интегралом Клаузиуса. Но он предпочёл звучный, однако малопонятный термин "превращение" (кто тут во что превращается?!). Он, конечно, хотел подчеркнуть необычное для науки того времени свойство энтропии возрастать в отсутствие теплообмена. Двойственность энтропии как параметра (существует благодаря обратимости, но возрастает вследствие необратимости) кардинально запутала это понятие. До полной потери смысла! Хоть термин хорошо звучит, но, скорее всего он затерялся бы в дебрях термодинамики, если бы Клаузиус не сумел придать ему глобальность, напугав человечество тепловой смертью Вселенной. Как ни странно, но полное непонимание того, что такое энтропия, пошло ей на пользу: она выбралась из термодинамики, расползлась по физике, химии, математике, а теперь уже царствует в биологии, синергетике, философии, социологии – практически во всех науках. Непонятное понятие оказалось востребованным! Споры о том, что есть энтропия будут продолжаться ещё несколько столетий. Пока не найдут ей замены…

Внятного определения термодинамической энтропии не существует. Единственно, что можно сказать: S – функция состояния термодинамической системы.

Для изолированной системы принцип неубывания энтропии можно выразить как

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \qquad (1)$$

Для неизолированной системы выражение для 2-го закона термодинамики принимает вид:

$$\mathrm{d}S \geq 0. \qquad (2)$$

Введение понятия энтропии позволило представить 3-ий закон термодинамики как

$$\lim_{t \to 0} S \to 0. \qquad (3)$$

При необратимых процессах в адиабатически изолированной (замкнутой, $\mathrm{d}Q$) системе энтропия может только возрастать $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t \geq 0$. В обратимых процессах остаётся постоянной. В состоянии термодинамического равновесия энтропия максимальна: $S=S_{max}$, $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=0$. Среди всех направлений эволюции системы предпочтительным является то, при котором вероятность конечного состояния оказывается наибольшей. Процессы, в которых энтропия остаётся постоянной, называются изоэнтропийными. Примером может служить процесс, используемый для получения низких температур, – адиабатное размагничивание.

Если в некоторый момент времени замкнутая система находится в неравновесном макроскопическом состоянии, то в последующие моменты времени наиболее вероятным следствием будет монотонное возрастание её энтропии. Если в некоторый момент времени энтропия замкнутой системы отлична от максимальной, то в последующие

моменты энтропия не убывает – увеличивается или в предельном случае остается постоянной. Этим она существенно отличается от энергии: в замкнутой системе энергия сохраняется, а энтропия нет. Процесс увеличения энтропии в замкнутой системе необратим.

Энтропия обладает следующими свойствами:

1. Энтропия – экстенсивная функция состояния (зависит от количества вещества (массы)). Энтропия величина полуограниченная. Она ограничена снизу, т. е. для каждой термодинамической системы существует состояние с наименьшей энтропией. (Температура величина полуограниченная: нуль и бесконечность допустимы в качестве пределов).
2. Энтропия подчиняется закону аддитивности, т.е. энтропия равновесной системы равна сумме энтропий её отдельных частей, а изменение энтропии всей системы равно сумме изменений её частей. Аддитивность энтропии позволяет распространить это понятие на термодинамические системы любой сложности. В любых круговых процессах изменение энтропии, как и любых других функций состояния равно нулю.
3. Для замкнутой системы при протекании необратимого процесса энтропия – монотонно возрастающая функция времени, достигающая максимума в тепловом равновесии. Система переходит из менее вероятных в более вероятные состояния, что сопровождается ростом величины S. В любом равновесном изотермическом процессе с нулевой работой энергия расходуется на увеличение энтропии системы и выделяется при уменьшении энтропии.
4. Для обратимых (квазистационарных) процессов выполняется основное термодинамическое соотношение (фундаментальное уравнение Гиббса):

$$dU = TdS - PdV + \sum_j \mu_j dN_j \qquad (4)$$

где U – внутренняя энергия, P – давление, V – объём, μ – химический потенциал, N – число частиц.

Для обратимых процессов второе начало термодинамики – это закон существования и сохранения энтропии. Работа необратимых процессов всегда меньше, чем обратимых (работа полностью необратимых процессов равна нулю). Для необратимых процессов второе начало термодинамики – это закон существования и возрастания энтропии.

Энтропия – мера распределения энергии и материи; она извещает о количестве энергии в системе, недоступной для механической работы; определяет направление энергетически возможных процессов; количество возникшей энтропии – мера необратимости процесса; в изолированной системе – мера внутренней стабильности: чем больше численное значение энтропии, тем стабильнее система и тем меньше возможность спонтанных изменений. В изолированной системе самопроизвольные процессы сопровождаются увеличением энтропии и протекают до её максимального значения. Далее наступает равновесие – процессы прекращаются: энтропия – критерий термодинамического равновесия. Процессы, в которых энтропия уменьшается, возможны только в открытых системах. Энтропия обеспечивает необратимость процесса: распределение кинетической энергии между молекулами всегда идёт от менее вероятного состояния распространения в более вероятное, но никогда не наоборот. Понятие энтропии работает хорошо, если система состоит из множества статистически распределённых частиц.

При изучении энтропии используются некоторые постулаты.

1) **Постулат Планка**: Для любой термодинамической системы состояния с наименьшей энтропией и наименьшей температурой совпадают. С приближением температуры к абсолютному нулю энтропия перестаёт зависеть от температуры и приближается к определённому постоянному значению, которое можно положить равным

нулю и принять за начало отсчёта энтропии, устранив тем самым произвол в выборе постоянной интегрирования для энтропии.

2) **Постулат Тиссы**: внутренняя энергия ограничена и эта граница соответствует абсолютному нулю температуры. Состояние системы при абсолютном нуле температуры, когда все термодинамические величины, характеризующие равновесное состояние, перестают зависеть от температуры, наилучшим образом подходит в качестве стандартного состояния начала отсчёта основных термодинамических величин.

3) **Постулат Гиббса**: энтропия изолированной системы в состоянии термодинамического равновесия имеет максимальное значение, т. е. для равновесия изолированной системы необходимо и достаточно, чтобы при всех возможных (не нарушающих постоянства внутренней энергии, обобщённых координат и масс компонентов) изменениях её состояния вариация энтропии ΔS системы не была положительной.

Понятие энтропии, использованное сначала для описания работы теплового двигателя как некий интеграл Клаузиуса, вскоре перешагнуло границы физики и химической термодинамики. Это понятие широко применяется в статистической физике как мера вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния; в теории информации как мера неопределенности какого-либо опыта, который может иметь разные исходы; в синергетике, для оценки степени структурированного хаоса, как способ оценки развития, деградации и разрушения систем; в математике в теории метрических пространств для измерения размеров наборов (и, частично, фракталов); в экономике, как мера хозяйственного порядка; в медицине при описании жизнеспособности человеческого организма; в геофизике для решения динамических задач прогноза землетрясений; в теории управления, как мера неопределенности состояния или поведения системы в данных условиях; в биологической экологии, как единица измерения биологической вариативности; в квантовой механике, как мера многочастичной квантовой запутанности; в кибернетике, как мера средней наполненности информацией и ценности «ожидания» информации; в философии, как мера развития; в психологии, как мера внутреннего беспорядка, разрушающего сознание; в менеджменте, как мера корпоративной этики; в социологии, как мера отклонения социальной системы от эталонного состояния, когда отклонение проявляется в снижении уровня организации, эффективности функционирования; системы, в психологии, как мера зрительного восприятия природных форм, и во многих других науках. Даже настольные игры в энтропию есть.

В то же время вряд ли найдется ещё одно понятие, которое вызвало бы столько же споров и спекуляций, как энтропия. Ей посвящены тысячи научных и околонаучных статей и книг, в которых предложено множество интерпретаций этого понятия, плохо поддающегося интуитивному восприятию. Но до сих пор они не дали однозначного толкования физического смысла этого довольно абстрактного понятия, так что поток публикаций продолжается. К настоящему времени перемешались термодинамические, статистические и информационных аспекты понятия необратимости, абсолютизирован принцип возрастания энтропии, искажены причинно – следственные связи между энтропией, необратимостью и диссипацией энергии, исчезла связь между беспорядком и энтропией.

В настоящее время известно великое множество энтропий, часть из которых – именные:

Энтропия Клаузиуса
Энтропия Кельвина
Энтропия Гаусса
Энтропия Больцмана
Энтропия Планка
Квантовая энтропия фон Неймана
Энтропия Шеннона

Энтропия Хартли
Энтропия Хинчина
Энтропия Мака
Энтропия Крылова-Колмогорова-Синая (КС-этропия)
Энтропия метрическая
Энтропия топологическая
Относительная энтропия Кульбаха-Лейблера
Энтропия Цсаллиса (*q*-энтропия)
Энтропия Реньи (α-энтропия)

Это далеко не все энтропии.

В настоящее время энтропии применяются в различных дисциплинах:

Термодинамическая энтропия – термодинамическая функция, характеризующая меру необратимой диссипации энергии в ней (*энтропия – функция состояния)*.

Информационная энтропия – мера неопределённости источника сообщений, определяемая вероятностями появления тех или иных символов при их передаче (энтропия – *мера достоверности информации, передаваемой по каналу связи (Шеннон)*).

Дифференциальная энтропия – энтропия для непрерывных распределений.

Энтропия динамической системы (хаоса) – параметр, связанный с хаотичностью поведения траекторий системы (К-энтропия и ε-энтропия Колмогорова), не использует понятие вероятности, используется, например, в анализе географической карты.

Энтропия отражения – часть информации о дискретной системе, которая не воспроизводится при отражении системы через совокупность своих частей.

Энтропия в теории управления – мера неопределённости состояния или поведения системы в данных условиях.

Квантовая энтропия

Экономическая энтропия

Корреляционная энтропия

***Min*-энтропия**

Культурная энтропия

Энтропия – децентрализованная пиринговая сеть (устойчива к цензуре)

Энтропия в биологической экологии

Есть ещё **конфигурационная, геометрическая, диффузионная**...

Много есть энтропий. И число их растёт.

Такое впечатление, что каждый уважающий себя учёный стремится изобрести свою собственную энтропию.

А учёных много...

В этой главе мы рассмотрим некоторые энтропии несколько подробнее.

5.2 Энтропия в химической термодинамике

Химическая термодинамика – раздел физической химии, изучающий процессы взаимодействия веществ методами термодинамики.

является носителем энергии.

Термодинамическая энтропия – мера необратимого рассеяния энергии, функция состояния термодинамической системы; аддитивная термодинамическая величина.

Как уже упоминалось, термодинамическая энтропия – мера необратимого рассеяния энергии, мера отклонения реального процесса от идеального. Она определяется как сумма приведённых теплот, является функцией состояния и остаётся постоянной при обратимых процессах, в необратимых её изменение всегда положительно. В замкнутой термодинамической системе энтропия позволяет оценить количество связанной энергии (энергии, которая не может совершить работу): чем энергии меньше, тем выше энтропия.

Извлечь энергию из системы можно только путём перевода её в менее упорядоченное состояние. Изменение энтропии равно отношению количества поглощенной теплоты к абсолютной температуре, при которой эта теплота была поглощена.

Единица измерения термодинамической энтропии в системе СИ [Дж/моль·град], такая же, как у теплоёмкости, газовой постоянной, R и постоянной Больцмана, k_B. Размерность энтропийной единицы (э. е.) [кал/моль-кельвин]. При этом 1 кал кг-^{o}C = 4,1868-10^{3} Дж/ кг-К. При переходе к безразмерной энтропии термодинамическую энтропию делят на константу Больцмана (или на газовую постоянную).

В случае газообразной среды энтропия определяет состояние системы, и является функцией этого состояния (как давление, объём, температура, внутренняя энергия), т. е. это макроскопический параметр. В отличие от других термодинамических величин её измерить невозможно, можно только рассчитать. Энтропия относится к группе термодинамических функций, называемых функциями Массье-Планка: $\Phi_1=S-(1/T)U$ и $\Phi_2=S-(1/T)U-(p/T)V$, которые получают применением к энтропии преобразования Лежандра, которое меняет ролями зависимую и независимую переменные в сопряжённой паре «обобщённая сила – обобщённая координата»). Функция Массье-Планка соответствует свободной энергии Гельмгольца и свободной энергии Гиббса.

Самопроизвольное протекание изобарно-изотермического процесса определяется двумя факторами: энтальпийным, связанным с уменьшением энтальпии системы (ΔH), и энтропийным $T\Delta S$. Разность этих термодинамических факторов является функцией состояния системы, называемой изобарно-изотермическим потенциалом или свободной энергией Гиббса $G=H-TS$ [кДж].

Абсолютное значение энергии Гиббса определить невозможно, однако можно вычислить изменение ΔG в результате протекания процесса. Стандартная энергия Гиббса образования $\Delta G^{o}_{f,298}$ (или $\Delta G^{o}_{обр,298}$) – это изменение энергии Гиббса в процессе образования данного вещества (обычно 1 моль), находящегося в стандартном состоянии, из простых веществ, также находящихся в стандартном состоянии, причем простые вещества присутствуют в наиболее термодинамически устойчивых состояниях при данной температуре. Для простых веществ, находящихся в термодинамически наиболее устойчивой форме, $\Delta G^{o}_{f,298}=0$.

Энтропия идеального газа – параметр состояния, т.к. её можно определить через любую пару параметров состояния. В свою очередь, поскольку энтропия сама является параметром состояния, используя её в паре с любым независимым параметром состояния, можно определить любой другой параметр состояния газа.

Изменение энтропии идеального газа в произвольном процессе

$$S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (5)$$

Изменение энтропии при адиабатическом процессе $dQ=0$ и $\Delta S=0$

Изменение энтропии при изотермическом процессе

$$\Delta S = \frac{m}{M} R\ln\frac{V_2}{V_1}, \qquad (6)$$

где m – масса газа, M – его молекулярный вес.

Изменение энтропии при изохорическом процессе:

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln\frac{T_2}{T_1} \qquad (7)$$

Перейдём теперь к оценке изменения энтропии при смешении газов.

Как уже упоминалось, энтропия – основной фактор, определяющий состояние равновесия. Необратимые физико-химические процессы всегда идут с возрастанием энтропии и характеризуют переход от неустойчивого состояния к устойчивому, т.е. из

нестабильного состояния в стабильное. Устойчивость системы повышается при уменьшении её внутренней энергии (пример: выделение тепла при смешении компонентов, когда раствор или сплав занимает минимальное энергетическое состояние) и при повышении энтропии смешения. Важно, однако, что процесс смешения самопроизвольно идёт даже в том случае, когда энергия системы повышается. Это происходит, если вклад энтропийного члена в уравнение свободной энергии значителен.

Табл. 1. Характеристики изопроцессов в газах.

	Название процесса			
	Изохорический	**Изобарический**	**Изотермический**	**Адиабатический**
Условие протекания процесса	V = const	P = const	T = const	$\delta Q = 0$ $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i=2}{i}$
Связь между параметрами состояния	$\frac{P}{T} = const$	$\frac{V}{T} = const$ $PdV = \frac{m}{\mu} RdT$	$PV = const$	$PV^\gamma = const$ $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$
Работа в процессе	$\delta A = 0, A = 0$	$\delta A = PdV$ $A = P(V_2 - V_1)$ $A = \frac{m}{\mu} RdT$	$\delta A = PdV$ $A = \int_{V_1}^{V_2} PdV$ $A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$\delta A = PdV = -dU$ $\delta A = -\frac{m}{\mu}\frac{i}{2} RdT$ $A = -\Delta U = C_V(T_1 - T_2)$ $A = \frac{P_1 V_1 (T_1 - T_2)}{(\gamma-1) T_1}$
Количество теплоты, сообщённое в процессе	$\delta Q = C_V dT$ $Q = C_V (T_2 - T_1)$	$\delta Q = C_P dT$; $Q = C_P (T_2 T_1)$ $Q = \frac{m}{\mu} R\Delta T \left(\frac{i}{2} + 1\right)$	$\delta Q = \delta A$; $Q = A$	$\delta Q = 0$; $Q = 0$
Изменение внутренней энергии	$dU = \delta Q$; $U = Q$	$dU = C_V dT dU = C_V (T_2 - T_1)$ $\Delta U = C_V (T_2 - T_1)$ $\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T$	$dU = 0$; $U = 0$	$dU = -\delta A = C_V dT$; $U = A = C_V (T_2 - T_1)$ $\Delta U = \frac{P_1 V_1}{T_1(\gamma-1)}$
Теплоёмкость	$C_V = \frac{m}{\mu}\frac{R}{(\gamma-1)}$ $C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R$	$C_p = \frac{m}{\mu}\frac{\gamma R}{(\gamma-1)}$ $C_P = \frac{m}{\mu}\frac{\gamma Q}{dT}$	$C_T = \pm\infty$	$C_{ад} = 0$

В объёме, занимаемом газовой смесью, каждый газ, входящий в эту смесь, ведет себя так же, как он вел бы себя при отсутствии других составляющих смеси: распространяется по всему объёму; создаёт давление (парциальное), определяемое температурой и объёмом на единицу его массы; имеет температуру смеси.

Закон Дальтона (1807): давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в смесь. Парциальное давление это давление, которое создает один из газов, составляющих смесь, при температуре смеси в случае заполнения им всего объёма смеси.

Смешение двух идеальных, имеющих одинаковые температуры и давления, это необратимый процесс. Рассмотрим такой процесс на примере двух различных газов, находящихся в сосуде объемом V, разделенном перегородкой на две части с объемами V_1 и V_2. В этих частях ссуда находятся разные газы при одинаковых давлениях P и температурах, равных температуре окружающей среды $T_{\text{ОкСред}}$. Если убрать перегородку, то произойдёт типично необратимый процесс диффузионного смешения газов с возрастанием энтропии системы. Смешение газов здесь происходит без теплообмена с окружающей средой и без совершения работы изменения объема: изменения внутренней энергии в этой системе нет. Процесс смешения изотермический. Изменение энтропии в такой системе будет соответствовать изменению энтропии газов, поскольку теплообмен газов с окружающей средой отсутствует.

$$\Delta S = \Delta S + \Delta S = m_1 R_1 \ln \frac{V}{V_1} + m_2 R_2 \ln \frac{V}{V_2} \qquad (8)$$

В необратимом процессе диффузионного смешения газов энтропия системы возрастает; изменение энтропии системы при обратимом диффузионном смешении газов равно нулю.

Рассмотрим более простую ситуацию. Пусть два разных газа, каждый в количестве одного киломоля, находятся при одинаковых давлении n и температуре T в равных, разделенных перегородкой объемах V. Если убрать перегородку, газы начнут взаимно диффундировать, в результате чего каждый из них распространяется на объём $2V$. В образовавшейся смеси парциальное давление обоих газов будет равно $p/2$. Процесс смешения газов, очевидно, необратим, так что должен сопровождаться возрастанием энтропии системы.

Легко показать, что в этом случае приращение энтропии

$$\Delta S = 2R \ln p - 2R \ln \frac{p}{2} = 2R \ln 2. \qquad (9)$$

Энтропия при смешении газов действительно возрастает.

То обстоятельство, что приращение энтропии оказывается одинаковым для любой пары разных газов (оно равно $2R\ln 2$), позволяет, казалось бы, распространить результат на случай тождественных компонент, т. е. на тот случай, когда на разные стороны перегородки находится предварительно один и тот же газ. Переход от различных компонент к тождественным приводит к **парадоксу Гиббса**: удаление перегородки не вызывает ни диффузии, ни каких-либо других необратимых процессов и вместе с тем как будто бы сопровождается возрастанием энтропии. Однако парадокса тут нет: распространение рассмотренного выше подхода на случай тождественных компонент неправомерно. Последняя формула получена для различных компонент, каждой из которых в смеси может быть приписано парциальное давление p_i. В случае же тождественных компонент после удаления перегородки получается не смесь, а тот же газ, что и вначале, при таком же давлении p, но в количестве двух молей.

***Парадокс Гиббса** – **отсутствие непрерывности для энтропии при переходе от смешения различных газов к смешению тождественных газов, когда, например, при переходе от бесконечно мало отличающихся идеальных газов к тождественным расчётное значение энтропии смешения падает скачком до нуля, что представляется неожиданным и нелогичным**.*

В условиях постоянства температуры и давления реакции протекают самопроизвольно в сторону уменьшения энергии Гиббса, т.е. самопроизвольно могут протекать только те реакции, за счёт энергии которых можно совершать полезную работу.

Некоторое количество теплоты расходуется на увеличение энтропии $T\Delta S$, эта часть энергии потеряна для совершения полезной работы (рассеивается в окружающую среду в виде тепла) – связанная энергия. Другая часть теплоты ΔG может быть использована для совершения работы, поэтому энергию Гиббса называют свободной энергией.

Теплота реакции ΔH и изменение свободной энергии ΔG не всегда имеют сравнимые значения. Известны реакции, протекающие спонтанно ($\Delta G<0$) несмотря на то, что являются эндотермическими ($\Delta H>0$). Пример: самопроизвольное растворение некоторых солей (например, NH_4NO_3) в воде, сопровождающееся заметным охлаждением раствора. Это происходит потому, что на прохождение реакции оказывает влияние изменение степени упорядоченности системы. В этом случае мерой изменения упорядоченности системы служит изменение энтропии ΔS. Энтропия подобных систем тем выше, чем больше степень неупорядоченности (беспорядка) системы. Таким образом, если процесс идёт в направлении увеличения неупорядоченности системы (это наиболее вероятный процесс), ΔS – величина положительная. Для увеличения степени порядка в

системе ($\Delta S>0$) необходимо затратить энергию. Оба этих положения вытекают из второго закона термодинамики. Зависимость между изменениями энтальпии, энтропии и свободной энергии описывается уравнением Гиббса-Гельмгольца: $\Delta G=\Delta H-T\Delta S$. Энтальпия включает свободную энергию Гиббса и «несвободную» энергию $\Delta S\cdot T$. Энергия Гиббса, представляющая собой убыль изобарного ($P=const$) потенциала, равна максимальной полезной работе. Уменьшаясь с течением химического процесса, ΔG достигает минимума в момент равновесия ($\Delta G=0$). Второе слагаемое $\Delta S\cdot T$ (энтропийный фактор) представляет ту часть энергии системы, которая при данной температуре не может быть превращена в работу. Эта связанная энергия способна лишь рассеиваться в окружающую среду в виде тепла (рост хаотичности системы).

Например, взрыв гремучей смеси – это взаимодействие двух газов – кислорода и водорода – с образованием воды. Как и многие окислительно-восстановительные реакции это сильно экзотермический процесс (т. е. $\Delta H<<0$, тепло выделяется). В то же время в результате реакции возрастает степень упорядоченности системы. Газ с его хаотически мигрирующими молекулами перешёл в более упорядоченное состояние – жидкую фазу, при этом число молекул в системе уменьшилось на 1/3. В результате увеличения степени упорядоченности ($\Delta S<0$) член уравнения $-T\Delta S$ – величина положительная, однако это с избытком компенсируется ростом энтальпии: в итоге происходит высоко **экзергоническая реакция** ($\Delta G<<0$).

Экзергонические реакции (самопроизвольные реакции) – согласно второму началу термодинамики это химические реакции, которые протекают без притока энергии извне. Величина свободной энергии таких реакций всегда отрицательна, т.е. ΔG<0. Большинство химических реакций, которые протекают в окружающей среде – экзергонические, вследствие этого они являются термодинамически выгодными, в отличие от эндергонических. Примером экзергонических реакций являются процессы окисления и горения.

Эндергонические реакции (несамопроизвольные реакции) – согласно второму началу термодинамики –химические реакции, для протекания которых необходим приток энергии извне. Величина свободной энергии Гиббса таких реакций всегда положительная, т.е. ΔG>0. Эндергонические реакции сопряжены с экзергоническими реакциями, и не могут осуществляться в принципе без них. Примером таких реакций может служить процесс разделения воздуха на кислород и азот, где обязательно требуется затратить энергию, а также анаболические процессы, протекающие в живых организмах: биосинтез белка, синтез жирных кислот, и т.п.

При растворении в воде поваренной соли ΔH – величина положительная, температура в сосуде с раствором, т. е. в объёме раствора, снижается. Тем не менее процесс идёт спонтанно, поскольку степень упорядоченности системы уменьшается. В исходном состоянии ионы Na^+ и Cl^- занимали фиксированные положения в кристаллической решетке. В растворе они перемещаются независимо друг от друга в произвольных направлениях. Снижение упорядоченности ($\Delta S>0$) означает, что член уравнения $-T\ \Delta S$ имеет знак минус. Это компенсирует ΔH и в целом ΔG – величина отрицательная. Подобные процессы принято называть энтропийными.

Замечание. Если система вышла далеко за пределы теплового равновесия, то макросостояние чётко не определено, об энтропии судить нельзя.

Энтропию находят не только по теплоёмкости при постоянном давлении, C_p, но и по теплоёмкости при постоянном объёме, C_v.

Согласно первому началу термодинамики:

$\delta Q = dU + \delta A$ (10а)

$\delta Q_{обратим}=C_v dT + p dV$ – для обратимого процесса (10б)

Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV=nRT$

$p=nRT/V$, (11)

Если $n = 1$, то

$\delta Q_{обр}=C_v dT+(RT/V)\,dV$ (12а)

$\delta Q_{обр}=CV\ln T+R\ln V$ – для обратимого процесса (12б)

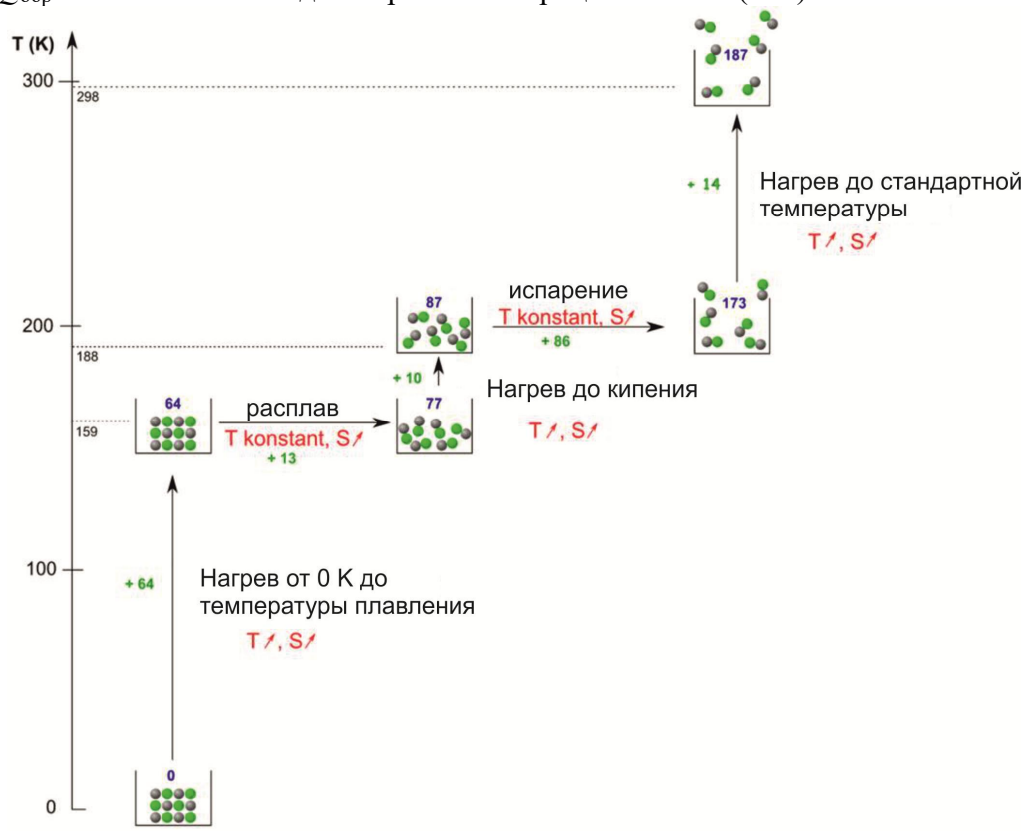


Рис.1 . Изменение порядка при переходах твёрдое тело → жидкость → газ. Пример увеличения беспорядка одновременно с ростом температуры.

Абсолютная энтропия вещества или процесса – изменение доступной энергии при теплопередаче при данной температуре.

Абсолютную энтропию найти нельзя: можно определить лишь изменение энтропии при переходе из первоначального состояния (P_0,V_0) в новое состояние (P,V). Расчётная формула зависит от выбора первоначального состояния.

$$S(P,V)=S(P,V_0)+\int_{T(P,V_0)}^{T(P,V)}\frac{C_P\left(P,V(T,P)\right)}{T}dT \qquad (13)$$

где C_p – теплоёмкость при постоянном давлении.

При наличии фазовых переходов следует учесть скрытую теплоту перехода.

Непосредственно измерить энтропию нельзя. Можно измерить объём и температуру, давление в ней, можно – измерить теплоёмкость и количество передачи или приема тепла в конкретном процессе, но энтропия только вычисляется.

Провести эксперименты, результатом которых будет термодинамическая энтропия, достаточно трудно. Собственно, у нас только один метод – калориметрия. Да и то, если речь идет о газах, а все измерения проводятся очень надёжно. Определив объём сосуда и давление в нём, измерим теплоёмкости при постоянном объёме (C_V) и давлении (C_P).

Теплоёмкость связана с энтропией формулой:

$$C_X=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_X \qquad (14)$$

где нижний индекс X относится к постоянным объёму и давлению.

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\Delta S=\int\frac{C_X}{T}dT \qquad (15)$$

Коротко остановимся на способах расчёта изменения энтропии для инертного газа, при его переходе из одного энергетического состояния в другое.

Разность энтропий идеального газа в конкретных двух состояниях, различающихся температурой и давлением:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 C_P \frac{dT}{T} - \int_1^2 R \frac{dP}{P} = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \qquad (16)$$

Если параметрами состояния являются температура, давление и объём, то

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} = C_V \ln \frac{P_2}{P_1} + C_P \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (17)$$

где C_V и C_P – удельные теплоёмкости газа при постоянном объёме и давлении, соответственно.

Для определения абсолютного значения энтропии идеального газа необходимо зафиксировать начало ее отсчета любой парой термических параметров состояния. Например, приняв S_0=0 при T_0 и P_0, получим

$$S - S_0 = C_3 \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{P}{P_0} \qquad (18)$$

Величины энтропии принято относить к стандартному состоянию. Чаще всего значения S рассматриваются при P = 101,325 кПа (1 атм) и температуре T=298,15К (25°С). Энтропия в этом случае обозначается S^o_{298} и называется стандартной энтропией при T=298,15К.

Стандартная (абсолютная) энтропия образования $\Delta S^o_{обр,298}$ – изменение энтропии в процессе образования данного вещества (обычно 1 моль), находящегося в стандартном состоянии, из простых веществ, также находящихся в стандартном состоянии.

Энтропия вещества S (S^o) увеличивается при повышении температуры. Стандартная молярная энтропия газов имеет намного большие значения по сравнению с энтропией твердых тел. Энтропия любого фиксированного количества вещества увеличивается в такой последовательности: Твёрдое вещество=жидкость=газ Стандартные молярные энтропии свободных элементов (в виде простых веществ) не равны нулю. Третий закон термодинамики утверждает, что энтропия идеального ионного кристалла при температуре абсолютного нуля (0К) равна нулю.

Табл. 2. Стандартные молярные энтропии S°(298 К) (Дж/(К моль)

С(т)алмаз	2,37	NO(г)	210
С(т)графит	5,74	NO_2(г)	240
H_2(г)	131	N_2O_5(г)	342
D_2(г)	145	H_2O(г)	189
O(г)	161	H_2O(ж)	70
O_2(г)	205	D_2O(ж)	79
O_2(ж)	84	CH_4(г)	186
O_2(т)	42	C_2H_6(г)	229
O_3(г)	237	н-C_4H_{10}(г)	310
		изо-C_4H_{10}(г)	294

Из табл. 2 следует, что энтропия зависит от: агрегатного состояния вещества. Энтропия увеличивается при переходе от твердого к жидкому и особенно к газообразному состоянию (вода, лед, пар). изотопного состава (H_2O и D_2O). молекулярной массы однотипных соединений (CH_4, C_2H_6, н-C_4H_{10}). строения молекулы (н-C_4H_{10}, изо-C_4H_{10}). кристаллической структуры (аллотропии) – алмаз, графит. Энтропия также зависит от температуры (рис.): стремление системы к беспорядку проявляется тем больше, чем выше температура. Произведение изменения энтропии системы на температуру $T\Delta S$ количественно оценивает эту тенденцию.

Замечание. В случае газов иногда можно из результатов эксперимента рассчитать и абсолютную энтропию. Для это приходится работать при максимально возможный температурах и по данным спектрометрии рассчитывать взнос от молекулярных вращений и колебаний.

Рассмотрим поведение энтропии в процессах изменения агрегатного состояния. Начнём с фазового перехода твёрдое тело – жидкость. Напомним, что переход вещества из твёрдого состояния (фазы) в жидкое называется плавлением, а обратный – кристаллизацией; при плавлении система поглощает тепло, а при отвердевании – его отдаёт; в процессе плавления (кристаллизации) температура системы остается постоянной до тех пор, пока вся система не расплавится. Эта температура называется температурой плавления.

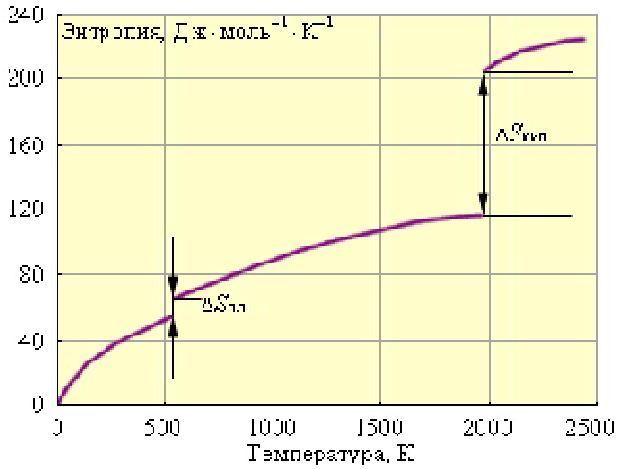


Рис 2. Зависимость энтропии от температуры для свинца: $\Delta S_{пл}$=8 Дж·моль$^{-1}$·К$^{-1}$; $T_{пл}$=600,5К; $\Delta S_{кип}$=88 Дж·моль$^{-1}$·К$^{-1}$; $T_{кип}$=2013К.

Закон плавления: количество тепла, которое необходимо для плавления вещества массой, пропорционально этой массе: при плавлении $\delta Q=\lambda dm$, а при кристаллизации $\delta Q=-\lambda dm$, где λ – константа, зависящая только от вещества системы (удельная теплота плавления).

В случае равновесного процесса можно найти изменение энтропии в процессе этого фазового перехода, поскольку здесь разность температур между системой и тем объектом, который поставляет системе тепло, не слишком велика, намного меньше температуры плавления. Используя определение термодинамической энтропии, имеем.

$$\Delta S = \pm\int_1^2 \frac{\lambda dm}{T} \qquad (19)$$

Так как температура системы в данном фазовом переходе не меняется и равна температуре плавления, то подынтегральное выражение – это величина, которая в ходе процесса не меняется, поэтому она от массы m вещества не зависит. Тогда

$$\Delta S = \pm\frac{\lambda m}{T_{пл}} \qquad (20)$$

Из этой формулы следует, что при плавлении энтропия возрастает, а при кристаллизации уменьшается. Это происходит потому, что фазовая область молекулы в твёрдом теле гораздо меньше, чем в жидкости, так как в твердом теле каждой молекуле доступна только малая область пространства между соседними узлами кристаллической решетки, а в жидкости молекулы занимают всю область пространства. Поэтому при равной температуре энтропия твёрдого тела меньше энтропии жидкости: твёрдое тело – более упорядоченная, и менее хаотичная система, чем жидкость.

Применим теперь тот же подход к фазовому переходу жидкость-газ. Напомним, что переход вещества из жидкости в газовую фазу называется испарением, а обратный переход – конденсацией; при испарении система поглощает тепло, при конденсации – теряет; процессы испарения и конденсации протекают в широком диапазоне температур, но фазовым переходом они являются лишь тогда, когда процесс захватывает всю массу вещества. Это происходит при определенной температуре $T_к$, которая называется температурой кипения. В процессе фазового перехода «жидкость – газ» температура остаётся постоянной и равной температуре кипения до тех пор, пока вся система не перейдёт из одной фазы в другую.

Закон испарения:

$\delta Q = \pm r\mathrm{d}m,$ (102)

где r – константа, зависящая от вещества системы, называемая удельной теплотой испарения, δQ - количество тепла, необходимое для испарения вещества массой $\mathrm{d}m$, знак плюс относится к испарению, а знак минус – к конденсации.

Поскольку разность температур между системой и «поставщиком» тепла невелика, т.е. намного меньше температуры кипения, то

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{S_1}^{S_2} dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \mp \int_1^2 \frac{r\mathrm{d}m}{T} = \mp rm/T_k \qquad (21)$$

Из этой формулы следует, что при испарении энтропия возрастает, а при конденсации уменьшается.

Процессы с изменениями энтропии характерны для химических реакций.

Как известно, движущей силой в производстве энтропии является разность температур, благодаря которой возникает поток энергии, отличный от нуля. Если в системе протекают химические реакции, то также производится энтропия. Химическая реакция течёт от большей свободной энергии к меньшей. В термодинамике вводятся химические потенциалы, разность которых определяет химическую реакцию. Это действующая сила. Роль потока играет скорость химической реакции, т. е. число молей вещества, испытывающих превращение в единицу времени. Химический потенциал есть производная свободной энергии по числу молей. Превалируют необратимые процессы. В неравновесных системах может одновременно протекать несколько таких процессов.

Согласно уравнению $\Delta G^o_T = \Delta H^o_T - T\Delta S^o_T$ при низких температурах $T\Delta S^o_T$ мало. Поэтому знак ΔG^o_T определяется значением ΔH^o_T (энтальпийный фактор). При высоких температурах $T\Delta S^o_T$– большая величина, знак ΔG^o_T определяется и энтропийным фактором. Функциями состояния системы, учитывающими совместное влияние этих факторов, являются энергия Гиббса, или свободная энергия $G=H-TS$, и энергия Гельмгольца $F= U–TS$. В зависимости от соотношения энтальпийного (ΔH^o_T) и энтропийного ($T\Delta S^o_T$) факторов существует четыре варианта процессов.

Если $\Delta H^o_T<0$, $\Delta S^o_T>0$, то $\Delta G^o_T<0$ всегда (процесс может протекать самопроизвольно при любой температуре).

Если $\Delta H^o_T>0$, $\Delta S^o_T<0$, то $\Delta G^o_T>0$ всегда (процесс не протекает ни при какой температуре).

Если $\Delta H^o_T<0$, $\Delta S^o_T<0$, то $\Delta G^o_T<0$ при $T<\Delta H^o/\Delta S^o$ (процесс идет при низкой температуре за счет энтальпийного фактора).

Если $\Delta H^o_T>0$, $\Delta S^o_T<0$, то $\Delta G^o_T<0$ при $T>\Delta H^o/\Delta S^o$ (процесс идёт при высокой температуре за счёт энтропийного фактора).

Критерий самопроизвольного протекания процесса: в системах, находящихся при P, T = *const*, самопроизвольно могут протекать только процессы, сопровождающиеся уменьшением энергии Гиббса ($\Delta G<0$). При достижении равновесия в системе $\Delta G = 0$.

Изменение энтропии химической реакции как функции состояния системы рассчитывается на основе следствия из закона Гесса как разность суммарной энтропии продуктов реакции и суммарной энтропии исходных веществ:

$$\Delta S_T = \sum \nu_i S_{i\ \text{продуктов}} - \sum \nu_j S_{j\text{исх. веществ}}, \qquad (22)$$

где ν – мольная доля, $S_{(\text{прод.})}$ и $S_{(\text{исх.})}$ – соответственно абсолютные энтропии продуктов реакции и исходных веществ.

Стандартную энтропию реакции при 298К, ΔS^0_{298} рассчитывают, используя табулированные стандартные энтропии веществ S^0_{298}:

$$\Delta S^0_{298} = \sum \nu_i S^0_{298,\text{i продуктов}} - \sum \nu_j S^0_{298,\text{j исх. веществ}} \qquad (23)$$

Зависимость энтропии реакции от температуры в области 298÷T, в которой нет фазовых переходов, в интегральном виде выражается уравнением

$$\Delta S^0_T = \Delta S^0_{298} + \int_{298}^{T} \left(\frac{\Delta C^0_p}{T}\right)\mathrm{d}T \qquad (24)$$

где ΔS^0_{298} – стандартная энтропия реакции при 298К; ΔC^0_p – изменение суммарной стандартной теплоемкости системы в ходе реакции.

Для многих реакций это изменение в широком интервале температур невелико и в первом приближении им можно пренебречь. Тогда $\Delta C^0_p=0$ и $\Delta S^0_T=\Delta S^0_{298}$.

Если пренебречь зависимостью C_p реагирующих веществ от T (ΔC^0_p= const), то

$$\Delta S^0_T \approx \Delta S^0_{298}+\Delta C^0_p(\ln T - \ln 298). \quad (25)$$

Самопроизвольному протеканию реакции способствуют значение $\Delta H_T<0$ (стремление системы к упорядоченности, сопровождаемое уменьшением ее внутренней энергии) и значение $\Delta S_T>0$ (стремление системы к хаотичности, неупорядоченности как более термодинамически вероятному состоянию).

Уменьшение энергии Гиббса химической реакции

$$\Delta G_T=(\Delta H_T - T\Delta S_T)<0 \quad (26)$$

является однозначным критерием возможности самопроизвольного протекания реакции в прямом направлении в изобарно-изотермических условиях, поскольку либо оба фактора действуют в пользу процесса ($\Delta H<0$ и $\Delta S>0$), либо действующий в пользу процесса фактор является преобладающим и определяет знак ΔG_T и направление процесса в целом.

Соответственно уменьшение энергии Гельмгольца системы

$$\Delta F_T=(\Delta U_T - T\Delta_r S_T)<0 \quad (27)$$

является критерием возможности самопроизвольного протекания процесса в изохорно-изотермических условиях. Соотношение между ΔG и ΔF такое же, как между ΔH и ΔU, то есть они отличаются на величину работы расширения:

$$\Delta G_T - \Delta F_T = p\Delta V = \Delta\nu RT. \quad (28)$$

Если система изолирована, то самопроизвольно в ней могут протекать процессы только в сторону увеличения энтропии, то есть $\Delta S_T>0$, поскольку тепловой эффект в таких системах равен нулю. Это неравенство есть следствие второго закона термодинамики для изолированных систем и является критерием возможности самопроизвольного протекания процессов в таких системах.

Энергией Гиббса образования вещества ΔG_i называется энергия Гиббса реакции образования 1 моля i-го вещества из простых веществ, устойчивых в данных условиях. Энергия Гиббса образования простых веществ, устойчивых в данных условиях, принимается равной нулю. Если при этом все вещества находятся в стандартном состоянии, то энергия Гиббса реакции образования вещества называется стандартной энергией Гиббса образования вещества $\Delta_f G^0_i$. Величины $\Delta_f G^0_{298}$, і табулированы.

Энергию Гиббса химической реакции можно рассчитать двумя способами:

1) как изменение функции состояния системы по разности суммарной энергии образования продуктов реакции и суммарной энергии образования исходных веществ:

$$\Delta G_T=\sum \nu_i \Delta G_{T,\text{і продуктов}} - \sum \nu_j \Delta G_{T,j\ \text{исх веществ}}; \quad (29а)$$

2) по уравнению

$$\Delta G_T=\Delta_r H_T - T\Delta_r S_T. \quad (29б)$$

Если все исходные вещества и продукты реакции находятся в стандартных состояниях, то по этим формулам рассчитывают стандартную энергию Гиббса реакции ΔG^0_T.

Связь между ΔG_T и ΔG^0_T выражается уравнением изотермы Вант Гоффа, которая для реакции

$$aA_{(г)} + bB_{(г)} + dD_{(к)} = eE_{(г)} + fF_{(г)} \quad (30)$$

имеет вид:

$$\Delta G_T=\Delta_r G^0_T + RT\ln(p^e_E p^f_F / p^a_A p^b_B), \quad (31)$$

где p_i – относительные парциальные давления соответствующих газообразных компонентов реакции.

В эту формулу входят только относительные парциальные давления газообразных веществ (вещество D(к) учитывается только при расчете ΔG^0_T). Если относительные давления всех газов равны 1 (стандартное состояние), то $\Delta G_T=\Delta_r G^0_T$. Значение $\Delta_r G^0_T$ для

любой температуры T можно в общем случае рассчитать с использованием справочных данных по уравнению:

$$\Delta G^0_T=\Delta H^0_T-T\Delta S^0_T=\Delta H^0_{298}+\int_{298}^{T}\Delta C^0_p dT+T\Delta_r S^0_{298}+T\int_{298}^{T}\frac{\Delta C^0_p}{T}dT \qquad (32)$$

В первом приближении можно принять $\Delta C^0_p=0$ и $\Delta H^0_T=\Delta H^0_{298}$ и $\Delta S^0_T=\Delta S^0_{298}$. Тогда для заданной T

$$\Delta G^0_T=\Delta H^0_{298}-T\Delta_r S^0_{298} \qquad (33)$$

Для процесса, идущего при $T=const$ и $V=const$, имеем изотерму реакции в виде

$$\Delta_r F_T=\Delta_r F^0_T+RT\ln(C^e_E C^f_F/C^a_A C^b_B), \qquad (34)$$

где C_i – относительные концентрации соответствующих компонентов реакции, численно равные молярным концентрациям, так как $C_i=C_i$(моль/л)/1(моль/л).

Если реакции протекают в растворах или в твердых фазах, то $\Delta V\approx 0$. Так как $\Delta G_T=\Delta F_T$, то для реакций в идеальных растворах изотерма Вант Гоффа

$$\Delta G_T=\Delta G^0_T+RT\ln(C^e_E C^f_F/C^a_A C^b_B). \qquad (35)$$

Пример 1. Рассчитаем стандартную энергию Гиббса химической реакции $C_{(к)}+CO_{2(г)}=2CO_{(г)}$ при 298К и при 1000К, считая энтальпию и энтропию реакции не зависящими от температуры. Здесь

$\Delta G^0_{298}=172{,}5-298\cdot 175{,}66\cdot 10^{-3}=120{,}15$ кДж, т.е. $\Delta G_{0298}>0$;

$\Delta G^0_{1000}=172{,}5-1000\cdot 175{,}66\cdot 10^{-3}=-3{,}16$ кДж, т.е. $\Delta_r G^0_{1000}<0$.

При 298К и стандартных состояниях веществ самопроизвольное протекание реакции в прямом направлении невозможно (энтальпийный фактор не способствует самопроизвольному протеканию прямой реакции и определяет знак энергии Гиббса реакции при низких температурах). При высоких температурах определяющим становится энтропийный фактор реакции, он определяет отрицательное значение энергии Гиббса реакции при 1000К и, следовательно, возможность самопроизвольного протекания реакции при этой температуре и стандартных состояниях компонентов.

Пример 2. Найдём, при каком соотношении парциальных давлений газообразных компонентов реакции $C_{(к)}+CO_{2(г)}=2CO_{(г)}$ возможно ее протекание в прямом направлении при 298К. Возможность самопроизвольного протекания данной реакции в прямом направлении при 298К определяется неравенством $\Delta G_{298}<0$, в котором энергия Гиббса реакции рассчитывается по уравнению изотермы Вант Гоффа. Имеем: $\Delta G_{298}=[\Delta_r G^0_{298}+RT\ln(p^2_{CO}/p_{CO2})]<0$. Подставляя вместо ΔG^0_{298}, величину, найденную в предыдущем примере, получаем неравенство: $120{,}15+8{,}31\cdot 10^{-3}\cdot 298\ \ln(p^2_{CO}/p_{CO2})<0$. Неравенство выполняется при определённом соотношение давлений CO и CO_2 $\ln(p^2_{CO}/p_{CO2})<-48{,}5$, откуда $p^2_{CO}/p_{CO2}<10^{-21}$.

Пример 4. Определим температурную область самопроизвольного протекания реакции $C_{(к)}+CO_{2(г)}=2CO_{(г)}$ при стандартных состояниях компонентов. Реакция может протекать самопроизвольно при стандартных состояниях компонентов в определенной области температур, для которых $\Delta_r G^0_T<0$.Чтобы найти эту область температур нужно определить граничную температуру (температуру равновесия), при которой значение $\Delta_r G^0_T$ меняет знак, т.е. необходимо решить неравенство относительно T:

$$\Delta_r G^0_T=\Delta_r H^0_{298}+\int_{298}^{T}\Delta C^0_p dT+T\Delta_r S^0_{298}+T\int_{298}^{T}\frac{\Delta C^0_p}{T}dT<0.$$

Если пренебречь зависимостью ΔH^0 и ΔS^0 от температуры, то температуру равновесия можно определить из неравенства $\Delta G^0_T\approx\Delta H^0_{298}-T\Delta S^0_{298}<0$. Тогда $(172{,}5-T\cdot 175{,}66\cdot 10^{-3})<0$ и $T>982$К. Верхним пределом искомой температурной области является предел существования наименее устойчивого компонента реакции, который находится из справочных данных.

Пример 5. Используя справочные термодинамические данные, рассчитать стандартную энтропию образования $NH_4NO_{3(к)}$. Стандартной энтропии образования NH_4NO_3 отвечает изменение энтропии в процессе:

$N_{(г)}+2H_{2(г)}+3/2O_{2(г)}=NH_4NO_{3(к)}$; $\Delta S^o_{f,298}(NH_4NO_{3(к)})$ = ?

Значения стандартных энтропий исходных веществ и продуктов реакции: $S^0_{298}=191{,}50$ ($N_{2(г)}$), 130,52 ($H_{2(г)}$), 205,04 ($O_{2(г)}$), 151,04 ($NH_4NO_{3(к)}$) Дж/(моль·К). $\Delta S^o_{х.р.,298}=\Delta S^o_{f,298}(NH_4NO_{3(к)})=S^o_{298}(NH_4NO_{3(к)})-S^o_{298}(N_{2(г)})-2S^o_{298}(H_{2(г)})-3/2S^o_{298}(O_{2(г)})=151{,}04-191{,}5-2\cdot 130{,}52-3/2\cdot 205{,}04=-609{,}06$ Дж/(моль·К). Стандартная энтропия образования $NH_4NO_{3(к)}$, равная -609,06 Дж/(моль·К), отличается от стандартной энтропии нитрата аммония $S^o_{298}(NH_4NO_{3(к)})=+151{,}04$ Дж/(моль·К) и по

величине, и по знаку. Следует помнить, что стандартные энтропии веществ S^o_{298} всегда больше нуля, в то время как величины $\Delta S^0_{f,298}$, как правило, знакопеременны.

Пример 6. Изменение энергии Гиббса реакции $2H_{2(г)}+ O_{2(г)}=2 H_2O_{(ж)}$ равно ΔG^o_{298}=-474,46 кДж. Не проводя термодинамические расчеты, определим, за счет какого фактора (энтальпийного или энтропийного) протекает эта реакция при 298 К и как будет влиять повышение температуры на протекание этой реакции. Поскольку протекание рассматриваемой реакции сопровождается существенным уменьшением объема (из 67,2 л (н.у.) исходных веществ образуется 36 мл жидкой воды), изменение энтропии реакции $\Delta S^o<0$. Поскольку ΔG^o_{298} реакции меньше нуля, то она может протекать при температуре 298*K* только за счёт энтальпийного фактора. Повышение температуры уменьшает равновесный выход воды, поскольку $T\Delta S^o<0$.

Пример 7. Используя справочные термодинамические данные, определить может ли при 298,15К самопроизвольно протекать реакция: $C_4H_{10(г)}=2C_2H_{4(г)}+H_{2(г)}$. Если реакция не будет самопроизвольно протекать при 298,15К, оценить возможность её протекания при более высоких температурах. Значения стандартных энергий Гиббса и энтропий исходных веществ и продуктов реакции: ΔG^o_{298}=-17,19 ($C_4H_{10(г)}$), 68,14 ($C_2H_{4(г)}$), 0 ($H_{2(г)}$) кДж/моль; S^o_{298}=310,12 ($C_4H_{10(г)}$), 219,45 ($C_2H_{4(г)}$), 130,52 ($H_{2(г)}$) Дж/(моль·К). $\Delta G^o_{х.р.,298}=2\Delta G^o_{f,298}(C_2H_{4(г)})+\Delta G^o_{f,298}(H_{2(г)})-G^o_{298}(C_4H_{10(г)})$ = 2·68,14+17,19=153,47 кДж. $\Delta G^o_{х.р.,298}>0$, следовательно, при T= 298,15 К реакция самопроизвольно протекать не будет. $\Delta S^o_{х.р.,298}=2S^o_{298}(C_2H_{4(г)})+S^o_{298}(H_{2(г)})-S^o_{298}(C_4H_{10(г)})=2\cdot219,45+130,52-310,12$ = +259,3 Дж/К. Поскольку $\Delta S^o_{х.р.,298}>0$, то при температуре $T>H^o/\Delta S^o$ величина $\Delta G^o_{х.р.,298}$ станет величиной отрицательной и процесс сможет протекать самопроизвольно.

При протекании химической реакции кроме изменения энтропии самой системы необходимо учитывать её изменение в окружающей среде. Если систему и её окружение в совокупности рассматривать как единую изолированную систему, то, согласно второму закону термодинамики, для самопроизвольной химической реакции общее изменение её энтропии должно быть больше нуля:

$$\Delta S_{общ}=\Delta S_{сист}+\Delta S_{среда}>0.$$

Если количество теплоты ΔQ передаётся от системы окружению при постоянной температуре T, то изменение энтропии окружения можно рассчитать по формуле $\Delta S_{среда}=\Delta Q_{среда}/T$. В то же время теплота, покинувшая систему и перешедшая в окружающую среду при постоянном давлении, равна тепловому эффекту реакции ΔH с обратным знаком, т.е. $\Delta Q_{сред}=-\Delta H_{сист}$. Поэтому изменение энтропии окружения $\Delta S_{окр}=-\Delta H_{сист}/T$. Общее изменение энтропии можно выразить через свойства системы:

$$\Delta S_{общ}=\Delta S_{сист}-\Delta H_{сист}/T>0.$$

5.3 Энтропия в статистической физике

Господь Бог не играет в кости.
Альберт Эйнштейн
Господь не только играет в кости,
но к тому же забрасывает их порою туда,
где мы их можем не увидеть.
Стивен Хокинг

Статистическая физика – раздел теоретической физики, посвященный изучению систем с произвольным числом степеней свободы. Изучаемые системы могут быть как классическими, так и квантовыми. Статистическая физика фактически делится на статистическую механику и статистическую теорию поля. В свою очередь статистическую механику обычно делят на равновесную и неравновесную. Предсказания статистической физики и термодинамики носят вероятностный характер. В этом проявляется специфика статистических закономерностей, присущих именно макроскопическим телам. Вероятностный характер предсказаний позволяет сблизить классическое рассмотрение с квантовым. Здесь результаты получаются на основании меньшего количества данных, чем это нужно для полного механического описания. Если макроскопическое тело наблюдается в течение достаточно большого времени, то величины, характеризующие это тело, окажутся практически постоянными, поэтому, зная средние значения величин, можно делать предсказания. Статистическая физика описывает как из движений частиц системы

складывается усреднённая картина развития системы в целом. Важно, что одно и то же значение термодинамических параметров в элементарном участке системы может получиться при различных положениях и скоростях молекул. Следовательно, одному макросостоянию отвечает множество микросостояний.

В развитии статистической физики существенную роль сыграли Больцман, Планк и Гиббс.

Больцман был первым, кто попытался связать понятия феноменологической термодинамики с атомно-молекулярными теориями и выразить термодинамические величины через молекулярные параметры.

В статистической физике энтропия – мера вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния. Макросостояние системы тем более вероятно, чем большим числом микросостояний оно может осуществиться.

Микроскопическое состояние (микросостояние) системы в классической механике – состояние, одновременно задаваемое координатами и импульсами всех частиц системы. Знание микросостояния в некоторый момент времени позволяет однозначно предсказать эволюцию системы во все последующие моменты. В квантовой механике - квантовое состояние системы, определяемое набором соответствующих квантовых чисел частиц.

Макроскопическое состояние (макросостояние) системы – состояние, определяемое значениями ее термодинамических параметров: давления *P*, температуры *T*, удельного объема *V*, внутренней энергии *U* и т. п. Для определения макроскопического состояния однокомпонентной системы достаточно знать значения любых двух независимых параметров (например, *T* и *P* или *T* и *V*).

Одному макросостоянию может соответствовать множество микросостояний: оно может быть реализовано большим числом микросостояний за счет перестановки частиц, не меняющей наблюдаемого состояния.

Статистическое описание больших систем существенно опирается на следующие постулаты.

1. Все разрешенные микросостояния равновероятны.
2. Термодинамически равновесным является то макросостояние, которое реализуется наибольшим числом микросостояний, т. е. является наиболее вероятным состоянием.

Понятие микросостояния шире макросостояния: любое микросостояние одновременно можно рассматривать как реализацию некоторого макросостояния. Точного описания положения и скоростей молекул не требуется. Для характеристики макросостояния достаточно зафиксировать небольшое число параметров (усреднённых значений) для малых участков системы. Важно, что одно и то же значение термодинамических параметров в элементарном участке системы может получиться при различных положениях и скоростях молекул. Поэтому одному макросостоянию отвечает множество микросостояний.

Термодинамическую вероятность макросостояния можно определить по числу тех микросостояний, реализующих данное микросостояние. Однако если микросостояние задано совершенно точным указанием значения координат и скоростей каждой молекулы, то тогда совокупность микросостояний, отвечающих некоторому макросостоянию, представит *несчётное множество* (континуум) и в результате этого указанное определение термодинамической вероятности окажется неприложным. Следовательно, необходимо в понятие микросостояние ввести такое условие, которое сделало бы число микросостояний *счётным*. Поэтому вводят некоторую неопределённость в указание координат и скоростей молекул. Обычно состояние молекулы изображают точкой в шестимерном пространстве, в котором в качестве осей координат используют три оси отсчёта пространственных координат x, y и z и три оси отсчёта компонентов скорости v_x, v_y и v_z. Это – **фазовое пространство**.

Замечание. Для характеристики состояния движения молекул берут не компоненты скорости, а компоненты количества движений, т.е. импульса: $p_x=mv_x$, $p_y=mv_y$, $p_z=mv_z$.

Фазовое пространство – воображаемое пространство огромной размерности. Координатами в нём служат пространственные координаты (*q*) и импульсы (*p*) всех частиц входящих в систему, по *f* -пространственных координат и *f* - импульсов на каждую частицу в системе. Если частица может двигаться только, как целое, то *f*=3. Для многоатомных молекул, кроме того, возможны вращения, колебания и т.д., и *f*>3. Одна точка в фазовом пространстве описывается *2fN* координатами. Если нет *внутренних* степеней свободы, то необходимы 6N координат. Точка в фазовом пространстве - это микросостояние системы. Множество точек (ансамбль) – макросостояние, описываемое макропараметрами системы. Равновесное макросостояние при заданных условиях имеет максимальное число микросостояний. Фазовое пространство описывает поведение реальной системы во времени. С течением времени, система внутри ансамбля переходит из одного микросостояния в другое.

Реальным физическим системам, моделируемым математическим понятием «динамической системы», приписывается важное свойство *детерминированности*: зная состояние системы в начальный момент времени, мы можем однозначно предсказать все ее дальнейшее поведение.

Представим себе, что шестимерное фазовое пространство расчленено на ряд ячеек, про которые можно сказать, что они представляю собой шестимерные параллелепипеды с ребрами dx, dy, dz, dp_x, dp_y, dp_z. Чтобы вместо континуума иметь счётность множества микросостояний, при характеристике микросостояния указывают, что данная молекула находится в такой-то ячейке фазового пространства, т.е. что её координаты заключаются в пределах от x до x+dx, от y до y+dy и от z до z+dz. Объём фазовой ячейки в шестимерном пространстве H=dx·dy·dz·dp_x·dp_y·dp$_z$. Перемещение молекулы внутри фазового пространства (оно не выводит данную молекулу за пределы одной фазовой ячейки) не рассматривается как новое микросостояние. Перестановка молекул, находящихся внутри какой-нибудь фазовой ячейки (обмен мест между ними) также не считается новым микросостоянием. Таким образом гарантируется счётность множества микросостояний.

Больцман рассматривал газ как ансамбль огромного числа движущихся молекул. Беспорядочное движение молекул в газе есть тепловое движение. Чем выше скорость молекул, тем выше температура газа, которую можно выразить через статистически усредненные скорости. Это можно сделать и для энтропии. В результате Больцману удалось получить для энтропии строгую интерпретацию в терминах ньютоновской физики. При этом Больцман дал физическое объяснение понятию "рост энтропии": рост энтропии – рост хаоса – разрушение порядка: "Природа стремиться к переходу от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным". (*Больцман имел ввиду инертные газы, в природе много ситуаций, в которых идёт одновременно рост энтропии и порядка*).

Основное положение статистической физики: замкнутая система с равной вероятностью может находиться в любом допустимом для нее состоянии. Состояние считается допустимым, если оно удовлетворяет наложенным на систему ограничениям. Основные ограничения – это ограничения по энергии и по числу подсистем (определяется размерностью гильбертова пространства).

Характеризовать состояние системы удобнее не самой величиной данного макросостояния, а величиной, пропорциональной её логарифму. Эта величина называется энтропией.

Энтропия в терминах состояний – логарифм от числа допустимых состояний системы.

5.3.1 Энтропия Больцмана-Планка

Постулировав связь между микросостояниями и макросостоянием системы, выраженную с помощью понятия вероятности, Больцман предложил метод, позволяющий описать временную эволюцию системы из неравновесного в равновесное состояние.

Больцман развивал кинетическую теорию газов и предложил теорему (*H*-теорема Больцмана), согласно которой в неравновесном состоянии существует *H*-функция Больцмана - некий функционал, зависящий от функции распределения частиц по скоростям и координатам и монотонно убывающий со временем. *H*-функция равна энтропии газа с обратным знаком, делённой на постоянную Больцмана, *k*. *H*-теорема выражает закон возрастания энтропии для изолированной. системы. В равновесном состоянии *H*-функция постоянна.

В названии «*H*-теорема» буква *H* происходит от английского слова *Heat* — тепло. Этим подчеркивается, что речь идет об эволюции энтропии в процессе установления *теплового равновесия.*

H-теорема Больцмана: при временной эволюции к равновесному состоянию энтропия внешне замкнутой системы возрастает и остается неизменной при достижении равновесного состояния.

H-функция Больцмана для газа равна

$$H = \int h(x,t)dx = \iint f(v,x,t)\ln f(v,x,t)dvdx\,, \qquad (36)$$

где $f(v,x,t)$ – функция распределения частиц по скоростям и координатам, удовлетворяющая *кинетическому уравнению Больцмана,* $h(x,t)$ – пространственная плотность *H*-функции, имеющая смысл локальной плотности энтропии с обратным знаком. Скорость изменения *H*-функции со временем равна

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \iint (1+\ln f)\frac{\partial f}{\partial t}dvdx. \qquad (37)$$

Согласно Больцмана *H*-теореме, для изолированной системы $\partial H/\partial t \le 0$, что следует из равенства (38), если в него подставить $\partial f/\partial t$ из кинетического уравнения Больцмана и симметризовать полученное выражение относительно функций распределения сталкивающихся частиц при прямом и обратном соударении. В пространственно-неоднородных огранических системах необходимы граничные условия для функции распределения на поверхности системы. В этом случае справедливо уравнение баланса энтропии:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - divS = G \le 0, \qquad (38)$$

где *S* – плотность потока энтропии, *G* – локальное производство энтропии с обратным знаком. Следовательно, Больцмана *H*-теорема есть следствие положительности производства энтропии в неравновесной термодинамике, т. к. для изолированной системы суммарный поток энтропии через поверхность равен нулю.

Обычно *H*-теорему Больцмана представляют в виде

$$\frac{dS}{dt} \ge 0, \qquad (39)$$

где энтропия

$$S(t) = -k\int \ln f \cdot fdrdp. \qquad (40)$$

Знак равенства относится к равновесному состоянию, когда f_0 – распределение Максвелла.

Основные выводы: *H* не может возрастать, *S* не может убывать.

Против Больцмана *H*-теоремы был выдвинут ряд возражений:

– парадокс обратимости Лошмидта: невозможно вывести необратимый процесс из симметричных во времени уравнений динамики;

– парадокс возврата Э. Цермело.

Лошмидт заметил, что каждому движению молекул газа с убыванием *H* соответствует движение с увеличением *H*. Парадокс возврата основан на теореме Пуанкаре о возвратах. В ответ на эти возражения Больцман выдвинул статистическое

толкование Больцмана *H*-теоремы, поскольку она не является следствием одних лишь уравнений механики, а использует предположение о "молекулярном хаосе", имеющее вероятностный характер. Согласно Больцману, энтропия, а следовательно и *H*-функция, есть мера вероятности пребывания системы в неравновесном состоянии: убывание *H* означает стремление системы к переходу из менее вероятного в более вероятное состояние.

Решение парадокса Лошмидта заключается в том, что уравнение Больцмана основано на предположении "молекулярного хаоса", т.е. для описания системы достаточно одночастичной функции распределения. Это допущение и нарушает симметрию во времени.

Современный вывод кинетического уравнения Больцмана позволяет лучше понять причину появления необратимости в уравнении Больцмана, несмотря на то, что оно выводится из обратимых уравнений механики. Убывание *H*-функции (рост энтропии) соответствует возрастанию хаоса в системе, что связано с неустойчивостью фазовых траекторий многих механических систем относительно изменения начальных условий: малые изменения начальных условий приводят к большим отклонениям фазовых траекторий (**эффект перемешивания**). Перемешивание приводит к стохастизации, в динамической теории траектории становятся непредсказуемыми. Для макроскопических систем в обычных условиях этот эффект не наблюдается, т. к. макроскопическое наблюдение подразумевает некоторое сглаживание (определяется лишь небольшое число параметров системы, гораздо меньше, чем число механических начальных условий).

Замечание. Известна другая формулировка *H*-теоремы Больцмана, основанная на существовании функционала Ляпунова $\Lambda_S=S_0-S(t)$ со свойствами

$$\Lambda_S \equiv S_0 - S(t) = k\int \ln\frac{f}{f_0}\cdot f d\vec{r}d\vec{p} \geq 0, \quad \frac{d(S_0-S)}{dt}\leq 0, \quad \langle H\rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m}\right\rangle = const. \tag{41}$$

Отсюда следует, что равновесное состояние устойчиво и отвечает максимуму энтропии S_0. В процессе эволюции к равновесному состоянию среднее значение энергии разреженного газа остается неизменным. Здесь это не дополнительное условие, а естественное свойство уравнения Больцмана. Однако именно по этой причине функционалом Ляпунова является энтропия, а не какая/либо другая характеристика системы.

Коротко остановимся на положениях, приводящих к статистическому распределению Больцмана.

Пусть имеется замкнутая система из *N* частиц, взаимодействующих между собой посредством консервативных сил, совершающих движение в ограниченной области пространства и обладающих суммарной энергией *E*. Все возможные состояния этой системы изображаются точками в фазовом пространстве с размерностью 6*N*, которые распределены в некоторой области *G* этого пространства, задаваемой энергией системы. Разделим область *G* на n одинаковых по объему ячеек G_i, i=1,2,3,…,n таким образом, что энергия частицы в *i*-ой ячейке равна E_i. Микросостояние задаётся путём указания конкретных ячеек, в которых находится каждая из *N* частиц. Макросостояние определяется полным набором чисел частиц (N_i), находящихся во всех *n* ячейках. Статистический вес Ω макросостояния по определению равен числу всех возможных микросостояний, реализующих заданное макросостояние при фиксированных *n, N, E* и *G*. Л.Больцман принял одинаковую вероятность реализации любого микросостояния, возможного для заданного макросостояния, и определил термодинамическую вероятность p_T макросостояния на основе формулы $p_T=\Omega$. Здесь термодинамическая вероятность может принимать значения много больше 1.

Статистическое (вероятностное) определение энтропии *S* макросостояния:

$$S = k\ln p_T = k\ln\Omega, \tag{42}$$

где k – постоянная Больцмана, Ω – статистический вес, пропорциональный числу микроскопических способов, которым может быть осуществлено данное макросостояние..

Натуральный логарифм обеспечивает аддитивность энтропий подсистем полной системы, поскольку статистический вес полной системы равен произведению статистических весов её макроскопических подсистем.

Казалось бы, в качестве характеристики вероятности состояния можно взять Ω. Однако такая характеристика не обладала бы свойством аддитивности. Приходится прибегать к $\lg\Omega$.

Поясним выбор логарифма.

Разобьём систему на две подсистемы. Статистические веса подсистем обозначим соответственно Ω_1 и Ω_2. Если подсистемы слабо взаимодействуют друг с другом, то почти независимо меняются и их микросостояния. Поэтому статистический вес всей системы равен произведению чисел способов, которыми могут быть осуществлены состояния каждой из подсистем: $\Omega=\Omega_1\cdot\Omega_2$. Но это означает, что

$$S=k\ln\Omega=k\ln\Omega_1+k\ln\Omega_2=S_1+S_2. \qquad (43)$$

Иметь дело с аддитивными величинами много проще и удобнее.

Аддитивность (экстенсивность) энтропии: энтропия системы равна сумме энтропии её частей.

Следствие: если система состоит из N одинаковых макроскопических тел, то энтропия одного тела равна $S_1=S/N$, где S – энтропия всей системы.

В соответствии со вторым началом термодинамики энтропия равновесного состояния замкнутой системы принимает максимальное значение. Следовательно, статистический вес и термодинамическая вероятность равновесного состояния также максимальные. Условие максимума статистического веса макросостояния позволяет найти наиболее вероятные распределения частиц по ячейкам фазового пространства и, соответственно, по энергиям. В классической статистике Больцмана частицы считаются одинаковыми, но различимыми и можно проследить за траекторией движения каждой частицы. Следовательно, перестановки частиц между различными ячейками фазового пространства приводят к новым микросостояниям для заданного макросостояния. Для макросостояния с известными числами N_i статистический вес определяется выражением

$$\Omega_E=\frac{N!}{N_1!N_2!...N_S} \qquad (44)$$

Здесь учтено, что перестановки частиц в пределах отдельной ячейки не дают новые микросостояния.

Максимум статистического веса ищется при двух дополнительных условиях

$$\sum_{i=1}^{S}\varepsilon_i=E \qquad (45)$$

задающих полное число частиц N в системе и их суммарную энергию E. Если принять, что все числа $N_i>>1$ и использовать формулу Стирлинга

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n},\ n>>1, \qquad (46)$$

то условный максимум получается при

$$N_{Ei}=e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{kT}},\ i=1,2,...,n \qquad (47)$$

Здесь N_{Ei}- наиболее вероятное (среднее) число частиц в i–ой ячейке фазового пространства, μ – химический потенциал системы (нормировочная постоянная, связанная с полным числом частиц) и T – температура равновесного состояния, зависящая от полной энергии системы. Таким образом, получается распределение Больцмана.

Замечание. Следует различать математическую и термодинамическую вероятность. Математическая вероятность реализации макросостояния с номером *i* пропорциональна

статистическому весу Ω_i этого состояния: $p_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_{общ}}$ – отношение числа случаев, благоприятствующих событию, к общему числу равновозможных случаев. вероятность *p* дробная нормированная величина, изменяющаяся от 0 до 1. Термодинамическая вероятность $W=\Omega$, где *W* – всегда целое число, очень большая величина, для газов близкая к числу Авогадро. Мы далее под *W* будем понимать термодинамическую вероятность и считать, что она равна статистическому весу Ω.

Термодинамическая вероятность или статистический вес макросостояния (число перестановок одноименных элементов, при которых сохраняется данное макросостояние). *W* – число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние.

Энтропия – общее свойство выравнивания энергетических параметров в изолированных материальных системах, т.е. в подавляющем большинстве случаев (но не в любых!) события в системах развиваются по наиболее вероятному сценарию: объекты системы переходят из состояния менее устойчивого равновесия в состояние более устойчивого. Выравнивание энергий наиболее вероятно.

Дифференциальная энтропия, *S, изолированной системы*, связана с числом, *W*, равновесных микроскопических состояний системы (статистический вес состояния), которыми можно реализовать данное макроскопическое состояние системы, уравнением (М. Планк)

$$S=k\cdot\log W, \qquad (48)$$

где $k=R/N_A$ – множитель, имеющий размерность энтропии (постоянная Больцмана, $k_B=1{,}381\cdot10^{-16}$ эрг/K $=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/K), логарифм любой (в термодинамике обычно натуральный, а в информатике – двоичный, *W* – количество микросостояний данного макросостояния, т.е. термодинамическая вероятность (вес) состояния.



Рис. 3. Формула Планка на могиле Больцмана и его потомков на венском кладбище.

<u>Замечание.</u> Формулу $S=k\cdot\log W$ часто называют формулой Больцмана. Это не так: в работах Больцмана такой формулы нет, хотя она выбита на памятнике на его могиле. Но это формула Планка! В 1877 Больцман опубликовал работу "Об отношении между вторым началом термодинамики и теорией вероятности". В ней он утверждал: энтропия системы есть мера вероятности реализации её состояния; возрастание энтропии системы обусловлено её переходом из менее вероятного состояния в более вероятное; эволюция замкнутой системы осуществляется в направлении наиболее вероятного распределения энергии по отдельным подсистемам". Однако, как математически выражается связь между энтропией и вероятностью он не знал. Эту связь четверть века спустя (1900) установил Планк, он же ввёл понятие постоянной Больцмана и рассчитал её величину ($k=1{,}346\cdot10^{-16}$ эрг/град). Планк сам написал свою формулу на установленном им памятнике Больцману на его могиле. (Больцман покончил с собой в Италии, как самоубийцу его хоронить в католической стране не стали, а переправили тело в протестантскую Вену. Когда Планк посетил центральное венское кладбище, то убедился, что могила Больцмана исчезла. После долгих поисков в архиве и на месте, он примерно установил местонахождение захоронения и на свои деньги установил бюст Больцмана и написал на нём свою формулу (без указания основания логарифма). Пауль и Татьяна Эренфест. которые сделали важный вклад на начальном этапе исследований энтропии и которые хорошо ориентировались в истории этого понятия, указывали, что эту формулу на самом деле впервые предложил Планк и поэтому константу, которую мы называем постоянной Больцмана, они называли постоянной Планка. Но так как именем Планка названа другая важная константа, то чтобы избежать путаницы а также увековечить заслуги Больцмана, константе *k* дали его имя. Больцман славился угрюмым

характером, был склонен к суициду, и остаётся только гадать, что бы он сделал, если бы узнал, что на его камне выбита чужая формула, причём она названа формулой Больцмана!

Из (48) следует

$$W=\exp(S/k). \qquad (49)$$

Чем больше энтропия, тем больше статистический вес состояния.

Понятие термодинамической вероятности строится на предположении, что все микросостояния являются равновероятными, т.е. при длительном рассмотрении системы, подчинённой неизменным макроскопическим условиям, вероятность застать эту систему в определённом микросостоянии одинаково велика для всех возможных микросостояний.

Эргодичность – свойство некоторых динамических систем, состоящее в том, что в процессе эволюции почти каждое состояние с определённой вероятностью проходит вблизи любого другого состояния системы. Система, в которой фазовые средние совпадают с временными, называется эргодической.

Эргодическая гипотеза: с течением времени система проходит все микросостояния, отвечающие заданным макроскопическим условиям.

Справедливость эргодической гипотезы обосновывается тем фактом, что термодинамическая вероятность равновесного состояния обычных термодинамических систем сильно превышает сумму термодинамических вероятностей всех возможных неравновесных состояний:

$$W_{равн.сост} >> \sum_{(всех)} W_{неравн.сост} \qquad (50)$$

Существует *качественная* связь между энтропией и количеством микросостояний системы. Увеличение количества микросостояний – это увеличение хаоса. Увеличение хаоса - это увеличение числа микросостояний и увеличение энтропии.

Замечание. Сложность в понимании термина энтропия, заключается в том, что этот термин обозначает как состояние (энтропия какого-либо объекта), так и процесс (энтропия действует на объект). Энтропия (как состояние объекта) - мера его упорядоченности, под которой понимают равномерное распределение частиц. Чем равномернее они распределены в объекте, тем выше энтропия этого объекта.

W экспоненциально увеличивается с ростом S.

Безразмерная энтропия

$$S_{без}=\ln W \qquad (51)$$

Принцип Больцмана-Планка возрастания энтропии: процессы передачи тепла в замкнутой системе происходят от менее вероятного к более вероятному её состоянию. Без дополнительного притока энергии в систему её наиболее вероятное конечное состояние есть состояние покоя.

Энтропия – логарифм от числа допустимых состояний системы. Это показатель случайности или неупорядоченности строения физической системы: чем меньше элементы системы подчинены какому-либо порядку, тем выше энтропия.

Замечание. Энтропия пропорциональна числу микросостояний, характерных для макросостояния, в котором находится система. Однако даже зная макросостояние, мы не можем знать микросостояние, и чем выше энтропия системы, тем ниже её предсказуемость. Предположим, что у нас есть система с 1000 различных микросостояний. Если мы знаем, что в этот момент она находится в первом, мы можем быть уверены только в том, что в следующий момент она будет находиться в одном из других 999. Но если у нас есть система только из десяти состояний, мы знаем, что есть только девять возможностей, начиная с текущего момента, то есть такая система более предсказуема. какова минимально возможная энтропия для любой системы и какому количеству микросостояний она соответствует. Энтропия одного микросостояния равна нулю. С точки зрения непредсказуемости это справедливо: нет более предсказуемой системы, чем та, у которой только одно состояние. Её непредсказуемость точно равна нулю.

Статистическая физика рассматривает энтропию как **меру вероятности** пребывания системы в данном состоянии (принцип Больцмана). Здесь энтропия выражает неопределенность микроскопического состояния системы: чем больше микроскопических состояний системы соответствуют данному макроскопическому состоянию, тем выше термодинамическая вероятность и энтропии последнего. Система с маловероятной структурой, предоставленная самой себе, развивается в сторону наиболее вероятной структуры, т.е. в сторону возрастания энтропии. Это, однако, относится только к замкнутым системам. Энтропия – функция состояния, т. е. не зависит от способа достижения этого состояния, а определяется параметрами этого состояния. Так как W может быть только натуральным числом (1, 2, 3, …), то энтропия Больцмана должна быть **неотрицательной** (свойство логарифма).

Статистика Больцмана обладает существенными недостатками: различимость частиц, использование формулы Стирлинга, невозможность применения к системам со взаимодействующими частицами.

5.3.2 Энтропия Гиббса

Равновесное состояние системы с функцией Гамильтона $H(X)$ характеризуется каноническим распределением Гиббса

$$f_0(X) = \exp\frac{F_0 - H(X)}{kT}, \quad \int f_0 dX = 1. \qquad (52)$$

Пусть $f(X, t)$ – произвольное распределение с той же нормировкой, но с одним ограничением: среднее значение функции Гамильтона для распределений f_0, f одинаково, т. е. $\int Hf_0(X) = \int Hf(X,t)dX$.

Через S_0, S обозначим энтропии, отвечающие распределениям f_0, f. Тогда согласно теореме Гиббса

$$S_0 - S = k\int \ln\frac{f}{f_0}\cdot f dX \geq 0.$$

Таким образом, при условии постоянства средней энергии энтропия в состоянии равновесия максимальна. Здесь нет ограничений па взаимодействие частиц системы. В этом отношении результат Гиббса является более общим, чем H-теорема. Здесь, однако, не рассматривается вопрос о временной эволюции функции при релаксации к равновесному состоянию.

В статистической термодинамике формулу энтропии Гиббса записывают а виде

$$S = -k_B\sum_i p_i \ln p_i \qquad (53)$$

Эта формула используется для вычисления статистической механической энтропии термодинамической системы; суммирование ведётся по всем возможным состояниям системы (обычно по $6N$-мерным точкам, если система состоит из N частиц); множитель k_B отражает два факта: выбор основания логарифма и выбор температурной шкалы.

Энтропия Гиббса имеет более общий характер, чем энтропия Больцмана. При пренебрежении корреляциями между частицами теория Гиббса упрощается до теории Больцмана.

В каком-то смысле, энтропию можно рассматривать как на меру беспорядка в системе (энтропия, как стремление к хаосу). Это обусловлено тем, что «упорядоченными» системами считаются системы, имеющие очень малую возможность конфигурирования, тогда как «беспорядочные» системы имеют очень много возможных состояний. Поэтому энтропия – число микросостояний на данное макросостояние. Например, в случае идеального газа наиболее вероятным состоянием, соответствующим максимуму энтропии, естьт равномерное распределение молекул. При этом реализуется и максимальный «беспорядок», так как реализуются максимальные возможности конфигурирования. Всё же энтропия не столько мера беспорядка, а сколько мера вероятности протекания

самопроизвольного процесса в изолированной термодинамической системе. Процесс же наиболее вероятен тогда, когда все молекулы вещества, или элементы системы занимают или займут в результате процесса **равное** (одинаковое) энергетическое состояние, при этом станет невозможен никакой дальнейший процесс (система термодинамически устойчива).

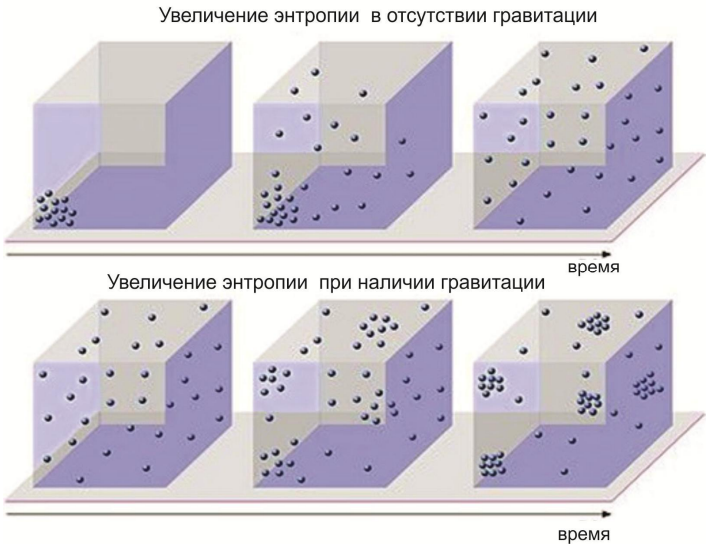


Рис. 4. Степень «беспорядка» в замкнутой системе (энтропия) может со временем только возрастать (2-й закон термодинамики). При впуске газа в некоторый объём, его молекулы равномерно распределяются по всему пространству – наступает термодинамическое равновесие, при котором энтропия максимальна (верхний рисунок). В больших системах с мощной гравитацией (пример – Вселенная), сила тяжести приводит к образованию скопление в первоначально почти однородном распределении газа (нижний рисунок). Так образуются звезды и галактики.

Такое состояние не всегда совпадает с наибольшим беспорядком (хаосом) и напротив хаос сам по себе не является устойчивым состоянием: он несёт потенцию – либо достижения ещё большего хаоса либо увеличения энтальпии то есть порядка в системе. В неизолированных (закрытых), а тем более открытых системах понятие энтропии несколько условно. Это функция, зависящая от краевых начальных и граничных условий, без которых, эта функция – есть фикция. Энтропия – мера экстенсивности термодинамической системы: при данном интенсивном факторе, которым выступает температура, произведение энтропии на **изменение** температуры и есть изменение энергии системы. Энтропия может и не меняться, тогда как энергия системы изменяться будет. При изотермических процессах составляющая энергии системы, в которую входит энтропия, равна нолю.

Энтропия характеризует структуру системы с точки зрения распределения энергии в объёме внутри и вокруг системы, отражая меру связи и взаимодействия частиц системы. Она пропорциональна отношению упорядоченной (структурной, потенциальной) энергии, обеспечивающей целостность и неизменность системы, к хаотической энергии теплового движения частиц. Упорядоченная энергия – энергия направленного движения вещества, энергия сжатия от давления и потенциальная энергия вещества в гравитационном и электромагнитных полях. Под необратимыми подразумеваются процессы, сопровождающиеся возрастанием энтропии всей замкнутой системы. Процессы, которые были бы их повторениями в обратном порядке – не могут происходить, так как при этом энтропия должна была бы уменьшиться. Обратимыми же называют процессы, при которых термодинамическая энтропия замкнутой системы остается постоянной. (Энтропия отдельных частей системы при этом не обязательно будет постоянной.)

Применение понятия термодинамической энтропии совершенно неправомерно в двух случаях:

– когда смешивают различные понимания беспорядка, и энтропия становится мерой беспорядка вообще;

– когда понятие энтропии применяется для систем, не являющихся термодинамическими.

Например при кристаллизации переохлаждённой жидкости образование структур из «хаотичной» жидкости (увеличение порядка) идёт параллельно с увеличением энтропии (ростом беспорядка).

Замечание. Из вероятностной трактовки энтропии в статистической физике выводятся основные равновесные распределения: каноническое распределение Гиббса, которое соответствует максимальному значению информационной энтропии при заданной средней энергии, и большое каноническое распределение Гиббса – при заданных средней энергии и среднем числе частиц в системе.

Энтропия Гиббса – аддитивная безразмерная величина:

$$S_G(t) = -\sum_n W_n(t) \ln W_n(t). \qquad (54)$$

Из неравенства $0 \le W_n(t) \le 1$ следует, что $S_G(t) \ge 0$. Только в частном случае, когда статистический оператор описывает чистое квантовое состояние, мы имеем $S_G(t)=0$. Вероятность состояния W равна отношению числа микросостояний K, благоприятных данному макросостоянию, к полному числу возможных микросостояний L: $W = K/L$.

Величину W можно принять за меру беспорядка в системе, если принять, что упорядоченная система имеет малую возможность конфигурирования, тогда как беспорядочная система имеет много возможных состояний. Так, в случае идеального газа наиболее вероятным состоянием, соответствующим максимуму энтропии, будет равномерное распределение молекул. При этом реализуется и максимальный «беспорядок», так как при этом будут максимальные возможности конфигурирования.

Тут надо быть осторожным: энтропия приложима лишь к конкретной системе и конкретной ситуации. Беспорядок вообще она не рассматривает.

Например, в поле тяготения наиболее вероятным является распределение молекул, описываемое барометрической формулой Больцмана, а вовсе не равномерное распределение. При наличии электромагнитных сил взаимодействия между ионами наиболее вероятным состоянием, соответствующим максимуму энтропии, будет упорядоченное кристаллическое состояние, а совсем не «хаос». При кристаллизации переохлаждённой жидкости образование структур из «хаотичной» жидкости идёт параллельно с увеличением энтропии.

Пример. Имеем набор 10 монет, каждая из которых может находиться либо в состоянии «орёл», либо в состоянии «решка». Наиболее «упорядоченным» макроскопическим состоянием будет являться или 10 «орлов», или 10 «решек»; для каждого результата в каждом случае имеется только одна возможная конфигурация. И наоборот, наиболее «неупорядоченное» состояние содержит 5 «орлов» и 5 «решек», и здесь ${}^{10}C_5=252$ способов для получения этого результата. Этот пример некорректен, так как система монет не является термодинамической системой, и поэтому термодинамическая энтропия системы в обоих случаях (как бы ни были перевёрнуты монеты) окажется, конечно, одинаковой. Так, разбросанные по комнате стулья не имеют отношения к термодинамической энтропии, хотя и могут иметь отношение к энтропии информационной. Важно, что замкнутая система 10 монет, перевёрнутых орлами вверх, самопроизвольно не перейдёт в систему хаотично перевёрнутых монет.

В настоящее время полагают, что $\mathrm{d}Q/T = k \ln W$. Однако до сих пор никто не доказал это равенство, более то до сих не удалось по статистической энтропии найти термодинамическую энтропию. Между тем можно упомянуть несколько отличий S_{term} от S_{stat}. В термодинамике энтропия является носителем тепловой формы движения, т.е. величиной, способной передаваться через границы системы в процессе теплообмена или массообмена между ней и окружающей средой. В термодинамике неравновесных процессов используется понятие "потока энтропии", аналогичного потоку вещества, заряда и т.п. Говорить же о переносе через границы системы "вероятности состояния" бессмысленно. Далее, статистическая энтропия может убывать в процессах "самоорганизации" по мере удаления от состояния равновесия, в то время как термодинамическая энтропия остается при этом неизменной. Процесс смешения невзаимодействующих газов при постоянном объеме после удаления разделявшей их

перегородки не изменяет ни температуры, ни давления, ни состава системы в целом. Многокомпонентная система еще до смешения находится в полном (термическом, механическом и химическом) равновесии, так что процесс смешения не вызывает приближения ее к равновесию ни по одной из располагаемых ею степеней свободы. Тем не менее, процесс самопроизвольного перемешивания также соответствует приближению системы к более вероятному состоянию. Эта тенденция к перемешиванию возникает уже при числе молекул, равном или большем трех при сколь угодно малом взаимодействии между ними, т.е. в условиях, когда совершенно неуместно говорить вообще о термодинамической системе.

Модель Больцмана может быть применена только к идеальному газу (система невзаимодействующих частиц). Недостатки статистики Больцмана: различимость частиц, использование формулы Стирлинга, невозможность применения к системам со взаимодействующими частицами. Более продвинутыми являются статистика Бозе-Эйнштейна и статистика Ферми-Дирака, в которых частицы неразличимы.

Вернёмся к проблеме оценки степени порядка/беспорядка по энтропии.

В качестве примера рассмотрим плавление льда. Легко показать что изменение энтропии при плавлении льда $\Delta S_{плав}=S_{жид} - S_{твёрд} = Q_{плав}/T= 1434/273=5,27$ кал/(моль.K).

Считается, что при плавлении порядок уменьшается, можно сравнить с плавлением поваренной соли, или, скажем, железа. Но это всё! Собственно как развивался процесс в пространстве и времени (начиналось ли таяние с поверхности льда, или центры плавления статистически возникали по всему объёму, какую роль играли трещины, раскалывался ли брусок на отдельные куски и т.д.) ничего сказать нельзя. Тем более бесполезно говорить о смене порядка при плавлении снежинок: формы их различны, плавление их осуществляется различно, но изменение энтропии всегда будет одним и тем же. Знание энтропии ничего не может сказать о порядке исходных и конечных структур и об особенностях перехода одной структуры в другую.

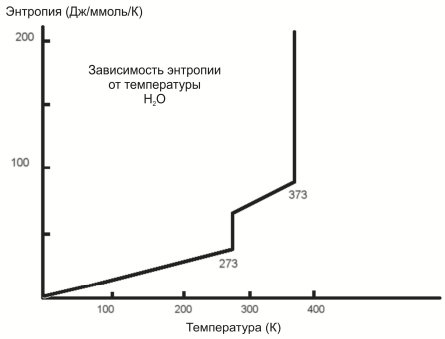


Рис. 5. Изменение энтропии воды при плавлении льда и испарении воды. *Можно следить за изменение величины порядка в системе, определить температуры переходов и оценить величину скачкообразного роста беспорядка. Что это был за упорядоченный хаос и как он менялся в пространтве-времени ничего сказать нельзя.*

Кристаллические и аморфные тела сильно отличаются друг от друга по величине энтропии в смысле Больцмана-Планка, но совершенно одинаковы с точки зрения термодинамической энтропии. Совершенно разные структуры имеют одинаковую энтропию, поэтому прямую задачу – нахождение энтропии по структуре решить иногда можно (по крайней мере для объектов простой геометрии), но обратная задача – нахождение структуры (порядка) по энтропии не решаема.

В природе существуют энтропийно идентичные, но структурно разные объекты.



Рис. 6. Узоры льда на стекле - борьба порядка с беспорядком. Термодинамическая энтропия равна энтропии плавления куска льда, а энтропия Больцмана-Планка намного больше (*только до сих её никто почему-то не посчитал****).***

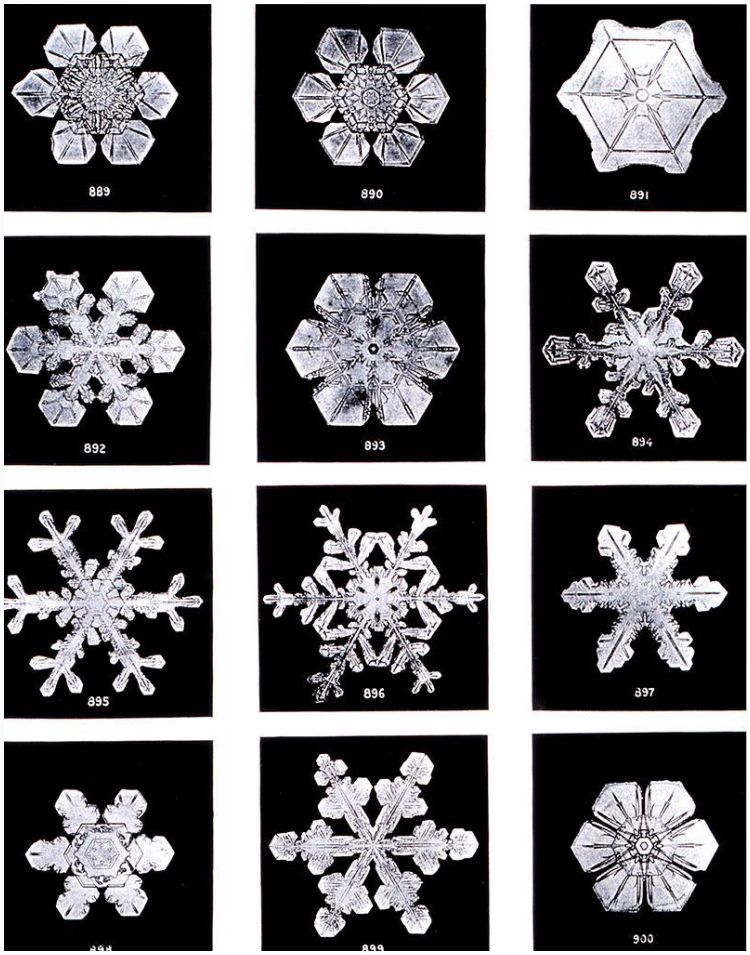


Рис. 7. Формы снежинок: форма их разная, термодинамическая энтропия одинакова, а статистическая энтропия различна.

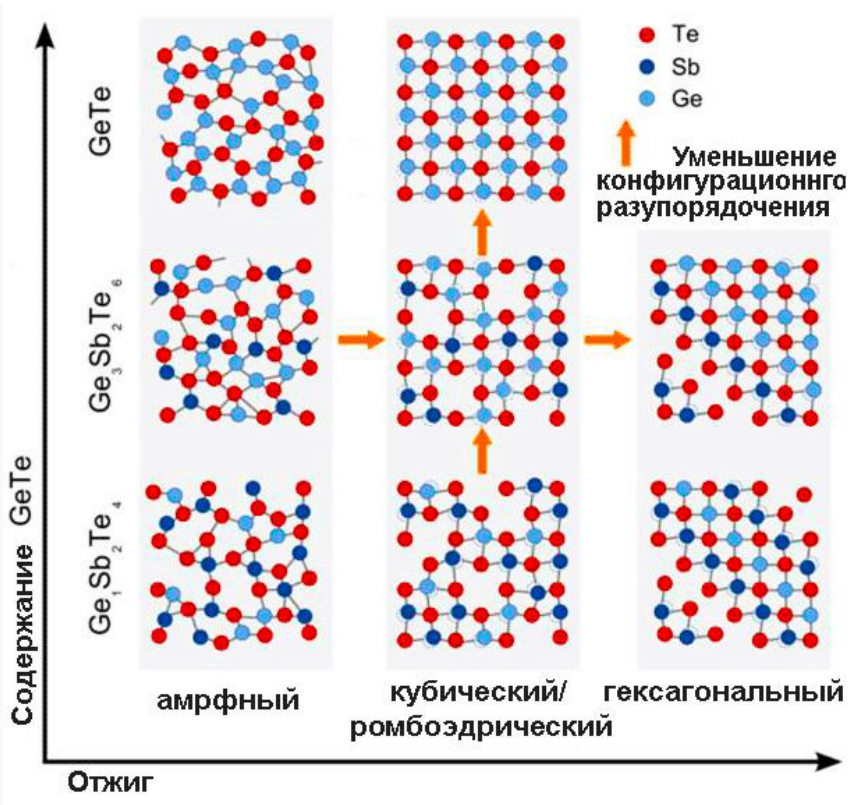


Рис. 8. Изменение расположения ионов в твёрдом теле при последовательных переходах: аморфное тело→кристалл типа 1→кристалл типа 2. Возникновение порядка из беспорядка.

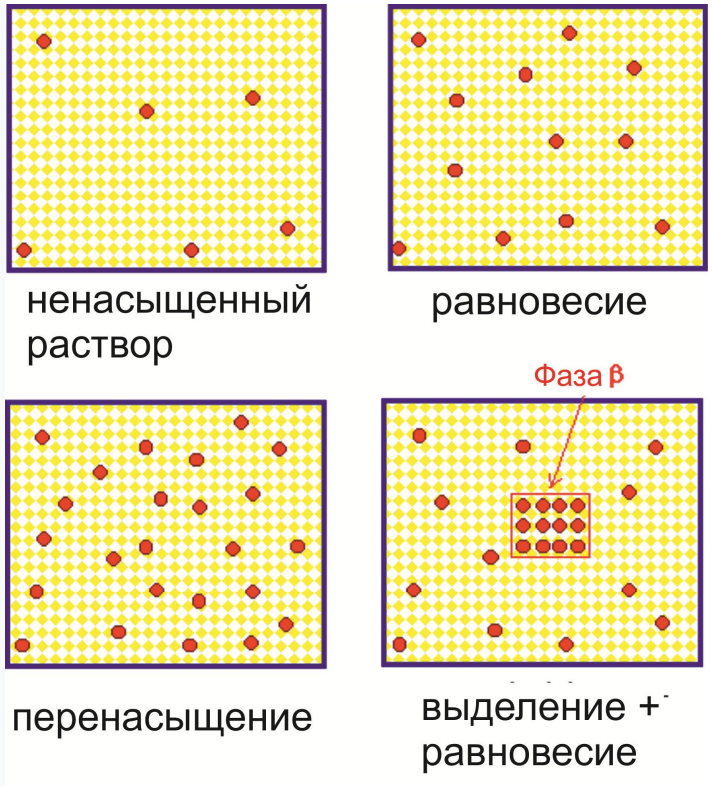


Рис. 9. Рост кристалла из раствора – возникновение порядка из беспорядка.

5.4 Тсаллис (Цаллис) энтропия (Революция в термодинамике)

Энтропия Цаллиса – обобщение стандартной энтропии Больцмана-Гиббса.

Как уже упоминалось, основные свойства термодинамической энтропии: её экстенсивность и аддитивность

$S(A+B) = S(A) + S(B)$. (55)

В статистической физике показывается, что энтропия является аддитивной величиной и принимает максимальное значение в состоянии равновесия.

Это справедливо, если силы между частями системы являются короткодействующими: каждая молекула чувствует лишь несколько ближайших соседей.

Однако, существуют системы, которые не могут быть описаны больцмановской термодинамикой. Прежде всего, это системы с сильными корреляциями, с сильными и дальнодействующими взаимодействиями между всеми частями системы, с эффектами памяти (система помнит свое прошлое – эволюция системы в данный момент времени зависит не только от параметров системы в этот конкретный момент времени, но и от ее параметров некоторое время назад). Типичным примером являются квазичастицы и фононные колебания в кристалле. В этих случаях предположение молекулярного хаоса, лежащее в основе больцмановского выражения для энтропии, не выполняется.

Константино Тсаллис (*Constantino Tsallis*, грек из Бразилии, в русской литературе называется Цаллис) в 1988 в рамках статистической термодинамики предложил обобщение энтропии Больцмана-Гиббса на случай неаддитивных систем. Его гипотеза базируется на предположении, что сильное взаимодействие в термодинамически аномальной системе приводит к новым степеням свободы, к совершенно иной статистической физике не-больцмановского типа, т.е. *отдельные частицы с больцмановской статистикой + сильное взаимодействие => новые степени свободы с небольцмановской статистикой + отсутствие взаимодействия.* Эта гипотеза не доказана, но оказалась полезной для ряда приложений.

Цаллис теоретическим обоснованием своей гипотезы особенно не заморачивался. Он просто взял стандартное выражение для энтропии, а логарифм заменил на степенную функцию

$$\ln(x) \to \log_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \qquad (56)$$

с неким числовым параметром q (действительное число, энтропийный индекс, мера неэкстенсивности системы).

Цаллис подбирал формулу для энтропии, которая переходила бы в стандартную формулу в пределе слабой связи и описывала неэкстенсивные системы. Физический смысл ей придали намного позже.

q-Энтропия Цаллиса (дискретный случай) задаётся формулой:

$$S_q = -\sum_i p_i^q \ln_q(p_i) = \frac{k\left(1 - \sum_i p_i^q\right)}{q-1} = -k\left[D_q \sum_i p_i^x\right]_{x=1}; \quad \sum_i p_i = 1, \qquad (57)$$

где D_q - q-производная по x. S_q можно сравнить со стандартной энтропией $S = -\lim_{x\to 1} \frac{d}{dx} \sum_i p_i^x$. k – размерная константа, если размерность существенна для понимания задачи.

При $q \to 1$ – достигается энтропия Больцмана-Гиббса (и Шннона) $S_{BG} = -k\sum_i p_i \ln p_i$ и $S(AB)=S(A)+S(B)$.

Если $q>1$, а все $p_i \sim 0$, кроме одного $p_i \sim 1$ (заполнен один уровень – система полностью детерминирована), то $S_q>0$. S_q достигает экстремума (максимума – при $q>1$ и минимума – при $q<1$) в случае равновероятностного распределения (т.е. $p_i=1/N$). В этом случае

$$S_q = k\frac{N-q-1}{1-q}. \qquad (58)$$

При q=1, S=k ln$N$ – известная формула Больцмана–Хартли–Шеннона для равновероятных распределений. S_q – вогнута при q>0 и выпукла при q<0, что является основой термодинамической устойчивости.

Важнейшим свойством энтропии Тсаллеса является её неаддитивность, в отличие от всех рассмотренных нами энтропий, в которых была принята аддитивная мера Хартли. Это обстоятельство позволяет описывать системы с длинной памятью, а также и такие системы, в которых каждый элемент взаимодействует не только с ближайшим соседом или несколькими ближайшими соседями, но и со всей системой вцелом или ее частями (системы с дальнодействующими силами). Примерами таких систем являются гравитируюшие системы: звездные скопления, газопылевые комплексы, галактики, скопления галактик и др.

Если две системы A и B независимы, то

$$\frac{S_q(A+B)}{k}=\frac{S_q(A)}{k}+\frac{S_q(B)}{k}+(1-q)\frac{S_q(A)S_q(B)}{k^2} \qquad (59)$$

При q<1 получаем сверхэкстенсивный случай, q=1 – экстенсивный и при q>1 – субэкстенсивный.

Если N состояний системы разбить на две подсистемы L и M (N=L+M) так, что $\sum_L p_l = p_L$ и $\sum_M p_m = p_m$; $p_L + p_M = 1$

то

$$S_q-(\{p_i\})=S_q(p_L,p_M)+p_L^q S_q\left\{\frac{p_l}{p_L}\right\}+p_M^q\left\{\frac{p_m}{p_M}\right\} \qquad (60)$$

Эта формула обобщает формулу Шеннона.

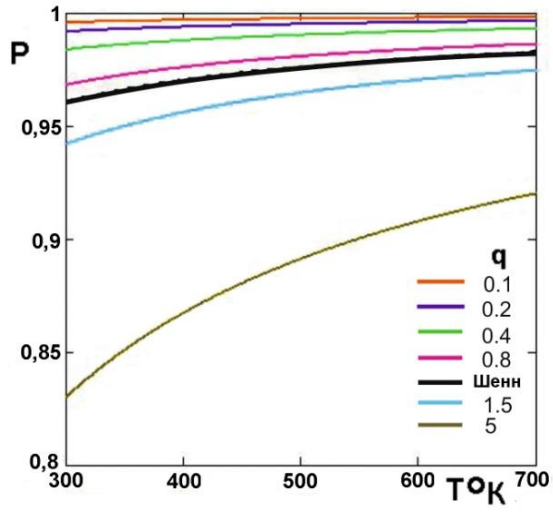
Величина q ничем не ограничена и может принимать значения от минус бесконечности до плюс бесконечности, однако некоторые ограничения возникают в некоторых конкретных задачах. При использовании энтропии Цаллиса в информатике, константа k отбрасывается и q-энтропия становится безразмерной.

В случае непрерывного распределения

$$S_p(p)=\frac{1}{q-1}\left\{1-\int[p(x)]^q\right\}dx \qquad (61)$$

где $p(x)$ – функция плотности вероятности.

q-Энтропия – неэкстенсивная функция. Здесь



$$S_q(A+B)=S_q(A)+S_q(B)+(1-q)S_q(A)S_q(B) \qquad (62)$$

Параметр |1-q| – мера неэкстенсивности системы.

Рис. 10. Зависимость распределения частиц по энергиям от абсолютной температуры при различных значениях параметра q; уравнение Гиббса (пунктир) и распределения Цаллиса. Энергия активации 100 кДж/моль, Газовая постоянная R=8,314 Дж/(моль К), Интервал температур 300 – 700К, Интервал q 0.01 – 10.

Замечание. Тот факт, что Цаллис взял степенную функцию "с потолка", никак не обосновав свой подход (почему бы не взять полином или ещё что-то не менее умное?!), помешало внедрению подобных идей в физическую химию. Неаддитивность энтропии также рассматривалась не как достоинство, а как крупный недостаток новой теории. Однако, удалось найти несколько примеров, в которых q-энтропия

довольно хорошо работает (например, при описании супердиффузии). Кроме того, степенная функция спадает существенно медленнее, чем экспонента, что позволяет совместить *q*-энтропию с распределениями Леви-Парето и геометрией фракталом. Обстоятельство, обеспечивающее перспективность идей Цаллиса в физической химии и информатике, особенно при описании аномальной диффузии. Оказалось, что подход Цаллиса даёт некое обобщение термодинамики, статистической физики и физической кинетики.

Переход от логарифмической к степенной функции, переводит распределение частиц по энергиям Гиббса

$$p(E) \sim \exp(-E/kT) \qquad (63)$$

в энергетическое распределение Цаллиса

$$p(E) \propto \left[1+(1-q)\cdot\left(-\frac{E}{kT}\right)\right]^{\frac{q}{1-q}} \qquad (64)$$

Теперь при больших значениях энергии. При $q>1$ имеет место степенное, а не экспоненциальное падение вероятности в ростом энергии, при $q<1$ существует максимально возможная энергия $E_{макс}$ (обрезка распределения), при $q=1$ – распределение Больцмана.

Неаддитивность энтропии Цаллиса позволяет построить новую термодинамику и новую статистическую теорию, способные просто и корректно описывать системы с длинной памятью, а также системы, в которых каждый элемент взаимодействует не только с ближайшим соседом или несколькими ближайшими соседями, но и со всей системой в целом или ее частями. Типичным примером таких систем являются гравитируюшие системы: звездные скопления, газопылевые комплексы, галактики. Энтропия Цаллиса нашла применение при описании продольных (электростатических) волн в бесстолкновительной плазме, развитой турбулентности, сильно квантово запутанных систем, эволюции сложных сетей, термостатики сильно шунтированного движения взаимодействующих частиц, а также диффузионной кинетики. В системах, чувствительных к начальным условиям производства энтропии идёт на грани хаоса.

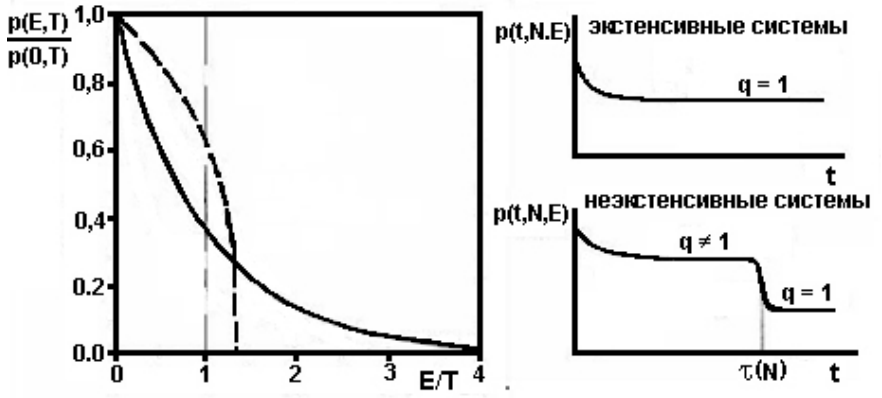


Рис. 11. Распределение частиц по энергии в термостатике Цаллиса и эволюция системы с памятью во времени.

Энтропия Цаллиса применена для решения некоторых практически важных задач.

При изучении эволюции самогравитирующего газа было обнаружено, что распределение по скоростям спиральных галактик в скоплениях резко обрывается при 500 км/сек. Аналогичные эффекты предсказывает и термостатистика Цаллиса. Флуктуации магнитного поля в солнечном ветре позволили вычислить *q*-триплет (или триплет Цаллиса). Продольные (электростатические) волны в бесстолкновительной плазме имеют не максвелловское распределение - спадание при больших скоростях идёт по степенному закону, что позволило обрабатывать результаты по термостатистике Цаллиса. В её рамках было получено распределение скоростей в ведомой диссипативной пылевой плазмы. Термостатистика постепенно находит применение при изучении эволюции сложных

сетей, т.е. систем, состоящих из большого числа узлов, которые могут определенным образом взаимодействовать друг с другом (например, фондовые биржи, компьютерные сети и т.д.). Везде, где важное значение имеет явление "дальнодействия" – каждый узел сети может взаимодействовать не только с несколькими ближайшими соседями, но и со многими удаленными узлами, число которых, к тому же, может меняться со временем. Именно такими случаями и занимается статистика Цаллиса. С помощью этой статистики была интерпретирована релаксация спиновых стёкол. Распределение, характеризующий движение холодных атомов в диссипативных оптических решетках, предсказано в 2003 г., а наблюдалась в 2006 г. Эта статистика нашла применение в обработке результатов, зарегистрированных детекторами на ускорителе ЦЕРНа в экспериментах и изучению столкновений высокоэнергетичных частиц.

Статистика Цаллиса используется для описания процессов, чувствительным к начальным условиям, в которых производство энтропии идёт на грани хаоса, прежде всего это сильно запутанные квантовые системы, термодинамика и сильно шунтированное движение взаимодействующих частиц. Она позволила получить нелинейные обобщения уравнений Шредингера, Клейна-Гордона и Дирака.

Возможно самое перспективное направление использования энтропии Цаллиса – интерпретация явлений аномальной диффузии, в частности – супердиффузия, в рамках которой с использованием пространственно дробных уравнений в частных производных осуществляется непрерывный переход от полного порядка (полуволновое уравнение) к полному беспорядку (диффузионное уравнение). Такой переход можно осуществить изменением параметра q в выражении для энтропии Цаллиса.

6. ГЕОМЕТРИЯ ФРАКТАЛОВ

В 1953 году я понял, что прямая линия
ведёт человечество к упадку.
Тирания прямой стала абсолютной.
Прямая линия – это нечто трусливое,
прочерченное по линейке, без эмоций и размышлений;
это линия, не существующая в природе.
И на этом насквозь прогнившем фундаменте
построена наша обречённая цивилизация.
Ф. Хундертвассер

Окружающий нас мир состоит из предметов различной формы и процессов, как периодических, так и случайных. Далеко не все из них способна описать современная математика. Хотя определённый прогресс наметился, когда помимо трёх старых геометрий (геометрия Эвклида, Римана и Лобачевского) появилась геометрия фракталов, вовлекшая в количественных анализ целый ряд объектов исследования, которые одновременно характеризуются ломаной линией и самоподобны.

Евклидова геометрия (или **элементарная геометрия**) – геометрическая теория, основанная на системе аксиом, впервые изложенной в "Началах" Евклида (III век до н.э.). Аксиомы Евклида носят очевидный характер: от всякой точки до всякой точки можно провести прямую; ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой; из всякого центра всяким раствором может быть описан круг; прямые углы равны между собой; параллельные прямые не пересекаются и т.п. Важно, что геометрия Евклида реализуется на поверхностях с нулевой кривизной.

Геометрия Римана реализуется на поверхностях с постоянной положительной кривизной – на выпуклых объектах (на сферах). Как известно, на глобусе меридианы (параллельные линии) пересекаются, причём в двух точках: на северном и южном полюсах.

Геометрия Лобачевского реализуется на поверхностях с постоянной отрицательной кривизной – на вогнутых объектах. В пиале параллельные сходятся в одном полюсе (на дне пиалы) и расходятся на бесконечные расстояния при движении в противоположную сторону.

Все эти геометрии имеют дело с объектами или физическими процессами, которые можно описать гладкими законами или функциями, которые непрерывны и могут быть продифференцированы в любой точке. Но в природе множество объектов ломаной формы. В этом легко убедиться, взглянув на облака, морозные узоры на стекле, берег моря (особенно в Норвегии) и т.п. Упомянутые математики хорошо пригодны для описания периодических процессов. Но в природе много хаотических явлений, например, возникновение под действием порыва ветра волн на гладкой поверхности озера.

Предложенная Бенуа Мандельбротом в 1975 году геометрия фракталов, занимающаяся объектами, которые одновременно характеризуются ломаной линией и самоподобны, позволила существенно расширить объекты исследования, распространив математические методы на объекты с чрезвычайно тонкой структурой. Конечно не на все объекты с разрывными (не дифференцируемыми) функциями, а только на самоподобные, инвариантные относительно изменения масштаба (т.е. выглядящие одинаково при любой степени увеличения).

Теперь четыре геометрии охватывают широкий набор объектов, то далеко не все. Остальные ждут очередного гения.

Термин ф**рактал** в 1975 г. ввёл Б.Мандельброт для обозначения множеств с дробной размерностью.

Фрактал (*fractus* – состоящий из фрагментов, ломаный, разбитый) – бесконечно самоподобная геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, т.е. составленная из нескольких частей, каждая из которых в каком-то смысле подобна всей

фигуре целиком. Это математическое множество, обладающее свойством самоподобия (имеет ту же форму, что и одна или более частей) и имеющее дробную метрическую размерность (в смысле Минковкого или Хаусдорфа), либо метрическую размерность, d_f, отличную от топологической, d_T ($d_f > d_T$): d_f строго больше d_T, поэтому их следует отличать от прочих геометрических фигур, ограниченных конечным числом звеньев.

Фрактал – геометрическая фигура, состоящая из частей, представляющих собой уменьшенную (необязательно точную) копию целого. В свою очередь каждая часть разбивается на ещё меньшие копии до бесконечности. Это бесконечно самоподобная фигура, причём фигура с дробным числом измерений, то есть не двухмерная и не трёхмерная, а, скажем, 2,76-мерная. Фрактал – множество с дробной размерностью, причём небольшая часть фрактала содержит информацию обо всём фрактале. Фрактальные объекты плотно занимают пространство, но не используют его полностью. Это геометрический образ самоорганизующейся в сильно неравновесных условиях системы. Фрактал – неупорядоченная система, беспорядок, который может быть описан степенными функциями с дробными степенями.

Самоподобный объект – объект, в точности или приближённо совпадающий с частью себя самого (то есть целое имеет ту же форму, что и один или более его фрагментов). Многие объекты реального мира, например, береговые линии, обладают свойством *статистического самоподобия*: их части статистически однородны в разных шкалах измерения. Самоподобие – характеристическое свойство фрактала. Инвариантность относительно изменения шкалы является одной из форм самоподобия, при которой при любом приближении найдётся по крайней мере одна часть основной фигуры, подобная целой фигуре.

Множество – объединение в единое целое определённых вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются элементами образуемого им множества.

Самоподобное множество – множество, состоящее из нескольких компонент, подобных всему этому множеству; компоненты получают афинными преобразованиями — поворотом, сжатием и отражением исходного множества.

Самоподобие – наиболее важная симметрия из встречающихся в природе, и геометрия фракталов – математическая основа описания таких структур нашла широкое применение в математике, математической физике, химии, материаловедении, биологии, географии, синергетике, информатике, геологии, экологии, экономике, технике и искусстве (музыка, живопись, скульптура, архитектура, дизайн), а также для анализа текстов и временных рядов (на примере, цены акций или флуктуации радиационного фона). Методами фрактальной геометрии ведётся моделирование различного рода объектов (деревья, коллоидные частицы и аэрозоли, дендриты, береговая линия моря, плазма, поверхности с сильно развитым рельефом, пористые тела и т.п.) и процессов (броуновское движение, миграция, диффузия, перколяция, фильтрация, проницаемость гетерогенных мембран, адсорбция, катализ, турбулентность, плазменное травление и т.п.).

Фрактальная геометрия – геометрия объектов дробной (фрактальной) размерности (например, коры дерева, облака, береговой линии залива и пр.).

Нелинейная динамика значительное внимание уделяет идеям геометрии фракталов: описание динамического хаоса, информационных и диффузионных процессов, энтропии, спектроскопии различного рода шумов (включая эффекты интермитанса), в статистике с показательными законами, в решении дифференциальных уравнений в частных производных с дробными степенями.

Фракталы бывают абстрактными или природными структурами. В математических фракталах имеет место бесконечная масштабная иерархия самоподобных фигур, в природных объектах иерархия конечна. В реальных природных системах обнаруживаются не только пространственные, но и временные структуры. Как правило, пространственная и временная организации настолько взаимосвязаны, что обычно говорят о

пространственно-временных структурах. Временные структуры изучаются путём анализа временных рядов данных наблюдений, пространственные – путём анализа двумерных изображений.

В данной главе мы рассмотрим основные особенности геометрии фракталов. Её применение для решения практически важных проблем будет проиллюстрировано в последующих текстах.

6.1 Элементы геометрии фракталов

Как известно, геометрия Эвклида имеет дело с "гладкими" объектами: шар, яйцо, цилиндр, кубик и т.п. Такие объекты можно найти в природе, но они редки. Обычно контуры, поверхности и объёмы окружающих нас предметов не ровны, не гладки и не совершенны. Они неровны, шершавы, изъязвлены множеством отверстий самой причудливой формы, пронизаны трещинами и порами, покрыты сетью морщин и царапин. Можно ли их как-то количественно описать? Геометрия фракталов говорит: не все, но многие можно. Если они самоподобны. Геометрии, общей для всех объектов, пока не существует.

Начнём с геометрии Эвклида. Дан шар радиуса r. Площадь сечения по экватору $S_S=\pi r^2$, длина экватора $l=2\pi r$, периметра к площади

$$\frac{l}{S_S} = 2\frac{1}{r} = 2\cdot r^{-d}, \text{ где } d=1. \qquad (1)$$

Площадь поверхности шара $S_S=4\pi r^2$, объём $V=(4/3)\pi r^3$, отношение

$$\frac{S_S}{V} = \frac{4\cdot 3\cdot \pi r^2}{4\pi r^3} = 3\frac{1}{r} = 3\cdot r^{-d}, \text{ где } d=1 \qquad (2)$$

Отношение

$$\frac{l}{V} = \frac{2\cdot 3\cdot \pi r}{4\pi r^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{r^2} = 1{,}5\cdot r^{-d}, \text{ где } d=2. \qquad (3)$$

Имеем показательные функции с некоторым множителем (на него не обращаем внимания – он нас в дальнейшем интересовать не будет) с показателем степени d, который имеет целочисленные значения: или 1 или 2. Важно, что это не только свойство сферы, но свойство любых геометрических тел, свойство геометрии Эвклида.

Геометрия фракталов утверждает, что для многих (но далеко не до всех!) тел сильно развитым рельефом отношение поверхности объекта, S_s, к его объёму, V, можно представить в виде некоторый масштабированный параметр r, получим

$$\frac{S_s}{V} \propto r^{-d_f}, \qquad (4)$$

где r – некий параметр (коэффициент) масштаба, d – целое или дробное число (показатель фрактала, обозначаемый обычно, как d_f), в зависимости от развитости рельефа и размерности пространства лежащее где-то между 0 и 3 ($0\le d_f\le 3$).

Замечание. Если d – целое число, то описание объекта (например, колобка, т.е. шара, дифференцируемого в любой точке) попадает под геометрию Эвклида, ёж не дифференцируемый ни в одной точке, с дробным значением d, не попадает под геометрию Эвклида, но и фракталом не является.

Чтобы объект отнести к фракталам мало иметь дробное значение d_f (хотя иметь, конечно, надо обязательно), нужно, чтобы структура была самоподобна, масштабно инвариантна, т.е. обладать скейлингом. Грубо говоря, картина при любой степени увеличения в своих основных чертах должна оставаться неизменной (т.е. с каким бы шагом (большим или самым мелким) не измеряли бы длину контурной линии (например, длину берега Белового моря), величина d_f должна оставаться постоянной. Ни с Колобком, ни с надкусанным гнилыми зубами яблоком, ни с дикобразом такого не получится, а вот с облаками, горами, дельтой реки, кораллом может получиться (хотя и не всегда).

Существуют чисто математические объекты, к которым дробность и самоподобие применимы на 100%.

Скейлинг (автомодельность, самоподобие, масштабная инвариантность) – особая симметрия системы, состоящая в том, что изменение масштабов одних переменных может быть скомпенсировано преобразованием масштабов других; свойство уравнений физики сохранять свой вид при изменении всех расстояний и промежутков времени в одинаковое число раз, т.е.

$x \to k \cdot x, \quad y \to k \cdot y, z \to k \cdot z, t \to k \cdot t.$

Причём здесь подразумевается лишь изменение единиц измерения, само пространство-время остаётся неизменным. Такие изменения называются преобразованиями подобия и образуют группу масштабных преобразований.

Фрактальное самоподобие (скейлинг) повторение фракталом самое себя на разных масштабных уровнях, т. е. неизменность закона построения фрактала.

Фракталы – язык геометрии. Однако главные элементы фрактала недоступны непосредственному наблюдению. В этом отношении они принципиально отличаются от объектов евклидовой геометрии, таких, как прямая линия или окружность. Фракталы выражаются не в первичных геометрических формах, а в алгоритмах, наборах математических процедур. Эти алгоритмы трансформируются в геометрические формы с помощью компьютера. Репертуар алгоритмических элементов неисчерпаем. Овладев языком фракталов, можно описать форму облака так же чётко и просто, как архитектор описывает здание с помощью чертежей, в которых применяется язык традиционной геометрии.

Фрактальные среды обладают настолько сложной геометрией, что многие физические и процессы протекают в них не так, как в обычных сплошных средах. Это используется в различных сферах. Например, сравнивая фрактальные размерности сложных сигналов, энцефалограмм или шумов в сердце, медики могут диагностировать некоторые тяжелые заболевания на ранней стадии, когда больному еще можно помочь. Барабан, натянутый на гладкий или фрактальный контур, звучит по-разному, и это различие можно использовать для диагностики характера контура и определения его фрактальной размерности. Метеорологи научились определять по фрактальной размерности изображения на экране радара скорость восходящих потоков в облаках, что позволяет с большим упреждением выдавать морякам и летчикам штормовые предупреждения. Такого рода применений фракталов уже сейчас существует великое множество, и число их все увеличивается.

У понятия фрактал нет строгого определения. Поэтому слово «фрактал» не является математическим термином. Обычно так называют геометрическую фигуру, которая удовлетворяет одному или нескольким из следующих свойств:

– обладает сложной структурой (присутствует мелкие детали при любом увеличении);

– является (приближенно) самоподобной (самоподобие фракталов);

– обладает дробной хаусфордовой (фрактальной) размерностью, которая больше топологической;

– может быть построена рекурсивной процедурой, т.е. процедурой, которая повторяет (вызывает) сама себя; каждая часть системы повторяет в своём развитии развитие всей модели в целом и воспроизводится в различных масштабах без видимых изменений (однако, изменения все же происходят, что в значительной степени может повлиять на восприятие нами объекта);

– функция, описывающая фрактал, не дифференцируема, т.е. не гладкая ни в какой точке (нерегулярность фракталов);

– инвариантность («*sealant*» – масштабируемый) – инвариантный объект имеет различные масштабы отображения.

Инвариантность – неизменность какой либо величины при изменении физических условий или по отношению к некоторым преобразованиям, например, преобразованиям координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (релятивистская инвариантность).

Основные свойства фрактала: изломанность и самоподобие.

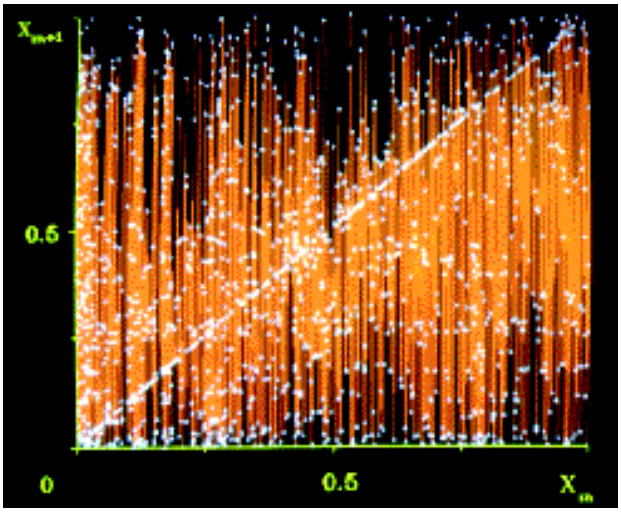
Самоподобный объект выглядит неизменным и после увеличения и после уменьшения его размеров. Многие законы не зависят от масштаба. Тем не менее, скейлинг имеет предел: постоянную Планка, когда объекты становятся слишком малыми, или скорость света – когда объекты движутся слишком быстро. В некотором смысле самоподобие – это тоже периодичность, только в логарифмической шкале.

Все фракталы, обладающие хотя бы какой-нибудь симметрией, самоподобны.

Самоподобие означает, что у объекта нет характерного масштаба: будь у него такой масштаб, можно было бы отличить увеличенную копию фрагмента от исходного снимка. Самоподобные объекты обладают бесконечно многими масштабами. Разумеется, далеко не все фракталы обладают правильной, бесконечно повторяющейся структурой. Многие фракталы, встречающиеся в природе (поверхности разлома горных пород и металлов, облака, турбулентные потоки, пена, гели, контуры частиц сажи и т.д.), лишены геометрического подобия, но упорно воспроизводят в каждом фрагменте статистические свойства целого. Такое статистическое самоподобие, или самоподобие в среднем, выделяет фракталы среди множества природных объектов.

Свойство самоподобия коренным образом отличает фракталы от объектов геометрии Эвклида. Действительно, возьмём такой объект, как график дифференцируемой функции. Если мы направим микроскоп в какую-то точку этого графика, то при увеличении изображения увидим прямую линию – касательную в этой точке. Классические объекты упрощаются при увеличении изображения, в "малом" они линейны (прямая, плоскость и т.д.). Фракталам же присуща "внутренняя бесконечность" – производные в каждой точке обращаются в бесконечность.

Примером непрерывной функции, нигде не имеющей производной является функция Вейерштрасса



$$\omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(\alpha^n \pi x\right), \qquad (5)$$

где – произвольное нечетное число, не равное единице, а – положительное число, меньшее единицы.

Рис. 1. Функция Вейерштрасса (фрактал). *Всюду непрерывная, нигде не дифференцируемая: производные в каждой точке обращаются в бесконечность.* При увеличении любой участок кривой *выглядит подобно всей кривой.*

Фракталы имеют бесконечную длину, непрерывны, способны заполнить плоскость, но ни в одной точке не имеют производной.

6.2 Размерности фракталов

У фракталов есть одно важное общее свойство: степень изрезанности или сложности их структуры может быть измерена неким характеристическим числом (целым или дробным) – фрактальной размерностью d_f.

Размерность – часть топологии, в которой изучаются размерности – числовые топологические инварианты определённого типа.

Размерность пространства – количество независимых параметров, необходимых для идентификации точки геометрического пространства; число, характеризующее протяженность предмета в каком-либо направлении; размерность фигуры равняется числу координат, которые необходимы для определения всех точек этой фигуры.

Топологическая размерность (размерность Лебега) – размерность, определённая посредством покрытий, важнейший инвариант топологического пространства. Размерность Лебега пространства обозначается . Это обычная геометрическая размерность. Она принимает исключительно целые значения. Топологическая размерность d_T точки равна 0, гладкой плавной линии равна 1, фигуры и поверхности (например, квадрата) – 2, тела или пространства (например, куба – 3). В простых явлениях она характеризует зачастую (но не всегда!) количество степеней свободы или количество параметров, необходимых для однозначного задания любой точки множества.

Основным свойством фрактала является самоподобие (масштабная инвариантность), а фундаментальной характеристикой его является фрактальная размерность или размерность самоподобия (дробная размерность как *плотность самоподобия*). Размерность фрактала, как правило, является неотрицательным нецелым числом, отражающим, некоторым образом, геометрическую сложность объекта.

Размерность фрактального объекта отлична от евклидовой (топологической) размерности. Фрактальная размерность, является показателем сложности кривой. Анализируя чередование участков с различной фрактальной размерностью и тем, как на систему воздействуют внешние и внутренние факторы, можно предсказать поведение системы, в том числе - диагностировать нестабильные состояния. Фрактальная размерность - удобная количественная мера неидеальности объектов: извилистости, морщинистости, трещиноватости, пористости и т.п.

В качестве количественной меры геометрической сложности множества (объекта) используют фрактальную размерность d_f, показывающую насколько плотно и равномерно элементы данного множества заполняют евклидово пространство ($d_f \le d_T$).

Размерность Минковского или грубая размерность ограниченного множества в метрическом пространстве равна $d_f = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}$**, где N_ε– минимальное число множеств (например, шаров или кубов) одинакового диаметра ε, которыми можно покрыть наше множество. Если предел не существует, то можно рассматривать верхний и нижний предел и говорить соответственно о верхней и нижней размерности Минковского.**

Размерность Хаусдорфа-Безиковича (ХБ-размерность, d_H) – естественный способ определить размерность подмножества в метрическом пространстве. Согласуется с обычными представлениями о размерности в тех случаях, когда эти обычные представления есть. Для фрактальных множеств ХБ-размерность может не быть целым числом. Для самоподобных множеств эту размерность можно вычислить явно. Размерность Хаусдорфа-Безиковича любого множества не превосходит нижней и верхней размерностей Минковского. Размерность Хаусдорфа не более чем счётного объединения множеств равна максимуму из их размерностей. В частности, добавление счётного множества к любому множеству не меняет его размерности.

Если множество разбивается на частей, подобных исходному множеству с коэффициентами , то его размерность – решение уравнения . Например, размерность множества Кантора равна (разбивается на 2 части, коэффициент подобия 1/3), размерность треугольника Серпинского – (разбивается на 3 части, коэффициент подобия 1/2), размерность кривой дракона – 2 (разбивается на 2 части, коэффициент подобия $\sqrt{0{,}5}$).

ХБ-размерность имеет сходство с размерностью Минковского. Разница в том, что шары берутся произвольного радиуса $0<r\le \varepsilon$ и множество не обязательно компактное.
d-Мерная ХБ-мера d мерного множества может быть либо равна нулю, либо бесконечна, либо положительна и конечна. Хаусдорф ограничился только последним, самым простым,

случаем и показал, что в эту категорию входят канторовы множества и кривые Коха. Если множество ещё и самоподобно, его размерность подобия должна быть равна d_H. Заметим, что типичные случайные множества имеют в качестве естественной размерности нулевую меру. Таким образом, величина d_f представляет собой критическую размерность.

Во многих случаях эти размерности совпадают, хотя существуют множества, для которых они различны.

Определения размерности Минковского и размерности Хаусдорфа-Базиковича весьма близки по смыслу. Для регулярных фракталов эти меры совпадают. Поэтому говорят просто о фрактальной размерности.

Фрактальная размерность – один из способов определения размерности множества в метрическом пространстве. Фрактальная размерность (показатель степени) может принимать как целое, так и не целое числовое значение. Этот коэффициент описывает фрактальные структуры или множества на основе количественной оценки их сложности (коэффициент изменения в детали с изменением масштаба); показывает насколько плотно и равномерно элементы данного множества заполняют евклидово пространство ($d_f > d_T$). Обычно $1 \leq d_f \leq 3$ – дробное число, отражающее степень извилистости линии, развитость рельефа поверхности или объёма.

Фрактал – множество, у которого фрактальная размерность d_f больше топологической размерности d_T ($d_f > d_T$).

Фрактальная размерность может быть любой, однако пока не удалось сделать эту характеристику уникальной и использовать её для идентификации фракталов. Очень многие, совершенно разные фракталы имеют одинаковую размерность.

Фрактальная размерность – мера сложности самоподобной фигуры, мера того, сколько «физических» или «конечных» точек содержится в том или ином множестве. Фрактальная размерность представляет меру скорости добавления дополнительных деталей при переходе от одного масштаба к следующему. Это коэффициент, описывающий геометрически сложные формы, для которых детали являются более важными, чем полный рисунок. Если фрактальная размерность множества превышает топологическую размерность, то множество имеет фрактальную геометрию.

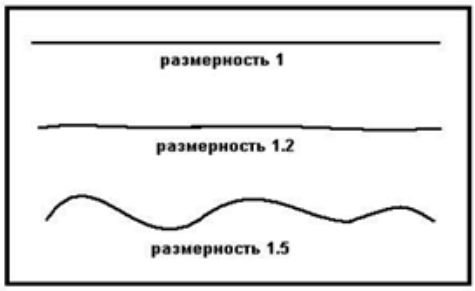


Рис. 2. Увеличение фрактальной размерности по мере роста изгиба линии.

Применительно к идеальным объектам классической евклидовой геометрии фрактальная размерность даёт те же численные значения, что и топологическая размерность (равна нулю для точки, единице – для гладкой плавной линии, двум – для фигуры и поверхности, трём – для тела и пространства). Но совпадая с топологической, размерностью на идеальных объектах, фрактальная размерность обладает более тонкой чувствительностью к несовершенствам реальных объектов, позволяя различать и индивидуализировать то, что прежде было безлико и неразличимо. Так, отрезок прямой, отрезок синусоиды и самый причудливый меандр неразличимы с точки зрения топологической размерности – все они имеют топологическую размерность, равную единице, тогда как их фрактальная размерность различна и позволяет числом измерять степень извилистости.

Равная единице для прямой (бесконечной, полубесконечной или для конечного отрезка), фрактальная размерность увеличивается по мере возрастания извилистости, тогда как топологическая размерность упорно игнорирует все изменения, происходящие с линией, если только они не сопровождаются разрывом или склеиванием каких-то точек. При этом, увеличивая свое значение, фрактальная размерность не меняет его скачком, как сделала бы на её месте топологическая размерность; она принимает дробные значения:

равная единице для прямой (бесконечной, полубесконечной или для конечного отрезка), она становится равной 1,02 для слегка извилистой линии, 1,15 – для более извилистой, 1,53 – для очень извилистой и т.д. т.е. фрактальная размерность увеличивается по мере возрастания извилистости, тогда как топологическая размерность упорно игнорирует все изменения, происходящие с линией.

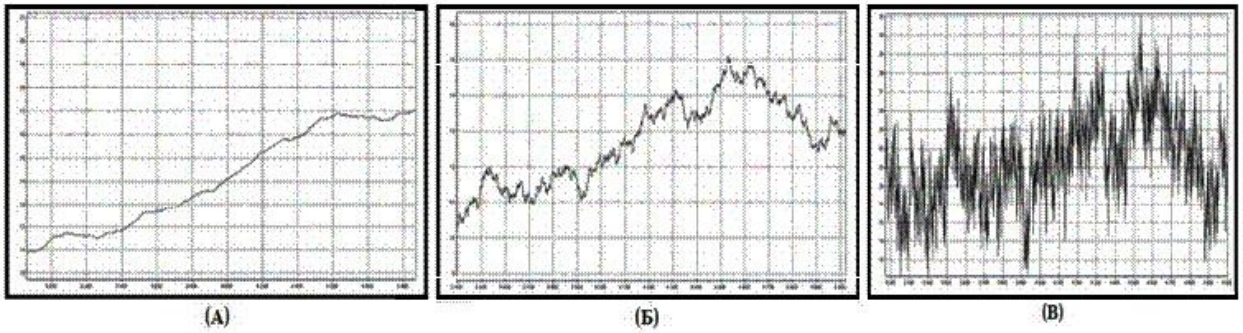


Рис. 3. Кривые с различной фрактальной размерностью. *На всех трех рисунках изображен один цикл. На рис. а размерность равна 1.2, на рис. б размерность равна 1.5, а на рис. в 1.9. Видно, что с увеличением размерности восприятие объекта усложняется, возрастает амплитуда колебаний.*



Рис 4. Общая длина береговой линии Великобритании возрастает, когда длина измерительной палки (шеста) уменьшается*: а – длина шеста 200 км, l =11.5x200 = 2300 км; б – длина шеста 100 км, l =28x100=2800 км; в – длина шеста 50 км, l =70 x 50 = 3500 км*

Размерность характеризует усложнение множества (например прямой). Если это кривая, с топологической размерностью равной 1 (прямая линия), то кривую можно усложнить путем бесконечного числа изгибаний и ветвлений до такой степени, что её фрактальная размерность приблизится к двум, т.е. заполнит почти всю плоскость.

Фрактальное множество заполняет пространство не так как его заполняет обычное геометрическое множество. Например, кривая с фрактальной размерностью очень близкой к 1, скажем 1.10, ведёт себя вполне как обычная линия, но кривая с фрактальной размерностью 1.9 намотана в пространстве, почти как поверхность. Подобным образом, ведёт себя поверхность с фрактальной размерностью 2.1. Она заполняет пространство почти как обычная поверхность, но поверхность с фрактальной размерностью 2.9 сворачивается и стремится заполнить пространство почти как объём.

Так как фрактал состоит из бесконечного числа повторяющихся элементов, невозможно точно измерить его длину. Это означает, что чем более точным инструментом мы будем его измерять, тем большей окажется его длина. Гладкая евклидова линия

заполняет в точности одномерное пространство, а фрактальная линия выходит за пределы одномерного пространства, вторгаясь в двумерное.

Проиллюстрируем расчёт фрактальной размерности на простом примере. Пусть имеется квадрат со стороной, равной единице. Разобьём его на n равных квадратов со стороной a. Тогда размерность объекта

$$d_0 = \frac{\log n}{\log\left(\frac{1}{a}\right)} \qquad (6)$$

Если все вероятности равны ($p_i = \frac{1}{n(a)}$), то **энтропия** достигает максимального значения и

$$d_1 = \lim_{a\to 0} \frac{\log_2 N(a)}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}, \qquad (7)$$

где N – минимальное число элементов размера a, необходимое для покрытия рассматриваемого множества.

Это выражение с точностью до основания логарифмов совпадает с формулой для размерности Хаусдорфа: d_1=d_0. Она иногда называется **информационной размерностью**. В теории динамических систем этот предел называют фрактальной размерностью или ёмкостью **аттрактора** (см. далее).

Пусть относительное число пар точек, расстояние между которыми не больше a, задаётся функцией $N(a)$. Если предел

$$d_F = \lim_{a\to 0} \frac{\ln N(a)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} \qquad (8)$$

существует, то его значение d_F – ёмкость или фрактальная размерность множества (корреляционная зависимость).

Замечание. Если в m-мерном фазовом пространстве M динамической системы существует некоторое множество B, и если его можно покрыть m-мерными кубиками со стороной *a* так, чтобы эти кубики содержали все точки множества B (N(a) – минимальное число таких кубиков, необходимых для полного покрытия множества, то существует предел, который определяет ёмкость фрактала.

Хаусдорфова размерность d_0 – характеризует «пористость» или плотность объекта, т.е. то, как объект заполняет собою пространство вложения. Эта важная характеристика любого объекта. Например, для стандартного канторового множества размерность d_f=ln2/ln3, в то время как d_T=0.

Размерность фрактала может быть найдена разными способами в зависимости от конкретной задачи. Обычно фрактальную размерность какого либо образования измеряют косвенно – по наклону зависимости $\ln(A) = F(\ln(L))$, где A – измеряемое значение (длина, площадь, объём и т.д.), L – шаг измерения или размер сканирующего окна.

Информационная размерность d_1 играет важную роль в анализе нелинейных динамических систем, особенно при описании потери информации в ходе эволюции хаотических систем. В этом плане она связана с **показателями Ляпунова** и **энтропией Колмогорова**. Однако она важна и в других приложениях, так как является важным количественным параметром системы, характеризующим меру его хаотичности. Если со временем система изменяется и эти процессы влекут за собой существенные вариации её информационной размерности, то это говорит о том, что эти процессы могут быть связаны с ростом или диссипацией неравновесных структур, т. е. переходам типа хаос↔порядок. Информационная размерность позволяет количественно отслеживать направление и темп

эволюционных процессов, таких как самоорганизация в среде структур разных уровней или, напротив, распад организованных структур и общая хаотизация.

Корреляционная размерность d_2 определяется корреляциями между элементами, составляющими среду, т.е. вероятностью найти на расстоянии a от данного элемента множества один или несколько элементов того же множества. Эта размерность одновременно является мерой иерархического скучиванья, то есть характеризует упорядоченность внутренней структуры объекта. Её теоретическая значимость обусловлена тесной связью с корреляционными функциями, которые определяют все физические особенности рассматриваемой среды.

Рассмотренные здесь фрактальные размерности – полезные параметры, позволяющие количественно характеризовать направление и темп процессов самоорганизации в среде и корреляционные связи между ее элементами.

6.3 Примеры фракталов

Фракталы бывают одномерными, двумерными и трёхмерными, с разными типами, степенями самоподобия, которые сложно визуализировать.

Фракталы бывают геометрическими, алгебраическими и стохастическими (некоторые статистические фракталы называются мультифракталами), математическими и природными (на природные фракталы накладывается ограничение на область существования: максимальный и минимальный размер, при которых у объекта наблюдаются фрактальные свойства), детерминированными (алгебраическими и геометрическими) и недетерминированными (стохастическими, примеры: странный аттрактор, множество Жюли и др.), континуальными и дискретным, конструктивными (один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба) и динамическими, регулярными (на каждом этапе масштабирования повторяют объект в целом и нерегулярными (на каждом уровне масштаба структура фрактала подобна, но не идентична объекту в целом; примеры: деревья, реки, облака, береговая линия).

Алгоритмы построения линейных фракталов (Коха, Кантора и др.) определяются линейными функциями. В них самоподобие присутствует в самом простом варианте: любая часть повторяет целое. Нелинейные фракталы (Жули, Мандельброта и др.) задаются нелинейной функцией роста, то есть уравнениями в степени выше первой. В них самоподобие будет выглядеть более сложным: любая часть является уже не точной, а деформированной копией целого.

Стохастический фрактал получают, случайным образом меняя какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные – несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря. Важный пример случайного фрактала – траектория броуновского движения.

Простейшие фракталы, такие, как канторова пыль, снежинка Коха, ковер и губка Серпинского, кривые дракона и кривые Пеано и Гильберта, обладают регулярной, геометрически правильной, структурой. Каждый фрагмент такого геометрически правильного фрактала в точности повторяет всю конструкцию в целом. При менее точном следовании самоаффинности или самоподобию возникают другие, не столь регулярные (например, случайные фракталы). Их самоаффинность проявляется, например, в сохранении нормального случайного распределения в различных масштабах, возможно, с различными дисперсиями и средними. Примерами случайных фракталов могут служить береговые лини, очертания некоторых государственных границ, поры в хлебе и зрелых сырах, границы доменов и зерен в кристаллах и т.п.

Типичным примером одномерного фрактала является канторово совершенное множество, на основе которого стоится фрактал - канторова пыль.

Канторово множество – один из простейших фракталов, подмножество единичного отрезка вещественной прямой; имеет мощность континуума, но мера его равна нулю.

Каждый из фрагментов множества Кантора выглядит как множество в целом, то есть оно является самоподобным.

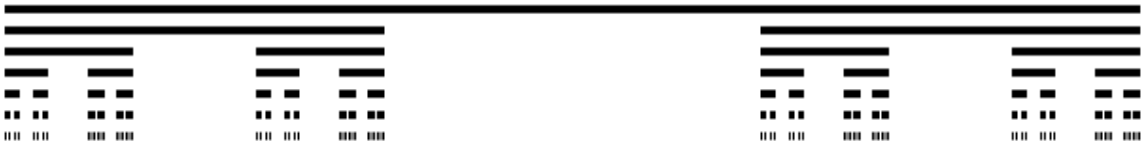


Рис. 5. Канторово множество.

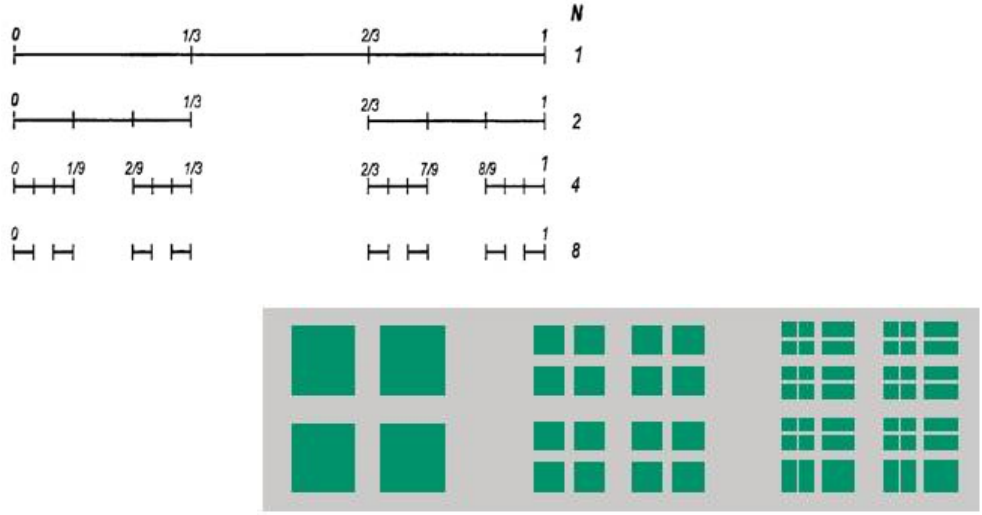


Рис. 6. Построение канторовой пыли на квадрате.

Канторово совершенное множество строится следующим образом. Отрезок [0; 1] делят на три равные части и вырезают среднюю из них - интервал (1/3; 2/3). С каждым из оставшихся отрезков поступают таким же образом, и эту процедуру повторяют бесконечное число раз. На первом этапе построения есть два отрезка длиной 1/3 каждый, на втором - четыре длиной 1/9 каждый и т.д. На k-ом этапе имеем 2^k не связанных друг с другом отрезков длиной $(1/3)^k$ каждый. В пределе при $k\to\infty$ на отрезке останется множество точек, называемое канторовым множеством. Это множество нигде не плотно на отрезке, т.е. не содержит ни одного интервала сколь угодно малой длины. Но оно замкнуто и плотно в себе, т.е. не содержит изолированных точек, и, следовательно, является совершенным множеством. Более того, канторово множество имеет мощность континуума, но нулевую борелевскую меру. В последнем легко убедиться, подсчитав сумму длин всех вырезанных отрезков: $L = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = \frac{1}{3}\sum_{k-0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1/3}{1-2/3} = 1$).

Рассмотрим последовательность $a_k=(1/3)^k\to 0$ при $k\to\infty$. Из построения канторова множества следует, что для любого k (номер этапа построения) канторово множество покрывается $N(k) == 2^k$ отрезками длины $a_k=(1/3)^k$ каждый. Тогда из (*) следует, что

$$d_F(B) = \lim_{k\to\infty}\frac{\ln N(k)}{\ln(1/\epsilon_k)} = \lim_{k\to\infty}\frac{ln\,2^k}{ln\,3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631$$

Канторово множество имеет топологическую размерность $d_T=0$ (нулевая мера Лебега), промежуточную, т.е. не целую $d_f\approx 0{,}6309$: фрактал Кантора ещё не точка ($d_f=0$), но уже не линия ($d_f=1$).

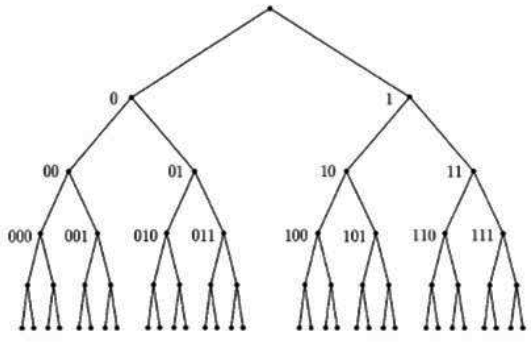


Рис. 7. Дерево Кейли.

Канторовая пыль относится к фрактальному множеству с $d_f<1$. В математике его основой является уравнение Ферхьюста и логистическое уравнение, описывающее рост популяции животных. "Канторова пыль" представляет образование, промежуточное

между точкой и линией. Процедура построения канторовского множества может быть представлена иерархическим деревом Кейли (рис. 7). Важно, что удвоение периода роста является сценарием перехода от порядка к хаосу.

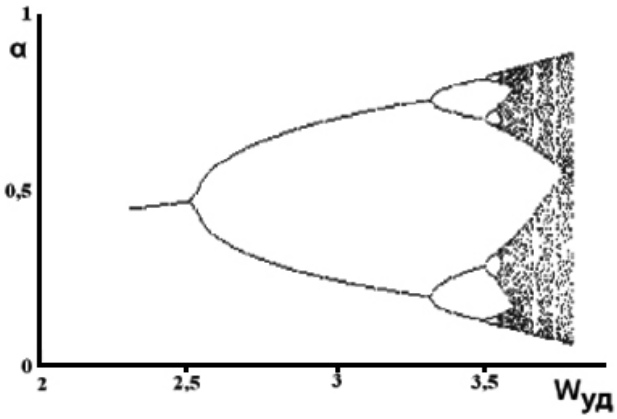


Рис. 8. Образование канторовой пыли (хаоса) совместно с бинарным лексиокографическим деревом.

Кривая фон Коха – классическая интерированная фрактальная кривая. Берём единичный отрезок, разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырёх звеньев длины 1⁄3. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев. На рис. 9 представлены пять поколений кривой. При n стремящемся к бесконечности, кривая Коха становится фрактальным объектом. Предельная кривая называется триадной кривой Коха. На каждой стадии формирования кривой Коха замена средней трети каждого сегмента производится в направлении, которое увеличивает площадь под кривой. Можно увидеть, что при каждом уменьшении длины в три раза число сегментов увеличивается в четыре раза. Фрактальная размерность треугольной кривой Коха равна d_f=ln4/ln3=$\log_3 8$= 1,2618... Кривая фон Коха вышла за размерность линии и частично заполняет плоскость. Важно, что в триадной непрерывной кривой Коха ни в одной точке нельзя подвести касательную. Кривая Коха нигде не дифференцируема, хотя всюду непрерывна.

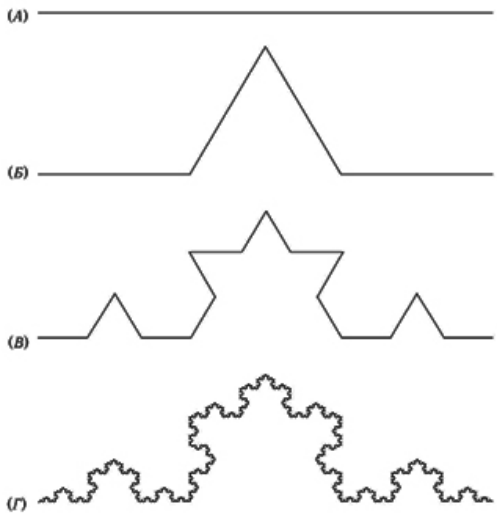


Рис. 9. Построение кривой Коха,

$$d_f = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} > 1.$$

Кривая фон Коха состоит из четырех равных (конгруэнтных) частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия 1/3. Поэтому длина любого “кусочка” кривой также бесконечна. Кривая Коха не имеет характерных размеров – присутствуют все размеры от 1 до 1/N.

Три копии кривой Кох, расположенные на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, которую часто называют **снежинкой Коха**. Снежинка (остров) Коха имеет бесконечный периметр, но при этом ограничивает конечную область.

Применив генератор фон Коха к равностороннему треугольнику и закрасив внутренность построенной фигуры в чёрный цвет, получим сплошную звезду Давида (рис. 10А). Бесконечная итерация такого построения приводит к снежинке фон Коха (рис. 10Б). После n итераций периметр снежинки становится в $(4/3)^n$ раз больше периметра исходного треугольника. При n, стремящемся к бесконечности, периметр снежинки становится бесконечно большим. Следовательно, длина перестаёт быть удобной величиной для количественной характеристики периметра. Снежинка фон Коха обладает периметром бесконечной длины, хотя ограничивает конечную площадь. Кроме того, она такая колючая, что ни в одной точке контура к ней нельзя провести касательную (снежинка фон Коха нигде не дифференцируема).

Топологическая размерность снежинки Коха равна 1, но это, ни в коем случае не спрямляемая кривая, поскольку длина кривой между любыми двумя точками снежинки Коха бесконечность. Никакая сколько угодно малая часть кривой не является отрезком прямой. Снежинка состоит из бесконечного числа сегментов, соединённых под разными углами. Фрактальная линия – это объект слишком детальный (подробный), чтобы быть одномерным, но недостаточно сложный, чтобы быть двумерным. Поэтому её размерность лучше описывать не обычной топологической размерностью 1, но её фрактальной размерностью, равной в этом случае числу, лежащему в интервале между 1 и 2. Если кривую Коха расширить в 3-мерное пространство, то её теоретическая фрактальная размерность будет равна 2.5849.

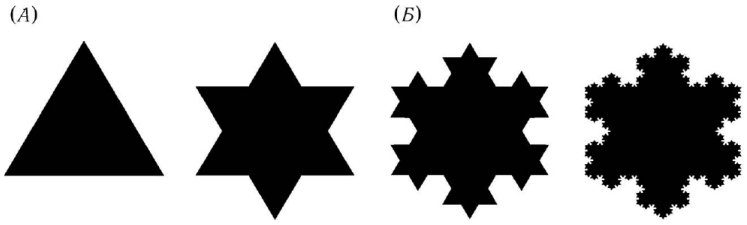


Рис. 10. Инициатор и генератор для снежинки Коха (А) и промежуточные стадии построения снежинки фон Коха, df=ln(4)/ln(3)=1,2619.

Интересно, что при d_f=2 мы не обязательно получим двумерную фигуру: вполне достаточно оказывается топологически одномерного объекта – линии. Известным примером может служить асимптотически самоподобная кривая Гильберта (рис. 11), проходящая сколь угодно близко от любой точки единичного квадрата и, следовательно, заполняет двумерное пространство. Она строится на кривой Пиано.

Кривая Пеано – общее название для параметрических кривых, образ которых содержит квадрат (или, в более общем смысле, открытые области пространства).

Окончательный результат самоподобен: раздув любой подквадрат в 2^n раз, мы получим кривую в точности похожую на всю кривую. Поскольку n-поколение кривой Гильберта состоит из 2^{2n}-1 звеньев длиной $1/2^n$, её фрактальная размерность равна 2, как и подобает кривой, заполняющей плоскую фигуру.

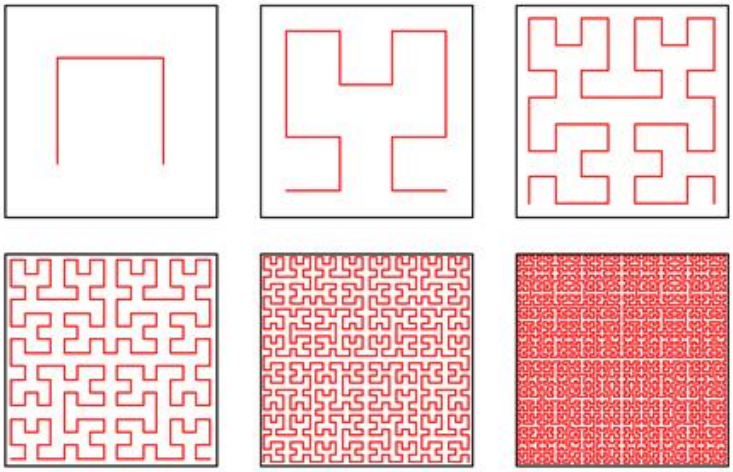


Рис. 11. Пример кривой Пеано, построенный Гильбертом. Здесь показан порядок обхода квадратиков 1–6 уровня, d_T=1, d_f=2.

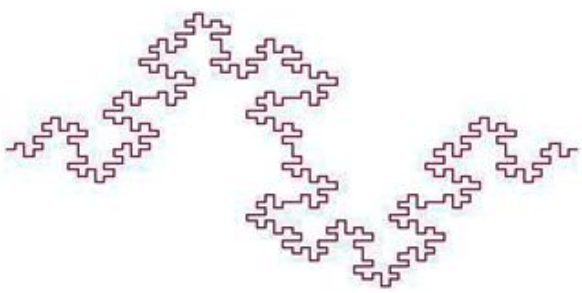


Рис. 12. Кривая Минковского.

Классическим геометрическим

фракталом является **кривая** (колбаса) Минковского. Инициатором является отрезок, а генератором – ломаная из восьми звеньев (два равных звена продолжают друг друга). Кривая Минковского нигде не дифференцируема и не спрямляема, не имеет самопересечений, имеет d_f=ln8/ln4=3/2=1,5 (поскольку она состоит из восьми равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия 1/4). Размерность фрактала Минковского больше размерности фрактала Коха: Минковского более плотно заполняет двумерье. Кривая Минковского имеет нулевую меру Лебега (d_T=0).

Интересным примером автоподобной кривой является “кривая дракона”, придуманная Э.Хейуэем. Для её построения возьмем отрезок, повернем его на 90° вокруг одной из вершин и добавим полученный отрезок к исходному. Получим угол из двух отрезков. Повторим описанную процедуру. Повернём угол на 90° вокруг вершины и добавим полученную ломаную к исходной. При построении следующих поколений выполняется правило: самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, а при замене следующих звеньев, направления смещения середин отрезков должны чередоваться. Предельная фрактальная кривая называется драконом Хартера-Хейтуэя (рис.13).

Непосредственным обобщением канторова множества на плоский и пространственный случай являются ковер и куб Серпинского. Ковёр Серпинского (квадрат Серпинского) – один из двумерных аналогов множества Кантора, который имеет топологическую размерность d_T=1, промежуточную (т. е. не целую) Хаусфордову размерность ln8/ln3≈1,89 и нулевую меру Лебега, d_T=0.

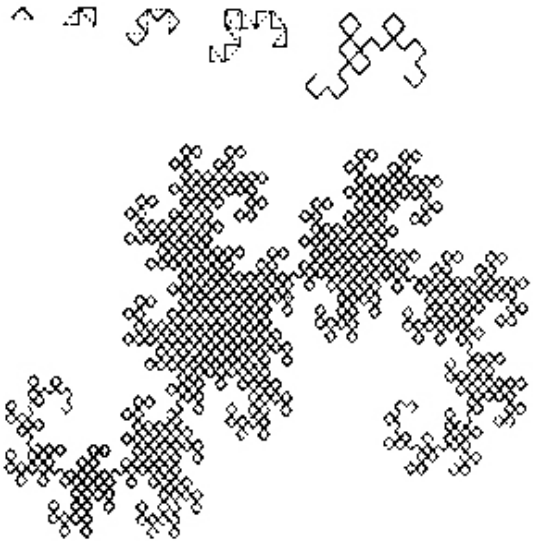


Рис. 13. Построение "дракона" Хартера-Хейтуэя.

Самоподобная фигура Серпинского получается из квадрата последовательным вырезанием серединных квадратов. А именно, разделим данный квадрат на девять равных квадратов и серединный квадрат вырежем. Получим квадрат с дыркой (рис. 15). Для оставшихся восьми квадратов повторим указанную процедуру. Разделим каждый из них на девять равных квадратов и серединные квадраты вырежем. Повторяя эту процедуру, будем получать все более дырявую фигуру. То, что остаётся после всех вырезаний, и будет искомым ковром Серпинского.

Отметим, что поскольку вырезаемые квадраты располагаются все более часто, то в результате на ковре Серписского не будет ни одного, даже самого маленького, квадрата без дырки. Салфетка Серпинского - двумерная квантовая пыль. Топологически это множество точек, d_T=0

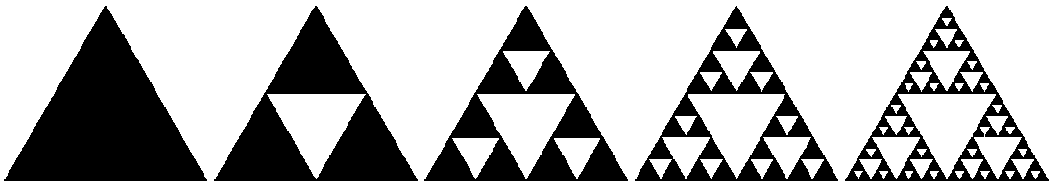
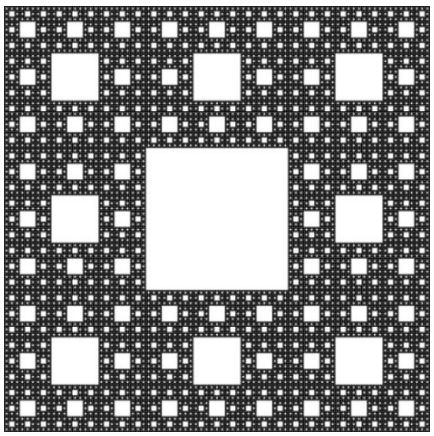


Рис. 14. Этапы построения треугольника (салфетки) Серпинского, d_f=1,585.

Вычислим площадь ковра Серпинского, считая исходный квадрат единичным. Для этого достаточно вычислить площадь вырезаемых квадратов. На первом шаге вырезается квадрат площади 1/9. На втором шаге вырезается восемь квадратов, каждый из которых

имеет площадь 1/81. На каждом следующем шаге число вырезаемых квадратов увеличивается в восемь раз, а площадь каждого из них уменьшается в девять раз. Таким образом, общая площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальном членом 1/9 и знаменателем 8/9. Площадь ковра Серпинского равна нулю. Показатель фрактала d_f=1.89…: прямоугольное решето Серпинского существенно плотнее заполняет плоскость, чем фракталы Коха и Минковского.



Если рассечь губку Менгера под одним интересным углом, то неожиданно получается фрактальная гексаграмма (звезда Давида, рис. 44). Салфетка Серпинского также может быть обобщена на трёхмерное пространство.

Теперь обратимся к другому семейству фрактальных языков, их нелинейным диалектам. Один их них, так называемый квадратичный диалект порождает большое разнообразие геометрических форм с помощью довольно простого алгоритма, тесно связанного с современной теорией хаоса.

Рис. 15. Ковёр Серпинского, $d_f=\log_3 8=1{,}8928$.

Топологически ковёр Серпинского – линия, $d_T=1$.

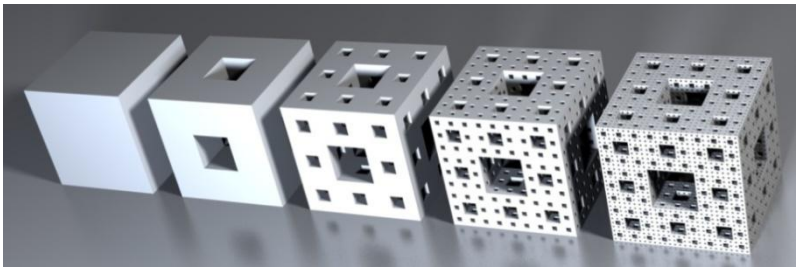


Рис. 16. Построение на основе ковра Серпинского (размерность $d_f\approx1{,}8928$)строится губка Менгера $d_f\approx2{,}7268$, $d_T=2$.

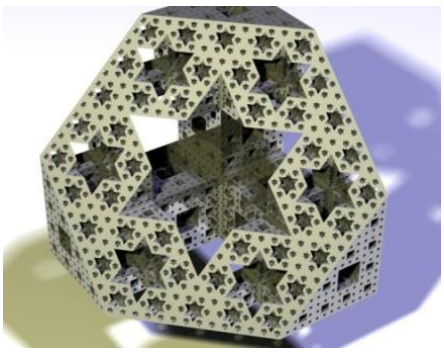


Рис. 17. Одно из сечений губки Менгера.

Динамические фракталы, как правило задаются с помощью некоторого отображения. Теория, лежащая в основе нелинейных фракталов, впервые предложена в 1918 году французским математиком Г. Жюлиа. Он занимался изучением комплексных чисел; как известно, комплексное число состоит из действительного числа и мнимой части, содержащей в качестве множителя мнимую единицу $i=\sqrt{1}$. Комплексные числа обычно отображаются на плоскости с перпендикулярными координатными осями, одна из которых представляет действительные числа, а другая мнимые. Жулюа интересовал вопрос, что будет с последовательностью точек z_k, на комплексной плоскости, если они порождаются преобразованием $q(z)=z^2+c$. Каждая новая точка z_{k+1} получается подстановкой предыдущей точки z_k в приведённую формулу преобразования. Комплексное число c является управляющим параметром, который можно выбирать произвольным образом. Этот несложный процесс с обратной связью порождает потрясающее многообразие форм.

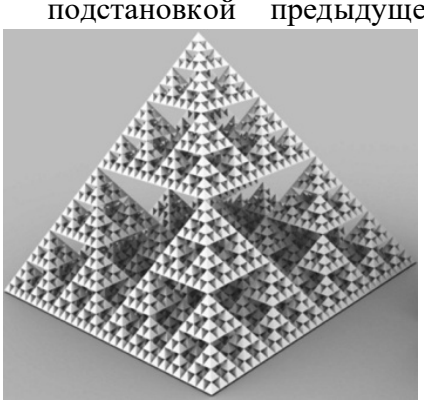


Рис. 18. Обобщение треугольника Серпинского в трёхмерное пространство. $d_f = \ln(4)/\ln(2) = 2$. Топологически – канторова пыль, d_T=0.

Когда исходная точка z_0 подвергается преобразованию, то получающаяся последовательность демонстрирует поведение двух типов. Она либо свободно путешествует по плоскости, постепенно уходя в бесконечность, либо оказывается замкнутой в определённой области комплексной плоскости. Первые из них образуют множество «беглецов», те же, что остаются в замкнутом пространстве, принадлежат множеству «пленников». Исходная точка z_0, выбранная из множества пленников, генерирует последовательность, которая остаётся в численной неволе, независимо от того, сколько поколений этой последовательности вычисляется. Форма этой «тюрьмы» зависит от выбранного значения параметра c. Для точки z_0, лежащей вне замкнутой области, последовательность z_k удаляется от центра плоскости и уходит в бесконечность. Множество пленников и множество беглецов отделены друг от друга бесконечно тонкой границей, известной как множество Жюлиа.

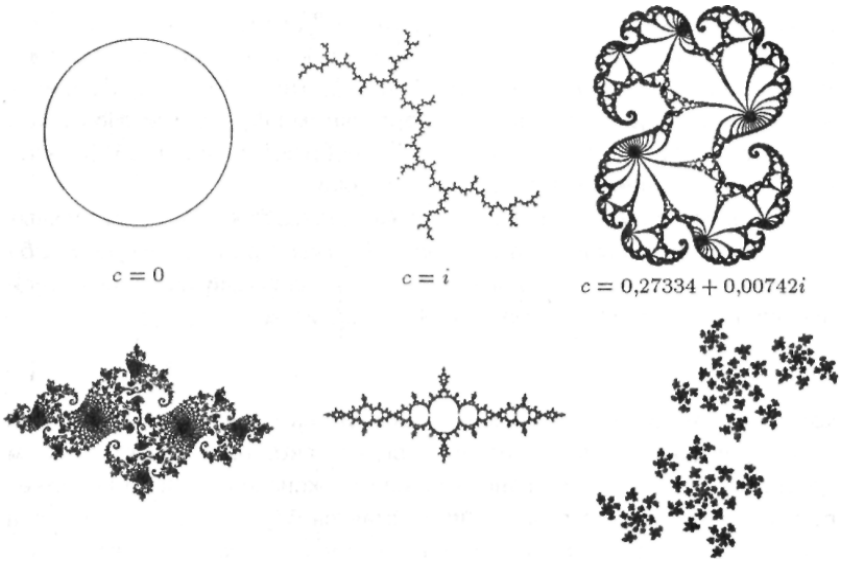


Рис. 19. Шесть примеров множеств Жюлиа: от простой окружности (c = 0) до самых причудливых нелинейных фракталов

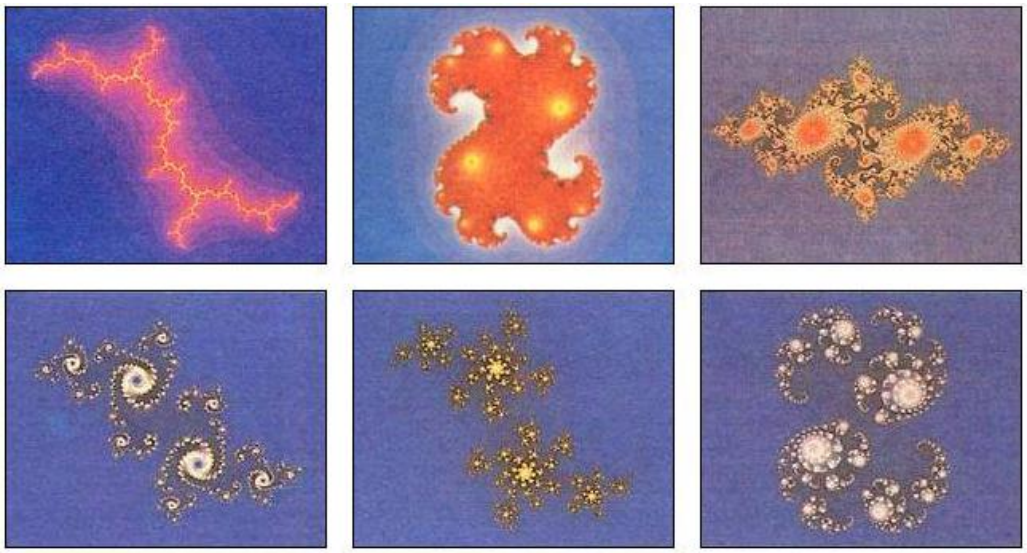
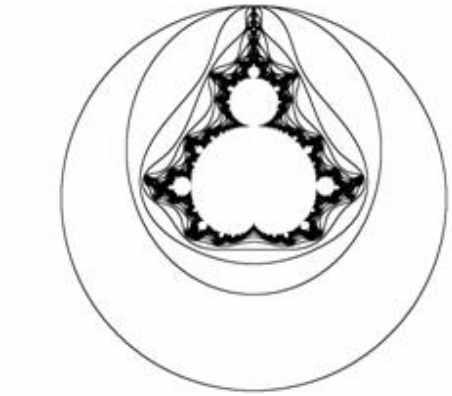


Рис. 20. Множества Жюлиа – это фрактальные границы, возникающие в результате итерирования квадратичного преобразования z^2+c. *Они принимают разнообразные и удивительные формы, которые зависят только от числа c, называемого управляющим параметром. Некоторые значения c порождают множества Жюлиа, имеющие одно связное тело*

(вверху), при других значениях с эти множества распадаются на фрагменты и рассыпаются подобно пылинкам (внизу). Множество Мандельброта состоит из всех точек с, которые ассоциируются со связными множествами Жюлиа; оно служит также «оглавлением» для множеств Жюлиа.

Множество Жулиа – дискретная нелинейная динамическая система определяется отображением $z_{n+1}=z_n^2+c$ на комплексной плоскости. Здесь параметр (постоянная) c – фиксирован, $z_0=0$ – варьируется. В зависимости от выбора начального приближения пределом последовательности будут либо ноль, который является аттрактором, (зоной влияния, множеством притяжения), либо бесконечность (также аттрактор). Вид множества Жюлиа зависит от выбора параметра c. В силу нелинейности (малым изменениям параметра с соответствуют большие изменения формы множества Жюлиа) зависимость эта очень сильна. Граница, разделяющая области притяжения этих двух аттракторов бесконечно изрезана и является фракталом – множеством Жюлиа. Одной из характерных особенностей такой линии является самоподобие: если взглянуть на любой её поворот, то можно обнаружить, что одна и та же форма встречается в различных местах и имеет разные размеры. Эту границу, являющуюся множеством Жюлиа, можно восстановить по любой произвольной её части. Заметим, что аттрактор, граница которого является фракталом, называется странным аттрактором.

Множество Мандельброта – дискретная нелинейная динамическая система $z_{n+1}=z_n^2+b$, где $z_0=0$, параметр b варьируется.



Алгоритм построения множества Мандельброта (относится к алгебраической группе) достаточно прост и основан на простом итеративном выражении:

$$Z[i+1] = Z[i]\cdot Z[i] + C, \qquad (9)$$

где $\boldsymbol{Z}[i]\cdot$и $\boldsymbol{C}$ - комплексные переменные.

Рис. 21. Множество Мандельброта – Курица" – классический образец алгебраического фрактала.

Алгоритм разбивает комплексную плоскость на зоны влияния. Любая точка z_0 фазового пространства в данном динамическом процессе либо притягивается аттрактором (конечным или бесконечным), либо не может принять определенного значения и остается блуждать на границе зон влияния аттракторов.

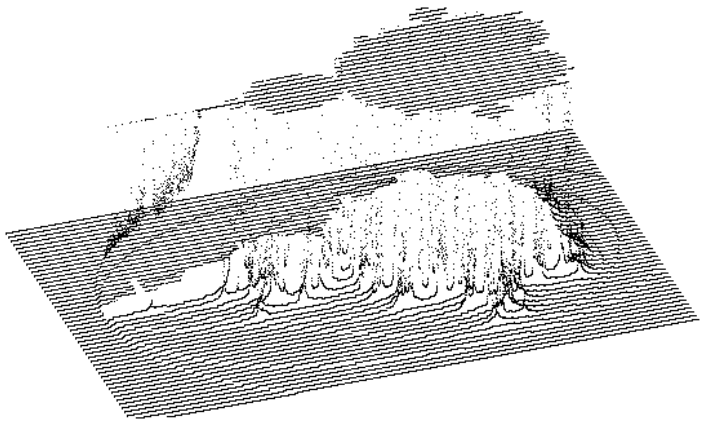


Рис. 22. Трёхмерное множество Мандельброта и его проекция.

Итерации выполняются для каждой стартовой точки $\boldsymbol{C}$ прямоугольной или квадратной области – подмножестве комплексной плоскости. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $\boldsymbol{Z}[i]$ не выйдет за пределы окружности радиуса 2, центр которой лежит в точке (0,0), (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности), или после достаточно большого числа итераций (например, 200-500) $\boldsymbol{Z}[i]$ сойдется к какой-нибудь точке окружности. Каждая часть множества Мандельброта характеризует соответствующее семейство множеств Жюлиа. Например, основное сердцевидное тело множества Мандельброта



характеризует множества Жюлиа, которые выглядят как смятые окружности.
Рис. 23. Участок границы множества Мандельброта, увеличенный в 200 раз.

Хотя множество Мандельброта, строго говоря, не является самоподобным, как треугольник Серпинского и фрактальный папоротник, оно обладает сходным свойством: увеличение границы области обнаруживает бесконечное число крошечных копий множества (рис. 50). Множество Мандельброта - бесконечно эффективным хранилищем информации для бесконечного разнообразия множеств Жюлиа.

Все рассмотренные выше фракталы можно считать детерминированными. Хотя случайные процессы (такие, как бросание игральной кости) иногда и помогают генерировать фрактальные изображения, они не оказывают никакого влияния на окончательную форму фрактала. Совершенно иная ситуация имеет место в отношении другого класса фракталов, а именно так называемых случайных фракталов. Стохастические фракталы получаются, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные – несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

Один из фракталов такого типа может начинаться с треугольника, лежащего в произвольной плоскости. Средние точки сторон треугольника соединены между собой, так что треугольник оказывается разделённым на четыре меньших треугольника. Затем каждая средняя точка сдвигается вверх или вниз на определённую, случайно выбираемую величину. Тот же процесс применяется к каждому из меньших треугольников, затем к ещё меньшим и так далее до бесконечности. После достаточно большого количества итераций начинает возникать всё более детализированная поверхность.



Рис. 24. Трёхмерное представление множества Мандельброта: электрический потенциал, окружающий заряженное множество Мандельброта. *Может использоваться как иллюстрация бухты со скалистыми берегами.*



Рис. 25. Множество Мандельброта отражает порядок, лежащий в основе бесконечного многообразия множеств Жюлиа.

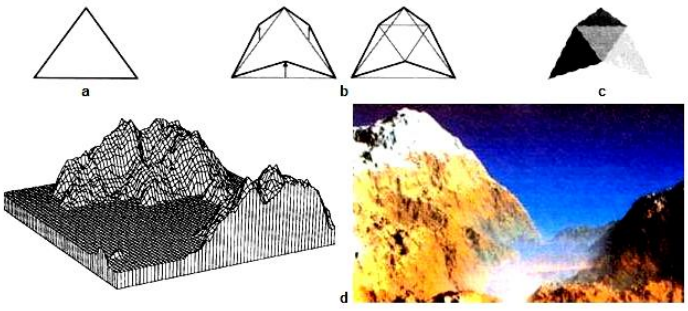


Рис. 26. Фрактальные ландшафты могут создаваться из фракталов методом случайного смещения средней точки. *Средние точки сторон треугольника (a) смещаются вверх или вниз от плоскости изображения и*

соединяются с вершинами (b). При этом возникает четыре меньших треугольника, к которым повторно применяется та же процедура. Функция распределения вероятности определяет величину смещения и, следовательно, степень гладкости фрактального ландшафта. Затем графическая программа компьютера закрашивает треугольники, создавая различные оттенки (c). В результате получается весьма реалистичная картина (d).

В этом методе смещения средних точек случайные величины для перемещения средних точек вверх или вниз управляются определённым законом распределения, который тщательно подбирается, чтобы получить близкую аппроксимацию желаемой поверхности. Для того чтобы поверхность была относительно гладкой, в преобразования следует встроить правило, согласно которому величина смещения средних точек должна становиться очень малой уже после нескольких первых итераций. Такое правило позволяет добавлять лишь небольшие «кочки» к общим очертаниям ландшафта. Для представления изрезанной поверхности, характерной, скажем, для горного хребта или береговой линии, более подходящим будет правило медленного уменьшения смещений после каждого шага итерационного процесса.

Каждая точка множества Мандельброта представляет значение параметра c, порождающего связное множество Жюлиа. Если точка c лежит вне множества Мандельброта, то ассоциированное с ней множество Жюлиа несвязно. Множество Мандельброта содержит в себе невероятное богатство мельчайших деталей. Три последовательных увеличения фрагментов (отмечены квадратиками) позволяют увидеть подобные повторяющиеся структуры множества Мандельброта с добавлением многих новых и прежде не повторяющихся элементов.

У данного метода построения поверхностей существует много приложений. Он применялся, в частности, в качестве модели эрозии почвы, для анализа сейсмических явлений, чтобы лучше понять характер изменений в зоне разломов, для построения изображениё планет, спутников, облаков и горных хребтов, которые выглядят весьма реалистично.

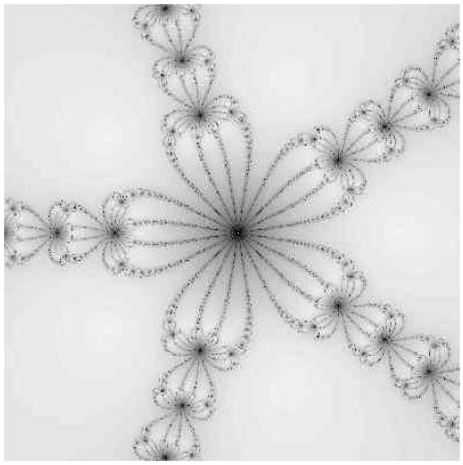


Рис. 27. Бассейны Ньютона.

Бассейны Ньютона - примеры алгебраических фракталов. Области с фрактальными границами появляются при приближенном нахождении корней нелинейного уравнения $f(z)=0$ алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости (для функции действительной переменной метод Ньютона называют *методом касательных*, который обобщается для комплексной плоскости). Примером является уравнение: $p(z)=0$, $p(z)=x^3-1$, имеющее три корня. При выборе различных процесс будет сходится к различным корням (областям притяжения, которых имеют фрактальную структуру).

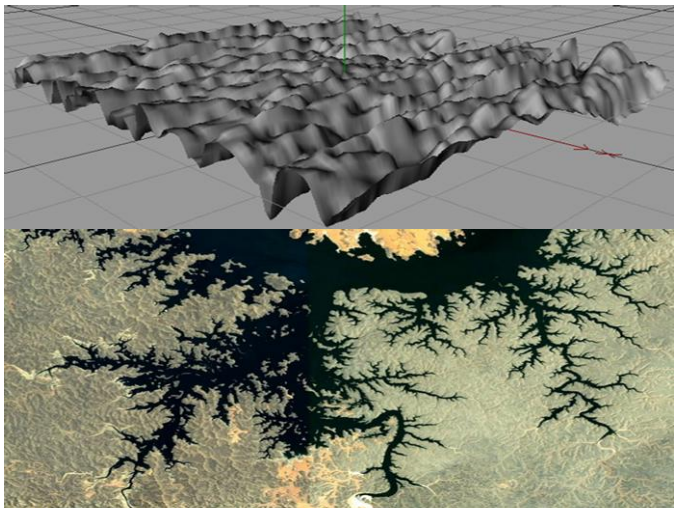


Рис. 28. Фрактальная поверхность (вверху) и фрактальная пористость (внизу).

Помимо обычных фракталов, в природе встречаются мультифракталы – фракталы с нелинейной формой развития.

Мультифрактал – комплексный фрактал. Строится не одним алгоритмом построения, а несколькими последовательно сменяющими друг друга, каждый из них генерирует паттерн со своей фрактальной размерностью.

Мультифрактал – квазифрактальный объект с переменной фрактальной размерностью. Это обобщение фрактала, для описания которого недостаточно одной размерности. Вместо неё требуется спектр размерностей. В рамках конструктивных фракталов мультифрактал определяют как «нагруженный» фрактал, в котором каждому элементу a_i ставится в соответствие некий «вес» или вероятность p_i. Для количественного описания мультифракталов рассчитывается спектр размерностей, соответствующих особенностям данного мультифрактала. Понятие мультифрактала применимо как к математическим, так и природным фракталам. Признаком мультифрактальности для природных объектов является обнаружение различного скейленгового поведения на разных масштабах или наличие мультифрактального спектра размерностей.

Реальные объекты и процессы гораздо лучше описываются мультифракталами, чем регулярными фракталами. Как уже упоминалось, статистическое самоподобие, или самоподобие в среднем, выделяет фракталы среди множества природных объектов. Совсем дело обстоит иначе, когда мы говорим мультифракталах (нелинейных). Здесь размерность утрачивает свой смысл как определение подобия объекта и определяется посредством различных обобщений, куда менее естественных, чем уникальная размерность самоподобных объектов.

Мультифрактал описывается обобщённой фрактальной размерностью Реньи. На этих вопросах мы остановимся подробнее в главе, посвящённой энтропии Реньи.

Огромный интерес к фракталам связан с тем, что они внешне сильно напоминают природные объекты.

Большой интерес к фракталам, как и вообще к нерегулярным функциям и множествам объясняется тем, что они гораздо лучше обеспечивают представление многих природных явлений, нежели объекты классической геометрии. Широчайшее распространение фрактальных структур объясняется их разномасштабностью: и большие, и малые масштабы фрактальных структур имеют одинаковый закон роста. Задать фрактальную структуру – задать не застывшую, неизменную форму, а принцип роста, закон изменения формы.

6.4 Фракталы и энтропия

Стохастическое самоподобие – одно из основных свойств природных объектов. Практически единственным надёжным методом исследования структурных характеристик таких объектов является энтропийный подход.

В принципе, энтропия и фракталы – противоположные понятия: энтропия свидетельствует о беспорядке в термодинамической структуре. (мера хаоса, показывающая как далеко система находится от упорядоченного, структурированного состояния и как близко – к полностью хаотичному, бесструктурному, однородному виду), а фрактал указывает на некоторый порядок в ней (особенно, если это упорядоченная, самоподобная и масштабоинвариантная структура). Тем не менее, энтропия и фрактал – взаимосвязанные (взаимно дополняющие) понятия. Энтропия – мера хаоса, но одновременно – мера структурной организованности систем, ибо максимальная энтропия конкретной системы соответствует низшей степени её структурной организованности (наибольшая хаотичность и неупорядоченность), низкая энтропия, напротив, соответствует высокой структурной упорядоченности.

Энтропийный подход на основе энтропии Реньи, дал универсальный ключ как для расчетов мультифрактальных спектров размерностей систем, так и для осмысления и интерпретации результатов их фрактального анализа.

Теории фракталов и хаоса – родственные математические теории, нацеленные на описание структуры нерегулярностей реального мира. Оба этих направления, благодаря компьютерному моделированию и визуализации, обладают высокой наглядностью. Однако, если в хаосе геометрия подчинена динамике, она обслуживает и делает её наглядной, то во фракталах геометрическая визуализация является основной. Странные аттракторы хаоса оказались фракталами. Они естественным образом возникают при изучении динамических систем. Важно, что фракталы определяют структуру хаоса. Фракталы – язык, дающий описание форм хаоса, они позволяют анализировать его тонкую структуру хаоса и даже обнаружить в нём проявления порядка.

Энтропия – мера хаотичности и одновременно – мера недостающей информации о состоянии системы – с другой. Информация также характеризует степень упорядоточения структуры; структура без информации немыслима, равно как и наоборот – невозможна информация сама по себе – без носителя, структуры; информация является универсальной, первичной категорией и везде присутствует в виде структур. Поэтому, энтропия как мера хаотичности и мультифрактальность как мера структурной упорядоченности являются взаимно дополняющими понятиями.

Комплекс энтропия-фрактал-информация позволяет осуществить довольно полную диагностику сильно разупорядоченных систем: временных рядов, возникающих в результате функционирования какой-либо сложной системы, сигналы в системах связи, изображения. Энтропийно-фрактальный анализ нашёл применение в космогонии, в анализе природных объектов (например, рельефа местности), в изучении таких техногенных объектов, как наноструктуры, функциональные и конструкционные материалы и в анализе живых организмов. Энтропийный подход дал универсальный ключ как для расчетов мультифрактальных спектров размерностей систем, так и для осмысления и интерпретации результатов их фрактального анализа.

Понятие фрактала оказывается связанным с понятием хаоса. Особенно это заметно в динамике сложных систем. Если термин фрактал относится к некоторой статично геометрической конфигурации и размерности – мгновенный снимок структуры, то хаос – термин динамики, используемый для описания явлений, подобных турбулентному поведению погоды. В этом смысле хаос противоположен фракталу: хаос описывает состояние крайней непредсказуемости, возникшей в динамической системе, в то время как фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации. Тем не менее, взаимосвязь между фракталом и динамической системой возможна. Она возникает в связи с тем, что некоторые фракталы

(например, аттрактор систем итерированных функций) порождают хаос. Хаос – некоторое свойство детерминированных динамических систем, например, систем интерированных отображений. Случайные процессы способны генерировать фракталы. Но стохастичность отлична от детерминированного хаоса. Это совершенно другое явление.

Далее мы рассмотрим эти проблемы более детально.

7. ИНФОРМАТИКА

Кто владеет информацией – тот владеет миром.
Майер Ротшильд

Информация, наряду с веществом, энергией, пространством-временем, – важнейший компонент нашего мироздания: нематериальная составляющая материального мира. Информация обеспечивает и сведения об объектах и явлениях как внутренней, так и окружающей среды, их параметрах, свойствах и состоянии, которые уменьшают имеющуюся о них степень неопределенности, неполноты знаний о физическом, химическом или биологическом явлении.

7.1 Информация, информатика и информационные технологии

Анализом информации занимается наука – информатика, а управлением ею – информационная технология.

Информатика – наука, изучающая общие свойства и процессы отражения материи, порядок в материи, её структурированность и отражение в сознании человека, общества. При описании неживой природы в сферу интересов информатики входит термодинамика физико-химических процессов, космические явления, квантовые состояния и т.п. Везде, где порядок борется с беспорядком, где царствует энтропия, там всеми процессами правит и её Альтер эго – информация. При этом информацию неживой природе навязывает человек, формулируя спекулятивные правила и законы, позволяющие как-то интерпретировать имеющие место явления и даже управлять ими.

А вот живая природа активно и непосредственно использует информационный обмен. Пчёлы, сообщающие в улей информацию о местонахождении цветов с нектаром, сойка, благим матом оповещающая лес, что в него вошёл человек, токующий глухарь, гусь, собравший стаю, и обеспечивший благополучный перелёт на несколько тысяч километров – лишь отдельные примеры. Здесь передача информатики идёт без каких-либо научных оснований, технологий и компьютеров. Кумушки на завалинке, сплетники, мифотворцы, клеветники, влюблённые... прекрасно обходятся без науки информатики и тем более - без информационных технологий.

Курс "Информатика" можно провести ни разу не упомянув термин "компьютер" и всё, что с ним связано. Информатика не нуждается ни в счётах, ни в арифмометрах, ни в компьютерах, ни в Интернете. Информация способна распространяться без технических средств, причём весьма интенсивно. Природа этим активно занималась задолго до изобретения компьютеров, даже до появления человека, как такового.

Другое дело – информационные технологии. В них применение компьютеров может быть полезно. По крайней мере, в настоящее время.

Человечеству природных средств показалось недостаточно и оно само разработало множество способов передачи и хранения информации, накопило значительные информационные ресурсы: книги, учебники, статьи, патенты, диссертации, отчёты, картины, фильмы, патенты, записки очевидцев и т.д. и т.п. Лавинообразный рост информации связан с тем простым фактом, что информационные ресурсы (в отличие от других видов ресурсов – трудовых, энергетических, минеральных и т.д.) тем быстрее растут, чем больше их расходуют.

Тысячи лет своей сравнительно недолгой истории человечество занималось обработкой информации, прекрасно обходясь без определения понятия «информация», без науки Информатики, используя информационную технологию на базе узелков, наскальной росписи, татуировок, канцелярских счётов, письменности и пения. Способы передачи информации усовершенствовались: тамтамы, сигнальные огни, голуби, посланники-вестники-гонцы-курьеры, почта, телеграф и т.п. Первое осмысление, первые теоремы и первые теории в Информатике появились после появления радио и азбуки Морзе, когда возникла проблема оптимизации передачи больших объёмов информации и появилась задача передачи информации без искажений. Мощный всплеск развития

информатики и информационных технологий начался после изобретения компьютеров и создания сети Интернет.

Компьютеры (слово компьютер произошло от слова вычислять) сначала предназначались для математического моделирования и обработки данных. Затем они оказались полезными для манипулирования с текстовой, графической, визуальной, аудио- и видео- информацией. На базе компьютеров была создана такая мощная информационная система, как Интернет. Система Интернет базируется на компьютерах (хотя и не связана с конкретными носителями, разрушение многих из них не отразится на работе Интернета в целом), но выход в систему не требует от пользователя обязательного использования компьютера. Бедуин, пересекающий на верблюде Сахару, выходит в Интернет и уточняет путь по мобильному телефону.

Современные электронные компьютеры, несмотря на всю свою нынешнюю примитивность, играют в информационных технологиях важную роль.

Успехи по внедрению компьютеров в информатику оказались настолько велики, что появились учёные-преподаватели, понимающие под информатикой компьютерные науки и компьютерные технологии. Такой подход напоминает почвоведа, излагающего свой предмет, как науку и технологию применения лопат, вил и граблей в растениеводстве, или врача, призывающего диагностировать рак по показаниям градусника под мышкой, дворника, который не может убрать двор без лома. Компьютер для информатики, всё равно, что половая тряпка для уборщицы: вещь полезная, но не обязательная.

Теория информации не использует компьютеры, но проверка следствий теории и математическое моделирование ведутся на компьютерах.

Фундаментальность информатике придаёт широкое и глубокое использование математики, формальных методов и средств, общность и фундаментальность её результатов, их универсальная методологическая направленность в производстве знаний. В этом смысле информатика аналогична "наукам на стыке": математической физике, физической химии, химической физике, медицинской радиохимии и др.

Информатика занимается такими видами информации, как

– физическая информация (виды: термодинамическая – в стиле Клаузиса-Кельвина и статистическая – в стиле Больцмана-Гиббса-Планка-Эйнштейна, равновесная и неравновесная);

– техническая информация (передача информации по линиям связи (например, радио + азбука Морзе); её описание ведётся различными способами: комбинаторным, вероятностным и алгоритмическим; в стиле Фриша-Хартли-Шеннона-фон Неймана-Винера, Колмогорова и др.);

– компьютерная информация (перемещение и хранение информации в компьютере; языки программирования и алгоритмы, компьютерные науки во всём их разнообразии);

– смысловая информация (семантическая информация и дезинформация, СМИ; "*одна баба сказала*", способы передачи, переработки, хранения и защиты сообщения; базы данных и знаний).

– квантово-механическая информация.

Разделы информатики разделы различны по своей идеологии и математическому описанию. Их можно объединить в одно целое с помощью энтропии и фрактальной геометрии, т.е. с помощью мер порядка, беспорядка и частично упорядоченного (динамического) хаоса.

Наука информатика возникла сравнительно недавно, так что ни её определение, ни цели, ни задачи до сих пор не сформулированы. Есть только примерные определения.

Информатика – наука об общих свойствах информации, закономерностях и методах её поиска и получения, хранения, передачи, переработки, распространения в квантовых системах, во вселенной, в растительном и животном мире, а также наука о способах

использования информации для решения задач нелинейной динамики, термодинамики, молекулярной физики и общественного устройства.

Информатика – совокупность научных направлений, изучающих информацию, информационные процессы в природе, обществе, технике, формализацию и моделирование, методы познания, способы представления, накопления, обработки и передачи информации.

Теоретическая информатика – математическая дисциплина, использующая методы математики для построения и изучения моделей обработки, передачи и использования информации.

Чаще всего встречается следующее определение информационных технологий:

Информационные технологии – обобщённое название технологий, отвечающих за хранение, передачу, обработку, защиту и воспроизведение информации с использованием компьютеров.



Однако ЮНЕСКО даёт несколько иное определение:

Информационные технологии – комплекс взаимосвязанных, научных, технологических, инженерных дисциплин, изучающих методы эффективной организации труда людей, занятых обработкой и хранением информации; вычислительную технику и методы организации и взаимодействия с людьми и производственным оборудованием, их практические приложения, а также связанные со всем этим социальные, экономические и культурные проблемы.

Существуют, наконец, определения информационной технологии, в которых компьютеры не упоминаются вовсе, например

Информационная технология – совокупность конкретных средств, с помощью которых человек выполняет разнообразные операции по обработке информации во всех сферах своей жизни и деятельности. (Причём здесь человек? А животное, птица, рыба, насекомое информацию не обрабатывают?! Обрабатывают, да поди лучше человека!)

В данном учебнике мы принимаем, что

Информационная технология – совокупность методов, объединенных в технологическую цепочку, обеспечивающую сбор, хранение, обработку, вывод и распространение информации, т.е. информационная технология – это прикладная информатика.

Неопределённость в определении сущности информатики, её целей и задач, связана с неопределённостью её предмета – информации. Феномен информации оказался настолько неоднозначным, что понимание его считается одной из сложнейших проблем современности. Уже сами попытки подобраться к понятию информации, различные его трактовки в трудах ученых и практиков заставляют задуматься о необычной роли информации в жизни развивающихся систем.

Информатика, информационные технологии и кибернетика имеют дело с информацией, но что такое информация до сих пор не известно. Первым информацию определил Н. Винер в монографии «Кибернетика» (1948): «***Информация – это информация, а не материя (вещество) и не энергия***». Что информация - не материя и не энергия можно согласиться. Осталось малое – выяснить всё же что это такое.

"Информация есть информация и ничто другое. И этого достаточно!". Кому-то достаточно, а кому-то нет.

Информация, наряду с материей, энергией, пространством и временем, является первичным понятием нашего мира и поэтому в строгом смысле не может быть определена. Тем не менее, определения есть и их довольно много: автор этого учебника располагает коллекцией из 500 оригинальных определений термина "информация", предложенных (и непрерывно предлагаемых) различными учёными.

Философы отнесли понятие «информация» к первичным и неопределяемым понятиям (к таким, как точка, множество, время, энтропия.

Тем не менее, существуют официальные определения.

По международным стандартам:

Информация – знания о предметах, фактах, идеях т.д., которыми могут обмениваться люди в рамках конкретного контекста (ISO/IEC 10746-2:1996); знания относительно фактов, событий, вещей, идей и понятий, которые в определённом контексте имеют конкретный смысл (ISO/IEC 2382:2015).

По российскому ГОСТу 7.0-99:

Информация – сведения, воспринимаемые человеком и (или) специальными устройствами как отражение фактов материального или духовного мира в процессе коммуникации.

По российскому федеральному закону от 27 июля 2006 года № 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» (Статья 2):

Информация – сведения (сообщения, данные) независимо от формы их представления.

Наиболее распространены два определения информации:

1) любые сведения, данные, сообщения, передаваемые посредством сигналов;

2) уменьшение неопределенности в результате передачи сведений, данных, сообщений; в этом качестве информация противопоставляется энтропии.

Мы будем придерживаться определений, данных К. Шенноном:

Информация – сведения (сообщения, данные) независимо от формы их представления; снятая неопределённость наших знаний о чём-то; мера изменения во времени и пространстве структурного разнообразия систем.

Согласно вероятностному подходу:

Информация – это сведения об объектах и явлениях окружающей среды, их параметрах, свойствах и состоянии, которые уменьшают имеющуюся о них степень неопределённости и неполноты знаний.

Именно в этом смысле информация противостоит энтропии.

Заметим, что философия определения понятия информация отличается чрезвычайной противоречивостью. На одном полюсе – безграничный панинформизм, т.е. утверждение, что весь мир и все его свойства созданы из информации. На другом – отрицание существования информации как действительности, т.е. информация – субъективная реальность. Между ними – признание информации третьим атрибутом материи, равнозначным веществу и энергии; утверждение о независимости информации от какого бы то ни было материального носителя; трактовка её как структуры с необычными для физического мира свойствами; признание в одном случае первичности информации и вторичности материи, а в другом – материальность информации и т.д.

Мы находимся в мире, в котором всё больше и больше
информации и всё меньше и меньше смысла.
Жан Бодрийяр. Симулякры и симуляция

7.2 Теория информации

Л. Больцман (1877), давая статистико-физическое определение энтропии, заметил, что энтропия характеризует недостающую информацию о системе. То есть, энтропия есть мера нашего незнания о системе. Таким образом, Больцман был первым, кто понял

информационный смысл энтропии. И только спустя 80 лет теоретико-информационная трактовка энтропии стала общепринятой. Оказалось, что энтропия – информативный параметр, количественно характеризующий состояние системы. Информационная энтропия была положена в основание новой науки – информатики.

Перечислим некоторые основные свойства информации:

– Дискретность**.** Информация состоит из сообщений. Сообщение – это дискретный сигнал или последовательность дискретных сигналов, которые приходят из окружающего мира в рассматриваемую открытую систему и на которые эта система способна реагировать, то есть так или иначе изменять свое состояние.

– **Нематериальность.** Информация нематериальна, но она проявляется в связи с материальными носителями самой разной природы: букв, написанных на бумаге, последовательности аминокислот в генетическом коде и т.п. Информация сама по себе без носителя, без структуры, невозможна, но и структура без информации невозможна.

– **Закодированнность.** Информация всегда закодирована: сообщения в виде знаков, символов, сигналов могут быть восприняты только получателем, способным их распознать. Лишь люди, владеющие одним и тем же кодом, способны обмениваться информацией и понимать друг друга.

– **Универсальность и объективность**. Универсальность информации заключается в том, что это понятие одинаково применимо как к живому, так и к не живому миру. Примеры: рост кристаллов — зародыши кристаллов несут информацию молекулам, как им выстраиваться в определенном порядке; молекулы ДНК несут генетическую информацию о том, как строить организм. Информация объективна, она не связана с воспринимающим субъектом; она присутствует и функционирует в природе как объективный фактор.

– **Аддитивность.** Это свойство означает, что если к имеющейся информации добавляется новая, то полученная информация равна сумме старой и новой.

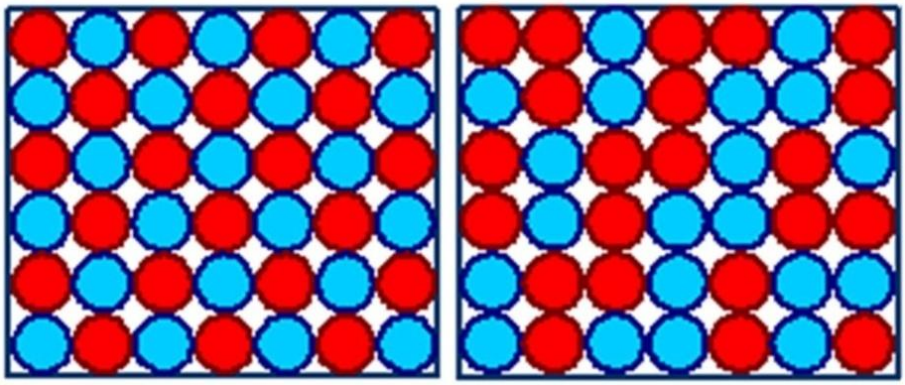


Рис. 1. Иллюстрация различия пространственного и информационного порядков: с точки зрения топологии шары упакованы в полном порядке, но с точки зрения информации (цвета) слева – порядок, справа – беспорядок.

Информация – предельно общая характеристика степени зависимости некоторых переменных. Её можно сравнить с корреляцией, но если корреляция характеризует лишь **линейную** связь переменных, то информация характеризует **любую** связь. Даже, если связь неизвестна, то это не мешает рассчитывать информацию и количественно сравнивать между собой разнотипные зависимости. Однако невозможно, зная количество информации, написать уравнение связи переменных.

Информация в первую очередь имеет дело со случайными событиями, которые обычно описываются в рамках теории вероятности. Случайное событие означает отсутствие полной уверенности в его наступлении, что, в свою очередь, создает *неопределенность* в исходах опытов, связанных с данным событием. Информатика позволяет ввести такую количественную меру неопределенности. Уменьшение неопределенности всегда связано с выбором одного или нескольких элементов (альтернатив) из некоторой их совокупности. Взаимная обратимость понятий вероятности

и неопределенности послужила основой для использования понятия вероятности при измерении степени неопределенности в теории информации. Чем меньше вероятность какого-либо события, тем большую неопределенность снимает сообщение о его появлении и, следовательно, тем большую информацию оно несёт.

Измерить количество смысловой информации невозможно. Однако часто можно пренебречь качественными особенностями информации, выразить её количество числом, а также сравнить количество информации, содержащееся в различных группах данных. Физическую (термодинамическую, статистическую) и техническую (шенноновскую) информации, уменьшающие энтропию и неопределённость, измерить можно. Следует подчеркнуть, что и в физическом, и в техническом подходах к определению количества информации не обсуждается ценность того или иного информационного сообщения.

Задача этой главы продемонстрировать, что энтропия и информация являются противоположностями, которые дополняют друг друга.

7.2.1 Информация Хартли

Аддитивную логарифмическую меру информации впервые предложил Р. Хартли в 1928 г.

Предположим, что какое-то событие имеет m равновероятных исходов. Таким событием может быть, например, появление любого символа из алфавита, содержащего m таких символов. Какое количество информации можно передать при помощи такого алфавита? Оценки можно сделать, определив число N возможных сообщений, которые могут быть переданы при помощи этого алфавита. Если сообщение формируется из одного символа, то $N=m$, если из двух, то $N=m^2$. Если сообщение содержит n символов (n – длина сообщения), то $N=mn$. Мера количества информации найдена, но она не удобна. При наличии алфавита, состоящего из одного символа, т.е. когда $m=1$, возможно появление только этого символа. Следовательно, неопределенности в этом случае не существует, и появление этого символа не несет никакой информации. Между тем, значение N при $m=1$ не обращается в нуль. Для двух независимых источников сообщений (или алфавита) с N_1 и N_2 числом возможных сообщений общее число возможных сообщений $N=N_1N_2$, в то время как логичнее было бы считать, что количество информации, получаемое от двух независимых источников, должно быть не произведением, а суммой составляющих величин.

Теорема Хартли: Если в заданном множестве {M}, состоящем из N элементов, содержится элемент x, о котором известно только, что он принадлежит этому множеству {M}, то, чтобы найти x, необходимо получить об этом множестве количество информации, равное $\log_2 N$ бит.

Полное доказательство теоремы дано А. Реньи.

Хартли предложил информацию Y, приходящуюся на одно сообщение, определять логарифмом общего числа возможных сообщений N:

$$Y(N) = \log N \qquad (1)$$

Если все множество возможных сообщений состоит из одного ($N=m=1$), то $Y(N)=\log 1=0$, что соответствует отсутствию информации в этом случае. При наличии независимых источников информации с N_1 и N_2 числом возможных сообщений $Y(N)=\log N=\log N_1N_2=\log N_1+\log N_2$, т.е. количество информации, приходящееся на одно сообщение, равно сумме количеств информации, которые были бы получены от двух независимых источников, взятых порознь. Формула, предложенная Хартли, удовлетворяет предъявленным требованиям. Поэтому её можно использовать для измерения количества информации. Если возможность появления любого символа алфавита равновероятна (а мы здесь предполагали, что это именно так), то эта вероятность $p=1/m$. Если $N=m$, то

$$Y=\log N=\log m=\log (1/p)=-\log p, \qquad (2)$$

т.е. количество информации на каждый равновероятный сигнал равно минус логарифму вероятности отдельного сигнала.

Формула Хартли (2) определяет собственную информацию.

Собственная информация – статистическая функция дискретной случайной величины. Это случайная величина, отличающаяся от её среднего значения (информационной энтропии).

Формула (2) позволяет, в принципе, определить количество информации. Однако для практических целей необходимо задаться единицей его измерения. Единицы измерения информации зависят от основания логарифма.

Замечание. Выбор основания логарифма существенного значения не имеет, т.к. логарифм легко преобразуется логарифма от одного основания к другому: $\log_b n=\log_b a\cdot\log_a n$; переход к другому основанию состоит во введении одинакового для обеих частей выражения (2) постоянного множителя $\log_b a$, что равносильно изменению масштаба (т.е. размера единицы) измерения неопределенности.

При использовании натурального логарифма единицей информации является *нат* (для вычисления энтропии в битах нужно разделить на ln2 значение в натах; 1 нат=$\log_2 e$=1,443 бит). Если используются десятичные логарифмы, то единицей степени неопределенности будет служить неопределенность опыта с 10 равновероятными исходами (таким является, например, опыт, состоящий в извлечении шара из урны с десятью перенумерованными шарами). Такая единица степени неопределенности называется дитом; и она в ≈3,32 раза больше двоичной единицы, т.к. $\log_2 10 = 3{,}32$.

В случае логарифма с основанием 2 единицей измерения является *бит*. Это название предложил Джон Тьюки. Бит (BIT – аббревиатура от *BInary digiT*). Тьюки избрал бит для обозначения одного двоичного разряда, способного принимать значение 0 или 1.

Единицами кодированной информации являются бит и байт.

Бит – минимальная единица измерения количества передаваемой или хранимой информации, соответствующая одному двоичному разряду, способному принимать значений 0 или 1; один разряд двоичного кода (двоичная цифра).

Байт – в запоминающих устройствах – наименьшая адресуемая единица данных в памяти компьютера, обрабатываемая как единое целое. По умолчанию байт считается равным 8 битам. Обычно в системах кодирования данных байт представляет собой код одного печатного или управляющего символа.

Введение бита позволило использовать для анализа информационных событий аппарат математической логики. Один бит равен количеству информации, получаемой в результате осуществления одного из двух равновероятных событий; он соответствует одному элементарному событию, которое может произойти или не произойти. Бит — двоичный логарифм вероятности равновероятных событий или сумма произведений вероятности на двоичный логарифм вероятности при равновероятных событиях. Бит не только единица количества информации, но и единицей измерения степени неопределенности, содержащаяся в одном опыте, имеющем два равновероятных исхода. Один бит вовсе не является минимальным количеством информации: информация может быть и меньше бита.

Количество информации равно количеству двоичных символов 0 или 1.

Если информация – это устраненная неопределенность, то в простейшем случае неопределенности выбор будет производиться между двумя взаимоисключающими друг друга равновероятными сообщениями, например между двумя качественными признаками: положительным и отрицательным импульсами, импульсом и паузой и т.п. Количество информации, переданное в этом простейшем случае, наиболее удобно принять за единицу количества информации. Именно такое количество информации может быть получено, если применить формулу (2) и взять логарифм по основанию 2. Тогда $Y=-\log_2 p=-\log_2\cdot 1/(1/2)=\log_2 2=1$.

При наличии нескольких источников информации общее количество информации равно

$$Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i \,. \qquad (3)$$

Здесь Y_i – количество информации от источника i. Всего k источников.

На количество информации, получаемой из сообщения, влияет фактор неожиданности его для получателя. Он зависит от вероятности получения того или иного сообщения. Чем меньше эта вероятность, тем сообщение более неожиданно и более информативно. Сообщение, вероятность которого высока (низкая степень неожиданности), несёт немного информации. Формула Хартли позволяет определить количество информации в сообщении только для случая, когда появление символов равновероятно и они статистически независимы. На практике эти условия выполняются редко. При определении количества информации необходимо учитывать не только количество разнообразных сообщений, которые можно получить от источника, но и вероятность их получения.

Для случайной величины X, имеющей конечное число значений:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

собственная информация определяется формулой Хартли $Y(X)=-\log P_X(X)$.

Пример. Мера информации Хартли используется для измерения количества информации, содержащегося в последовательности из n символов из алфавита A мощности m. Она равна: $Y=n\cdot\log 2m$ бит. Хартли предполагал, что все символы алфавита A могут встретиться с равной вероятностью (частотой) в любом месте сообщения. Любое сообщение длины n в алфавите A содержит одинаковое количество информации. Информационная энтропия – мера неопределенности источника информации, который может выдать одно из m значений (символов алфавита). Чем больше мощность алфавита (m), тем больше энтропия (неопределенность).

С практической точки зрения, энтропия по Хартли – количество бит, которое необходимо для передачи одного значения от источника приемнику, а количество информации – общее количество бит, необходимое для передачи всего сообщения. Неопределенность знания о результате некоторого события – это количество возможных результатов (исходов) этого события. Сообщение об одном из двух равновероятных результатов некоторого события *несёт 1 бит информации.*

Глубина сообщения q – количество различных элементов (символов, знаков), принятых для представления сообщений. В каждый момент времени реализуется только один какой-либо элемент. Например, если сообщение представляется символами - буквами русского алфавита, то q=32 (для простоты буква ё во внимание не принимается), английского - q=26. Если сообщение - десятичные числа, то q=10 (десятичные цифры - элементы - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Длина сообщения n – количество позиций, необходимых и достаточных для представления сообщений заданной величины. Если символы сообщения - цифры, то сами сообщения - числа и их последовательности.

При заданных глубине и длине сообщения количество всех возможных сообщений $N=q^n$.

Пример 1. Всего трехбуквенных русских слов $N=32^3=32768$. В это количество включены и "совершенно невозможные" слова, например "ааа" или "ьъы.

Пример 2. Трехзначных десятичных чисел всего $N = 10^3 = 1000$.

Пример 3. Определить, какое количество информации в битах содержит книга, написанная на русском языке, содержащая 200 страниц (каждая страница содержит 2000 символов). Согласно мере Хартли $Y=n\ \log_2 q = 200 \cdot 2000 \cdot \log_2 32 = 2000000$ бит. Здесь n - длина сообщения в знаках: n=200 страниц 2000 знаков/страница = 400000 знаков. Ответ: книга содержит ≈2-х мегабит (Мбит) информации.

Собственную информацию можно понимать как «меру неожиданности» события — чем меньше вероятность события, тем больше информации оно содержит.

Свойства информации

1) Неотрицательность: $Y(x)\geq 0$. $Y(x)=0$ при $p(x)=1$, т.е. предопределенный факт никакой информации не несёт.

2) Монотонность: $Y(x_1)>Y(x_2)$, если $p(x_1)<p(x_2)$.

3) Аддитивность: для независимых $x_1,...,x_n$ справедливо

$$Y[x_1,...,x_n]=\sum_{i=1}^{n}Y(x_i) \qquad (5)$$

Если события неравновероятны, то количество информации рассчитывается в рамках теории Шеннона.

В теории информации в качестве объекта, о котором передается информация, рассматривается физическая система, которой присуща степень неопределенности. Степень неопределенности физической системы определяется числом её возможных состояний и вероятностями состояний. В качестве меры априорной неопределенности системы в теории информации применяется характеристика, называемая энтропией.

7.2.2 Энтропия Шеннона

Изучая системы передачи информации, К.Шеннон пришёл к выводу, что каждое элементарное сообщение на выходе системы уменьшает неопределённость исходного множества сообщений, а смысловой аспект сообщения не имеет никакого значения. За единицу количества информации было предложено принять «количество информации, передаваемое при одном выборе между равновероятными альтернативами».

Количество информации:

– мера информации, сообщаемой появлением события определенной вероятности;

– мера оценки информации, содержащейся в сообщении;

– мера, характеризующая уменьшение неопределенности, содержащейся в одной случайной величине относительно другой.

К. Шеннон (1948) впервые связал понятия энтропия и информация. Энтропия стала использоваться как мера полезной информации в процессах передачи сигналов по проводам. Под информацией Шеннон понимал сигналы нужные, полезные для получателя. Неполезные сигналы – это шум, помехи. Если сигнал на выходе канала связи является точной копией сигнала на входе то, с точки зрения теории информации, это означает отсутствие энтропии. Отсутствие шума означает максимум информации. Мерой количества информации Шеннон предложил считать функцию, названную им энтропией.

Пусть сообщение – осмысленное предложение на каком-то языке. Шеннон заметил, что при передаче различных букв передаётся разное количество информации. Если мы передаем часто встречающиеся буквы, то информация меньше; при передаче редких букв – больше. Дискретные (состоящие из набора символов) сообщения представляют собой последовательности символов определенного заранее известного алфавита. Хорошо известна азбука Морзе. Например: **... – – –...** – сигнал *SOS* (три точки три тире три точки, "*спасите наши души*"). При кодировании букв алфавита азбукой Морзе наиболее частые буквы передаются коротко, а для редких используют более длинные цепочки. Так, в русском языке буква «Е» кодируется одной точкой « », а редкая «Ш» – четырьмя тире (это самая длинная последовательность на букву в азбуке Морзе). Количество информации на букву связано с частотой употреблений этой буквы. Чем более редкая буква передаётся, тем больше в ней информации. Вероятность i-го символа алфавита, состоящего из n символов равна p_i, что позволяет рассчитать информационную энтропию. Количество информации, передаваемое в сообщении, связано с мерой неопределенности (непредсказуемости) передаваемых символов, т.е. энтропией.

Замечание. При создании теории информатики Клод Шеннон собирался назвать информационную энтропию информацией. Однако, Джон фон Нейман предложил термин

информационная энтропия, объяснив, что никто не понимает и никогда не поймёт, что такое энтропия, поэтому у Шеннона в спорах будет преимущество. Нейман оказался прав.

Энтропия Шеннона (информационная энтропия) – мера неопределённости (непредсказуемая информация), связанная со случайной величиной; степень неполноты, неопределённости знаний. Определяет количество информации (информационную ёмкость системы), содержавшейся в сообщении (в битах на символ); неопределённость появления какого-либо символа первичного алфавита, минимальная длина сообщения, необходимая для передачи информации; абсолютный предел наиболее возможного сжатия без потерь любого сообщения; мера среднего информационного содержания случайной величины, которое наблюдатель (получатель сообщения) теряет, когда ему неизвестно значение (исход) случайной величины. При отсутствии информационных потерь энтропия численно равна количеству информации на символ передаваемого сообщения. Если сигнал на выходе канала связи является точной копией сигнала на входе то энтропия отсутствует. Отсутствие шума означает максимум информации.

Информационная энтропия – мера неопределённости какого-либо опыта (испытания, сообщения источника, неопределённости вероятностного распределения), который может иметь различные исходы, а значит, и количество информации. Означает меру неупорядоченности (непредсказуемости) системы; чем меньше элементы системы подчинены какому-либо порядку, тем выше энтропия.

Пример: Неопределённость появления какого-либо символа первичного алфавита. При отсутствии информационных потерь энтропия численно равна количеству информации на символ передаваемого сообщения.

Энтропия – макроскопическая величина. Она применима только для скоплений частиц, т.е. для термодинамической системы.

Энтропию понимают как недостающую информацию о системе, т.е. как степень нашей неосведомленности. Главную роль в способе описания энтропии играет число доступных микросостояний. Если в системе миллион состояний, и мы не знаем, в каком из них она находится, степень нашей неосведомленности намного больше, чем, если бы в ней было только десять состояний. Поэтому о системе с высокой энтропией известно намного меньше, чем о системе с низкой энтропией.

Информационная энтропия – мера хаотичности информации – связана с вероятностью появления тех или иных символов при передаче сообщений; это мера количества информации, приходящейся на одно элементарное сообщение источника, вырабатывающего статистически независимые сообщения; пропорциональна логарифму числа возможных эквивалентных сообщений. Она говорит о том, насколько тяжело делать предсказания о событиях описываемых вероятностным распределением. Чем больше энтропия, тем тяжелее делать предсказания. Энтропия – мера неопределенности некоторой ситуации, она возрастает по мере увеличения числа случайных ошибок при передаче сообщений; мера рассеяния, подобная дисперсии. Но если дисперсия является адекватной мерой рассеяния лишь для специальных распределений вероятностей случайных величин (например, для распределения Гаусса), то энтропия не зависит от типа распределения.

Если некий опыт имеет n равновероятных исходов, а другой опыт m равновероятных исходов, то составной опыт имеет nm таких исходов. При вводе меры неопределенности f требуется, чтобы, чтобы неопределенность росла с ростом числа возможных исходов, и неопределенность составного опыта была равна сумме неопределенности отдельных опытов, мера неопределенности должна быть аддитивной: $f(nm)=f(n)+f(m)$. Такая мера неопределенности введена К. Шенноном:

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{N} p(X_i)\log p(X_i) \qquad (6)$$

где X – дискретная случайная величина с диапазоном изменчивости N, $p(X_i)$ – вероятность i -го уровня X.

Величина энтропии заключена в пределах: $0 \le H(X) \le \log N$. Нижняя грань соответствует вырожденному распределению (неопределенность величин X отсутствует, т.е. $X_j=const$). Верхняя грань соответствует равномерному распределению. Все N значений X_i встречаются с равной вероятностью. Здесь рассматривается не само событие, а информация о нём. Если состояние системы известно, то нет смысла передавать сообщение: оно не несёт информации. Сообщение приобретает смысл только, если состояние системы заранее неизвестно, обладает какой-то степенью неопределенности. Если некоторое значение бита очень вероятно, его информационное содержание низко; если значение маловероятно, бит несёт гораздо больше информации. Нужно найти сумму всех возможных значений и умножить на их вероятность, поскольку наиболее вероятные значения встречаются чаще.

Информационная энтропия обладает следующими свойствами:

1) Энтропия $H(p_1, p_2,\ldots,p_n)=0$ тогда и только тогда, когда все вероятности p_i, кроме одной, равны нулю, а эта единственная вероятность равна единице. Это тот случай, когда о система все известно заранее и результат не дает новую информацию. $H=0$ только в случае полной определенности исхода опыта, при отсутствии неопределенности (опыты независимы). Во всех других случаях информация (энтропия) положительна; Информация опыта равна среднему значению количества информации, содержащейся в каком-либо одном его исходе.

2) При объединении независимых систем их энтропии складываются. Если A и B – два независимых случайных объекта с числом состояний n и m соответственно, то состояния системы образуются совместной реализацией объектов A и B). Тогда

$$H(AB)=H(A)+H(B). \qquad (7)$$

Энтропия сложной системы:

$$H(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\log\left(p_{ij}\right), \qquad (8)$$

где $p_{ij}=p\left[(A\approx a_i)\cdot(B\approx b_j)\right]$ – вероятность того, что сложная система (A, B) будет находиться в состоянии (a_i, b_j).

Свойство аддитивности: количество энтропии не зависит от того, как система событий разделена на части (подсистемы). Например, энтропия n бросаний игральной кости в n раз больше, чем энтропия одного бросания.

3). Энтропия непрерывна: изменение значения одной из вероятностей на очень маленькую величину изменяет энтропию также на маленькую величину.

4) Энтропия (информация) симметрична относительно последовательности опытов: $H_n(p_1, p_2,\ldots)=H_n(p_2, p_1,\ldots)$ и т.д.

5) Энтропия максимальна, если все исходы одинаково вероятны (неопределённость является самой высокой, когда все возможные события равновероятны). При заданном n величина H максимальна и равна $\log_2 n$, когда все p_i равны между собой, то есть $p_1=p_2=\ldots=p_n=1/n$. Энтропия системы с равновозможными состояниями $p_i=1/n$ равна логарифму числа состояний n. Максимум энтропии соответствует наибольшей неопределённости или равенству вероятностей всех возможностей. Максимальное значение энтропии физической системы с конечным числом состояний равно логарифму числа состояний и достигается, когда все состояния равновероятны. Степень неопределённости опыта тем больше, чем больше число n его исходов.

$$H_n(p_1,\ldots,p_n)\le H_n\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right) \qquad (9)$$

Для равновероятных событий энтропия увеличивается с увеличением их числа:

$$H_n\left(\underbrace{\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}}_{n}\right) < H_{n+1}\left(\underbrace{\frac{1}{n+1},...,\frac{1}{n+1}}_{n+1}\right). \quad (10)$$

Если вероятности одинаковы, то справедлива формула Хартли для собственной информации. Максимальное разнообразие $H_{max}=\log_2 n$ и справедливо $o\le H\le H_{max}$

6) Если две произвольные системы A и B объединяются в одну, то энтропия сложной системы (A,B) равна

$$H(A,B)=H(A)+H(A|B), \quad (11)$$

где $H(A|B)$ - условная энтропия второй части B относительно первой. $p(b_j|a_i)$ - условная вероятность того, что система A находится в состоянии b_j при условии, что система A находится в состоянии a_i; по теореме умножения $p(b_j|a_i)=p_{ij}/p_i$, $p_i=p(A\approx a_i)$.

В случае любого числа объединяемых систем:

$$H(A_1,A_2,...,A_s)=H(A_1)+A(A_2|A_1)+H(A_3|A_1A_2)+...+H(A_1A_2...A_{s-1}),$$

где энтропия каждой последующей системы вычисляется при условии, что состояние всех предыдущих известно.

7) Полная условная энтропия системы $H(B|A)$ не превышает её безусловной энтропии $H(B)$: $H(A,B)\le H(A)+H(B)$

Из этих свойств следует, что энтропия может служить мерой неопределенности состояния физической системы.

Относительная энтропия (коэффициент сжатия информации) $h=H/H_{max}$. Относительная энтропия определяет относительную степень информационной загруженности системы. Она может характеризовать степень близости закона распределения к равномерному распределению.

Если события равновероятны и статистически независимы, то оценки количества информации, по Хартли и Шеннону, совпадают. Это свидетельствует о полном использовании информационной ёмкости системы. В случае неравных вероятностей количество информации, по Шеннону, меньше информационной ёмкости системы. Количество информации только тогда равно энтропии, когда неопределенность ситуации снимается полностью.

Из свойств энтропии следует, что она является мерой неопределенности состояния физической системы. Естественно поэтому количество информации измерять уменьшением энтропии системы, для уточнения состояния которой предназначены сведения. В теории информации физическую систему A, которая может в каждый момент времени случайным образом принять одно из конечного множества возможных состояний a_i, называют дискретным источником сообщений. Каждое возможное состояние a_i называют элементарным дискретным сообщением. Набор элементарных сообщений называют сообщением. При этом в течение некоторого времени источник может выдать дискретное сообщение в виде последовательности элементарных дискретных сообщений, представляющей сбой набор символов a_i, каждый из которых имеет длительность t_i секунд, необязательно одинаковую для различных i. При выдаче источником сообщений в виде последовательности элементарных дискретных сообщений, полное вероятностное описание дается вероятностью совместного появления набора различных символов $\boldsymbol{a_i}$ в момент t_1, t_2, t_k $p\left(a_i^{t_i}, a_j^{t_2}...a_s^{t_k}\right)$, где k – длина последовательности. Располагая такими сведениями об источнике можно вычислить вероятность любого отрезка сообщения длиной меньше k. Если функция $p\left(a_i^{t_i}, a_j^{t_2}...a_s^{t_k}\right)$, не меняется во времени, то источник называется стационарным. Если при определении вероятностных характеристик стационарного источника усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по времени, то такой источник называется **эргодическим.** Вероятностные свойства

эргодического источника можно оценить, рассматривая лишь одну его достаточно длинную реализацию.

Информационная энтропия – математическое ожидание $H(\xi)$ случайной величины характеризует среднее значение количества информации, приходящееся на один символ.

Информационная энтропия **дискретной случайной величины**, ξ, которая может принимать значения $\xi_1, \xi_2,...,\xi_n$, равна величине

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{N} p(\xi_i)\log_2 p(\xi_i) = \sum_{i=1}^{N} p(\xi_i)\log_2\left(\frac{1}{p(\xi_i)}\right);\ \sum_{k=1}^{N} p_k = 1 \qquad (12)$$

Информация – содержание сообщения, понижающего неопределенность некоторого опыта с неоднозначным исходом; убыль связанной с ним энтропии является количественной мерой информации. В случае равновероятных исходов информация равна логарифму отношения числа возможных исходов до и после (получения сообщения).

Замечание. В статистической механике энтропия характеризует неопределенность, связанную с недостатком информации о состоянии системы. Наибольшей оказывается энтропия у равновесной полностью беспорядочной системы – о её состоянии наша осведомленность минимальна. Упорядочение системы (наведение какого-то порядка) связано с получением некоторой дополнительной информации и уменьшением энтропии. В теории информации энтропия также отражает неопределенность, однако, это неопределенность иного рода – она связана с незнанием результата опыта с набором случайных возможных исходов. Хотя между энтропией в физике и информатике много общего, необходимо сознавать и различие этих понятий.

Информация опыта равна среднему значению количества информации, содержащейся в каком-либо одном его исходе (среднее количество информации, приходящееся на один сигнал, удельная информативность источника). Это статистическое определение понятия «информация». Энтропия, рассчитанная по этой формуле, называется количеством информации или двоичной информацией.

Максимальное значение энтропии достигается при равенстве всех p_i равны, т.е. $p_1=p_2=\ldots=p_m=1/m$. При этом выражение для энтропии равновероятных, независимых элементов равно: $H_{\max} = \log_2 m$.

Энтропия численно совпадает со средним количеством информации, но смысл х различен, так как:

- *энтропия* выражает среднюю неопределенность состояния источника и является его объективной характеристикой, она может быть вычислена априорно, т.е. до получения сообщения при наличии статистики сообщений.
- *информация* определяется апостериорно, т.е. после получения сообщения. С получением информации о состоянии системы энтропия снижается.

Количество информации, содержащейся в дискретном сообщении, измеряется величиной исчезнувшей неопределенности. Мера этой неопределённости должна удовлетворять ряду условий: монотонное её возрастание с увеличением возможности выбора (объема алфавита источника n) и адитивность.

Замечание. Шеннон много внимания уделял информации, но никак её не обозначал. У него нет ни одной формулы с использованием этого параметра. Мы будем обозначать количество информации буквой *Y*.

Количество информации есть уменьшение энтропии вследствие опыта или какого-либо другого акта познания. Информация, которую необходимо получить, чтобы устранить неопределенность ситуации, равна двоичному логарифму числа равновероятных состояний системы. Но эта информация появляется только после необходимого числа испытаний. А до опыта эта величина является мерой неопределенности нашей системы и называется её энтропией. Убыль этой величины в результате испытаний и есть та информация о системе, которой мы владеем на данный

момент. Если энтропия до начала опыта H_1, а в результате сообщения информации Y энтропия становится равной H_2 ($H_1 \geq H_2$), то информация

$$Y = H_1 - H_2, \qquad (13)$$

т.е. информация равна убыли энтропии (количество информации измеряется изменением (уменьшением) неопределенности состояния системы).

Связь между информацией и информационной энтропией поясним на примере.

Классические компьютеры работают в двоичной логике ”1” и ”0” (есть напряжение в ячейке или нет). В этом случае считают, что каждая ячейка содержит один бит информации. Регистр из N ячеек содержит N бит информации. С их помощью можно записать 2^N сообщений. Если все сообщения равновероятны, то вероятность каждого сообщения $w_N = 1/2^N$. Введем информационную энтропию по формуле: $H = -\log_2 w_N$. Для нашего простейшего случая $H = N$. На самом деле, есть сообщения более вероятные и менее вероятные.

В общем случае, если имеется набор из N величин x_l, каждая из которых может появляться с вероятностью $1 \geq p(x_l) \geq 0$, то энтропия Шеннона

$$H(X) = -\sum_{l=1}^{N} p(x_l)\ln(p(x_l)), \qquad (14)$$

где $\sum_{l=1}^{N} p(x_l) = 1$.

Информацию Шеннона измеряют в натах: 1 бит=1 нат/ln2≈1,44 нат.

Если все сообщения равновероятны, то до прочтения содержания регистра нет информации о том, какое из 2^N сообщений в нём записано. Пусть Y – мера информации. Тогда до прочтения регистра $Y_{in}=0$, но энтропия $H_{in}=N$. Когда сообщение из регистра прочитано, то мы стали обладать информацией в N бит, т.е. $Y_{fin}=N$. При этом мы точно знаем, какое сообщение записано в регистре. Поэтому $wN_{fin}=1 \Rightarrow H_{fin}=0$ и $H_{in}+Y_{in}=N = H_{fin}+Y_{fin}$.

В общем случае, связь энтропии и информации задается следующим образом:

$$H + Y = const \qquad (15)$$

$$\Delta Y = -\Delta H. \qquad (16)$$

Информационную энтропию можно рассматривать как меру недостатка информации о классической системе. Чем меньше энтропия, тем больше информация. В этом случае говорят о том, что система упорядочена. Чем больше энтропия, тем меньше информации о системе: система движется к хаосу.

Замечание. Во многих книгах и даже учебниках почему-то утверждается, что информация равна энтропии. Это, конечно, не так. Сумма информации и энтропии равна константе (правда, есть учёные, утверждающие, что это не так, особую ненависть вызывает формула $H+Y=1$). Не информация равна энтропии, а изменение информации (дифференциал) равно изменению информации, причём с обратным знаком. Не надо путать скорость машины, с пройденным ею расстоянием!

Если изначально равновероятных исходов было n_1, а в результате передачи информации Y неопределенность уменьшилась, и число исходов стало n_2 ($n_2 \leq n_1$), то

$$Y = \log_2 n_1 - \log_2 n_2 = \log_2 \frac{n_1}{n_2} \qquad (17)$$

Формула Шеннона определяет информационную энтропию. Внешне она похожа на формулу для термодинамической энтропии $S = k\log W$ (первым на сходство обратил внимание Н. Виннер), отличаясь от неё отсутствием константы Больцмана (что сразу делает её безразмерной, тогда как термодинамическая энтропия имеет размерность теплопроводности) и знаком минус (что сразу подвигло многих учёных ввести понятие отрицательной (него) энтропии, однако вскоре от таких попыток отказались).

Замечание 1. Шеннон полагал, что информационная энтропия точно совпадает с информацией (обе величины считаются по одной и той же формуле и исчисляются в одинаковых единицах!), но противостоит термодинамической энтропии Больцмана-Планка: информация Шеннона есть отрицательная термодинамическая энтропия. Тем более удивительно, что часто информацию представляют не как энтропию и не как отрицательную энтропию, а как обратную энтропию, т.е. как частное от деления единицы на энтропию (в последнее время обратную энтропию стали называть не информацией, а аниэнтропией; в немецкой литературе такую величину называют *ordnung* – порядок).

Замечание 2. В работах Шеннона информация и энтропия не противопоставляются друг другу (поскольку это одно и тоже); информация, как таковая, Шеннону не нужна - энтропии более чем достаточно; нигде Шеннон не связывает энтропию с беспорядком, а информацию с порядком: у него - энтропия - мера неопределённости и ничего другого!

Замечание 3. Формулы для информации и энтропии совпадает, поэтому, по крайней мере физике и химии понятие "информация" ничего не даёт. В этих науках не нужна ни информация, ни негэнтропия – энтропия вполне описывает физико-химические процессы. Утверждения, что энтропия якобы вводится только для процессов, стремящихся к равновесию, к порядку, а информация способна интерпретировать процессы самоупорядочения, не выдерживает критики: ничто не мешает распространить понятие энтропии на открытые системы, на сложные системы и на процессы, идущие с уменьшение энтропии. Понятие информации бесполезно и здесь. Энтропии вполне достаточно. Да, на основе представлений об информации можно вывести все равновесные статистические распределения, беда в том, что они были получены задолго до возникновения информационных идей.

Поскольку все $w(x_l)$ неотрицательны и не превосходят единицы, то очевидно, что $H(X)\geq 0$. Равенство достигается, когда $w(x_k)=1$ и $w(x_1)=. \; . \; .=w(x_{k-1})=w(x_{k+1})=. \; . \; .=w(x_N)=0$. Теперь найдем максимальное значение энтропии $H(X)$. Из условия нормировки вероятности имеем:

$$w(x_N)=1-\sum_{l=1}^{N-1} w(x_l) \qquad (18)$$

Можно показать, что максимум функции $H(x)$ достигается, когда вероятности $w(x_{k1})=w(k_2)...w(x_{N\text{-}1})=w(x_N)=1/N$. И этот максимум равен

$$H_{\max}(X)=-N\frac{1}{N}\ln\left(\frac{1}{N}\right)=\ln(N). \qquad (19)$$

Энтропия Шеннона лежит в диапазоне $0\leq H(X)\leq \ln(N)$, где N – количество элементов в ансамбле X.

Если некая система A недоступна для наблюдения, то выясняется состояние не самой системы A, а системы B, связанной с системой A. Полной информацией о системе A, содержащейся в системе B, называется величина

$$Y_{B\to A}=H(A)\text{-}H(A|B). \qquad (20)$$

Полная информация о системе A, содержащейся в системе B, равна полной информации о системе B, содержащейся в системе A $Y_{B\to A}= Y_{A\to B}$. Поэтому информацию $Y_{B\to A}$ обозначают $Y_{B\leftrightarrow A}$ и называют взаимной информацией. Полная взаимная информация, содержащаяся в двух системах, равна сумме энтропий составляющих систем минус энтропия объединенной энтропии:

$$Y_{A\leftrightarrow B}=H(A)+H(B)-H(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\log\left(\frac{p_{ij}}{p_i p_j}\right) \qquad (21)$$

Полная информация, содержащаяся в независимых системах, равна нулю $Y_{B\to A}=0$. Полная информация, содержащаяся в полностью зависимых системах, равна полной информации системы A, либо системы B $Y_{B\to A}=H(A)=H(B)=Y_A=Y_B$. Полная взаимная

информация, содержащаяся в системах, из которых одна является подчиненной, равна энтропии подчиненной системы.

$Y_{B\to A}=H(A)$ (22)

Если все возможные состояния объекта априори одинаково вероятны, т.е. $p_1=p_2=...p_n=1/_n$, то частная информация Y_i от каждого отдельного сообщения $Y_i=-\log\frac{1}{n}=\log n$ равна средней информации: $Y=-n\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}=\log n.$

Количество информации, содержащееся в сообщении из n символов, равно:

$$n\cdot\sum_{i=1}^{m}p_i\log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)=n\cdot H(x)\text{ бит} \quad (23)$$

Пример 1. Энтропия системы A, обладающей двумя состояниями A_1 и A_2 с вероятностями $p_1=p_2=0,5$ равна $H(A)=-(0,5\cdot\log_2 0,5+0,5\cdot\log_2 0,5)=1$, т. е. одному биту. Подбрасывание монеты - случайный процесс, с 2-мя исходами, вероятность =50%, энтропия (и информация) 1 бит. Чтобы узнать исход броска монеты требуется количество информации 1 бит. Подбрасывание монеты n раз, приводит к случайной последовательности с энтропией равной n бит. В случае броска монеты известно, что следующий бит будет либо нулем (орел), либо единицей (решка), но не более того: монета абсолютно непредсказуема. В этом случае случайно возникшая цепочка битов содержит количество информации, равное ее длине. Но предположим, что монета, которую мы используем, фальшивая, и на вероятность выпадения орла приходится 70%. В этом случае каждый бит будет содержать немного меньше информации, поскольку мы знаем, что более вероятно выпадение орла. Крайний случай – это цепочка, состоящая из единиц. Если мы знаем, что при броске всегда выпадает решка, то, подбрасывая монету, не получаем вообще никакой информации. Здесь цепочка битов полностью предсказуема, содержание информации в ней нулевое.

Пример 2. Случайным образом вынимается карта из колоды в 32 карты. Какое количество информации требуется, чтобы угадать, что это за карта? Здесь $n=2^5$, значит, $k=5$ и $Y=5$ бит.

Пример 3. При угадывании результата броска игральной кости задается вопрос «*Выпало 6?*». Какое количество информации содержит ответ? $p=1/6$, $1-p=5/6$, $Y=-1/6;\ \log_2 1/6-5/6\log_2 5/6\approx 0,65$ бит.

Пример 4. Допустим что кость фальшивая и вероятность любой грани пропорциональна числу на ней. Чему тогда равна энтропия. 1) $H(x)$=сумма $p(xi)$*log(1/$p(xi)$) 6*1/6*log 6=0,778 2) вероятность выпадения каждой кости равны, $p(x1)=1/21$;$p(x2)=2/21$; $p(x3)=1/7$, $p(x4)=4/21$; $p(x5)=5/21$; $p(x6)=2/7$
$H(x)=1/21*\log 21+2/21*\log(21/2)+1/7*\log(7)+4/21*\log(21/4)+5/21*\log(5/21)+2/7*\log(7/2)=0,72$

Энтропия достоверного события равна 0 бит, энтропия невозможного события равна 0 бит, потому что оба они не случайны.

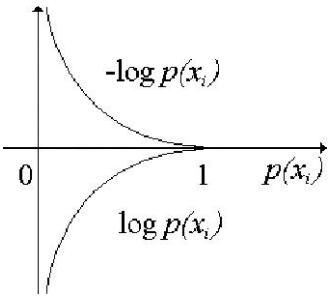
Пример 5. Определить количество информации в сообщении из 8 двоичных символов ($n=8$, $m=2$), если вероятности равны: $p_{i0}=p_{i1}=1/2$. Количество информации равно: $Y=n\log m=8\log_2 2=8$ бит.

Пример 6. Определить количество информации в сообщении из 8 двоичных символов ($n=8$, $m=2$), если вероятности равны: $p_{i0}=3/4$; $p_{i1}=1/4$.

Количество информации равно: $Y(x)=-n\sum_{i=1}^{m}p_i\log p_i=-8\left(\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}\right)=5,67$ бит.

Количество информации, заключенной в сообщении, измеряется уменьшением энтропии системы под действием этого сообщения.

Пример 7. До поступления сообщения энтропия системы равна 2 бит, а после него стала равной 1 бит. Информация, заключенная в сообщении, =1 бит.



Понятию "информация в битах" можно дать наглядное истолкование: она равна числу ответов "да" и "нет" на разумно поставленные вопросы, с помощью которых можно получить ту же информацию.

Рис. 2. Энтропия всегда положительна или равна нулю.

Пример 8. Определить частную информацию, полученную в сообщении наугад выбранного прохожего: “сегодня мой день рождения”. Так как вероятность сообщения $p=1/365$то частная информация от данного сообщения $Y=-\log(1/365)=\log 365=8,51$ бит.

Пример 9. Определить среднюю информацию, полученную в сообщении: “сегодня мой день рождения или сегодня не мой день рождения”. Система имеет два возможных состояния: A_1 – день рождения с вероятностью p_1=1/364 и A_2 – не день рождения с вероятностью p_2=364/365. Средняя информация $Y_A=H(A)$=-(1/365)log(1/365)-(364/365)log(364/365) бит.

Пример 10. Если система A может иметь два равновероятных состояния: A_1 и A_2., то полное выяснение состояния этой системы несет информацию 1 бит, и, значит, можно ее получить в результате ответа на один вопрос. Вопрос "Находится ли система в состоянии A_1?" и получив на него ответ "да" или "нет", позволяет выяснить состояние системы.

Пример 11. Имеется шахматная доска, на одну из клеток которой поставлена фигура (слон). Предположим, что все клетки выбираются с одинаковой вероятностью. Определим информацию, заключенную в сообщении о том, где стоит слон. У системы A (слон) 64 равновероятных состояния; ее энтропия равна: $Y(A) = -\log_2 \frac{1}{64} = 6$ бит.

Значит, сообщение, полностью устраняющее неопределенность состояния системы (указание, где стоит слон), должно содержать ровно шесть битов информации. A из этого следует, что положение слона можно точно выяснить с помощью не более чем шести вопросов.

Пример 12. Энтропия английского текста лежит между 1.0 и 1.5 битами на букву.

Пример 13. Статистика бросания монеты с заданной вероятностью выпадения орла или решки, описываемая распределением Бернулли. В точках 0 и 1 энтропия равна нулю. Нет никакой неопределенности, всегда выпадает одна и та же сторона монеты. Максимальная же энтропия достигается в точке 0.5 (выпадение орла и решки равновероятно). Чем больше энтропия распределения, тем распределение более равномерно. Отсюда следует, что из всех распределений, соответствующих эмпирическим данным, следует выбирать распределение, обладающее наибольшей равномерностью (наибольшей энтропией).

Пример 14: Имеются два ящика, в каждом из которых по 12 шаров. В первом – 3 белых, 3 черных и 6 красных; во втором – каждого цвета по 4. Опыты состоят в вытаскивании по одному шару из каждого ящика. Что можно сказать относительно неопределенностей исходов этих опытов?

Энтропии обоих опытов:

$$H_\alpha = -\frac{3}{12}\log_2\frac{3}{12} - \frac{3}{12}\log_2\frac{3}{12} - \frac{6}{12}\log_2\frac{6}{12} = 1.50 \text{ бит}$$

$$H_\beta = -\frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} - \frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} - \frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} = 1.58 \text{ бит}$$

$H_\beta > H_\alpha$, т.е. неопределенность результата в опыте β выше и, следовательно, предсказать его можно с меньшей долей уверенности, чем результат α.

Пример 15. Поток излучения Солнца у поверхности Земли составляет $\Delta Q\ \Delta t \approx 1{,}4\cdot 10^6$ эрг/см^2 сек (так называемая солнечная постоянная). Этот поток излучения, в конечном счете, преобразуется в тепловую энергию атомов и молекул со средней температурой $\langle T\rangle \sim 300$ K. Тогда поток изменения энтропии от Солнца у поверхности Земли равен:

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} \approx -\frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta Q}{k\langle T\rangle} = -\frac{1}{k\langle T\rangle}\frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx -3\cdot 10^{19}\frac{бит}{см^2 сек}$$

где k – постоянная Больцмана.

Потоку солнечной энтропии должен соответствовать поток информации

$$\frac{\Delta Y}{\Delta t} = -\frac{\Delta H}{\Delta t} \approx 3\cdot 10^{19}\frac{бит}{см^2 сек}$$

Этот поток влияет на показания приборов и его надо учитывать.

Информация бывает двух видов: макро и микро.

Макроинформация – это запомненный выбор. Запомнить (зафиксировать) информацию, означает привести систему в определенное устойчивое состояние. Ясно, что таких состояний должно быть не меньше двух. Каждое из них должно быть достаточно устойчивым, в противном случае система может самопроизвольно выйти из того или иного состояния, что равносильно исчезновению информации. Простейшая запоминающая система содержит всего два устойчивых состояния и называется триггер (переключатель). Этот элемент играет важную роль во всех информационных системах.

Свойством запоминания могут обладать только макроскопические системы, состоящие из многих атомов. Запомнить что-либо, располагая одним атомом, невозможно, поскольку атом может находиться лишь в одном устойчивом (основном) состоянии. Макроинформация может содержаться только в макрообъектах.

Граница между макро и микро объектами проходит на уровне макромолекул, размеры которых порядка нанометров (10^{-9} м).

Микроинформация принципиально не запоминаема. Примером служит выбор одного микросостояния идеального газа в состоянии термодинамического равновесия. Выбор микросостояния означает, что удалось в определенный момент времени t измерить координаты и скорости всех молекул с определенной точностью. Однако выбранное состояние тут же (за время t~10^{-13} сек) , будет забыто, сменится другим микросостоянием, выбранным по закону случая. Это свойство – забывать предыдущее микросостояние – является фундаментальным для эргодических систем, в которых средние по времени совпадают со средними по ансамблю. Именно оно понимается под словами «молекулярный хаос» и именно оно лежит в основе термодинамики. Количество микроинформации в данном примере велико:

$$Y_{\text{micro}}=\log_2 n=-\log_2 w, \qquad (24)$$

где n_{micro} – число микросостояний, $w=1/n_{micro}$ – вероятность случайно выбрать какое-либо одно из них. Количество макроинформации в том же примере, напротив мало: $Y_{macro}=\log_2 n_{macro}=0$, поскольку макросостояние равновесного газа единственно, то есть $n_{macro}=1$. Разумеется, макроинформация не может быть ни ценной, ни смысловой и вообще не может использоваться, как информация в реальной жизни. Тем не менее, она широко обсуждается и является источником многих недоразумений. Из внешней аналогии формул Больцмана и Шеннона следует термодинамическая энтропия и микроинформация пропорциональны друг другу. Связь между энтропией и микроинформационной имеет вид

$$S=\frac{k}{\log_2 c}Y_{micro}=\frac{k}{1{,}44}Y_{micro} \qquad (25)$$

Количество информации до измерения, когда выбор еще не сделан $Y_{micro}(t)=0$, поэтому прирост количества макроинформации $\Delta Y_{micro}=+Y_{micro}$. Отсюда делается вывод:

$$\Delta S=\frac{k}{1{,}44}\Delta Y_{micro} \qquad (26)$$

При увеличении информации о системе ее энтропия уменьшается. Энергия $kT/1{,}44$ – минимальная цена одного бита микроинформации (1,44 – коэффициент перехода от натуральных логарифмов к двоичным).

Микроинформация существенно отличается от макроинформации, поскольку она не имеет важного для информации свойства фиксируемости, ибо незапоминаема, отличается она не только качественно, но и количественно. Это ясно, если вернуться от энтропийных к обычным единицам измерения информации – битам.

$$Y_{\text{микро}}=-(\Delta S/k)\log_2 e=-1{,}44\,\Delta S/k \qquad (27)$$

$Y_{\text{микро}}$ – огромное число, ибо k=1,38 10^{-23} Дж/К ($\Delta S<0$), $Y_{\text{макро}}<<-(\Delta S/k)\log_2 e$. Запоминание – процесс макроскопический и диссипативный, он сопровождается большим изменением энтропии. В случае макроинформации число устойчивых состояний системы, n, невелико. В случае микроинформации полное число микросостояний (неустойчивых, то есть микроскопических), n, огромно.

В реальной жизни всегда используется макроинформация, которую называют просто информацией.

Любое изменение макроинформации, увеличение или уменьшение, сопровождается ростом энтропии, что естественно, поскольку эти процессы необратимы. Количественной связи между изменениями макроинформации и термодинамической энтропии не существует. Энергетическая цена макроинформации определяется энергией, диссипирующей в процессе запоминания и зависит от конкретных условий, в частности от

времени на которое информацию нужно запомнить, то есть от свойств ячейки памяти. Эта энергия, приходящаяся на один бит информации, заведомо (и много) больше $kT/1{,}44$ – энергии одного бита микроинформации.

В теории информации важную роль играет ансамбль X_2, который состоит всего из двух элементов x_1 и x_2, каждый из которых возникает с вероятностью $w(x_1)=p$ и $w(x_2)=1-p$ соответственно ($0 \le p \le 1$). Энтропия такого ансамбля

$$H(X_2) \equiv H(p) = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p) \qquad (28)$$

носит название двоичной энтропии.

Очевидно, что двоичная энтропия обладает симметрией относительно значения $p=1/2$, т.е. $H(p)=H(1-p)$. Легко проверить, что максимальное значение двоичной энтропии $H_{max}=\ln 2$ достигается при $p=1/2$, минимальное – $H_{min}=0$ – при $p=0$ и $p=1$. При увеличении p величина энтропии возрастает вплоть до $p=0{,}5$, а затем падает до нуля. Максимум энтропии достигается тогда, когда все исходы равновероятны.

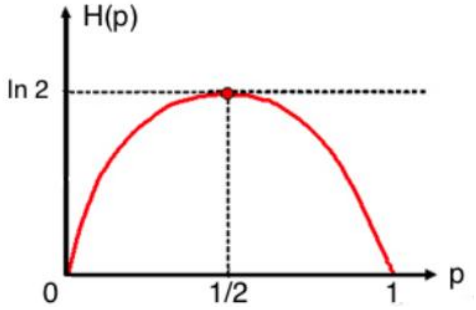


Рис. 3. Зависимость энтропии Шеннона от вероятности события.

Из графика видно, что двоичная энтропия является вогнутой функцией (то есть любая прямая, соединяющая две точки на графике лежит ниже графика самой функции $H(p)$). Отсюда $H(px_1+(1-p)x_2) \ge pH(x_1)+(1-p)\,H(x_2)$. Равенство достигается только если $x_1=x_2$ или $p=0$, или $p=1$. Данное свойство называется вогнутостью двоичной энтропии.

Энтропия Шеннона количественно характеризует произвольное распределение какого-либо параметра системы – энергии, скорости, числа атомов в разных состояниях возбуждения и др. Если в системе происходят какие-либо изменения, то меняются распределения ее параметров. Соответственно, изменяется и величина энтропии. В этом смысле энтропия Шеннона является функцией состояния системы, так как количественно характеризует меру неопределенности значений параметров.

Количество информации, передаваемое в сообщении, тесно связано с мерой неопределенности передаваемых символов. Чем больше число способов (микросостояний), с помощью которых, можно реализовать тождественно одну и ту же макроскопическую систему (объект), тем однозначнее и точнее она определена, тем больше информации о ней отражает факт её существования. Энтропия – мера беспорядка в том смысле, что чем больше энтропия объекта, тем меньше его существование зависит от деталей микросостояний, т. е. этот объект воспроизводим в природе тем точнее, чем больше число ответственных за него равновероятных микросостояний. Интуитивно такая неопределённость ассоциируется с понятием о беспорядке.

Энтропия является **косвенной** мерой порядка системы; чем выше энтропия, тем более равномерно и случайным образом распределены компоненты системы. Чтобы как-то связать энтропию с беспорядком, а информацию с порядком вводятся понятия неслучайной и случайной информации. Тогда энтропия – мера количества случайной информации, вводимой в случайный процесс (она тесно связана с числом возможностей случайного процесса). Общий объём информации равен сумме количества случайной информации и количества неслучайной информации. Чем больше случайной информация находится в системе, тем выше энтропия системы.

В результате получения сведений неопределенность случайного объекта может быть только уменьшена. Поэтому количество информации измеряют уменьшением энтропии того объекта или системы, для уточнения состояния которого предназначены сведения. Если состояния объекта обладают различными вероятностями, информации от разных сообщений неодинаковы: наибольшую информацию несут сообщения о тех состояниях, которые априори были наименее вероятны. Например, сообщение о том, что в

Москве в прошлом году не было землетрясения, несёт меньше информации, чем сообщение, что оно было.

Часто можно встретить утверждение о том, что информация – мера упорядоченности.

Здесь нужно уточнить, какая именно информация (ценная или нет, условная или безусловная) имеется в виду, а также, что понимается под словом «порядок». В действительности в приведенном утверждении неявно предполагается, что информация ценная, но в этом случае она наверняка условная, ибо зависит от цели. Понятие «порядок» тоже целесообразно. Так, если цель – прогноз, то упорядоченными следует считать системы, развивающиеся устойчиво и допускающие предсказание результатов. Именно в этом смысле в физике хаотические системы считаются беспорядочными и энтропия здесь выступает как мера беспорядка.

На практике часто встречаются физические системы, аналогичные непрерывным случайным величинам. Состояния таких систем нельзя перенумеровать и каждое отдельное состояние имеет вероятность, равную нулю. Такие системы называют непрерывными системами, в отличие от рассмотренных выше дискретных систем.

Информационная энтропия **непрерывной одномерной случайной величины** x с функцией распределения $f(x)$:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\log_2 f(x)dx \ бит; \quad \int f(x)dx = 1 \tag{29}$$

где $f(x)$ – плотность распределения сигнала непрерывного источника как случайной величины.

Дифференциальная энтропия – формальное обобщение понятия информационной энтропии Шеннона для случая непрерывной случайной величины. В теории информации интерпретируется как средняя информация непрерывного источника.

Дифференциальная энтропия неинвариантна к преобразованию координат случайной величины и не имеет самостоятельного смысла. Если случайная величина имеет размерность, то функционал дифференциальной энтропии будет некорректен с точки зрения размерности (поскольку под знаком логарифма оказывается размерная величина). Однако разность дифференциальных энтропий двух случайных величин, распределенных на одном интервале, является безразмерной величиной и совпадает с разностью их энтропий (энтропия любой непрерывной случайной величины бесконечна).

Полная взаимная информация системы (A,B):

$$Y_{A\to B} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(a,b)\log\left(\frac{f(a,b)}{f_1(a)f_2(b)}\right)dadb \tag{30}$$

Полная взаимная информация, как и в случае дискретных систем, есть неотрицательная величина, обращающаяся в нуль только тогда, когда системы A и B независимы.

Условная дифференциальная энтропия величины Aпри заданной величине B:

$$H(A \mid B = b) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_{AB}(a)\log_2 f_{A|B}(a)da \tag{31}$$

Безусловная и условная дифференциальные энтропии могут быть как положительными, так и отрицательными величинами, а также могут быть равны бесконечности.

Остановимся на понятии условной энтропии несколько подробнее.

Если две случайные величины A и B, каким-то образом связанные друг с другом (например, на входе и выходе какой-то системы), то знание одной из них, очевидно уменьшает неопределенность значений другой. Остающаяся неопределенность

оценивается условной энтропией. Так, условная энтропия A при условии знания B определяется как:

$$\sum_{k=1}^{K} p(B_k) \sum_{i=1}^{N} p(A_i \mid B_k) \log p(A_i \mid B_k), \quad (32)$$

где $p(A_i|B_k)$ – условные вероятности (вероятность i-го значения A при условии $B=B_k$), диапазоны изменчивости A и B (соответственно N и K) не обязательно совпадают.

Чтобы рассчитать $H(A|B)$, находят K энтропий A, соответствующих фиксированному B_k и затем суммируют результаты с весами $p(B_k)$. Очевидно, условная энтропия меньше безусловной, точнее: $0 \le H(A|B) \le H(A)$. Нижняя грань соответствует однозначной зависимости A от B, верхняя – полной независимости.

Информация определяется разностью между безусловной и условной энтропиями. Это уменьшение неопределенности “знания чего-то за счет того, что известно что-то”. При этом замечательно, что информация Y симметрична, т.е. $Y_{AB}=Y_{BA}$:

$$Y_{AB}=H(A)-H(A|B)=H(B)-H(B|A)=Y_{BA}. \quad (33)$$

Информация всегда неотрицательна; она равна нулю, когда A и B независимы; информация максимальна и равна безусловной энтропии, когда между A и B имеется однозначная зависимость. Таким образом, безусловная энтропия – это максимальная информация, потенциально содержащаяся в системе. Зависимость однозначная, но не взаимно-однозначная: несмотря на симметрию, верхние грани Y_{AB} и Y_{BA} отличаются: $0 \le Y_{AB} \le H(A)$, $0 \le Y_{BA} \le H(B)$.

К сожалению, зная количество информации, нельзя написать уравнение связи переменных (тогда как корреляция позволяет легко переходить к регрессии). Можно определить совместную энтропию A и B по их двумерному распределению. При этом:

$$H(AB)=H(A)+H(B|A)=H(B)+H(A|B). \quad (34)$$

Аддитивность и субаддитивность – характеристики отношений между целым и его частями. Аддитивность – такое отношение , при котором свойствам целого полностью определяются свойствами частей («целое равно сумме частей»); Субаддивность (неаддитивность) – отношение, при котором целое не определяется его частями, так что оно не может быть познано и объяснено на основе одного лишь знания о его частях («целое больше суммы его частей»).

Энтропия **субаддитивна**, **аддитивность** ($H(AB)=H(A)+H(B)$) достигается только при полной независимости A и B. С помощью совместной энтропии можно написать выражение для информации $Y_{AB}=Y_{BA}=Y$ в симметричном виде:

$$Y=H(A)+H(B)-H(AB). \quad (35)$$

Включение в рассмотрение третьей переменной может лишь увеличить информацию:

$$Y(AB)C \ge Y(AC),\ Y(AB)C \ge Y(BC). \quad (36)$$

Симметрия случая трёх переменного описывается формулой тройной информации:

$$Y(AB)C+Y(AB)=Y(BC)A+Y(BC)=Y(AC)B+Y(AC). \quad (37)$$

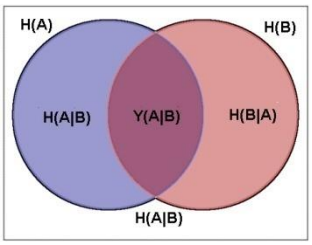


Рис. 4. Наглядная связь между различными энтропиями и взаимной информацией

Для дифференциальной энтропии справедливы равенства, аналогичные для энтропии дискретного источника:

$H(A) \ge H(B|A)$ (для независимых источников — равенство)

$$H(A,B)=H(A)+H(B|A)=H(B)+H(A|B) \quad (38)$$

Очевидно, что можно узнать больше информации о наборе A, если известна информация о наборах B и C, которые каким то образом связанны с набором A (например, при помощи совместных распределений вероятностей или найденных на опыте эмпирических корреляций), чем когда известна информация только об одном таком наборе B. В силу соотношения между энтропией и информацией для условной энтропии

должно иметь место обратное неравенство $H(A|B,\ C)\leq H(A|B)$. Распишем правую и левую части данного неравенств согласно определению условной энтропии. Имеем

$H(A|B,\ C)=H(\text{A},\ B,\ C)-H(B,\ C)$ и $H(A|B)=H(A,\ B)-H(B)$. (39)

Отсюда немедленно получаем свойство сильной субаддитивности для энтропии Шеннона

$H(\text{A},\ B,\ C)+H(Y)\leq H(\text{A},\ B)+H(\text{B},\ C)$.

Энтропия используется как характеристика статистического распределения.

Энтропия биноминального распределения:

$$H(X)=-\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}\log\left(C_n^m p^m q^{n-m}\right)=-\sum_{m=1}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}\log C_n^m - n\left(p\log p+q\log q\right) \quad (40)$$

Дифференциальная энтропия распределений с определённой фиксированной дисперсией σ^2 максимальна в случае гауссова распределения плотности вероятности сигнала непрерывного источника как случайной величины (нормальное распределение):

$$H(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\log\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right) \quad (41)$$

При натуральном логарифме для распределения Гаусса:

$$H(X)=\frac{1}{2}\frac{\ln\left(2\pi\sigma^2 e\right)}{\ln 2}\ \text{бит} \quad (42\text{а})$$

Для равномерного распределения:

$$H(X)=\frac{\ln\left(2\sqrt{3}\sigma\right)}{\ln 2}\ \text{бит} \quad (42\text{б})$$

Для распределения Лапласа

$$H(X)=\frac{\ln\left(\sqrt{2}\sigma e\right)}{\ln 2}\ \text{бит} \quad (42\text{в})$$

Замечание 1. В энтропийных единицах плата за полученные сведения невелика: каждый бит (бит- минимальная единица измерения информации) стоит всего $2{,}5\cdot10^{-24}$ калорий на градус.

Замечание 2. Широкая популярность формул типа $S\sim k\Sigma p\log(p)$ в разных областях связана с особой ролью степенных законов в природе . Для таких случаев выражение $p\log(p)$ является удобной аддитивной мерой. Удобной в плане нашего восприятия количества чего бы то ни было – информации, хаоса, нелокальности, интенсивности света звезды и так далее. Ведь наши органы чувств работают по логарифмическому закону Вебера–Фехнера: интенсивность ощущения пропорциональна логарифму интенсивности стимула. С этой точки зрения, энтропия, выражаемая формулой типа $S\sim p\Sigma\log(p)$ – удобная для нашего восприятия абстрактная аддитивная мера. Ее физический смысл зависит от того, что именно мы оцениваем, то есть тем, на каких данных и как мы определяем аргумент p – плотность вероятности. Основание логарифмов несущественно и выбирается из соображений удобства для той или иной задачи.

Если для величин x_l существуют два различных набора вероятностей $P=\{x_l,p(x_l)\}$ и $Q=\{x_l,\text{q}(x_l)\}$, где $0\leq p(x_l)\leq 1$, $0\leq q(x_l)\leq 1$ и $\sum_{\partial=1}^{N}p(x_l)=\sum_{l=1}^{N}q(x_l)=1$, то **относительной энтропией** распределения P относительно распределения Q называется величина

$$H(P\parallel Q)=-\sum_{L=1}^{n}p(x_l)\ln q(x_l)-H(P)=\sum_{l=1}^{N}p(x_l)\ln\left(\frac{p(x_l)}{q(x_l)}\right) \quad (43)$$

Это – метрика Кульбака-Лейблера (см. далее).

$H(P||Q)$ – мера различия двух вероятностных распределений одного и того же набора величин $\{x_l\}$.

Относительная энтропия неотрицательна, т.е. $H(P|\ Q)\geq 0$. Это – неравенство Гиббса.

Неравенство Гиббса используется для исследования свойств многих энтропийных величин.

Из рассмотренного до сих пор текста следует, что существуют три способа введения понятия энтропия. В термодинамике – это функция состояния (Клаузиус) и мера беспорядка (Больцман). В теории информации – мера достоверности передаваемой по каналу связи информации (Шеннон). Сходство S и H в том, что стремление к равновероятности (однородности) состояний системы увеличивает обе энтропии. Но в энтропии Больцмана нет верхнего предела S: чем больше W, тем выше S. У Шеннона H_{max}=1.

Между энтропиями Больцмана, Клаузиуса и Шеннона существуют следующие различия:

1. Энтропия Больцмана является мерой беспорядка, хаотичности, однородности молекулярных систем.
2. Энтропия Клаузиуса пропорциональна количеству связанной энергии, находящейся в системе, которую нельзя превратить в работу.
3. Энтропия Шеннона количественно характеризует достоверность передаваемого сигнала и используется для расчёта количества информации.

Энтропия Больцмана–Гиббса–Шеннона, наряду с её традиционной ролью в статистической теории и теории информации, служит также мерой относительной степени упорядоченности в процессах самоорганизации. Важно, что энтропия – мера разнообразия, необходимого для естественного отбора в процессах биологической эволюции.

Теория информации основана на вероятностных, статистических закономерностях явлений. Она дает полезный, но не универсальный аппарат. Поэтому множество ситуаций не укладываются в информационную модель Шеннона. Не всегда удаётся заранее установить перечень всех состояний системы и вычислить их вероятности. Кроме того, в теории информации рассматривается только формальная сторона сообщения, а смысл его остается в стороне. Понятия «вероятность», «неопределенность», с которыми связано понятие информации, предполагают процесс выбора. Этот процесс может быть осуществлен только при наличии множества возможностей. Без этого условия передача информации невозможна.

Замечание. Классическая теория информации позволяет решать важные практические задачи (например, в теории связи при кодировании речи или изображений). Однако её аппарат не универсальный, и множество ситуаций не укладывается в шенноновскую модель. Не всегда можно заранее (до сообщения) установить перечень возможных состояний системы и вычислить их вероятности. Основным недостатком теории информации является то, что она, занимаясь только формальной ("знаковой" или "буквенной") стороной сообщений, оставляет в стороне их *ценность*, вообще *содержание*.

Большое значение имеет знак изменения энтропии со временем. Если $dH/dt>0$, то система релаксирует, то есть стремится к своему наиболее вероятному состоянию с максимумом энтропии. В случае временного ряда это стремление к белому шуму. Если же $dH/dt<0$, то система находится на фазе самоорганизации, в ней возникает и развивается некая упорядоченность. В случае временного ряда это стремление к $f(t)=const$.Если же $dH/dt\sim0$, то система находится в фазе стагнации или/и, возможно, бифуркации. Иными словами, определив знак и величину изменения энтропии, мы можем судить о темпах, фазе и направлении эволюции системы в текущий момент.

7.3 Отрицательная энтропия, антиэнтропия, экстропия

Поскольку энтропия в каком-то смысле отражает беспорядок в системе, то имеет смысл что-то ей противопоставить в плане оценки порядка в той же системе. Таких попыток было много, но, как ни странно, до сих пор ни одну из них нельзя считать удачной.

Важным направлением противостояния было введение понятий отрицательной энтропии (негэнтропии или экстропилии).

Негэнтропия – термин, образованный добавлением отрицательной приставки нег- к понятию энтропия, и обозначающий его противоположность. Она означает меру упорядоченности и организованности системы или качество имеющейся в системе энергии. Используется для обозначения величины, математически противоположной к величине энтропии. Используется в философии, в науках об обществе, в общественных науках, в физике и химии не применяется. Непрерывно предпринимаются попытки заменить этот термин на синэтропию, анитиэнтропию и т.п.

Впервые понятие «отрицательной энтропии» предложил в 1943 австрийский физик Э.Шредингер в популярной книге «Что такое жизнь?». В ней он пытался продолжить идеи своего коллеги Нильса Бора о глубокой связи физических и философских законов, согласно которым сформулированный Бором принцип дополнительности мог объединить общечеловеческие знания до простого понимания единства мира. Под отрицательной энтропией Шредингер понимал "свободную энергию", описание которой впрочем, он так и не дал. Его занимал вопрос, как живая система экспортирует энтропию, чтобы поддержать свою собственную энтропию на низком уровне: живая система импортирует негэнтропию для самосохранения.

Шредингер категорически возражал против примитивного трактования метаболизма как основы жизни.

"Представляется нелепостью, чтобы главным был именно обмен веществ. Любой атом азота, кислорода, серы и т. п. так же хорош, как любой другой атом того же элемента. Что же достигается их обменом? Одно время наше любопытство удовлетворялось утверждением, что мы питаемся энергией. В ресторанах некоторых стран вы могли бы найти карточки-меню, указывающие цену каждого блюда и содержание в нем энергии (калорий). Нечего и говорить, что это нелепость, ибо во взрослом организме содержание энергии так же постоянно, как и содержание материи. Каждая калория, конечно, имеет ту же ценность, что и любая другая, поэтому нельзя понять, чему может помочь простой обмен калорий. Каждый процесс, явление, событие, все, что происходит в Природе, означает увеличение энтропии в той части Вселенной, где это имеет место. Так и живой организм непрерывно увеличивает свою энтропию, или, иначе, производит положительную энтропию и, таким образом, приближается к опасному состоянию максимальной энтропии, представляющему собой смерть. Он может избежать этого состояния, то есть оставаться живым, только постоянно извлекая из окружающей его среды отрицательную энтропию, которая представляет собой нечто весьма положительное, как мы сейчас увидим. Отрицательная энтропия – это то, чем организм питается. Или, чтобы выразить это менее парадоксально, существенно в метаболизме то, что организму удается освобождаться от всей той энтропии, которую он вынужден производить, пока он жив".

Разъясняя механизм задержки перехода живого организма к термодинамическому равновесию (т. е. к смерти), неуклюжее выражение "отрицательная энтропия" Шредингер заменяет выражением "энтропия, взятая с отрицательным знаком, которая "есть сама по себе мера упорядоченности". Человеческий организм может противостоять смерти, лишь поддерживая себя на достаточно высоком уровне упорядоченности. Для этого ему нужно извлекать упорядоченность из окружающей среды, дабы компенсировать энтропийные процессы, идущие в клетках. Вот почему живой организм не может питаться химическими веществами в первозданном виде, то есть – находящимися на низкой стадии упорядоченности. Нам для питания необходимо крайне хорошо упорядоченное состояние материи в более или менее сложных органических соединениях.

Замечание. Здесь уместно вспомнить сформулированный Бауэром ещё в 1935 «Всеобщий закон биологии»: Живыми называются такие системы, которые способны самостоятельно поддерживать и увеличивать свою очень высокую степень упорядоченности в среде с меньшей степенью упорядоченности. Такие процессы являются процессами с отрицательной энтропией (негэнтропийными процессами).

Трудно сказать, что дала отрицательная энтропия биологии, остальные науки она никак не заинтересовала.

Н. Винер предложил: Y=-Э, где Э – энтропия, т.е. количество информации в системе есть мера упорядоченности, или организованности, системы, так же как энтропия системы есть мера дезорганизованности, или неупорядоченности, системы, и одно равно другому с отрицательным знаком. Однако это выражение невозможно, так как по определению обе величины и Y>0 и Э>0. О путанице со знаком писал ещё У.Р. Эшби ("Введение в кибернетику").

В 1956 американский физик Л. Бриллюэн в работе «Научная неопределенность и информация» сократил термин «отрицательная энтропия» до слова негэнтропия и ввёл его в таком виде при помощи негэнтропийного принципа информации в теорию информации: «информация представляет собой отрицательный вклад в энтропию». Он, рассматривая деградацию качества энергии в замкнутой системе как следствие возрастания в ней энтропии, для краткости отрицательную энтропию стал называть негэнтропией, говоря, что «эта негэнтропия представляет собой, в конечном счете, качество энергии». Л.Бриллюэн обосновал, что процесс получения информации в физических опытах сопровождается уменьшением негэнтропии и сделал вывод, что «негэнтропия эквивалентна информации».

Бриллюэн считал, что информацию следует рассматривать как отрицательное слагаемое энтропии системы; информация есть негэнтропия, поэтому информация и энтропия должны рассматриваться совместно и не могут рассматриваться порознь, т.е. $Y+H=const$, причём некоторые считают, $const$=1.

Замечание. Подобный подход вызвал многочисленные возражения, т.к. тут имеет место искажение второго начала термодинамики. Информация – процесс, поэтому его количественную меру (Y) нужно сравнивать не с функцией состояния, например с энтропией (H), а лишь с ее приращением (ΔH) или убылью ($-\Delta H$), подобно тому, как количество переданного тепла связано не с его внутренней энергией, а лишь с изменением (приращением) внутренней энергии. Между появлением информации (ΔY) и убылью энтропии ($-\Delta H$) имеется соответствие, но отнюдь не количественная связь. Очевидно, что одна и та же по количеству информация может отвечать разным изменениям энтропии. К примеру, замена в светофоре красного сигнала на зеленый, чему соответствует получение водителями одного бита информации, меняет поток транспорта на магистрали. При этом изменение энтропии может быть совершенно различным в зависимости от числа машин в потоке. При этом по сравнению с количеством полученной информации последствия получения информации несоизмеримо велики. Такая ситуация часто реализуется в биологических системах. Информации некорректно приписывать энтропийный или негэнтропийный смысл.

Судя по всему, закона сохранения суммы энтропии и информации не существует. Тем более нельзя использовать формулу $Y+H$=1, представленную во многих учебниках по информатике.

Энтропия есть мера недостатка информации о системе. Бриллюэн различал свободную (случайную) информацию и связанную информацию, и считал, что "только связанная информация" будет представлять негэнтропию, т.е. он не приписывал любой информации свойства негэнтропии, относя это свойство лишь к связанной информации.

Как уже упоминалось при рассмотрении энтропии Больцмана, каждому одному макросостоянию системы соответствует огромное число W микросостояний, определение которых означает, что в любой данный момент времени и в конкретных условиях известны координаты и импульсы всех микроэлементов, входящих в систему. Бриллюэн, вводя понятия о негэнтропии, полагал:

1. Все W микросостояний, соответствующие одному макросостоянию, имеют одинаковую априорную вероятность.
2. Знать хотя бы одно микросостояние системы – это значит знать о системе всё.

3. Рассматриваются только микросостояния реальных физических систем, то есть термин энтропия имеет обычный физический смысл.

Пусть имеется W_0 различных возможных исходов для событий с одинаковыми априорными вероятностями p_0. Для уменьшения числа возможных случае до W_1 (увеличения вероятностей до p_1) требуется информация Y_1. Бриллюэн получил (например, для газа), определение количества информации в виде:

$$Y = k\ln\frac{W_0}{W_1} = -k\ln\frac{p_1}{p_0} = -k(\ln p_1 - \ln p_0) = k(\ln p_0 - p_1) = S_0 - S_1 \quad , \qquad (44)$$

Информация в физической системе равна изменению её энтропии:

$S_1=S_0-Y$. (45)

Здесь в отличие от теории информации Шеннона введён размерный множитель k в виде постоянной Больцмана. Этим множителем информация по Хартли для физических задач отличается от информации в классической теории информации. Если все микросостояния равновероятны, то при $W_1=W_0$ количество информации в физической системе равно нулю. Система у Бриллюэна открытая. Логарифмическая мера уменьшения за счёт взаимодействия с окружением числа микростояний $W_1<W_0$ есть информация, полученная системой извне. Смысл негэнтропийного принципа деградации Л. Бриллюэна – получение некоторой информации о системе требует не меньшего увеличения энтропии системы. Но, похоже, что детерминизм природы исключает возможность приписать максимуму энтропии нулевую информацию, как это делает Бриллюэн. Согласно негэнтропийному принципу информации, её получение можно представить в виде формулы: Связанная информация=убыванию энтропии S=увеличение негэнтропии N.

Здесь негэнтропия определена как отрицательная энтропия. Это положение составляет негэнтропийный принцип информации. Энтропия убывает с получением информации, уменьшающей число микросостояний и эта информация должна доставляться внешним агентом, энтропия которого будет возрастать.

Замечание. Бриллюэн не выражал информацию через отрицательные величины, через отрицательную величину он выражал только негэнтропию (негэнтропия – отрицательная энтропия, где энтропия – мера недостатка информации).

Для характеристики степени порядка материальных объектов часто используют энтропию как неупорядоченность и негэнтропию, т.е. связанную информацию как упорядоченность. В наше время негэнтропия употребляется в двух значениях: как количество информации, равное разности между начальной (до получения сообщения) и конечной (после получения сообщения) энтропий, и как величина, противоположная энтропии, выражающая упорядоченность материальных объектов. Вводится термин негэнтропия отражения, под которым понимается информация о «чём-либо», отраженная через «что-либо».

Негоэнтропия не прижилась ни в физике, ни в химии, но она пригодилась в науках о жизни. Она противоположна энтропии и имеет отношение к живым системам – к тому, что более упорядочено и более определённо в сравнении с системами косной материи. Жизнь, как полагают, является негэнтропичной, потому что потребляет то, что имеет меньшую упорядоченность (мёртвая пища) и превращает это в то, что имеет большую упорядоченность (клетки в теле, тканях и органах). При этом возрастает температура. Внешняя сторона живой системы, или кожа организма, всегда имеет максимальную энтропию в теле, потому, что она удаляет тепло. Известны способы измерения негэнтропии, отличные от измерения тепла, исходящего от тела. Живые существа, ищущие с целью выживания эти способы, создают модели, которые более упорядочены, чем то, что измеряется, эти модели объединяются, обдумываются, возникающая в итоге наука негэнтропична как любая часть жизни. Идея, что живые существа упорядочивают вселенную, называется человеческим принципом.

Биологическая клетка стремится сохранить свою негэнтропию (организацию, структуру, форму, функции), и всё это благодаря потреблению энергии извне. Для мёртвой клетки характерно отсутствие негэнтропии, когда клетка распадается, прекращая своё существование. Это не противоречит второму началу термодинамики, которое разрешает переход к большему порядку при условии импорта энергии извне клетки — открытой системы, включенной в более крупные системы. В более широком масштабе, планета Земля также не является замкнутой системой: она получает энергию, в основном лучистую солнечную энергию и энергию Вселенной. Солнечная энергия поступает в виде упорядоченного (видимого и радиационного ультрафиолетового) света, в то же время повторно излучаемые энергии является более беспорядочными (инфракрасный свет). Это позволяет системам на Земле не превращаться в формы с большей неупорядоченностью (второй закон термодинамики хорошо подтверждается, только если принимать во внимание роль Солнца, в том числе в эволюции жизни). Если рассматривать человеческое общество с точки зрения энтропии (дезорганизации) и негэнтропии (организации), его эволюция происходит на основе баланса между этими двумя тенденциями. Негэнтропийные процессы ведут к гибкости и политическому фундаментализму, а энтропийные – к высокой степени беззаконий.

В теории информации и статистике, дифференциальная негэнтропия используется как мера отклонения от нормальности. Рассматривают сигнал с некоторым распределением. Сигнал называют гауссовским, если он имеет нормальное распределение. Дифференциальная негэнтропия сигнала всегда неотрицательна, инвариантна при любых линейных обратимых преобразованиях координат и исчезает, если и только если сигнал является гауссовским.

Дифференциальная негэнтропия определяется как

$$J(p_x) = S(\phi_x) + S(p_x) \qquad (46)$$

где ϕx имеет гауссовскую плотность с тем же самым средним и дисперсией как p_x, а S(p,x) —дифференциальная энтропия:

$$S(p_x) = -\int p_x(u)\log p_x(u)\mathrm{d}u \qquad (47)$$

Дифференциальная негэнтропия используется в статистике и обработке сигналов, имеет отношение к сетевой энтропии, которая используется в независимом компонентном анализе. Интуитивно дифференциальная негэнтропия понимается как информация, которая может быть сохранена, если представить p_x эффективным способом; а ϕ_x – случайная величина (с гауссовским распределением) с тем же самым средним и дисперсией, которая нуждается в максимальной длине данных для представления самым эффективным способом. Поскольку p_x менее случайна, то кое-что о ней известно заранее, она содержит меньше неизвестной информации и нуждается в меньшей длине данных для представления самым эффективным способом.

Сейчас полагают, что суммарное количество информации j-го состояния пространства или соответствующей области, возникающие в любом процессе, всегда является постоянным:

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j + \sum_{j=1}^{n} H_j = const \qquad (48)$$

где Y_j – информация j-го состояния; j – одно и тоже j-е состояние (процесс), для которого замеряется и количество информации, и количество энтропии.

Впрочем, похоже, что эта формула противоречит второму закону термодинамики.

Предпринимались неоднократные попытки заменить термин негэнтропия каким-то другим.

А. Сент-Дьёрди предложил заменить термин негэнтропия на синтропия (термин предложен в 1940 итальянским математиком Л.Фантаппие), который пытался объединить биологический и физический мир. При описании процессов в самоорганизующихся системах процесса иногда используются термины экстропия и эктропия.

Экстропия (порядок – антоним к слову энтропия) – дополнительная двойственная функция к энтропии:

$$Y = -\sum_{i=1}^{N}(1-p_i)\cdot\log(1-p_i) \qquad (49)$$

Сравнив с формулой Шеннона, получим: энтропия ≥ экстропии.

Термин экстропия в философском контексте мера развитости интеллекта, функционального порядка, жизненности, энергии, опыта, стремления к развитию и росту биологической или организационной системы. В метафорическом смысле, экстропия - полная противоположность энтропии.

Экстропия – термин, введённый Т. Беллом и определенный М.Морром, как степень живучести или организованности системного интеллекта, функционального порядка, живучести, энергии, жизни, опыта, способности и двигателя совершенствования и роста; выражает скорее метафору, чем служит техническим термином; тотально противоположна энтропии; философия экстропии, М. Мора – философия трансгуманизма. В философии цифровой вероятностной физики, экстропия физической системы определяется для некоторого момента времени как самоинформация марковской вероятности физической системы, как марковской цепи; вводится для того, чтобы отличить вероятность марковского состояния физической системы от вероятности, которая определяется энтропией и ансамблями эквивалентных микросостояний.

На основе экстропии возникло учение экстропианцев, которые верят, что экстропия – способ, при помощи которого Вселенная заставляет ракету эволюции лечь на курс и полететь вперёд. Отвечая за рост секвой и готических соборов, сила экстропии создаёт новизну, порождает сложность, производит информацию и посылает нас выше, дальше и сильнее. Это импульс возможности, который преодолевает навязчивые циклические законы материи и энергии и проявляет себя в человеческой жизни как разум, наука, технология и всеобщая тяга к эволюционному процессу, заставляющая людей усваивать новый опыт, преодолевать физические и психологические барьеры, усиливать способности интеллекта и мечтать о будущих возможностях. И все это – содержание повседневной жизни экстропианцев. Избавившись от барьеров, налагаемых нашим природным наследием, мы используем свой эволюционный дар разумного, эмпирического сознания для того, чтобы преодолеть границы нашей человечности, последовательно пройдя трансчеловеческую и постчеловеческую стадии

Были попытки внедрить и термин антиэнтропия.

Антиэнтропия – это структурированная и упорядоченная величина обратно пропорциональная энтропии (*Y*=1/*H*), характеризующая степень неопределенности системы.

Антиэнтропийный признак наблюдается субъектом в виде сохранения краткосрочного или долгосрочного порядка (сопротивление процессам разрушения) . Антиэнтропийный признак может быть пассивным – сопротивление процессам разрушений в виде силового удержания связей в ранее сформированном порядке (вся неживая материя – свойство пассивного самосохранения). Может быть активным – активный поиск новых способов сохранения ранее сформированного порядка (вся живая материя – свойство активного самосохранения).

Антиэнтропия, как явление сохранения связей между составляющими во времени, нас интересовать не будет.

Удельная антиэнтропия – количественная характеристика структурной сложности (степени организованности) систем вида A_mB_n ... C_z, где A, B, ..., C – различные типы элементов, а m, n,...z – количества, которыми представлен каждый тип удельной энтропии. Она обратно пропорциональна энтропии

$$S_{\text{ант}} = \frac{N}{H} \text{ бит}^{-1}, \qquad (50)$$

где N – общее количество элементов в системе ($N=m+n+...+z$); H – шенноновская энтропия $-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$ (p_i – вероятности элементов каждого типа при $p_A+p_B+...+p_C=1$, например: $p_A=m/N$). В качестве систем вида $A_mB_n...C_z$, могут быть представлены разнообразные геологические объекты, например, химические составы горных пород по данным силикатного анализа (как совокупности атомов различных химических элементов), виды симметрии (как совокупности элементов симметрии), геологические разрезы (как совокупности слоев) и т. д. Величина удельной антиэнтропии может быть применена для сравнения структурной сложности систем в пределах единых структурных уровней. Она является обратной величиной по отношению к удельной энтропии, применяемой при решении некоторых кибернетических задач (энтропия, приходящаяся на одну букву многобуквенного текста). Единица измерения удельной антиэтропии бит$^{-1}$. При обычном сравнении систем по величине H учитывается только сложность дифференциации (относительная неравномерность распределения элементов различных типов; H максимальна при равномерном распределении). Употребление удельной антиэнтропии даёт возможность, кроме того, учитывать и изменения сложности интеграции (сложности полимеризации), понимаемые в узком смысле как изменения общего количества элементов в устойчивых совокупностях – системах.

Энтропия — это то, как много информации вам не известно о системе
Марк Айхенлау

7.4 Алгоритмическая теория информации

В математике проявляется тесная связь между случаем и энтропией: чем более случайной является система, тем больше у нее энтропия. Рассмотренный ранее вероятностный подход к определению количества информации не является единственным, известны и другие способы измерения получаемой, обрабатываемой и передаваемой информации. Помимо вероятностной меры информации и энтропии информации, есть ещё и алгоритмическая мера информации.

Алгоритмическая теория информации – область информатики, определяющая сложность, используя инструменты из теоретической информатики.

Значительный прогресс в понимании взаимоотношений информатики и энтропии и их роли в неравновесной термодинамике внесли работы А.Н.Колмогорова, отдельно и с соавторами.

7.4.1 Энтропия Колмогорова

А.Н. Колмогоров превратил техническую теорию информации Шеннона в полноценную науку, строия её на другой аксиоматике, чем Шеннон. Он распространил понятие энтропии на эргодические случайные процессы через предельное распределение вероятности, имеющее плотность $f(x)$. Колмогоров использовал понятие шенноновской энтропии при определении нового метрического инварианта сохраняющих меру преобразований вероятностных пространств, играющего фундаментальную роль в эргодической теории. Это определение было усовершенствовано Н.С. Крыловым и Я.Г. Синаем. Предложенная этой школой энтропия называется по-разному: энтропия Крылова-Колмогорова-Синая, КС-энтропия, К-энтропия, энтропия Колмогорова, а-энтропия и АГ-энтропия.

КС-энтропия ($S_К$) – характеристика хаотического движения в фазовом пространстве произвольной размерности; определяет среднее время, на которое можно предсказать состояние системы с динамическим хаосом. Вычисляется по формуле Шеннона.

КС-энтропия используется для определения является ли исследуемый режим хаотическим или регулярным; это количественная мера хаотичности и неустойчивости.

Колмогоров распространил понятие энтропии на **эргодические случайные процессы**.

Эргодичность – свойство некоторой динамической системы, состоящее в том, что в процессе эволюции почти каждое состояние с определённой вероятностью проходит вблизи любого другого состояния системы. Система, в которой фазовые средние совпадают с временными, называется эргодической. Преимущество эргодических динамических систем в том, что при достаточном времени наблюдения такие системы можно описывать статистическими методами. Для эргодических систем математическое ожидание по временным рядам совпадает с математическим ожиданием по пространственным рядам, т.е. для расчёта параметров системы можно долго наблюдать за поведением одного её элемента, а можно за очень короткое время рассмотреть все её элементы (или достаточно много элементов). В обоих случаях получатся одинаковые результаты, если система обладает свойством эргодичности.

Для символических динамических систем, т.е. сдвигов в пространствах последовательностей с конечным алфавитом, энтропия Колмогорова-Синая – это средняя условная энтропия настоящего при условии прошлого для стационарного случайного процесса (в другой терминологии – скорость создания информации источником). С геометрической точки зрения КС-энтропия рассматривается как скорость роста объёма границы множества в фазовом пространстве под действием динамики.

Пусть имеется динамическая система, которая задаётся обыкновенными уравнениями:

$$\dot{x} = f(x),\ x(0)=x_0 \qquad (51)$$

где x – N-мерный вектор состояний.

Выберем в фазовом пространстве в начальный момент t=0 две близкие фазовые точки x_1 и x_2, проведём из них траектории ($x_1(t)$ и $x_2(t)$) и проследим, как при эволюции системы (40) будет изменяться расстояние $L(t)=|x_2(t)-x_1(t)|$ между этими точками.

Если динамика системы (51) является хаотической, то $L(t)$ с течением времени будет экспоненциально возрастать, причём при больших временах:

$$L(t)\approx L(0)e^{kt}. \qquad (52)$$

Средняя скорость экспоненциального расхождения траекторий:

$$k(t)\approx \frac{\ln\left(\frac{L(t)}{L(0)}\right)}{t} \qquad (53)$$

Однако так не может продолжаться вечно: при финитном движении $L(t)$ не может всегда увеличиваться. Поэтому при больших t величина $k(t)$ в любом случае независимо от режима – хаотического или регулярного – будет близка к нулю. Однако чем меньше начальное расстояние $L(0)=|\xi(0)|$, тем дольше можно следить за возрастанием $L(t)$, т.е. в течение большего промежутка времени величина $d(t)$, не достигнет максимального значения. Поэтому $L(0)\to 0$ и $t\to\infty$. Тогда КС-энтропия

$$S_K = \lim_{\substack{d(0)\to 0\\ t\to\infty}} \frac{\ln\left[\frac{L(t)}{L(0)}\right]}{t} \qquad (54)$$

Производство КС-энтропии не является знакоопределенным: оно возрастает, если возрастает со временем среднее эффективное расстояние между траекториями, и уменьшается в противоположном случае.

Используя КС-энтропию, можно определить, каким является исследуемый режим движения – хаотическим или регулярным. Понятие КС-энтропии используется как характеристика хаоса динамического в системах с неустойчивостью движения –

экспоненциальной расходимостью близких в начальный момент траекторий. В частности, если динамика системы является периодической или квазипериодической, то с течением времени расстояние $L(t)$ не возрастает и КС-энтропия равна нулю (=0). При наличии в системе устойчивой неподвижной точки $L(t)\to 0$ и $S_K<0$. В случае хаотической динамики системы КС-энтропия всегда положительна ($S_K>0$). Величина КС-энтропии тем больше, чем быстрее разбегаются траектории, т. е. чем сильнее неустойчивость траекторий и хаотичнее система. КС-энтропия выражается через положительные показатели Ляпунова, характеризующими устойчивость динамической системы.

КС-энтропия – величина размерная ($[S_K]=c^{-1}$) и является не только качественной, но и количественной характеристикой режима движения: величина, обратная энтропии (при условии $S_K>0$), определяет характерное время перемешивания $t_{mix}=S_K^{-1}$ в системе; по прошествии промежутка времени $t>>t_{mix}$ начальная область расплывается по всей энергетически доступной гиперповерхности (в отсутствие диссипации или по предельному подмножеству фазового пространства – **странному аттрактору** (для диссипативных динамических систем); при $t>>t_{mix}$ описание системы может быть только вероятностным. Однако на малых временах $t<<t_{mix}$ поведение системы можно предсказать с достаточной точностью (не превышающей, естественно, точность задания начального положения фазовой точки).

КС-энтропия определяется как предельное значение скорости потери информации при заданном начальном значении. Она равна нулю для регулярного движения, бесконечна для случайных систем, положительна и постоянна для систем с детерминированным хаосом. Одновременно КС-энтропия – мера "памяти" системы, т.е. мера скорости "забывания" начальных условий и мера хаотичности системы.

Реализацией случайного процесса является временная последовательность значений параметра $u(t)$. Для чисто случайного процесса прошлые значения u_i никак не связаны и не несут никакой информации о настоящем и будущем (даже ближайшем) в значениях u. В этом случае все значения u_i равновероятны и $f(u_i)=1/n$. Откуда КС-энтропия $S_K(n)=\ln(n)$. Для процесса «без памяти», $S_K\to\infty$. В случае регулярного движения, когда $S_K\to 0$, можно предсказать любые будущие значения $u(t)$. Таким образом, чем меньше S_K, тем более детерминированной является система. Напротив, высокие значения S_K говорят о высокой стохастичности системы, короткой «памяти» и, соответственно, плохой прогнозируемости её будущих состояний. Роль КС-энтропии для нелинейных систем похожа на роль, которую играет автокорреляционная функция для линейных систем.

КС-энтропия используется при описании такого случайного процесса, как броуновское движение. Можно показать, что мера априорной неопределённости положения броуновской частицы даётся формулой

$$S_K(n)=-\sum_{i=0}^{n} f(u_i(t_n))\ln f(u_i(t_n)), \qquad (55)$$

где u - некоторый измеряемый параметр случайного процесса (например, вектор положения броуновской частицы; $f(u_i(t_n))$ - вероятность данной выборки, т.е. совместная вероятность того, что в момент времени t_0 броуновская частица находилась в ε ячейке с номером 0, в ячейке 1 – в момент времени $t_1=t_0+t_n,\ldots,t_0+n\mathrm{d}t$. Тогда мера априорной неопределённости положения броуновской частицы даётся формулой:

Разность энтропий $S_K(n+1)$-$S_K(n)$ есть потерянная информация о положении частицы на интервале dt. Скорость потери информации на всём интервале ndt равна $\frac{S_K(0)-S_K(n)}{ndt}$. КС-энтропия определяется как предельное значение этой оценки при заданном начальном значении $S_K(0)=0$:

$$S_K=\lim_{dt\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{S_K(n)}{ndt} \qquad (56)$$

КС-энтропия даёт оценку скорости потери информации и является мерой памяти системы, или мерой скорости забывания начальных условий. Её можно таке рассматривать как меру хаотичности системы. Для процесса без памяти $S_K \to \infty$, в случае регулярного движения, когда $S_K \to 0$, можно предсказать будущие значения u_t. Чем меньше S_K, тем более детерминированной является система. Напротив, высокие значения S_K говорят о высокой стохастичности системы, короткой «памяти» и, соответственно, плохой прогнозируемости ее будущих состояний. Роль *КС*-энтропии для нелинейных систем похожа на роль, которую играет автокорреляционная функция для линейных систем. *КС*-энтропия обладает и другими интересными свойствами. В частности, она связана с показателями Ляпунова, характеризующими устойчивость динамической системы.

7.4.2 Эпсилон-энтропия

Эпсилон-энтропия (ε-энтропия) – термин, введённый Колмогоровым для характеристики классов функций. Это мера сложности функции, минимальное количество знаков, необходимое для задания функции с точностью ε. Минимальное количество информации содержащейся в сообщении $z(t)$ относительно $u(t)$, при котором они еще оказываются эквивалентными, принято называть эпсилон-энтропией, $H_\varepsilon(u)$.

ε-Энтропия величины A – минимальное количество информации в одной случайной величины Y относительно другой B, при котором удовлетворяется заданное требование к верности воспроизведения величины A.

$$H_z(A) = \min_{w(x/y)} Y(A,B), \quad M\left[(a-b)^2\right] \le \varepsilon^2. \tag{57}$$

В случае Гауссового источника сигнала при наличии шума

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}\log\frac{\sigma_c^2}{\sigma_\varepsilon^2}, \tag{58}$$

где σ_c^2 – дисперсия (мощность) сигнала, σ_ε^2 – дисперсия шума воспроизведения.

Алгоритмическая теория информации занимается определением сложности объекта исследования, используя понятие описательной сложности (колмогоровской сложности или, сложности Колмогорова-Хайтина). Под сложностью здесь понимают длину кратчайшей программы, которая выводит заданную строку. Строки, которые могут выводиться короткими программами, рассматриваются как не очень сложные. Колмогоровская сложность объекта (например, текста) есть мера вычислительных ресурсов, необходимых для точного определения этого объекта. Стохастическая сложность (алгоритмическая энтропия, алгоритмическая сложность) выражает возможность фрактального описания.

Сложность строки – это длина описания этой строки на некотором универсальном языке описания. Теория сложности применяется при анализе порядка расположения цифр в числе. При этом обычно используется двоичная система счисления, поскольку она позволяет наиболее просто вычислить энтропию числа.

Пусть имеется двоичное n-разрядное число. Цифры "0" и "1" этого числа могут быть расположены в разрядах в определенном порядке или беспорядочно. При выборе критерия степени беспорядоченности расположения цифр в числе руководствуются правилом: хаоса больше всего там, где больше всего информации. (Не зря же энтропия и информация вычисляются по одинаковым формулам!). Действительно, из некоторой таблицы двоичных чисел, состоящей, например, из нулей и единиц, можно извлечь информации больше, чем из таблицы того же объёма, но содержащей в себе только нули. А ведь наличие только нулей – это порядок, а "разбросанные" по таблице нули и единицы – хаос. И классическое определение понятия "информация" говорит о том же: информация – это устраненная неопределенность ожидания того или иного символа (кода, сообщения и т.п.). Её мерой служит энтропия источника. Чем больше энтропия источника (хаос), тем больше информации можно получить от него. Если, например, ожидание появления

некоторой кодовой последовательности достоверно, то количество полученной информации равно нулю. Передача информации от источника, который вычисляет значения очередного разряда числа π отсутствует.

Пример. Энтропия числа π. Согласно теории Шеннона, количество информации, содержащееся в числе π бесконечно. Однако существует простая формула, которая позволяет довольно точно вычислить знаки этого числа. Выглядит она следующим образом: $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+...$

На основании этой формулы можно создать очень короткую программу, а значит, число π не содержит бесконечного количества информации. Компьютер рассчитывает π без элементов случайности. Для передачи последовательности цифр в другой пункт не требуется никакого канала. В приёмном пункте можно построить другую машину, вычисляющую ту же самую последовательность, что, впрочем, непрактично. Тогда можно принять, что цифры числа π образуют определённую последовательность и сконструировать систему, способную передавать последовательность цифр. Этот источник, обладающий максимальной энтропией, подчинён некоторым статистическим условиям; его энтропия определяет необходимую пропускную способность канала. В случае числа π можно оставить только те сведения, что все цифры выбираются из множества 0, 1,..,9.

Замечание. π – иррациональное число, т.е. его десятичное выражение представляет собой бесконечный ряд цифр, следующих друг за другом без какой-либо регулярности. Невозможно сказать, какой будет следующая цифра числа π на основе предыдущих, даже если их тысячи миллионов. Какова же энтропия Шеннона этого числа π. В десятичном представлении ,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781… – бесконечное число случайных и равновероятных знаков: следующей цифрой с одинаковой вероятностью могут быть как ноль, так и, например, три. В двоичном выражении число π выглядит как: 11,001001000011111101101010100010001000010110100011000010001101001 1…, т.е. снова бесконечный ряд непредсказуемых нулей и единиц. Число π содержит бесконечное количество информации, поскольку каждый его знак соответствует одному биту, и таких знаков бесконечное количество.

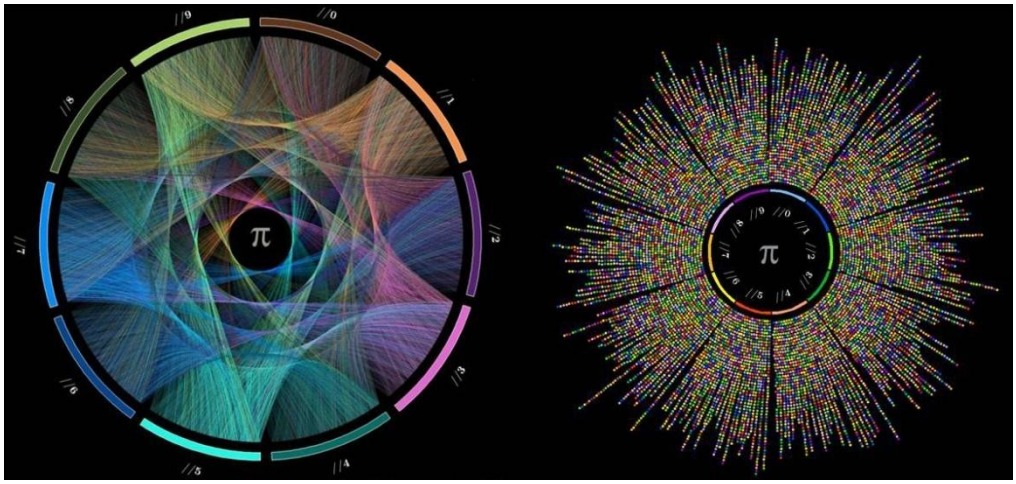


Рис.5 . Визуализация первых 10000 цифр числа π

Пример 1. Представляет интерес исследование насколько случайно число π. Число π представляет собой отношение длины окружности к ее диаметру и его можно вычислить со сколь угодно большой точностью. Сейчас его значение известно с точностью до 500 миллиардов знаков, его первые цифры в десятичной системе 3,14159265358979323846264338327795..., в двоичной системе 11,00100100001111110110… В нем нет ни одной циклической последовательности и, вероятно, никогда не будет, сколько бы еще знаков ни вычислили. Любая последовательность цифр одинаковой длины встречается в нем с одинаковой частотой. Например, вероятность найти последовательность 234 равна вероятности обнаружить 876; а 23568 попадается так же часто, как 98427 (попутно заметим, что у π имеются и другие интересные свойства, например, комбинация

999999, в числе π встречается на позиции 193034, 888888 - на позиции 222299,последовательность 12345678 - позиции 186557266, а последовательность 123456789 - только на позиции 523 551 502, последовательность цифр «141592», которая находится сразу после запятой, повторяется в позиции 821 582). Числа типа π называются "нормальными". Нормальность числа π доказана с помощью компьютерной программы, вычисляющей произвольную цифру числа π, не вычисляя предыдущие. Алгоритм работает не целиком с числом, а с его фрагментами: берутся числа 0.314; 0.141; 0.415; 0.159 и т.д., которые составлены из трех последовательных цифр числа π. Если цифры π случайны, то все эти числа должны быть случайно распределены между 0 и 1 (расчёты идут не с десятичной, а с двоичной записью числа π, т. е. с последовательностями из нулей и единиц). Было обнаружено, что цифры числа π ведут себя в соответствии с теорией хаоса (теория хаоса предполагает, что в нормальных числах одни числовые последовательности неким образом зависят от соседних с ними чисел): их последовательность случайна. Другие примеры "нормальных" чисел: Неперово число или число e (основание натурального логарифма) в десятичной системе 2,71828182845904523536028747135 27… в двоичной системе 10,10110111111000010101000101100…, постоянная Эйлера γ≈0,57721566490153286060651209 0..., $\sqrt{2}$ =1,1414235623730950488 ...., $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ln2= 0,69314718055994530941723212145818, число Хайтина Ω=0,0078749969978123844…, и много других. Возможные применения этих результатов - новые алгоритмы генератора случайных чисел и криптография.

Алгоритмическая теория информации используется в определении свойств константы Хайтина.

Константа Хайтина, Ω, – действительное число, чьи цифры равнораспределены и которое выражает вероятность того, что произвольно взятая программа остановится. Константа Ω определимо, но не вычислимо.

Замечание. Хайтин утверждает, что алгоритмическая теория информации – ключ к разрешению проблем в таких областях, как биология (получение формального определения жизни, её происхождение и эволюция) и нейробиология (проблема сознания и изучение процессов мышления). Его открытия в математической логике и алгоритмической теории информации показали, что существуют математические факты, истинность которых нельзя объяснить никакой теорией. «Доказать» эти факты можно только одним способом: признать их аксиомами без всяких рассуждений. Хайтин предлагает математикам оставить всякую надежду доказать эти факты и принять квазиэмпирическую методологию.

Хотя существует бесконечное множество вероятностей остановки компьютерной программы, обычно используют букву Ω для обозначения их всех, как если бы существовало только одно такое число. Так как численное значение Ω зависит от используемого языка программирования, то если не ссылаются на какой-то определённый язык, её часто называют построением Хайтина, а не константой Хайтина. Всякое Ω является нормальным трансцентдентным числом, которое определимо, но невычислимо, что означает отсутствие алгоритма, который перечислял бы его цифры. Константа Ω - вероятность того, что случайно выбранная бесконечная последовательность нулей и единиц начинается со строки битов (некоторой конечной длины), которая принадлежит области определения. Оно определяет вероятность остановки. Ω алгоритмически случайна, это – нормальное число, т.е. её цифры равнораспределены, как если бы они были получены подбрасыванием уравновешенной монеты; Ω – невычислимое число; не существует вычислимой функции, перечисляющей её двоичное разложение; множество рациональных чисел q таких, что $q<\Omega$ – перечислимо; множество рациональных чисел q таких, что $q>\Omega$ – неперечислимо; Ω – арифметическое число. К настоящему времени вычислены первые 64 бита числа Хайтина. В двоичной записи: 0,0000001000000100000110001000011010001111110010111011101000010000…
и в десятичной записи: 0,0078749969978123844…

Для любого непорядка Хайтина
01100111001011011010
01010010010010101111

11001111010110010110
00111101111001100110
01110000101101011110
энтропия равна 20 бит

Число Ω – постоянная Хайтина – содержит бесконечное количество информации. Важно, что эта постоянная не может порождаться кодом, содержащим меньше битов, чем она сама. Это означает, что все биты Ω полностью случайны. Её можно использовать для решения проблемы остановки, которая заключается в том, чтобы определить, остановится ли какая-либо программа. Так, программа, вычисляющая 2+2, остановится, как только будет найдена требуемая сумма. Но программа, вычисляющая все простые числа, не остановится никогда. Способа решить проблему остановки для любой программы не существует: можно предсказать, остановится ли какая-то конкретная программа, но не для любого алгоритма. Например, представим себе программу, которой даны инструкции остановиться при нахождении четного числа, которое не может быть выражено как сумма двух простых. Программа остановится, если существует четное число с такими характеристиками, и никогда не остановится в противном случае. Постоянную Хайтина можно понимать как вероятность того, что программа, выбранная наугад, остановится. Предположим, что во Вселенной существуют только программы, содержащие три бита информации, т.е. всего таких программ восемь: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Если бы останавливалась только программа 000, вероятность остановки составила бы 1/8. Можно вычислить вероятность того, что программа, выбранная наугад, остановится, если сложить вероятности выбора всех останавливающихся программ. Результат будет равен единице, деленной на число программ, содержащих $2n$ битов. Постоянная Хайтина:

$$\Omega = \sum \frac{1}{2^{|p|}}, \qquad (59)$$

где p – вероятность остановки.

Число омега равно вероятности выбора случайной программы, которая остановится, и эта вероятность вычисляется суммированием вероятности выбора всех программ, которые останавливаются. Число Хайтина имеет любопытные математические свойства. С одной стороны, его невозможно вычислить, поскольку для этого потребовалась бы программа с бесконечным числом битов. Также это число случайно. Но самое важное – это то, что вычисление постоянной Хайтина позволяет решить проблему остановки для любой программы. Поскольку подавляющее большинство нерешенных математических задач можно свести к вопросу о том, остановится ли программа, знание постоянной Хайтина равносильно владению всем математическим знанием Вселенной. Число омега зависит от используемого языка программирования, так что, строго говоря, следует говорить о постоянных Хайтина – своей для каждого языка. Хотя постоянные Хайтина, в принципе, невычислимы, Калуд вычислил первые 64 символа для одной из них. Вычислять знаки Ω – трудная задача. Хайтин утверждал, что количество знаков числа омега, известных цивилизации, – хорошая мера ее интеллектуального прогресса.

Алгоритмическая теория информации используется для сжатия текстов и кодирования.

Кодирование – отображение состояния одной физической системы с помощью состояния некоторой другой.

Кодирование – важный раздел информатики, но в данному учебнике нет возможности этим заниматься.

Приведём несколько численных примеров расчёта энтропии в арифметике.

Пример: 000000000000000 и 111111111111111111 (энтропия =0), 01101100110111100010 (энтропия =20), 10101010101010101010 имеет энтропию =1: вероятность последовательности из 1 и 0 = 0.5. Оба числа встречаются с одинаковой частотой. Энтропия последовательности

0110110011011110001O<1, а именно: ~ 0,9927744. Если монета брошена 20 раз, то случайная последовательность 01101100110111100010 имеет энтропию =20 бит.

В арифметике порядок может порождать порядок

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

b) 4/9 = 0,44444...

5/37 = 0,135135135...,

но может порождать хаос

12·21 = 252

123·321 =39483

1234·4321 = 5332114

12345·54321 = 670592745

123456·654321 = 80779853376

1234567·7654321 = 9449772114007

12345678·87654321 = 1082152022374638

123456789·987654321 = 121932631112635269

Хаос может возникать из хаоса: пример 53278·2147 = 114397866

Известны разные подходы для определения порядка распределения цифр в числах. Один из них основан на понятии антиэнтропии. Символ порядка O (от нем. *ordnung*). Его пытались связать с энтропией формулой:

$O = 1/S_e$

Здесь O изменяется до бесконечности, что неудобно. Поэтому чаще используют формулу

$$O = \frac{100}{S_e + 1}\%,$$

согласно которой порядок варьируется от 0 до 100.

Пример. имеем два числа в виде 40 последовательностей 1 и 0. 1011011010101001110010110011100000011110 и 1111111111111111111111111111111111111111

В первом числе энтропия S_e=40 бит, порядок очень низок O=100/41=2,5%, а во втором числе 100% - максимальный.

7.5 Энтропия Кульбака-Лернера

Относительная энтропия (другие названия: кросс-энтропия, расхождение, информационная дивергенция, потеря информации, различающая информация, информационный выигрыш расстояние Кульбака-Лейблера) – несимметричная мера (не метрическая) удалённости друг от друга двух вероятностных распределений.

Строится она на основе энтропии Шеннона $H(X) = -\sum_x p(x) \log p(x)$, т.е. на неопределённости (самоинформации) простой случайной переменной.

Расстояние (расхождение) Ку́льбака-Ле́йблера – это неотрицательнозначный функционал, являющийся несимметричной мерой удаленности друг от друга двух вероятностных распределений. Обычно одно из сравниваемых распределений – это «истинное» или постулируемое априори распределение (распределение P), второе – предполагаемое (проверяемое), являющееся приближением первого (распределение Q). Значение дивергенции является безразмерной величиной. Данная мера расстояния интерпретируется как величина потерь информации при замене истинного распределения P на распределение Q. Расстояние Кульбака-Лейблера от Q до P обозначается $D_{KL}(P||Q)$, это, другими словами, количество оставшейся информации, когда Q было использовано для приближения P. Данная мера расстояния Q.

Расстояние Кульбака-Лейблера – информационный выигрыш, достигнутый, если P использовано вместо Q. Это относительная энтропия P относительно Q, обозначается $H(P|Q)$.

Как уже упоминалось, возможны различные способы вычисления количества информации. Ранее мы рассмотрели меру Хартли, применимую для случая независимых равновероятных событий

$$Y(\xi) = -n\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i = -n \cdot m\left(\frac{1}{m}\log\frac{1}{m}\right) = n \cdot \log m \tag{60}$$

Кроме мер Хартли и Шеннона существуют и иные, производные от энтропии статистические меры измерения количества информации.

Расстояние (энтропия) Кульбака-Лейблера – асимметричная информационная мера:

$$D_{KL}(p \parallel q) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \tag{61}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – вероятности двух наборов случайных величин, а D – информационное расстояние от ансамбля $\{p\}$ до элементов другого ансамбля $\{q\}$, т.е. расстояние между двумя плотностями распределения вероятностей p(x) и $q(x)$.

Эта мера применима, если массивы X и Y дискретны (дискретные вероятностные распределения). Информация

$$I(X:Y) = \sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} = S\{p(x,y) \parallel p(x)p(y)\}. \tag{62}$$

Замечание. Нет общепринятого обозначения энтропии (расстояния) Кульбака-Лейднера: её записывают как $S(p\|q)$, $H(p,q)$, $D(p\|q)$ или D_{KL}).

D_{KL} – математическое ожидание логарифмической разности между вероятностями p и q, где математическое ожидание берётся, используя вероятности p. Оно определено, только если $q(i)=0 \Leftrightarrow p(i)=0$, для всех i (абсолютно непрерывных).

Относительная энтропия удовлетворяет неравенству Гиббса: $D_{KL}(P\|Q) \geq 0$, в котором равенство выполняется, только если распределения P и Q совпадают. Следует понимать, что хотя эта величина называется расстоянием, она не является в общем случае метрикой в пространстве распределений, $D_{KL}(P\|Q) \neq D_{KL}(Q\|P)$.

Если P и Q – распределения непрерывных случайных величин, то расстояние Кульбака-Лейблера определено как интеграл:

$$D_{KL}(p \parallel q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx, \tag{63}$$

где p и q – плотности P и Q.

Расстояние Кульбака-Лейблера всегда неотрицательно, оно равно нулю тогда и только тогда, когда $q(x)=p(x)$.

$$D_{KL}(q \parallel p) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx, \tag{64}$$

Ещё одна мера – дивергенция Кульбака – рассматривается как симметричная информационная мера:

$$D_{KL}(p,q) = \sum_{x \in \chi}(p(x) - q(x)) \ln \frac{p(x)}{q(x)} \tag{65}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – вероятности двух наборов случайных величин, а D – расстояние между ансамблями $\{p\}$ и $\{q\}$.

Важно, что KL-дивергенция не симметрична: $D_{KL}(P\|Q) \neq D_{KL}(Q\|P)$. Эта энтропия строго определенна для непрерывных распределений, и инвариантна к замене переменных, аддитивно для независимых распределений аналогично энтропии Шеннона.

Энтропия Кульбака – мера различия двух сравниваемых распределений. Она используется для сравнения двух распределений вероятностей, заданных на том же домене (например, алфавите). Это важный физический параметр открытых неравновесных термодинамических систем, поскольку, чем больше энтропия Кульбака, тем больше эксергия; она же применяется как мера в квантовой теории информации, квантовой механике, компьютерной графике, или экологии, с целью сравнения динамических систем и моделей Маркова, для оценки их сложности (термодинамической глубины).

Обобщением энтропии Кульбака-Лейблера является энтропия Цаллиса, вводимая в рамках неэкстенсивной термодинамики. Для равномерного распределения относительная энтропия Цаллиса сводится к отрицательной энтропии Цаллиса $S_q(p)$. Обе относительные энтропии, Кульбака-Лейблера и относительная энтропия Цаллиса полезны для нахождения приближенных решений, зависящих от времени уравнений диффузии (и уравнений Фоккера-Планка) с дробными производными. В пределе $q \to 1$ относительная энтропия Цаллиса становится энтропией Кульбака-Лейблера.

В случае непрерывных распределений $\Phi(x)$ и $G(x)$:

$$D_{KL} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \cdot \ln\left(\frac{\Phi(x)}{G(x)}\right) dx \quad . \qquad (66)$$

Относительная энтропия – оценка "информационного расстояния" между распределениями $\Phi(x)$ и $G(x)$.

Если $\Phi(x)=G(x)$, то расстояние равно 0. Расстояние Кульбака-Лейблера – мера потерь информации об оригинальном распределении $\Phi(x)$, если мы его представляем распределением $G(x)$. Выражение расстояния Кульбака-Лейблера корректно с точки зрения размерностей: аргумент логарифма – безразмерная величина. Кроме того, расстояние Кульбака-Лейблера не может быть отрицательной величиной. И, наконец, оно не зависит от масштаба наблюдений.

Пример. Попытаемся заменить распределение $\Phi(x)$ на $2\Phi(2x)$, а $G(x)$ на $2G(2x)$ (это соответствует сжатию распределения плотности вероятности в два раза по оси X, приводящему к снижению дифференциальной энтропии (на ln2)). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\Phi(2x) \cdot \ln\left(\frac{2\Phi(2x)}{2G(2x)}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \ln\left(\frac{\Phi(y)}{G(y)}\right) dy \quad , \qquad (67)$$

где $y=2x$.

Расстояние Кульбака-Лейблера при этой операции не изменилось.

Взаимная (совместная) энтропия двух дискретных случайных переменными X и Y ($p(x,y)$ – значение их совместного распределения вероятности при (x,y)) записывается как

$$H(X,Y) = -E_{p(x,y)}\left[\log p(X,Y)\right] = -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log p(x,y) \qquad (68)$$

Совместная энтропия представляет количество информации, необходимое в среднем для установления значения двух дискретных распределений. Совместная энтропия – количество информации в двух (или более) случайных переменных.

Согласно определению, если задана случайная переменная X, то взаимная энтропия (*conditional entropy*) Y (среднее по X) равна

$$H(Y \mid X) = -E_{p(x)}\left[H(Y \mid X = x)\right] = -E_{p(x,y)}\left[\log p(Y \mid X)\right] \qquad (69)$$

Здесь важно учитывать, что $H(X|Y) \neq H(Y|X)$.

Согласно цепному правилу $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)$, поэтому $H(X,Y)=H(X|Z)+H(Y|XZ)$.

Сокращение неопределённости взаимной информации определяется относительной энтропией $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$. Соотношения между взаимной информацией и энтропией $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$; $I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)$; $I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)$; $I(X;Y)=I(Y;X)$ (симметрия); $I(X;X)=H(X)$ (самоинформация).

Условная энтропия $H(X|Y)$ – энтропия одного случайного переменного условна от знания другой. Здесь – количество информации в одной случайной величины, задаваемая

другой. Перекрёстная энтропия между двумя распределениями вероятностей измеряет среднее число бит, необходимых для опознания события из набора возможностей, если используемая распределение вероятностей q, вместо «истинного» распределения p.

Перекрестная энтропия для двух распределений p и q над одним и тем же вероятностным пространствм:

$$H(p,q)=E_p[-\log q]=H(p)+D_{KL}(p\|q), \qquad (70)$$

где $H(p)$ – энтропия p и $D_{KL}(p\|q)$ – расстояние Кульбака-Лейблера от q до p (относительная энтропия).

Для дискретного p и q: $H(p,q)=-\sum_x p(x)\log q(x)$ (71а)

Для непрерывного распределения: $H(p,q)=-\int_X p(x)\log q(x)dx$ (71б)

Запись $H(p,q)$ применима как для перекрёстной энтропии, так и для совместной энтропии p и q. Минимизация перекрёстной энтропии используется в оптимизации и для оценки вероятностей редких событий.

В приложениях, P представляет собой "истинное" распределение данных, наблюдений или точно рассчитанное теоретическое распределение, а Q-теорию, модель, описание, или приближение P. Минимизация Кульбака-Лейблера часто используется для приближения сложного распределения $p(x)$ более простым $q(x)$. Пусть $p(x)$ – синее распределение, а $q(x)$ – красное. Слева показан результат минимизации $KL(p\|q)$ по $q(x)$, а справа – результат минимизации $KL(q\|p)$ по $q(x)$. Чётко проявляется асимметричность: $KL(p\|q)\neq KL(q\|p)$.

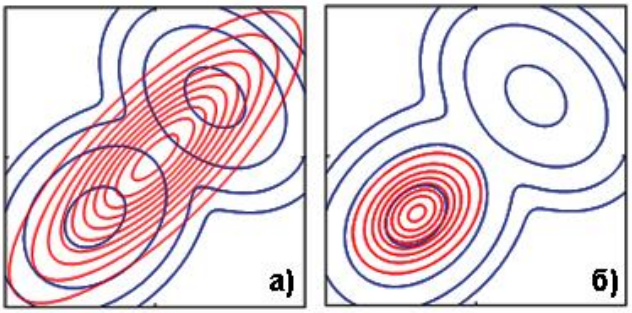


Рис. 6. Приближение сложного распределения более простым.

На рис. 7 дан пример аппроксимации одного статистического распределения другим. Продемонстрированы различия между экспериментальным и подгоночным распределениями.

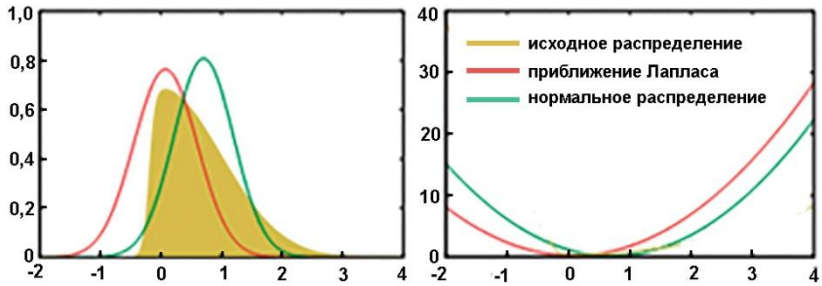


Рис. 7. Аппроксимация исходного распределения различными приближениями.

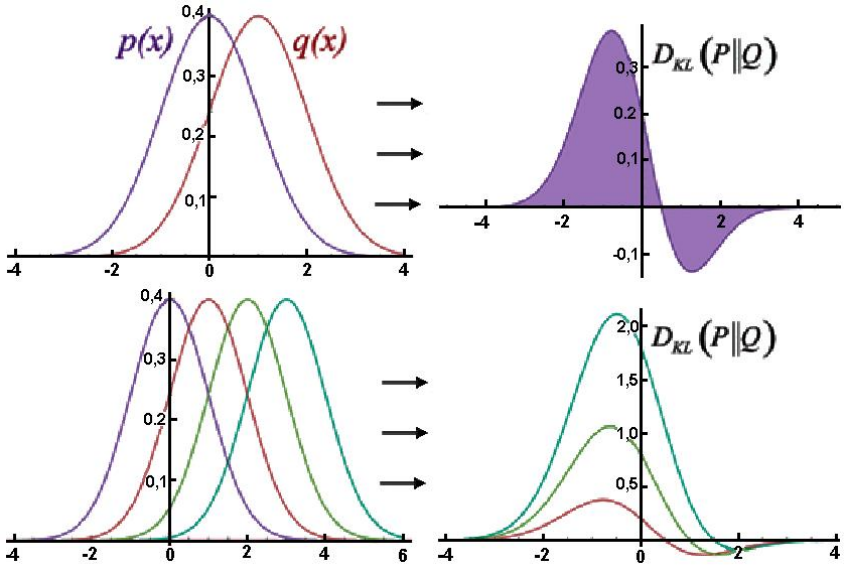


Рис. 8. Иллюстрация дивергенции Кульбака-Лейблера (KL) для двух нормальных распределений (гауссианов). *Хорошо заметна асимметрия KL-дивергенции.*

Рассмотрим задачу аппроксимации распределения $p(x)$ с помощью распределения $q(x)$. Будем искать приближение двумя способами:

1. $KL(q\,||\,p)\to\min\limits_{q}$ (72а)

2. $KL(p\,||\,q)\to\min\limits_{q}$ (72б)

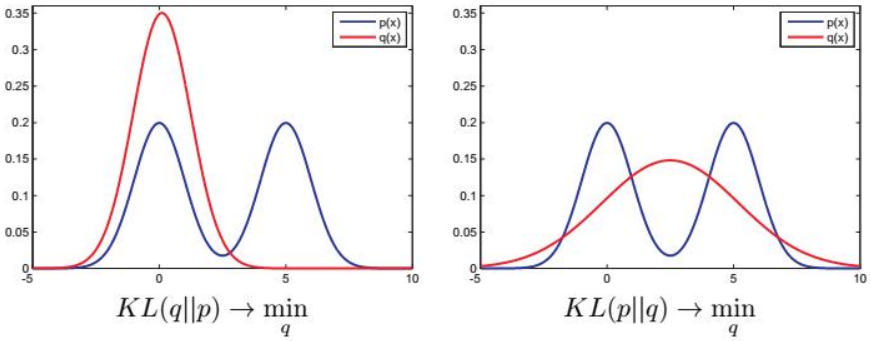


Рис. 9. Приближение двумодального распределения p(x) с помощью одномодального распределения q(x).

В первом случае аппроксимация ищется в области высоких значений q. Поэтому итоговое распределение, как правило, хорошо приближает распределение $p(x)$ только на подмножестве носителя $p(x)$ (см. рис. 9, слева). Во втором случае аппроксимация ищется сразу для всего носителя распределения $p(x)$ (см. рис. 9, справа).

Для случайной переменной $X=\{0.1\}$ предполагает два распределения $f(x)$ с $f(0)=1-r$, $f(1)=r$ и $g(0)=1-s$, $g(1)=s$;

$$D(f\,||\,g)=(1-r)\log\frac{1-r}{1-s}+r\log\frac{r}{s} \quad (73а)$$

$$D(g\,||\,f)=(1-s)\log\frac{1-s}{1-r}+s\log\frac{s}{r} \quad (73б)$$

Если r-s то $D(f\|g)=D(g\|f)=0$, и $r=1/2$ и $s=1/4$, то

$$D(f\,||\,g) = \frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 0{,}2075$$

$$D(g\,||\,f) = \frac{1}{4}\log\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\log\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 0{,}1887$$

Энтропию Кульбака-Леблера используют для приближения двумодального распределения $p(x)$ с помощью одномодального распределения $q(x)$.

7.6 Энтропия Реньи

Энтропия Реньи – обобщение энтропии Шеннона.

Как уже упоминалось, классическая термодинамика базируется на распределении Гиббса. Напомним, что распределение (каноническое) Гиббса – распределение состояний макроскопической термодинамической системы частиц, находящейся в тепловом равновесии с термостатом (окружающей средой).

В классическом случае плотность распределения можно представить в виде:

$$p_i^{(G)} = \frac{e^{-\beta_0 H_i}}{Z_G} \tag{74}$$

где $\beta_0 = \frac{1}{k_B T_0}$, k_B – постоянная Больцмана, T_0 – термодинамическая температура, Z_G – интеграл состояния, гамильтониан состояния системы $H=\{H_i\}$. Среднее значение энергии

$$U = \langle H \rangle_p \equiv \sum_i^W H_i p_i, \tag{75}$$

где W – число состояний системы, p_i – вероятности.

Подстановка распределения Гиббса в информационную энтропию Гиббса-Шеннона даёт термодинамическую энтропию термостатики Гиббса

$$\widetilde{S}^{(G)} = k_B S^{(G)}\left(p^{(G)}\right) = k_B \ln \sum_i^W e^{-\beta \Delta H_i}. \tag{76}$$

Однако такой подход справедлив только для простых систем. При изучении сложных физических систем и явлений (например, фрактальных и самоорганизующихся структур, турбулентности), а также различных социальных и биологических систем было обнаружено, что распределение Гиббса не обеспечивает согласия с наблюдаемыми явлениями. В частности, оно не совместимо со степенным распределением, характерным для подобных систем. Развитие информационного подхода к описанию существенно неравновесных систем, включающих самоорганизацию структур, привело к введению понятия энтропии Реньи, и её линеаризованной форме – энтропии Цаллиса. Реньи ввёл свою энтропию на основе чисто формальных рассуждений. Он искал наиболее общий класс энтропий, удовлетворяющих требованию аддитивности для статистически независимых событий, получаемых в форме обобщенных средних Колмогорова–Нагумо и был совместим с аксиомами вероятности.

Энтропия Реньи – один из функционалов семейства функционалов, используемых для количественного разнообразия неопределенности или случайности системы.

В теории информации энтропия Реньи обобщает энтропию Хартли, энтропию Шеннона, энтропию столкновений и *Min*-энтропию.

Альфред Реньи (1960) ввёл энтропию как α – момент меры ε-разбиения (покрытия).

Энтропия Реньи порядка α

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\log_2\left(\sum_i^{N(\varepsilon)} p_i^\alpha\right), \quad \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i = 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \alpha \neq 1 \tag{77}$$

Здесь $p_i=N_i/N(\varepsilon)$, N_i – число элементов системы, приходящихся на i-элемент ε-разбиения, $N(\varepsilon)$-полное число элементов заданного ε покрытия, p_i – появление вероятностей событий $\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ и log по основанию 2. Если все вероятности одинаковые, тогда все распределения энтропии Реньи равны, $S_\alpha(X)=\log n$. В противном случае, энтропии слабо уменьшаются при увеличении от α.

При записи энтропии Реньи логарифмическая функция была деформирована таким образом, чтобы при больших значениях энергии состояний вероятность их реализаций спадала не экспоненциально быстро, а степенным образом (медленнее), как это реализуется в законе Парето.

Константа α может принимать любые значения, однако смысл энтропии Реньи при этом меняется. Более высокие значения α, стремясь к бесконечности, дают энтропию Реньи, которая в большей степени определена через рассмотрение только самых высоких вероятностей событий. Более низкие значения α, стремящиеся к нулю, дают энтропию Реньи, которая в большей степени взвешивает все возможные события более равномерно, независимо от их вероятностей. Промежуточный случай α=1 даёт энтропию Шеннона, которая обладает особыми свойствами. При α=0 максимально возможная энтропия Шеннона, log(N).

В информатике α-энтропию Реньи записывают в виде (энтропия Реньи порядка α, где α≥0, α≠1):

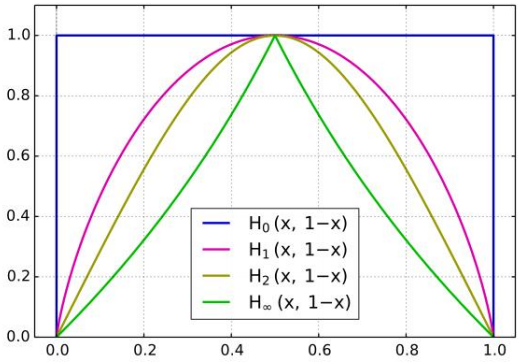


Рис. 10. Зависимость энтропии случайной величины от вероятности при различных значениях α.

$$S_\alpha(p) = \frac{1}{1-\alpha}\ln\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha\right] = -\frac{1}{\alpha-1}\log_2\left\langle p^{\alpha-1}\right\rangle; \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad \alpha \in (-\infty, \infty) \tag{78}$$

где p_i – появление вероятностей событий $\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ и log по основанию 2 (для счёта в битах).

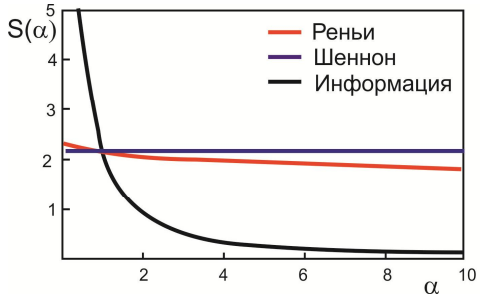
Содержание информации распределения вероятности в дискретном случае

$$I_\alpha(p) = \frac{1}{\alpha-1} - \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^\alpha}{\alpha-1} \tag{79}$$

Оно переходит в информацию Шеннона при α→1.

Если вероятности $p_i=1/n$ (объект однороден, то все энтропии Реньи (для любого α) равны, $S_\alpha(x)=\log n$. Иначе α-энтропия слабо уменьшается при росте α.

Энтропия Реньи не отрицательна ($S_R(X)\geq 0$), $S_\alpha(0,1)=S_\alpha(1,0)$, для α≤1 энтропия Реньи вогнута, для α>1 $S_\alpha(X)$ не чисто выпукла и не чисто вогнута: теряет вогнутость при α>α*>1, где α* зависит от N и подчиняется соотношению $\alpha^* \leq 1 + \frac{\ln(4)}{\ln(N-1)}$.



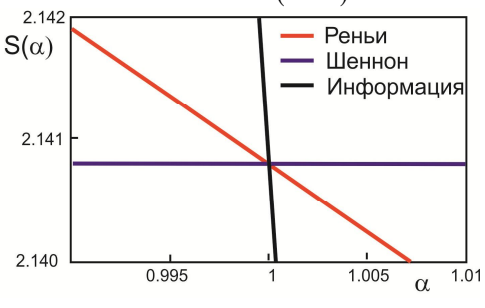


Рис. 11. Различные меры энтропии меры для выборок из однородных вероятностей с N = 10. Энтропия Реньи и информации стремятся к энтропии Шеннона при α→1. Правая изображение представляет собой увеличенный вид точки пересечения кривых, представленной на левой картинке.

Так как $\frac{\alpha-1}{\alpha}S_\alpha(X)\le\frac{\beta-1}{\beta}S_\beta(X)$ для α≤β, (α-1)$S_\alpha(x)$ – вогнутая функция X, $S_\alpha(X)$ – ограниченная, непрерывная и не увеличивающаяся функция α, энтропии Реньи для различных α коррелируют.

Энтропия Реньи переходит в энтропию Больцмана при любых α в случае равновероятности распределения p. При α→0 энтропия Реньи (это энтропия Хартли, определяющая количество информации, содержащееся в сообщении), взвешивает возможные события более равномерно, менее зависимо от их вероятностей; при α=0 достигается максимально возможная энтропия =log(N) независимо от распределения (лишь бы $p_i\neq0$): $S_{\alpha0}(X)=\log N=\log|X|$ (логарифм мощности множества X называется энтропией Хартли множества X).

При α=1 – энтропия Шеннона (с точностью до основания логарифмов, т.е. постоянного множителя): $S_{\alpha1}(X)=-\sum_{i=1}^{N}p_i\log p_i$.

При α→1 – энтропия взвешивает события более равномерно, менее зависимо от их вероятностей; при α=1 – термостатика Гиббса.

При α=2, $S_{\alpha2}=-\log\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}p_i^2=-\log P(X=Y)\right)$ – энтропия столкновений; X и Y – независимые и идентичные распределения. Квадратичная энтропия довольно широко используется в физике, обработке сигналов и экономике.

При α→∞ энтропия определяется лишь самыми высокими вероятностями событий; существует предел $S_{\alpha\infty}(X)=\min_i(-\log p_i)=\left(\max_i\log p_i\right)=-\log\max_i p_i$ – *min*-энтропия (наименьшее значение S_α). Мин-энтропия Sα∞ - наибольшее действительное число b такое, что все события происходят с вероятностью 2^{-b}. Это наименьшая мера энтропии в семействе Реньи энтропий и обеспечивает наилучший способ измерения информационного содержания дискретной случайной величины. В частности, мин-энтропия никогда не превышает энтропию Шеннона. Мин-энтропия имеет важные приложения для экстракторов случайностей в сфере теоретической информатики: Экстракторы способны извлекать хаотичность из случайных источников с большой мин-энтропией; там, где большой энтропии Шеннона не хватает для решения этой задачи.

При |1-α|=|η|<<1 S_α переходит в энтропию Цаллиса S_q, т.е. в отличие от обобщённой энтропии Реньи, в случае двух статистически независимых систем, обладающих W_1 и W_2-состояниями, соответственно, полная энтропия $S(W_1W_2)\neq S(W_1)+S(W_2)$ – энтропия не аддитивна.

Неравенство между различными значениями α:

$$\log N=S_{\alpha0}\ge S_{\alpha1}\ge S_{\alpha2}\ge S_{\alpha\infty} \qquad (80)$$

При α>1 выполняется неравенство в противоположном направлении. В частности, $S_{\alpha\infty}<S_{\alpha2}<2S_{\alpha\infty}$. Энтропия Шеннона S_1 может быть сколь угодно высокой для величины случайной переменной X с фиксированной мин-энтропией.

Неравенства можно представить в виде

$$\log\sum_{i=1}^{n}p_i^2\ge\log\sup_i p_i^2=2\log\sup p_i \qquad (81а)$$

$$\log\sum_{i=1}^{n}p_i^2<\log\sup_i p_i\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)=\log\sup p_i \qquad (81б)$$

$S_{\alpha 1}(x) \geq S_{\alpha 2}(x)$, т.к. $\sum_{i=1}^{M} p_i \log p_i \leq \log \sum_{i=1}^{M} p_i^2$ (81в)

sup - супремум – точная верхняя грань.

Спектр расхождения (дивергенции) Реньи обобщает расхождения Кульбака-Лейблера. Расхождение Реньи порядка α (α-дивергенция), где α>0, распределения P от распределения Q определяется:

$$D_\alpha(P \parallel Q) = \frac{1}{\alpha - 1} \log\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^\alpha}{q_i^{\alpha-1}} \right) \quad (82)$$

при 0<α<∞ и β≠1. Так определённое расхождение принимает неоотрицательные значения и является неубывающей функцией α. В частном случает при α=1 это преобразование определяется по формуле

$$D_\alpha(p,q) = \frac{1}{\alpha - 1} \ln \sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha q_i^{1-\alpha} \quad (83)$$

называется расхождением Кульбаха-Лейблера.

Расхождение Реньи (α-расхождение) используют, например, для сравнения изображений.

Определить дивергенцию Реньи для некоторых значений α=0, 1, ∞ можно, переходя к пределам. Так, предел α→1 даёт дивергенцию Кульбака-Лейблера.

S_α – не увеличивается с ростом α, что можно доказать дифференцированием

$$-\frac{dH_\alpha}{d\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \sum_{i=1}^{n} z_i \log\left(\frac{z_i}{p_i} \right), \quad (84)$$

где $z_i = \frac{p_i^\alpha}{\sum_{j=1}^{n} p_j^\alpha}$.

Дифференциал пропорционален дивергенции Кульбаха-Лернера, которая всегда не отрицательна. Это расхождение также известно как α-дивергенция.

Энтропию Реньи первого порядка называют информационной энтропией, а энтропию Реньи второго порядка – корреляционной энтропией.

Для непрерывного распределения случайной величины

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log \int p^\alpha(x) dx \quad (85)$$

и для квадратичной энтропии

$$S_{\alpha 2}(X) = \log \int p^2(x) dx$$

Заметим, что квадратичная энтропия не является положительной, она может быть произвольно большой отрицательной.

Реньи предложил меру дивергенции, отличную от Кульбаха-Лернера

$$\mathrm{D}_\alpha(\mathrm{f} \mid \mathrm{g}) = \tfrac{1}{\alpha-1} \log \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \left(\tfrac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{g}(\mathrm{x})} \right)^{\alpha-1} \mathrm{dx} \quad (86)$$

Термостатистика Реньи является обобщением, включающим в себя термостатистику Гиббса как частный случай, соответствующий значению α=1 параметра Реньи. В отличие от энтропии Гиббса–Шеннона, α-энтропия возрастает с увеличением отклонения распределения от распределения Гиббса (с ростом параметра порядка η=1-α) и достигает своего максимума при максимально возможном значении η_{max}; при этом распределение Реньи становится степенным распределением. Переход от распределения Гиббса, описывающего состояние динамического хаоса, к степенным распределениям Реньи, характерным для упорядоченных самоорганизованных систем, соответствует

возрастанию “параметра порядка” η от нулевого значения при q=1 до η_{max}=1-q_{min}. При этом энтропия Гиббса–Шеннона переходит в энтропию Реньи.

Переход от обычной термостатистики Гиббса к термостатистике Реньи носит характер фазового перехода упорядочения (переход от менее к более упорядоченному состоянию) с параметром порядка η – энтропийный фазовый переход. Можно показать, что, по крайней мере, в случае степенного гамильтониана, энтропия Реньи максимальна при наибольшем возможном значении параметра порядка η (при этом распределение Реньи становится степенным распределением), в то время как обычная энтропия максимальна при η=0 и убывает с ростом η. Поэтому, если в качестве статистического определения энтропии выбрать не выражение Гиббса–Шеннона, а более общую форму Реньи, то эволюция системы в более упорядоченные состояния (самоорганизация), сопровождаемая ростом термодинамической энтропии, становится предпочтительнее деградации.

При η=0 (точка фазового перехода) производная энтропии по параметру порядка η испытывает скачок - фазовый переход в более упорядоченное состояние с параметром порядка η≠0: естественная эволюция в направлении самоорганизации. В результате энтропийного фазового перехода система переходит в более упорядоченное состояние. В частности, если параметр порядка представляет собой приращение температуры, то этот скачок соответствует скачку теплоемкости, характерном для фазовых переходов второго рода. Здесь мы имеем дело с переходом от термостатистики Гиббса к термостатистике Реньи, соответствующей не нулевым значениям параметра порядка η. В отличие от обычного фазового перехода, условия реализации которого определяются только температурой перехода, условия реализации энтропийного перехода, по-видимому, определяются по-своему для каждой конкретной системы. Например, порог возникновения турбулентности как упорядоченной структуры определяется критическим числом Рейнольдса, а появление ячеек Бенара при тепловой конвекции – критическим числом Рэлея.

Замечание. В термостатистике Реньи в соответствии со вторым началом термодинамики (принципом возрастания энтропии) эволюция систем в упорядоченной фазе с параметром порядка η>0 (α<1) идёт в направлении самоорганизации, т.е. роста $\eta \to \eta_{max}$. Необоснованное применение энтропии Гиббса–Шеннона (т.е. частного случая энтропии Реньи с η=0) к подобным системам предсказывает противоположное направление эволюции к состоянию “тепловой смерти”, η→0.

Социальные, экономические и биологические системы реализуются, как правило, в упорядоченной самоорганизованной форме, в связи с чем для них характерны именно степенные и близкие к ним распределения, но не распределение Гиббса.

Зависящая от α термодинамическая энтропия в термостатистике Реньи определяется как энтропия Реньи для распределения Реньи. Максимум максиморум этой энтропии достигается при наименьшем $\alpha=\alpha_{min}$, т.е. при наибольшем возможном значении параметра порядка η. Распределение Реньи при таком η переходит в степенное распределение, характерное для сложных систем. Переход от обычной термостатистики Гиббса к термостатистике Реньи носит характер фазового перехода упорядочения с параметром порядка η. Как только система перейдёт в это новое фазовое состояние термостатистики Реньи, в ней будет спонтанно развиваться самоорганизация более упорядоченного состояния, сопровождаемая ростом термодинамической энтропии. Такое поведение энтропии устраняет противоречие между вторым законом термодинамики и эволюцией системы в сторону самоорганизации.

Энтропии Реньи играют важную роль в экологии и статистике, определяя индексы разнообразия. Энтропия Реньи также важна в квантовой информации, она может быть использована в качестве меры сложности. В цепочке Гейзенберга XY энтропия Реньи была рассчитана в терминах модульных функций, зависящих от α. Они также приводят к спектру показателей фрактальной размерности.

Распределение Реньи отличается от распределения Гиббса и может быть представлено в виде:

$$p_i^{(R)} = \frac{1}{Z_\alpha^{(R)}}\left(1-\beta\frac{\alpha-1}{\alpha}\Delta H_i\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (87)$$

$$Z_\alpha^{(R)} = \sum_i^W \left(1-\beta\frac{\alpha-1}{\alpha}\Delta H_i\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (88)$$

где $\Delta H_i = H_i - U$.

При $\alpha \to 1$ распределение $\{p_i^R\}$ переходит в каноническое распределение Гиббса, а

$$\beta \to \beta_0 = \frac{1}{k_B T_0}. \quad (89)$$

Физическая температура в термостатистике Реньи совпадает с обычной термодинамической температурой T_0.

Важным достижением Реньи является установление формулы связи между энтропией и континуумом мультифрактальных размерностей, что позволило достаточно просто решать проблемы фрактальной параметризации как конструктивных фракталов, так и природных структур. Этот тип энтропии используется для создания индексов разнообразия в экологии и статистике, как мера сложности в квантовой информации, при расчёте спектра показателей фрактальной размерности, при анализе адронных систем, при описании дробной диффузии, многофрактальных систем, турбулентности, при анализе землетрясений.

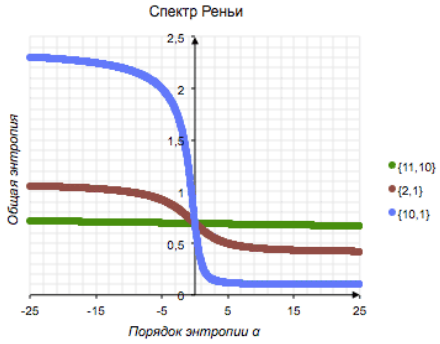


Рис. 12. Спектры Реньи для двухкомпонентой системы с различной массой.

Таким образом, переход от обычной термостатистики Гиббса к термостатистике Реньи носит характер фазового перехода упорядочения с параметром порядка η. Как только система перейдет в это новое фазовое состояние термостатистики Реньи, в ней начинает спонтанно развиваться самоорганизация более упорядоченного состояния, сопровождаемая ростом термодинамической энтропии.

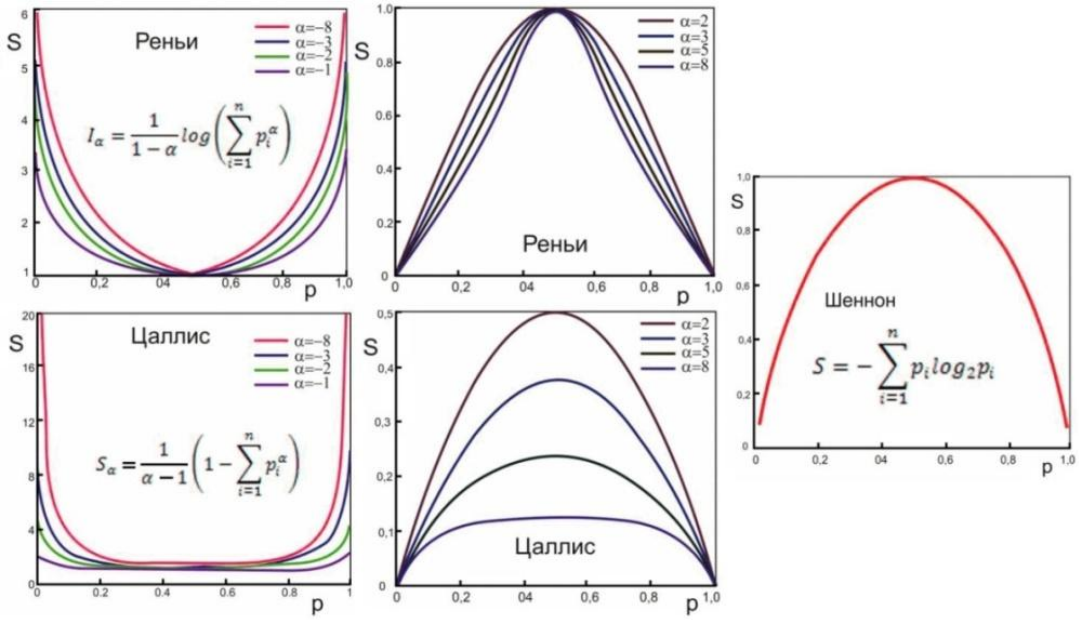


Рис. 13. Сравнение зависимостей энтропий Шеннона, Цаллиса и Реньи от вероятности события при различных значениях параметра α (как положительных, так и отрицательных.

При исследовании множества объектов вводится понятие спектра Реньи. Пусть имеется неоднородное множество объектов (т. е. такое, в каком они имеют разные массы) и посмотрим, как ведёт себя общая энтропия Реньи этого множества при изменении порядка α. На рис. 12 даны примеры для множеств из двух компонентов с различными массами. Спектры имеют характерную форму, которая зависит от степени неоднородности множества: чем больше разница между крупнейшим объектом и малейшим из них, тем выше и отчетливее ступенька при переходе от отрицательных значений α к положительным. При очень больших значениях α общая энтропия Реньи стабилизируется у уровня, который равен частной шенноновской энтропии крупнейшего объекта множества. Наоборот, при стремлении α к минус бесконечности, общая энтропия стремится к уровню частной шенноновской энтропии малейшего объекта множества.

Существует взаимосвязь между информацией и структурой: каждая структура несёт в себе информацию, структура не возможна без информации, а информация невозможна сама по себе, без носителя, структуры.

Рассмотрим самоподобное множество, порождённое сегментами одинаковой длины с одним показателем скейлинга – размерность Хаусдорфа. Далее к каждому отрезку множества a_i припишем свой собственный вес p_i. Тогда энтропия Реньи

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\sum_i^{N(\varepsilon)} p_i^\alpha\right), \quad \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i = 1 \tag{90}$$

Энтропия Реньи позволяет позволяет вычислять показатель фрактала.

Показатель фрактала вводится как предел

$$d_\alpha = \lim_{a\to 0}\frac{S_\alpha(\alpha)}{\log\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{\alpha-1}\frac{\log\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^\alpha\right)}{\log\left(\frac{1}{a}\right)} \tag{91}$$

где $S_\alpha(\alpha)$ – энтропия Реньи.

Для характеристики фрактала и тем более мультифрактала используют первые три размерности Реньи: d_0 – обычная хаусдорфова размерность множества A, d_1 – информационная размерность и d_2 – корреляционная размерность.

Как уже упоминалось, выборочная энтропия Шеннона определяется из соотношения $H(a) = -\sum_{i=1}^{n(a)} p_i \log_2 p_i$, где a – элемент покрытия. При уменьшении размеров покрытия $a \to 0$ и роста числа элементов этого покрытия $N(a) \to \infty$, энтропия Шеннона, как мы помним, неограниченно возрастает $H(a) \to \infty$. Однако предел

$$d_1 = \lim_{a\to 0}\frac{H(a)}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)} \tag{92}$$

может существовать. Если такой предел действительно существует, то им определяется величина d_1, которая получила название информационной размерности. В том случае, если предела (92) не существует, вводят понятие верхней и нижней информационной размерности:

$$d_{1\inf} = \lim_{a\to 0}\inf\left(\frac{H(a)}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}\right); \tag{93a}$$

$$d_{1\sup} = \lim_{a\to 0}\sup\left(\frac{H(a)}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}\right); \qquad (93б)$$

Мы знаем, что энтропия достигает своего максимального значения при равенстве вероятностей $p_i=1/N(a)$. В этом случае из формулы (92) получаем

$$d_1 = \lim_{a\to 0}\frac{\log_2 N(a)}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)} \qquad (94)$$

что с точностью до основания логарифмов (что не существенно) совпадает с формулой для размерности Хаусдорфа, то есть в этом предельном случае $d_1=d_0$.

В теории динамических систем предел (94) называют фрактальной размерностью или ёмкостью аттрактора. Если же предела (94) не существует, то говорят о нижней и верхней емкости аттрактора.

В термодинамике энтропия есть мера беспорядка в системе. Поскольку $S(\varepsilon)\approx\varepsilon^{-d_1}$, то величина d_1 характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. В связи с этим обобщенную фрактальную размерность d_1 часто называют информационной размерностью. Она показывает, как информация, необходимая для определения местоположения точки, возрастает при стремлении размера ячейки ε к нулю.

Введём теперь корреляционную размерность d_2.

Кореляционный интеграл $I(\varepsilon)$ отражает вероятность того, что две произвольно выбранные точки из множества A лежат внутри одной ячейки с размером ε.

$$I(\varepsilon)\approx\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \approx \varepsilon^{d_2}. \qquad (95)$$

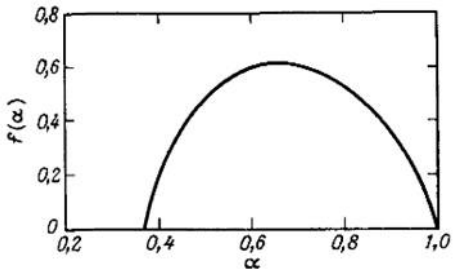


Рис.14 . Типичный вид функции f(a).

Корреляционная размерность, d_2 определяется через корреляционный интеграл:

$$C(a) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\eta\left(a-\left|X_i-X_j\right|\right). \qquad (96)$$

Здесь N – число выборок, X_i, X_j – векторы положения точек i и j, $\eta(Y)$ – функция Хевисайда (функция принадлежности к интервалу a). Значение $C(a)$ определяет относительное число пар точек, расстояние между которыми не больше a. Если предел

$$d_2 = \lim_{a\to 0}\frac{\ln C(a)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} \qquad (97)$$

существует, то его значение d_2, называется корреляционной размерностью.

Таким образом, хаусдорфова размерность d_0 – характеризует «пористость» или плотность объекта, то есть то, как объект заполняет собою пространство вложения. Информационная размерность d_1 играет важную роль в анализе нелинейных динамических систем, особенно при описании потери информации в ходе эволюции хаотических систем. В этом плане она связана с показателями Ляпунова и энтропией Колмогорова. Это – количественный параметр системы, характеризующий меру её хаотичности. со временем система изменяется и эти процессы влекут за собой

существенные вариации ее информационной размерности, то это говорит о том, что эти процессы могут быть связаны с ростом или диссипацией неравновесных структур, т. е. переходам типа хаос – порядок или наоборот. Таким образом, информационная размерность позволяет количественно отслеживать направление и темп эволюционных процессов, таких как самоорганизация в среде структур разных уровней или, напротив, распад организованных структур и общая хаотизация.

Корреляционная размерность d_2 определяется корреляциями между элементами, составляющими среду, то есть вероятностью найти на расстоянии a от данного элемента множества один или несколько элементов того же множества. Эта размерность является также мерой иерархического скучиванья, т. е. характеризует упорядоченность внутренней структуры объекта. Её теоретическая значимость обусловлена тесной связью с корреляционными функциями, которые определяют все физические особенности рассматриваемой среды.

В главе, посвящённой фракталам, мы упомянули понятие мультифрактала.

В рамках конструктивных фракталов мультифрактал можно определить как «нагруженный» фрактал, в котором каждому элементу a_i ставится в соответствие некий «вес» или вероятность p_i. Для количественного описания мультифракталов рассчитывается спектр размерностей, соответствующих особенностям данного мультифрактала.

Мультифрактал — комплексный фрактал, который может детерминироваться не одним единственным алгоритмом построения, а несколькими последовательно сменяющими друг друга алгоритмами. Каждый из них генерирует паттерн со своей фрактальной размерностью.

Мультифрактальный анализ ведётся с использованием энтропии Реньи. Энтропия как мера хаотичности и мультифрактальность, как мера структурной упорядоченности являются взаимно дополняющими понятиями. Можно показать, что континуум мультифрактальных размерностей связан с энтропией Реньи. Это обстоятельство позволяет решить проблему фрактальной параметризации, как конструктивных фракталов, так и природных структур.

Мультифракталы описываются обобщёнными фрактальными размерностями Реньи, d_α. Всю совокупность величин d_α изучаемого объекта называют спектром размерностей Реньи данного объекта. Здесь при исследовании объекта вводят вероятностную меру p_i и вычисляют энтропию Реньи, что в свою очередь позволяет находить весь мультифрактальный спектр размерностей Реньи и физически адекватно интерпретировать получаемые результаты.

Рассмотрим фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область A, имеющую $diamA=L$ в евклидовом пространстве размерности n. Пусть на каком-то этапе его построения он представляет собой множество точек из $N>>1$, как-то распределенных в этой области. В конце концов, предполагаем, что $N\to\infty$. Множество точек может представлять собой некоторую популяцию, состоящую из особей одного вида распределенных по области A. Такой популяцией могут быть, например, народонаселение или сеть метеостанций. Обе популяции неравномерно распределены по поверхности Земли. Важно, что неравномерное распределение особей остается в силе независимо от линейного масштаба. Разобьём всю область A на гиперкубические ячейки со стороной ε и объемом ε_d соответственно. Важны только занятые ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка. Обозначим $N(\varepsilon)$ число таких ячеек, оно очевидно зависит от ε. Пусть $n_i(\varepsilon)$ – число точек в i-й ячейке. Тогда величина $p_i(\varepsilon)=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{n_i(\varepsilon)}{N}$ – вероятность того, что

некоторая точка содержится в *i*-м кубике. Она характеризует относительную заселенность ячейки. По правилу нормировки вероятностей: $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon)=1$.

Введём в рассмотрение обобщенную статистическую сумму, характеризуемую показателем α:

$$Z(\alpha,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^{\alpha}(\varepsilon), \qquad (98)$$

где $-\infty\le\alpha\le+\infty$.

Спектром обобщенных фрактальных размерностей Реньи, характеризующих распределение точек в области A, называется совокупность величин:

$$\mathrm{d}_{\alpha}=\frac{\tau(\alpha)}{\alpha-1} \qquad (99)$$

где $\tau(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln Z(\alpha,\varepsilon)}{\ln\varepsilon}$

Обобщенные фрактальные размерности Реньи

$$d_{\alpha}=\lim_{a\to 0}\frac{S_{\alpha}(a)}{\log\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{1}{\alpha-1}\frac{\log\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^{\alpha}\right)}{\log\left(\frac{1}{a}\right)}, \qquad (100)$$

Для обычного однородного фрактала все эти размерности совпадают. Если $d_{\alpha}=const$, т.е. не зависит от α, то рассматриваемое множество точек представляет собой обычный, регулярный фрактал, который характеризуется всего лишь одной величиной – фрактальной размерностью d_f. Напротив, если функция d_{α} как-то меняется с α, то рассматриваемое множество точек является мультифракталом.

В формуле (100) порядок α может принимать значения в интервале $+\infty<\alpha<-\infty$. Нетрудно показать, что $d\alpha$ – монотонно невозрастающая функция α, т.е. при $\alpha<\alpha'$, $d_{\alpha}\ge d_{\alpha'}$. Знак равенства возникает лишь в исключительных случаях идеальных самоподобных фракталов, например, все размерности dq равны для канторова множества. Всю совокупность величин dq рассматриваемого объекта называют спектром размерностей Реньи данного объекта.

Мультифрактал характеризуется нелинейной функцией $\tau(\alpha)$,определяющей поведение статистической суммы $Z(\alpha,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$

$$Z(\alpha,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^{\alpha}(\varepsilon)\approx\varepsilon^{\tau(\alpha)}. \qquad (101)$$

В случае обычного фрактала функция $\tau(\alpha)=(\alpha-1)d$ линейна. Тогда $d_{\alpha}=d$ не зависят от α. Фрактал, все обобщенные фрактальные размерности d_{α} которого совпадают, назвают монофракталом.

Если распределение точек по ячейкам неодинаково, то фрактал является неоднородным, т.е. представляет собой мультифрактал, и для его характеристики необходим целый спектр обобщенных фрактальных размерностей d_{α}, число которых, в общем случае, бесконечно. Так, например, при $\alpha\to\infty$ основной вклад в обобщеннную статистическую сумму вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц n_i в них и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью их заполнения p_i. Наоборот, при $\alpha\to-\infty$ основной вклад в сумму дают самые разреженные ячейки с малыми значениями чисел заполнения p_i. Таким образом, функция d_{α} показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек A.

Обобщенные фрактальные размерности d_{α} для некоторых конкретных значений α имеют определённый физический смысл. Так, при $\alpha=0$ $N(\varepsilon)\sim\varepsilon d_0$, т.е. величина d_0 –

обычная хаусдорфова размерность множества A. Она является наиболее грубой характеристикой мультифрактала и не несёт информации о его статистических свойствах.

Введём теперь понятие информационной размерности d_1. Поскольку $Z(1,\varepsilon)=1$, то $\tau(1)=0$ и

$$Z(\alpha,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^{\alpha} = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \cdot \exp\left[(\alpha-1)\ln p_i\right] \tag{102}$$

Отсюда при $\alpha\to 1$ имеем

$$d_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon} \tag{103}$$

С точностью до знака числитель в этой формуле представляет собой энтропию фрактального множества:

$$S(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \tag{104}$$

Такое определение энтропии множества полностью идентично используемому в термодинамиаке, где под p_i понимается вероятность обнаружить систему в квантовом состоянии i. В результате величина иформационной размерности d_1 связана с энтропией соотношением

$$d_1 = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{S(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \tag{105}$$

Размерности Реньи не являются фрактальными размерностями в строгом понимании, поэтому их называют обобщенными. Существует функция мультифрактального спектра, которая имеет непосредственное отношение к фрактальности. При подсчёте статистической суммы в спектре Реньи суммируются ячейки с разной заполненностью. Функция же мультифрактального спектра $f(\alpha)$ характеризует собой хаусдорфову размерность однородного фрактального подмножества $A\alpha\subset A$, характеризуемого одинаковыми вероятностями заполнения ячеек $p_i\sim\varepsilon_a$. Таким образом становится более понятным термин мультифрактал – его можно понимать как объеденение однородных фракталов. Функция $f(\alpha)$ обладает следующими свойствами $f(\alpha)\le d_0, f(\alpha)\le\alpha$. Знак равенства появляется, для полностью однородного фрактала.

Фрактальных размеростей Реньи бесчисленное множество, но на практике первых трёх размерностей с их простотой вычислений и геометрической и физической наглядностью оказывается вполне достаточно.

7.7 Квантовая информатика

В настоящее время квантовая информатика достаточно хорошо развитая область науки, в которой много внимания уделяется информационным и энтропийным характеристикам квантовых состояний. В квантовой информатике используются различные виды квантовых энтропий. Мы ограничимся рассмотрением энтропий Неймана, линейной, Реньи, Цаллиса, Холево.

Микромир по многим параметрам существенно отличается от макромира, так что описывающая его квантовая механика обладает собственной идеологией, собственной математикой, своими моделями со своими параметрами. Поэтому прежде, чем переходить к квантовой информации, полезно ознакомиться с некоторыми положениями квантовой механики и особенностями матричного исчисления.

7.7.1 Некоторые положения квантовой механики

Прежде, чем углубляться в мир квантовых идей дадим небольшую справку по обозначениям бра-кет. Обозначим вектор состояния, соответствующий состоянию ψ, как

|ψ>, а сопряжённый вектор, соответствующий состоянию ψ, как <ψ|. Скалярное произведение векторов |ψ> и <ψ> обозначим <ψ|ψ>, а образ вектора |ψ> под действием оператора F – как $F|\psi>$. Символ <ψ| называется бра (*bra*), а символ ψ, как |ψ> – кет (*ket*). Подобные обозначения согласуются с обозначениями обычной линейной алгебры, но более удобны в квантовой механике, т. к. позволяют более наглядно и коротко называть используемые векторы. Названия векторов образованы разбиением слова *bracket* (скобка) на две звучные части – *bra* и *ket*. При рассмотрении квантовой системы, состоящей из двух подсистем, пространство состояний строится в виде тензорного произведения. Подобные системы, помимо комбинаций состояний своих подсистем, имеют также и сцепленные (запутанные) состояния.

Начнём с некоторых определений.

Квантовая физика – раздел теоретической физики, в котором изучаются квантово-механические системы и законы их движения. Основные законы квантовой физики изучаются в рамках квантовой механики и квантовой теории поля и применяются в других разделах физики.

Квантовая механика – раздел теоретической физики, описывающий физические явления, в которых действие сравнимо по величине с постоянной Планка. Предсказания квантовой механики могут существенно отличаться от предсказаний классической механики. Поскольку постоянная Планка является чрезвычайно малой величиной по сравнению с действием объектов при макроскопическом движении, квантовые эффекты в основном проявляются в микроскопических масштабах. Если физическое действие системы намного больше постоянной Планка, квантовая механика органически переходит в классическую механику. В свою очередь, квантовая механика является нерелятивистским приближением (то есть приближением малых энергий по сравнению с энергией массивных частиц системы) квантовой теории поля. Основными понятиями квантовой кинематики являются понятия наблюдаемая и состояния.

Квантовая статистика – раздел статистической механики, в котором n-частичные квантовые системы описываются методом статистических операторов комплексов частиц (редуцированными матрицами плотности). Число частиц n может быть произвольным натуральным (конечным) числом или бесконечностью. В узком смысле под квантовой статистикой имеют в виду статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.

Квантовая информатика – раздел науки на стыке квантовой механики, теории алгоритмов и теории информации. В квантовой информатике изучаются общие принципы и законы, управляющие динамикой сложных квантовых систем, в том числе - квантовом компьютере. Занимается вопросами квантовых вычислений и квантовых алгоритмов, физикой квантовых компьютеров, квантовой криптографией и квантовой теорией информации. Много внимания уделяет запутанным квантовым состояниям и порождаемым ими нелокальными свойства квантовой физики многих тел.

Квантовая информация – раздел науки на стыке квантовой механики, и теории информации, включающей вопросы квантовых вычислений и квантовых алгоритмов, квантовых компьютеров и квантовой телепортации, квантовой криптографии и проблемы декогерентности. Базовым понятием классической теории информации является кубит, принимающий значения 0 или 1.

Кубит – единица информации. Кубиты (квантовые биты) могут находиться в состоянии, являющемся суперпозицией 0 и 1. Несколько кубитов могут быть в запутанном состоянии (*entangled*). Возможность нахождения в суперпозиции - фундаментальное отличие кубита от классического бита; возможности работы с этой суперпозицией имеют серьёзные ограничения: нельзя достоверно узнать в каком состоянии находится кубит. Есть лишь возможность измерить его. В отличие от битов, кубиты могут принимать бесконечно много различных состояний и представляют собой системы, квантовые состояния которых описываются вектором двумерного гильбертова пространства.

Квантовый компьютер – вычислительное устройство, использующее явления квантовой суперпозиции и квантовой запутанности для передачи и обработки данных.

Квантовая наблюдаемая (наблюдаемая квантовой системы) – линейный самосопряжённый оператор, действующий на сепарабельном (комплексном) гильбертовом пространстве чистых состояний квантовой системы. Норма оператора - наибольшая абсолютная величина измеряемого числового значения физической величины.

Волновая функция, или пси-функция ψ – комплекснозначная функция, используемая в квантовой механике для описания чистого состояния системы. Является коэффициентом разложения вектора состояния по базису (обычно координатному): $|\psi(t)\rangle = \int \Psi(x,t)|x\rangle dx$ **где** $|x\rangle = |x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ **– координатный базисный вектор, а** $\Psi(x,t) = \langle x | \psi(t)\rangle$ **– волновая функция в координатом представлении. Плотность вероятности нахождения частицы в данной точке конфигурационного пространства в данный момент времени считается равной квадрату абсолютного значения волновой функции этого состояния в координатном представлении.**

Плотность вероятности нахождения частицы в данной точке конфигурационного пространства в данный момент времени считается равной квадрату абсолютного значения волновой функции этого состояния в координатном представлении. Волновая функция - метод описания **чистого состояния** квантовомеханической системы. **Смешанные квантовые состояния** описывают оператором типа матрицы плотности; некая обобщённая функция от двух аргументов должна описать корреляцию нахождения частицы в двух точках

Среднее значение физической величины A, оператором которой является $\hat{A}$, а квантовое состояние описывается волновой функцией ψ, в x представлении равно:

$$\langle A\rangle = \left(\psi^*, \hat{A}\psi\right) = \int \psi^*(x), \hat{A}\psi(x) dx, \qquad (106)$$

где (*) означает комплексное сопряжение.

Квантовое состояние – любое возможное состояние, в котором может находиться квантовая система. Оно может быть чистым, смешанным или запутанным.

Чистое сотояние квантовой системы – состояние, которое можно описать волновой функцией ψ(*x*)=⟨*x*|ψ⟩, Это полностью указанное квантовое состояние. Вся классическая квантовая механика основана на применении чистых ансамблей.

Смешанное состояние квантовой системы (смесь состояний) – состояние системы, которая с разной вероятностью находится в некотором дискретном наборе *n* состояний (дискретный базис), каждое из которых описывается своей волновой функцией ψ_i. Для полного описания смешанного состояния недостаточно задания одного вектора состояния |ψ>.

Среднее значение какой-либо физической величины A в смешанном состоянии определяется как:

$$\overline{A} = \langle A\rangle = \sum_i p_i A_i, \quad A_i = \int \psi_i^*(x)\hat{A}\psi_i(x)dx; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1; p_i = \frac{N_i}{N}, \sum_{i=1}^{n} N_i = N, . \qquad (107)$$

где p_i – вес состояния ψ_i.

Оператором плотности вероятности, соответствующим чистому состоянию, является:

$$\rho = (\psi, \psi^*). \qquad (108)$$

а оператором плотности, соответствующим плотности вероятности смешанного состояния, является

$$\rho_{i^*i} = p_i(\psi^*, \psi_i) \qquad (109)$$

Здесь ρ_{i^*j} – матрица плотности вероятности смешанного состояния или просто матрицей плотности.

Среднее значение физической величины A:

$$\langle A\rangle = Tr\left(\rho_{i^*i}\hat{A}_{ii^*}\right). \qquad (110)$$

Таким образом, среднее значение наблюдаемой A для состояния, заданного матрицей плотности ρ, представляет собой след произведения операторов A и ρ:

$$<A>=Tr(A\rho)>. \quad (111)$$

Плотность состояний – величина, определяющая количество энергетических уровней в интервале энергий на единицу объёма в трёхмерном случае (на единицу площади – в двумерном случае).

Матрица плотности (оператор плотности, оператор матрица плотности, статистический оператор) – один из способов описания состояния квантовомеханической системы.

Оператор плотности, ρ, – неотрицательный самосопряженный оператор с единичным следом, действующий в пространстве состояний (в сепарабельном гибельртовом пространстве). Равенство следа единице соответствует единичной нормировке полной вероятности на данном пространстве состояний: $Tr(\rho)=1$.

След матрицы – операция, отображающая пространство квадратных матриц в поле, над которым определена матрица (для действительных матриц – в поле действительных чисел, для комплексных матриц – в поле комплексных чисел).

Оператор плотности имеет единичный след; является неотрицательно определённым; смесь состояний ρ_i с вероятностями p_i описывается матрицей плотности $\sum_i p_i \rho_i$. **След матрицы** – это сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы, т.е. если a_{ij} элементы матрицы A, то её след $trA = \sum_i a_{ii}$ (т.е. $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{ii}+...+a_{nn}$.). *В математических текстах встречается два обозначения операции взятия следа: TrA (от англ. trace – след), и SpA (от нем. Spur – след).* След матрицы плотности равен единице в силу нормировки полной вероятности: $Tr(\rho)=1$; след квадрата матрицы плотности равен единице для чистых состояний и всегда меньше единицы для смешанных: $Tr(\rho^2)\le 1$ и $Tr(\rho^2)=1 \Leftrightarrow |\psi><\psi|$. След матрицы $a=a_{ik}$ – сумма его диагональных компонент: $Tra = Tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$. Множество матриц плотности выпукло и его граничными точками являются чистые состояния

Матрица плотности – оператор плотности распределения вероятности различных состояний рассматриваемой системы. Из вектора состояния (матрицы плотности) можно получить все физические величины (динамические переменные), которые используются при классическом описании системы (энергию, координаты, импульсы, моменты импульсов и т. д.). Причём величины не только скалярные, но и векторные, а также функции от этих величин. Важное свойство матрицы плотности – это её эрмитовость: любая матрица плотности симметрична, её недиагональные элементы расположены парами симметрично относительно главной диагонали. В комплексном случае эти пары комплексно сопряжены. Симметричная структура матрицы плотности следствие корреляций в системе всегда выступающей парами: если одна подсистема взаимодействует с другой, то и вторая коррелирует с первой – это одно и то же взаимодействие. Все собственные значения матрицы плотности вещественны (нет комплексных чисел) и неотрицательны (больше нуля или равны ему). Для матрицы плотности всегда существует унитарное преобразование, которое приводит её к диагональной форме, и по диагонали будут стоять неотрицательные вещественные числа.

Матрица плотности описывает как замкнутые системы (чистые состояния), так и открытые системы (смешанные состояния), т.е. системы, взаимодействующие как со своими частями, так и с окружением. Необходимость её использования для описания квантовых систем связана с тем, что формализм волновой функции описывает замкнутые системы, т. ес. только чистые состояния. Пространство же состояний для матрицы плотности это не только набор всех дискретных (базисных) состояний, это и все

возможные корреляции между ними. Поэтому матрица плотности в квантовой статистике играет роль, подобную функции распределения Гиббса в классической статистической физике.

Квантовые состояния, соответствующие векторам, называются чистыми, остальные – смешанными.

След квадрата матрицы плотности:

$$Tr\left(\rho^2\right)=\sum_{ii^*}\left|\rho_{ii^*}\right|^2\le 1. \qquad (112)$$

Это выражение можно использовать в качестве меры чистоты состояния системы (параметр чистоты $\mu=\mathrm{Tr}(\hat{\rho})^2$). Для чистых состояний только одно значение – p = 1, все остальные p_i = 0, и μ=1. Для смешанных состояний всегда μ<1.

Оператор плотности, отвечающий чистому состоянию |ψ> есть ортогональный проектор $\rho^2=\rho=|\psi><\psi|$. Если данный квантовый объект (например, какая-то элементарная частица) находится в чистом состоянии, это означает, что вся информация о нём есть. Однако чистых состояний оказывается недостаточно для описания статистической системы и необходимо введение смешанных состояний.

Если система незамкнутая (открытая), то это смешанное состояние, и тогда она не описывается вектором состояния (волновой функцией), но её можно описать матрицей плотности, являющейся неотрицательным самосопряжённым оператором с единичным следом. Смешанное состояние отвечает случаю, когда система находится в каждом из взаимно ортогональных состояний. Матрица плотности ρ для ансамбля или смеси состояний $|\psi_j>$ с вероятностями ρ_j

$$\rho=\sum_j p_j\left|\psi_j\right\rangle\left\langle\psi_j\right|, \qquad (113)$$

где $\sum_j p_j=1..$

Матрица плотности ρ смешанного состояния обладает свойством эрмитовости, а диагональные элементы матрицы плотности неотрицательны.

В смешаных системах возможна квантовая телепортация, как чисто квантовый эффект нелокальности. Как известно, волновые функции по своей природе нелокальны, и расстояние между частями системы, описываемой этими функциями, существенной роли не играет. Если квантовая система находится в смешанном состоянии, описываемом Ур.1.26, то она разными своими частями может одновременно находиться в разных точках обычного пространства. Причём расстояние между этими точками пространства может быть любым. Воздействуя на одну часть системы, изменяют вероятность её состояния и тем самым мгновенно изменяют распределение вероятностей в других её частях, находящихся в том числе и в произвольно удаленных местах.

Задача квантовой томографии состоит в нахождении некоторого числа измерений, позволяющих точно определить квантовое состояние. Двумерное квантовое состояние может быть получено суперпозицией одномерных квантовых состояний. Пространство таких квантовых состояний называется сепарабельным. Однако гильбертово пространство допускает и несепарабельные пространства, т.е. квантовые двумерные состояния, которые не могут быть разделены. Такие состояния называются зацепленными (*entangled* - **запутанным)** квантовыми битами или забитами (*ebits*). Если система находится в чистом, незапутанном состоянии, то данная система имеет единственное решение. Если же состояние двух кубитов является зацепленным, то данная система несовместна и решения не имеет. Такое состояние невозможно создать простой суперпозицией кубитов и можно достичь только процессом их перепутывания.

Запутанные состояния – состояния, в которых определенные характеристики входящих в них микросистем связаны (“запутаны”) между собой каким-либо законом сохранения.

Квантовая запутанность – явление, при котором квантовые состояния двух или большего числа объектов оказываются взаимозависимыми (например, можно получить пару фотонов, находящихся в запутанном состоянии, и тогда если при измерении спина первой частицы спиральность оказывается положительной, то спиральность второй всегда оказывается отрицательной, и наоборот). Такая взаимозависимость сохраняется, даже если эти объекты разнесены в пространстве за пределы любых известных взаимодействий, что находится в логическом противоречии с принципом локальности.

Состояние двухчастичной системы называется запутанным, если оно не может быть записано как прямое произведение двух состояний из двух подсистемных гильбертовых пространств. Эффект квантовой запутанности лежит в основе многих приложений квантовой теории: построение квантового компьютера, квантовая криптография, квантовая телепортация и квантовое плотное кодирование. Если системы взаимодействуют друг с другом, то они квантово запутаны между собой (связаны нелокальными квантовыми корреляциями). Наличие любого взаимодействия – достаточное условие для квантовой запутанности (несепарабельности) взаимодействующих объектов. Связь между квантовой запутанностью и квантовой информацией устанавливает мера запутанности, основанная на метрике гильбертова пространства. Единственным способом создания запутанности между двумя микросистемами является взаимодействие этих микросистем друг с другом. Энтропия запутанности определяется для двух частичных чистых состояний, как энтропия фон Неймана одного из редуцированных состояний.

Мера информации определяется на основе понятия матрицы плотности $Y=<\rho>=Tr(\rho\rho)$. Для любого чистого состояния (замкнутой системы) мера информации равна 1 (следствие нормировки амплитуд вектора состояния). Это максимальное значение – т.е. для любой изолированной системы информация максимальна и равна единице. Для смешанных состояний (открытых систем) информация меньше единицы, и минимальное ее значение достигается для максимально смешанных состояний и равно $1/d$, где $d=2N$ – размерность гильбертова пространства (N – число двухуровневых подсистем). Таким образом, количество информации, содержащейся в системе, изменяется от $1/2N$ для максимально смешанных состояний до 1 для чистых состояний (изолированных систем). С физической точки зрения это легко объяснить. В замкнутой системе вся информация содержится в ней самой, и нормированная её величина равна 1. Для смешанных состояний, т. е. для систем, взаимодействующих со своим окружением, часть информации о системе теряется в её окружении. Минимум информации, который может остаться в самой системе (случай максимально смешанного состояния), определяется числом локализованных структур в системе в процессе декогеренции.

Важно понимать, что в квантовой физике знание максимально возможной информации обо всей микросистеме не гарантирует получение полной информации о каждой из её подсистем. В классике знание всей информации о макроскопической системе автоматически приводит к получению полной информации от каждой из её макроскопических подсистем. Однако есть один важный частный случай, когда знание информации о каждой из подсистем некоторой микросистемы приводит к знанию информации о микросистеме в целом. Он следует из **теоремы Шмидта**, определяющей условия, при которых знание информации о каждой из подсистем некоторой микросистемы приводит к знанию информации о микросистеме в целом. Для оценки чистоты системы используют разложение Шмидта – разложение, коэффициенты которого используют для оценки чистоты системы.

Распределение Шмидта определяется спектром редуцированных матриц плотности состояния. Благодаря ему можно установить связь двух матриц плотности подсистем одного состояния. Мера запутанности применима для произвольных замкнутых систем и характеризует меру квантовой запутанности подсистемы любой размерности со всем её окружением (также любой размерности). Чистое двухчастичное состояние запутано тогда

и только тогда, когда ранг Шмидта больше единицы. Ранг Шмидта – мера запутанности двухчастичных состояний: чем больше ранг Шмидта, тем сильнее запутано состояние. Двухчастичное состояние запутано тогда и только тогда, когда матрицы плотности его подсистем являются чистыми. Для любого чистого состояния $|\psi AB\rangle$ существуют такие ортонормированные базисы, на которых можно прибегнуть к разложению Шмидта. Если число членов разложения Шмидта (число Шмидта) равно единице, то состояние каждой подсистемы является чистым, а состояние полной системы $|\psi AB\rangle$ сепарабельным. В противном случае, состояние каждой подсистемы является смешанным, а состояние $|\psi AB\rangle$ перепутаным. Запутанность чистых двухчастичных состояний целиком определяется коэффициентами разложения Шмидта, а мерой является энтропия этих коэффициентов – редуцированная энтропия фон Неймана. Для случая трёх кубитов данное разложение уже не существует.

7.7.2 Энтропия фон Неймана

Квантовым обобщение информационной энтропии Шеннона является энтропия Неймана.

Нейман установил математические рамки квантовой механики (1932) предложив теорию измерения, в которой обычное понятие коллапса волновой функции описал как необратимый процесс, при этом он связал количество энтропии с статистическим оператором квантовой системы.

Как уже неоднократно упоминалось, в классической теории информации, энтропия Шеннона, H, связана с вероятностью распределения, $p_1,\ldots p_n$,

$$H(p)=p\ln p \qquad (114)$$

Введя матрицу плотности, Нейман распространил энтропию на квантовую систему и получил внешне аналогичное выражение. Для случая квантовых систем в смешанных состояниях фон Нейман обобщил шенноновское определение энтропии, приняв в качестве вероятностной меры элементы матрицы плотности.

Пусть задана матрица плотности $\rho\in H$ (гильбертово пространство состояний) квантовой системы. Матрица плотности положительно полуопределена $\rho=\rho^{+}$, $Tr\rho=1$. Микросистема описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$, где $|\rho_i\rangle$ – собственные вектора матрицы плотности, отвечающие собственным значениям p_i

$$\hat{\rho}|\rho_i\rangle = \rho_i|\rho_i\rangle. \qquad (115)$$

Здесь ρ_i – вероятности найти квантовую систему в чистом состоянии $\hat{\rho}_{\mathrm{i}} = |\rho_{\mathrm{i}}\rangle\langle\rho_{\mathrm{i}}|$: $0\le\rho\le 1$.

В базисе $\{|p_i\rangle\}$ матрица плотности имеет диагональный вид. Поэтому в базисе собственных векторов квантовая энтропия фон Неймана) определяется аналогично классической (информационной) энтропии $H(X)$ Шеннона при помощи собственных значений:

$$\mathrm{S_N} = -\sum_{\mathrm{i}} \rho_{\mathrm{i}} \ln \rho_{\mathrm{i}}. \qquad (116)$$

Энтропией Неймана системы с матрицей ρ называется функция

$$\mathrm{S_N} \equiv \mathrm{S}(\hat{\rho}) = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle_{\rho} = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \qquad (117)$$

где ρ – квантовое состояние – распределение вероятности по ансамблю;. плотность ρ определяется через волновую функцию ψ: $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$; Tr – след матрицы; ln – матричный натуральный логарифм.

Эта формула справедлива для любого представления матрицы плотности (формула никак не связана со специфическим базисом собственных векторов матрицы ρ. Из неё следует, что энтропия S не изменяется при любых унитарных преобразованиях базиса, в котором записана матрица ρ. (для практических вычислений удобнее находить

собственные вектора и собственные значения матрицы плотности, а потом вычислять энтропию по формуле $S = -\sum_i \rho_i \ln \rho_i$).

Собственный вектор матрицы M, соответствующий собственному числу λ, – любой, отличный от нуля вектор x, который удовлетворяет уравнению $Mx = \lambda_x$.

Основание логарифма принципиального значения не имеет, но как и в информатике энтропию Неймана записывают в виде:

$$S_N(\rho) \equiv -kTr(\rho \log_2 \rho \qquad (118)$$

где k – постоянная Больцмана. Обычно её опускают и энтропию записывают в безразмерном виде.

В энтропии Неймана i-ый диагональный элемент матрицы плотности имеет смысл вероятности нахождения системы в i-ом состоянии; след матрицы инвариантен относительно унитарных преобразований.

Основные свойства энтропии Неймана

1. Энтропия не отрицательна, $S_N \geq 0$, и $S_N=0$, когда одно из значений $\rho_k=1$, а остальные значения равны нулю: когда система находится в чистом состоянии; она максимальна ($S_N(\rho)=\ln d$) для максимально смешанного состояния, d – размерность гильбертова пространства;
2. Энтропия инвариантна относительно унитарных преобразований матрицы (не меняется при унитарных преобразованиях);
3. Энтропия $S_N(\rho)$ – вогнутая функция (как известно, функция $f(x)=-x\ln x$ вогнута). Из разложения Шмидта следует, что если система, которая состоит из двух подсистем, находится в чистом состоянии, то ненулевые наборы собственных значений матриц плотности ее подсистем совпадают. Это автоматически приводит к совпадению численных значений энтропий обеих подсистем. Если матрица плотности $\hat{\rho} = \sum_l W_l \hat{\rho}_l$ такая, что матрицы плотности ρ_l сами являются матрицами плотности смешанных состояний, то свойство вогнутости энтропии Неймана $S\left(\sum_i W_l \hat{\rho}_l\right) \geq \sum_i W_l \left(S(\hat{\rho}_l)\right)$. Это свойство выводят при помощи неравенства Йенсена или из свойства субаддитивности.

Если энтропия S_N имеет N ненулевых собственных значений, то $S_N \leq \ln N$, т.е. когда квантовая система находится в максимально однородном состоянии. Аналогично классической энтропии Шеннона $H(X)$, квантовая энтропия Неймана S_N удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq S_N \leq \ln(N)$. Поскольку $S_N \geq 0$, то любое чистое состояние обладает максимально возможной для макроскопического наблюдателя информацией о свойствах квантовой системы. **Замечание. Понятие максимально возможного количества информации, которое доступно макроскопическому наблюдателю, может быть не эквивалентно понятию полной информации, которой обладает квантовая система в чистом или смешанном состоянии**.

Энтропию Неймана используют для описания различия двух квантовых состояний. Для ансамбля чистых состояний возможно такое увеличение попарного перекрытия квантовых состояний при котором энтропия Неймана будет увеличиваться. Это явление происходит только для пространств с размерностью $d>2$.

Прежде всего, рассмотрим энтропию чистого квантового состояния.

Возьмём произвольное чистое состояние $|\psi\rangle$. Ему отвечает матрица плотности $\hat{\rho}|\psi\rangle\langle\psi|$, для которой уравнение на собственные вектора и собственные значения записываются в виде:

$$\hat{\rho}|\rho_i\rangle = \rho_i|\rho_i\rangle \Rightarrow \langle\psi \mid \rho_i\rangle|\psi\rangle = \rho_i|\rho_i\rangle \qquad (119)$$

Поэтому матрица плотности чистого состояния имеет один собственный вектор $|\rho_i\rangle = |\psi\rangle$, которому соответствует единственное собственное значение $\rho_1 = \langle\psi \mid \rho_1\rangle = \langle\psi \mid \psi\rangle = 1$. Тогда энтропия чистого состояния $S_N\psi$=-1·ln(1)=0.

Поскольку $S_N \geq 0$, то любое чистое состояние обладает максимально возможной для макроскопического наблюдателя информации о свойствах квантовой системы. Поскольку всегда $H>S$, то при помощи квантовых систем можно передать или обработать больше информации, чем с помощью их классических аналогов. На этом основаны методы сверхплотного кодирования и эффективные алгоритмы квантовых вычислений, которые реализуются с помощью запутанных состояний.

Пусть проводятся измерения некоторой наблюдаемой F со спектром $\{f_l\}$ в микросистемах, которые описываются матрицами ρ и σ соответственно. Тогда квантовой относительной энтропией матрицы ρ по отношению к матице ρ называется величина

$$S(\hat{\rho} \| \hat{\sigma}) = -Tr(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -Tr(\hat{\rho} \ln \rho) - S(\hat{\rho}). \quad (120)$$

Квантовая относительная энтропия удовлетворяет неравенству Клейна $S(\hat{\rho} \| \hat{\sigma}) \geq 0,$ которое является квантовым аналогом неравенства Гиббса.

Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем A и B. Матрицы плотности для первой и второй подсистемы в отдельности $\rho_1 \in H_2$ и $\rho_2 \in H_2$ соответственно, а матрица плотности всей системы $\rho_{12} \in H_1 \otimes H_2$. Имеется совместная вероятность $p(j,k)$ (j=1,2,...n, k=1,2,...,m) двух случайных величин. Степени свободы подсистемы A характеризуются первой случайной величиной, в вторая случайная величина характеризует систему B. Распределения вероятности для этих случайных величин по отдельности

$$\mathrm{p}_1(\mathrm{j}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{p}(\mathrm{j},\mathrm{k}), \quad \mathrm{p}_1(\mathrm{j}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{p}(\mathrm{j},\mathrm{k}) \quad (121)$$

энтропии для каждой подсистемы по отдельности

$$\mathrm{S}_\mathrm{N}(\mathrm{A}) = -\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{p}_1(\mathrm{j}) \ln \mathrm{p}_1(\mathrm{j}), \quad \mathrm{S}_\mathrm{N}(\mathrm{B}) = -\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{p}_2(\mathrm{k}) \ln \mathrm{p}_2(\mathrm{k}), \quad (122)$$

Здесь $\rho_1 = Tr_2\rho_{12}$ (частичный след), $\rho_1 = Tr_1\rho_{12}$, $Tr\rho_{12}=1$.

Взаимная энтропия двух случайных величин

$$\mathrm{S}_\mathrm{N}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = -\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{p}(\mathrm{j},\mathrm{k}) \ln \mathrm{p}(\mathrm{j},\mathrm{k}). \quad (123)$$

Смешивание увеличивает энтропию фон Неймана. Энтропия взвешенной смеси состояний больше или равна взвешенной сумме энтропий составляющих (вогнутость энтропии):

$S_N(p_1\rho_1 + p_2\rho_2) \geq p_1 S_N(\rho_1) + p_2 S_N(\rho_2)$; $p_1 + p_2 = 1$. (124)

Для независимой системы $S(\rho)$ аддитивна. Если матрицы плотности ρ_A, ρ_B описывают независимые системы A и B (корреляция между подсистемами отсутствует), то

$\mathrm{S}_\mathrm{N}(\rho_A \otimes \rho_B) = S_N(\rho_A) + S_N(\rho_B)$ (125)

Если квантовая система описывается матрицей плотности $\hat{\rho}_{AB}$ и состоит из двух подсистем A и B, то квантовой совместной энтропией рассматриваемой квантовой системой называется величина $S(\hat{\rho}_{AB}) = -Tr(\hat{\rho}_{AB} \ln \hat{\rho}_{AB})$.

Как и классическая совместная энтропия, квантовая совместная энтропия обладает свойством субаддитивности (энтропия квантовой системы, состоящей из двух подсистем, меньше или равна сумме энтропий двух подсистем)

$$S_N(\hat{\rho}_{AB}) \leq S_N(\hat{\rho}_A) + S_N(\hat{\rho}_B), \quad (126)$$

где $\hat{\rho}_\mathrm{A} = \mathrm{Tr}_\mathrm{B}\hat{\rho}_\mathrm{AB}$ и $\hat{\rho}_\mathrm{B} = \mathrm{Tr}_\mathrm{A}\rho_\mathrm{AB}$ – матрицы плотности подсистем A и B соответственно.

Правая сторона неравенства свидетельствует, что энтропия сложной системы максимальна, когда её компоненты не коррелированы, и в этом случае, полная энтропия просто сумма суб-энтропий. Равенство достигается для кореллированных подсистем A и B, т.е. когда $\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$.

Аддитивность и субаддитивность – характеристики отношений между целым и его частями. Аддитивность – такое отношение, при котором свойства целого полностью определяются свойствами частей (целое равно сумме частей); субаддитивность (неаддитивность) – отношение, при котором целое не определяется его частями, так что оно не может быть познано и объяснено на основе одного лишь знания о его частях (целое больше суммы его частей).

Для квантовой энтропии выполняется свойство сильной субаддитивности, которое аналогично соответствующему свойству для классической энтропии. Пусть квантовая система описывается матрицей плотности ρ_{ABC} и состоит из трёх подсистем A, B и C. Тогда сильная субаддитивность энтропии Неймана (неравенство треугольника):

$$S(\hat{\rho}_{ABC}) \le S(\hat{\rho}_{AB}) + A(\hat{\rho}_{BC}) - S(\hat{\rho}_B) \qquad (127)$$

где $\rho_{123} \in H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$, $\rho_{12} \in H_1 \otimes H_2$, $\rho_{23} \in H_2 \otimes H_3$, $\rho_2 \in H_2$, ρ_{AB} и др. – редуцированные матрицы плотности матрицы плотности ρ_{ABC}.

Частный случай этой формулы – субаддитивность $S(\hat{\rho}_{AC}) \le S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_C)$; $S(\hat{\rho}_{AB}) \ge |S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_B)|$.

Замечание. Неравенство треугольника для ρ_{ABC} иначе называются неравенством Араки-Либа: каждый из трех $S(\rho_{AB})$, $S(\rho_{BC})$, $S(\rho_{AC})$ меньше или равен сумме двух других (ситуация, принципиально отличающаяся от своего классического аналога).

Если ρ_A и ρ_B редуцированные матрицы плотности общего состояния ρ_{AB}, то

$$|S(\rho_A) - S(\rho_B)| \le S(\rho_{AB}) \le S(\rho_A) + S(\rho_B). \qquad (128)$$

Квантовая взаимная информация вводится по аналогии с классической по формуле

$$Y_Q(\hat{\rho}_A : \hat{\rho}_B) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}) \ge 0, \qquad (129)$$

что следует из свойства субаддитивности энтропии фон Неймана. Величина $Y_Q(\hat{\rho}_A : \hat{\rho}_B)$ является мерой степени корреляции двух квантовых подсистем A и B.

Функция $\rho_{AB} \to S_{NA}$-S_{NAB} выпукла в гильбертовом пространстве состояний $H_{AB} = H_A \otimes H_B$, $\rho_A \in H_{AB}$.

Суммарный беспорядок, создаваемый двумя подсистемами, по отдельности всегда превышает величину хаоса, производимого двумя системами как единое целое. Эта формула превращается в равенство тогда и только тогда, когда состояния ρ_i совпадают (состояния ρ_i некоррелированы, т.е. подсистемы независимы). Корреляция уменьшает энтропию Неймана. Энтропии Неймана матриц плотности подсистем чистого двухчастичного состояния совпадают.

В отличие от классической энтропии Шеннона, квантовая энтропия фон Неймана полной системы может быть меньше энтропии составляющих подсистем. В частности, если составная система находится в чистом состоянии, то $S_N(\rho_{AB})=0 \Rightarrow S_N(\rho_A)=S_N(\rho_B)$, но не обязательно $S_N(\rho_A)=S_N(\rho_B)=0$. Чистое состояние $|\psi_{AB}\rangle$ системы, состоящей из двух подсистем A и B, является перепутанным тогда и только тогда, когда $S(A|B)<0$, где $S(A|B) = S(\rho_{AB})-S(\rho_B)$ – условная энтропия.

Если в теории Шеннона энтропия композитной системы не может быть меньше энтропии любой её части, в квантовой теории это не выполняется, т.е. возможно, что $S(\rho_{AB})=0$, тогда как $S(\rho_A)=S(\rho_B)>0$.

При увеличении собственных значений для двух-уровнего чистого состояния энтропия Неймана выходит из нуля, увеличиается, достигает максимума при собственном значении равным 0,5 (максимальная запутанность), затем падает до нуля при значении 0,5.

Матрица плотности является чистой тогда и только тогда, когда $H_N(\rho)=0$, или, что эквивалентно, двухчастичное состояние является незапутанным тогда и только тогда, когда его редуцированная энтропия Неймана равна нулю. Редуцированная энтропия Неймана, как и ранг Шмидта, может служить мерой двухчастичной запутанности.

Как уже упоминалось, переход от матрицы плотности к матрице плотности, полученной в результате измерения, называется редукцией (стягиванием) матрицы плотности к одной из своих компонент. Редуцирование термодинамической энтропии поисходит при переходе смешанного состояния в чистое состояние.

Редуцированная (частичная) энтропия Неймана – энтропия подсистем чистого двухчастичного состояния; совпадает с энтропией Шеннона квадратов его коэффициентов Шмидта.

Энтропия Неймана широко используются в различных формах (условных энтропии, относительной энтропии и т.д.) в рамках квантовой теории информации. Она используется в качестве меры квантовой информации, как мера квантовой запутанности. Дело в том, что об объекте, находящемся в чистом запутанном состоянии ($\rho=\rho^2$), невозможно получить никакой информации, поскольку в этом случае $S_N(\rho)=0$ (подсистемы независимы, корреляция между ними отсутствует).

Для чистого состояния $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$, откуда

$$S(\rho_A)=-Tr[\rho_A \log \rho_B]=-Tr[\rho_B \log \rho_B] = S(\rho_B), \qquad (130)$$

где $\rho_A=Tr_B(\rho_{AB})$ и $\rho_B=Tr_A(\rho_{AB})$.

Энтропия Неймана и квантовая запутанность может быть отлична от нуля только для подсистем, которые взаимодействуют со своим окружением, и поэтому находятся в несепарабельном состоянии. Энтропия Неймана демонстрирует насколько точно можно судить о свойствах одной подсистемы, зная характеристики другой. Включение в рассмотрение дополнительной переменной увеличивает информацию.

При количественном описании квантовой запутанности используется понятие частичной матрицы плотности и мера квантовой запутанности. Энтропия Неймана относится к самому простому случаю – двухчастичной системы в чистом состоянии. Это мера запутанности между двухуровневыми подсистемами A и B, когда вся система замкнута (находится в чистом состоянии). Здесь частичная (редуцированная) матрица плотности подсистемы A получается взятием частичного следа по B. Взятие частичного следа и получение редуцированной матрицы плотности – это усреднение по всем внешним степеням свободы выделенной подсистемы (по ее внешнему окружению); это проведение границы между подсистемой и её окружением, когда подсистема может рассматриваться независимо от него. Требуемая подсистема «вырезается» из более сложной структуры и рассматривается в как самостоятельный объект. В результате этой операции пространство допустимых состояний подсистемы уменьшается, частичная матрица плотности имеет меньшую размерность, чем исходная система, например, из матрицы 4×4 получается матрица 2×2.

В ходе измерения информации энтропия может увеличиться, но никогда не уменьшится. Однако обобщенные измерения могут уменьшить энтропию. Энтропия чистого состояния равна нулю, в то время как в перепутанной смеси всегда больше нуля. Чистое состояние может быть превращено в смесь путем измерения, но перепутанную смесь нельзя преобразовать в чистый вид. Акт измерения вызывает необратимое изменение на матрице плотности (аналогично коллапсу волновой функции), он уменьшает информацию, стирая квантовую интерференцию в сложной системе. (Подсистему большей системы можно в чистом виде извлечь из смешанного состояния, но только за счет увеличения энтропии в другой части системы). Это аналогично понижению термодинамической энтропии объекта при помещении его в холодильник: воздух вне холодильника нагревается, получая больше энтропии, чем потерял объект в холодильнике.

Поскольку обычно $H>S_N$, то при помощи квантовых систем можно передать или обработать больше информации, чем с помощью их классических аналогов. На этом основаны методы квантового сверхплотного кодирования и эффективные алгоритмы квантовых вычислений, которые реализуются с помощью запутанных состояний.

7.7.3 Линейная энтропия

В квантовой механике и в квантовой теории информации, линейная энтропия является скаляром, определяемым как

$$S_L=1-Tr(\rho^2)= 1-\gamma, \qquad (131)$$

где γ – чистота состояния (чистота определяет меру по квантовым состояниям, давая информацию о том, как смешивается состояние).

Линейная энтропия изменяется нуля (чистое состояние) до (1-1/d) (полностью смешанное состояние) (здесь d – размер матрицы плотности)

Линейная энтропия – частный случай энтропии фон Неймана (наименьшая аппроксимация энтропии Неймана).

Линейная энтропия получается из энтропии Неймана путем разложения lnρ=ln(1-(1-ρ)) вокруг чистого состояния, $\rho^2 = \rho$ (разложение по неотрицательной матрице 1-ρ в ряд Меркатора для логарифма, ограничиваясь ведущим членом):

$$-\langle \ln \rho \rangle = \langle 1-\rho \rangle + \frac{\langle (1-\rho)^2 \rangle}{2} + \frac{\langle (1-\rho)^3 \rangle}{3} + ... \qquad (132)$$

Линейная энтропия всегда больше энтропии Ньюмана, но в начале и конце они совпадают. Линейная энтропия и энтропия фон Неймана – аналогичные меры степени смешения состояния, хотя линейную энтропию легче вычислить, так как она не требует диагонализации матрицы плотности. Линейная энтропия – эффективная мера запутанности для системы из двух фермионов и их описание их бинарных столкновений проще, чем другими способами. Её используют, например, для описания эволюции запутанности двух электронов.

Иногда линейную энтропию определяют другой нормировкой:

$$S_L = \frac{d}{d-1}\left(1-Tr\left(\rho^2\right)\right) \qquad (133)$$

которая гарантирует, что величина S_L изменяется от нуля до единицы.

Количество информации Y в системе численно равно следу квадрата матрицы плотности. Меру информации можно рассматривать как количественную характеристику системы, когда физической величиной является сама система, точнее, матрица плотности, выступающая в данном случае в качестве оператора физической величины, то есть

$$Y= \langle\rho\rangle = Tr(\rho^2). \qquad (134)$$

Часто количество квантовой информации определяется просто как число кубитов в системе.

Энтропия Неймана – мера неопределенности квантового состояния. Неопределенность квантового состояния кубита даёт информацию о степени чистоты. Если размерность гильбертова пространства равна d, то энтропия не превышает значения $\log_2 d$, причём максимум достигается только тогда, когда система находится в максимально смешанном (однородном) состоянии ρ=1/d. Для одиночного кубита, размерность гильбертова пространства которого d=2, энтропия S(ρ)=0 в случае чистого состояния $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ и S(ρ)=1 в случае максимально смешанного (однородного) состояния ρ=1/2.

Сегодня некоторые устройства основаны на квантово-механических явлениях, и применяются для кодирования, передачи и декодирования информации. Оказалось важным, что максимум информации, передаваемый через канал является энтропией Неймана. Неймана энтропия – ёмкость канала связи. Энтропия Неймана имеет много общего с теорией Шеннона и применима как мера информации.

Величина $Tr(\rho^2)$ используется в квантовой информатике, но уже не в качестве меры информации, а как характеристика степени чистоты состояния (*purity*), которая показывает, насколько близко данное состояние к чистому (для него $Tr(\rho^2)=1$).

7.7.4 Сравнение энтропий Реньи, Цаллиса и Неймана

Как уже упоминалось, q-энтропии Реньи и Цаллиса зависят от действительного параметра $q>0$. Энтропия запутывания Реньи – функция от редуцированной матрицы плотности $\rho\in H$ и действительного параметра $q>0$:

$$S_R = \frac{1}{1-q}\ln\left(Tr\rho^q\right) \qquad (135)$$

В пределе $q\to 1$ энтропия запутывания Реньи переходит в энтропию запутывания Неймана.

Энтропия Цаллиса

$$S_T=-Tr\rho\ln\rho\rho, \qquad (136)$$

где $$\ln_q = \begin{cases} \dfrac{\rho^{q-1}-1}{1-q}, & если\ q\neq 0 \\ \ln\rho, & если\ q=0 \end{cases}.$$

При $q\to 1$ энтропии Цаллиса и Реньи переходят в энтропию Неймана. Связь между энтропиями Реньи и Цаллиса выражаются формулами:

$$S_T = \frac{\exp\left(S_q^R(1-q)\right)-1}{1-q} \quad и \quad S_R = \frac{\ln\left(1+(1-q)S_{Tq}\right)}{1-q} \qquad (137)$$

Для энтропии Цаллиса выполняется условие

$$S_T(\rho)\le S_T(\rho_1)+S_T(\rho_2) \qquad (138)$$

для любого $q>1$.

Для энтропии Реньи справедливо неравенство

$$\exp(S_R(\rho_1)(1-q))+\exp(S_R(\rho_2)(\rho_2)(1-q))-\exp(S_R(\rho)(1-q))<1. \qquad (139)$$

Преимущество q-энтропии над энтропией Неймана – более сильная чувствительность к изменениям распределения вероятности (точнее диагональных элементов матрицы плотности).

Замечание. В информатике энтропия Шеннона – естественная мера нашего незнания о свойствах системы, существование которых не зависит от измерения. Наоборот, квантовое измерение не позволяет выявить даже свойства системы, существовавшие до проведения измерения. Возможно, неаддитивность энтропии Цаллиса использовать её как квантовую информационную меру, поскольку нелокальные корреляции можно описать благодаря своеобразию энтропии Цаллиса.

Предположим, что имеется некоторый источник квантовой информации – чёрный ящик, который при каждом обращении к нему выдает состояние $|x\rangle$ с вероятностью $p(x)$, причем результаты разных обращений являются статистически независимыми. Состояния $|x\rangle$ принадлежат некоторому конечному набору состояний (алфавиту). В результате n-кратного обращения к источнику создается последовательность состояний $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$,..., $|x_n\rangle$, которую можно рассматривать как квантовое сообщение длиной n. Если сообщение не является случайным, то его можно сжать, т.е. преобразовать в более короткую последовательность кубитов, без потери информации. Последнее означает, что степень совпадения исходного состояния n кубитов и состояния, которое получается из сжатого при его развертывании, стремится к единице при $n\to\infty$. Минимальная длина сжатого сообщения в пределе $n\to\infty$ равна $nS_N(\rho)$. Энтропия Неймана определяет наименьшее (в отсутствии шумов и в пределе $n\to\infty$ количество физических ресурсов (кубитов), необходимых для передачи или хранения квантового сообщения, создаваемого источником, который описывается оператором плотности ρ.

7.7.5 Энтропия Холево

Энтропия А.С. Холево базируется на предельной теореме, устанавливающей верхний предел на количество информации, которое может быть извлечено из квантовых состояний (доступной информации)

Пусть $\{\rho_1, \rho_2,...,\rho_n\}$ – множество смешанных состояний и ρ_X – одно из этих состояний, проведенное по распределению вероятности $P=\{p_1, p_2,...,p_N\}$. Для любого измерения и выполняемого на $\rho = \sum_X p_X \rho_X$

количество доступной информации о переменной A, зная результат B измерения, ограничено сверху следующим образом:

$$Y(A:B) \le S(p) - \sum_i p_i S(p_i), \qquad (140)$$

где $\sum_i p_i\, p_i$ и $S(p_i)$ – энтропия Неймана.

Величина, стоящая в правой части этого неравенства, называется информацией Холева:

$$S_\chi = S(p) - \sum_i p_i S(p_i) \qquad (141)$$

Оценка Холево доказывает, что n кубитов, хотя и могут «нести» большое количество (классической) информации (благодаря квантовой суперпозиции), количество классической информации, которую можно получить (доступная), может быть только выше n классических (не квантовых) бит. Это удивительно по двум причинам: 1) квантовые вычисления обычно намного более мощные, чем классические, поэтому выводы, что они являются только хорошими или уступают обычным методам, необычны; 2) требуется $2n$-1 комплексных чисел для кодирования кубитов, которые представляют просто n бит.

Характер информационного содержания n квантовых битов весьма парадоксален - хотя для определения состояния этих n кубитов необходимо $2n$-1 комплексных чисел, они не могут использоваться для кодирования более n классических битов информации.

Пусть получателя кодировки интересует только один, априори неизвестный бит из исходных n. Измерение, которое получатель делает для извлечения одного бита, может потенциально уничтожить часть или всю оставшуюся закодированную информацию. Это позволяет кодировать два бита в один кубит. Такое сжатие невозможно в классической информатике. Используя такие плотные квантовые коды, можно в сжатом виде кодировать весь телефонный справочник так, чтобы любой отдельный номер удалось извлечь из него с помощью подходящего измерения. Однако, эти коды не могут быть очень сжатыми – они требуют по крайней мере линейного числа квантовых битов. Удалось доказать, что ограничение вычислительной мощности конечного числа квантовых битов (т. е. квантовых конечных автоматов. Из теоремы Холево следует, что емкость квантовых каналов, может быть строго больше, чем классическая информация Шеннона. Возник вопрос: не будет ли пропускная способность квантовых каналов, вычисляемая в предположении параллельного использования асимптотически большого количества одинаковых каналов, совпадать с верхней границей Холево для одного канала, т.е. будет ли давать выигрыш при кодировании использование сцепленных состояний? Ответ: квантовый канал может как обладать, так и не обладать свойством аддитивности.

В частности, при выполнении свойства аддитивности получается, что хотя квантовый бит (кубит) теоретически может переносить больше информации, чем обычный бит, но извлечь из него можно не больше, чем из обычного классического бита. Это странно: квантовый бит, в отличии от обычного, может быть равен не только «1» или «0», но и одновременно иметь целый ряд значений между «0» и «1»: в кубите наблюдается суперпозиция состояний. Поэтому его полное состояние как объекта можно описать парой

комплексных чисел, сумма квадратов которых равна единице, так что квантовые компьютеры рассматривают направление способное революционизировать вычисления.

Сжимаемость сообщений и доступной информации можно осуществить даже если источник выдает не чистые, а смешанные состояния. В этом случае энтропия фон Неймана заменяется энтропией Холево

$$S_{\chi} = S\left(\sum_x \rho_x \rho_x\right) - \sum_x \rho_x S(\rho_x). \qquad (142)$$

Энтропия Холево удовлетворяет неравенству $S\chi \le H(X)$, где $H(x)$ – энтропия Шеннона классического источника информации и равенство имеет место только тогда, когда носители состояний ρ_x ортогональны. При использовании смешанных состояний для передачи информации минимальное количество кубитов, необходимых для передачи или хранения квантового сообщения длиной n в пределе $n \to \infty$ будет равно nS_{χ}, а верхняя оценка доступной информации равна S_{χ}.

8. СИНЕРГЕТИКА

До сих пор, рассматривая эволюцию системы, мы в основном имели дело с процессами перехода типа порядок→беспорядок. Это справедливо в рамках классической термодинамики, в которой полагают, что замкнутая система стремится к равновесию и это равновесие можно интерпретировать как хаос. Мерой степени разупорядочения системы служит энтропия. Следует, однако, понимать, что в общем случае энтропия не является универсальной мерой беспорядка. Самопроизвольный рост энтропии наблюдается в закрытых, простых системах (системах, которые можно разложить на отдельные компоненты, и для анализа которых применим системный анализ), и в случае необратимых процессов, адекватно описываемых линейным математическим аппаратом.

Между тем в мире существуют сложные системы, в которых принципиально нельзя выделить и исследовать отдельные компоненты, системы, в которых протекают обратимые и необратимые процессы, находящиеся в статическом и динамическом состоянии, стационарные и нестационарные; их описание требует нелинейного математического аппарата. Важно, что в таких системах возможны самопроизвольные процессы самоорганизации, которые трактуются как переход от беспорядка к порядку.

Одно время анализ динамики открытых, нелинейных, сложных систем относили к междисциплинарной науке – синергетике. Сейчас синергетику рассматривают как часть нелинейной динамики, занимающуюся процессами самоорганизации в живых, неживых и общественных системах.

В данной главе приведём некоторые сведения по особенностям синергетики, как раздела, нелинейной динамики сложных систем, и дадим определение некоторых понятий, важных для понимания последующих текстов.

8.1 Синергизм и синергетика

В настоящее время различные подходы к изучению сложных систем и описанию их эволюции в пространстве и времени объединяют в рамках единого научного направления, которое ради краткости и универсальности применения на разных языках названо "синергетикой". Этот короткий, хотя и непонятный, термин пытались заменить более длинным и более осмысленным: "наука о сложности", "нелинейная наука", "теория сложных систем", "теория самоорганизации в активных средах", "теория диссипативных структур", "теория динамического (детеминированного) хаоса", "нелинейная динамика" и др., но пока успеха не достигли. Сейчас в естественных науках под синергетикой понимают разделы по самоорганизации систем. Однако в гуманитарных науках (в основном – в России) синергетика всё ещё воспринимается как меганаука.

В основе синергетики лежит явление синергизма, в свою очередь базирующегося на сверхаддитивном эффекте.

Сверхаддитивный – превосходящий сумму.

Пример: Результат групповой деятельности, количественно и качественно более высокий по сравнению с индивидуальной работой; знания и усилия нескольких человек могут организовываться таким образом, что они взаимно усиливаются.

Синергизм – совместное действие для достижения общей цели, основанное на принципе, что целое представляет нечто большее, чем сумма его частей; означает превышение совокупным результатом суммы слагающих его факторов.

Примеры синергизма: совместное и однородное функционирование органов (например, мышц) и систем; комбинированное действие лекарственных веществ на организм, при котором суммарный эффект превышает действие, оказываемое каждым компонентом в отдельности; соединение двух и более кусков плутония, при превышении критической массы в сумме дают выделение энергии, превосходящее излучение энергии простого суммирования отдельных кусков; прибыль после слияния двух компаний превосходит сумму прибылей этих компаний до объединения.

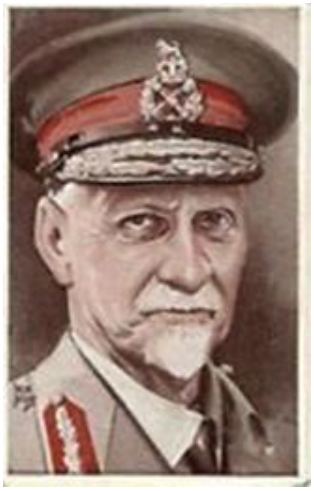
Синергетический эффект – превышение результата деятельности системы над арифметической суммой результатов элементов системы, действующих по отдельности (эффект 2+2=5). Это возрастание эффективности деятельности в результате интеграции, слияния отдельных частей в единую систему за счёт эмерджентности.

Синергия – суммирующий эффект взаимодействия двух или более факторов, характеризующийся тем, что их действие существенно превосходит эффект каждого отдельного компонента в виде их простой суммы, эмержентность.

Эмерджентность (эмергентность) – наличие у какой-либо системы особых свойств, не присущих её элементам, а также сумме элементов, не связанных особыми системообразующими связями; несводимость свойств системы к сумме свойств её компонентов.

Системный эффект – неожиданное поведение; возникновение паттернов и свойств, которые невозможно предсказать на основе знания свойств их частей, рассматриваемых изолированно (одно дерево – не лес, скопление клеток – не организм; свойства биологической популяции не есть свойства отдельных особей, понятия рождаемость, смертность неприменимы к отдельной особи, но применимы к популяции или виду в целом).

Идеи сверхаддитизма, синергизма и эмергентности известны давно. Ещё Аристотель в своей "Метафизике" писал: "Целое это больше, чем сумма его частей". Убеждённый в этом, Я. Смэтс (1926) предложил философию холизма (философия цельности), исходящую из качественного своеобразия и приоритета целого по отношению к его частям. Согласно холизму целое всегда есть нечто большее, чем простая сумма его частей (с этой точки зрения Г. Гегель был последовательным холистом). Именно из холистических представлений выросла синергетика. Практическим воплощением идеи холизма стало возникшее в синергетике понятие эмерджентности, т. е. возникновения в системе нового *системного качества*, несводимого к сумме качеств элементов системы.



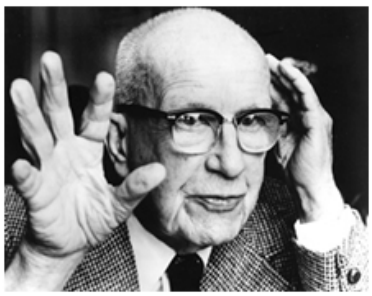
Смэтс – основатель философии холизма.

Ян Христиан Смэтс (1870-1950) – премьер-министр Южно-Африканского союза, командир отрядами буров во время Англо-бурской войны в Трансваале, командующий британской армией в Восточной Африке, во время второй мировой войны – британский фельдмаршал, соавтор устава Лиги Наций, активный проводник политики апартеида. Холизм – философия цельности – направление в философии, рассматривающее мир как результат творческой эволюции, которая направляется нематериальным «фактором цельности». Смэтс студентом написал трактат "Эволюция личности", а в 1926 – издал книгу “Холизм и эволюция”. Когда Альберт Эйнштейн её прочитал, он сделал прогноз: "в грядущем тысячелетии холизм станет главной концепцией естествознания".

Впервые синергетический эффект явно описал физиолог, лауреат нобелевской премии Ч.С. Шеррингтон в монографии «Интегративная деятельность нервной системы» (1906). Он называл синергетическим согласованное воздействие нервной системы при управлении мышечными движениями (согласованное действие сгибательных и разгибательных мышц).

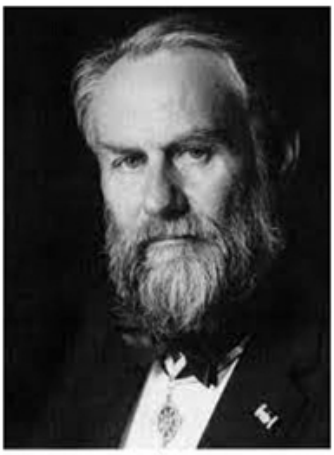
Автором термина "синергетика" считается Р. Фуллер (1975), но синергетика, как наука о процессах самоорганизации открытых нелинейных систем стала развиваться после прочитанного (в 1969) Г. Хакеном в университете Штутгарта курса лекций, а особенно активно после выхода в свет монографии *H. Haken. Synergetik. Springer-Verlag, Berlin ,Heidelberg New York*, 1982.

Ричард Фуллер (1895 – 1983) – дизайнер, архитектор и изобретатель; не имея законченного образования, получил множество почётных докторских научных степеней и полсотни международных премий. Основным его изобретением является лёгкий и прочный «геодезический купол» – пространственная стальная сетчатая оболочка из прямых стержней. Автор книг: "Синергетика: исследование геометрии мышления" (1975) и "Синергетика 2: дальнейшие исследования геометрии мышления" (1979), в которой высказана идея об упаковке шарами как основе организации пространства. Под синергетикой Фуллер понимал геодезическую синергию, т.е. новую векторную геометрию, по которой проектируют геодезические купола.



Ричард Фуллер (1895–1983) – автор термина синергетика.

Герман Хакен – теоретик, один из основателей синергетики, правнучатый племянник Карла Маркса, директор Института теоретической физики и синергетики университета Штутгарда, автор книг: "Синергетика", "Тайны природы", "Принципы работы головного мозга", "Тайны восприятия", "Квантополевая теория твёрдого тела", "Лазерная светодинамика", "Информация и самоорганизация" и др. Хакен обнаружил явление самоорганизации при исследовании механизмов кооперативных процессов, происходящих в твёрдом лазере. Он выяснил, что частицы, составляющие активную среду резонатора, под воздействием внешнего светового поля начинают колебаться в одной фазе, между ними устанавливается когерентное (согласованное) взаимодействие, приводящее к их кооперативному поведению. Интерпретацию этого явления Хакен распространил на самоорганизацию сложных систем.



Герман Хакен (род. 12.07.1927) – немецкий физик-теоретик, один из основателей синергетики.

Замечание. Привлечь мировое сообщество к своим идеям - большое искусство. Так, Клаудиус сделал себе имя, назвав свой мало кому интересный интеграл энтропией, он пригрозил Вселенной смертью, чем вызвал столетние дискуссии, хотя Вселенная так и не погибла. Хакен, исходя из своих локальных работ по лазерной светодинамике и фазовым переходам зародил меганауку – синергетику, призванную раскрыть все тайны природы. Потребовалось полстолетия, чтобы убедиться в бесперспективности таких попыток.

Г. Хакен обратил внимание на то, что в открытых системах, находящихся вдали от термодинамического равновесия, за счёт потока энергии и вещества из внешней среды, создаётся и поддерживается неравновесность, благодаря которой происходит согласованное взаимодействие элементов и подсистем, приводящее к образованию новых устойчивых структур и самоорганизации. Термином «синергетика» он обозначал совокупный, коллективный эффект взаимодействия большого числа подсистем, приводящий к образованию устойчивых структур и самоорганизации в сложных системах.

Синергетика (от др.-греч. συν- – приставка со значением совместности и ἔργον «деятельность», совместное или кооперативное действие) – наука, изучающая общие закономерности процессов в сложных неравновесных системах. Определяет структуру как состояние, возникающее в результате многовариантного и неоднозначного поведения многоэлементных структур, которые не деградируют к стандартному для замкнутых систем усреднению термодинамического типа, а развиваются вследствие открытости, притока энергии извне, нелинейности внутренних процессов, появления особых режимов с обострением и наличия более одного устойчивого состояния.

Синергетика изучает связи между элементами структуры, которые образуются в открытых благодаря интенсивному обмену веществом и энергией с окружающей средой в неравновесных условиях. В такой системе наблюдается согласованное поведение подсистем, в результате чего возрастает степень её упорядоченности, т. е. уменьшается

энтропия (самоорганизация). Основа синергетики – термодинамика неравновесных процессов, теория случайных процессов, теория нелинейных колебаний и волн.

Синергетика – раздел науки о сложном, о том, как в хаосе устанавливается определенный порядок, который, однако, рано или поздно разрушается. Она пытается охватить все этапы универсального процесса самоорганизации как процесса эволюции порядка – его возникновения, развития, самоусложнения и разрушения, т.е. весь цикл развития системы в аспекте её структурного упорядочения. Эта наука занята поиском (пока безуспешным) универсального механизма, по которому осуществляется самоорганизация (переход от беспорядка к порядку) как в живой, так и в неживой природе. Под самоорганизацией понимается спонтанный переход открытой неравновесной системы от менее к более сложным и упорядоченным формам организации. Синергетика исследует явления самоорганизации, самодезорганизации; бифуркационные процессы, детерминированный хаос и др.

Для синергетики характерно представление о хаосе как о таком же закономерном этапе развития, что и порядок. Подобно тому как различают статический (повторение только в пространстве) и динамический (повторение во времени) порядок, можно различить также статический (беспорядок в пространстве) и динамический (беспорядок во времени) хаос. Рождение нового порядка из хаоса не вынуждается какой-то внешней силой, а имеет спонтанный характер. Вот почему синергетика является теорией самоорганизации (а не организации).

Синергетике не удалось разработать собственного математического аппарата, но она активно использует методы нелинейной динамики, нелинейной неравновесной термодинамики, геометрию фракталов, теорию катастроф, математическую статистику на базе распределений Леви, с характерными для них бесконечными дисперсиями, дифференциальные уравнения с дробными частными производными. Для решения отдельных задач привлекается теория нелинейных (выше второго порядка) дифференциальных уравнений, теория групп, тензорный анализ дифференциальная топология, вейвлет анализ, теория клеточных автоматов, метод термодинамических функций Ляпунова, теория катастроф, принцип минимума производства энтропии, способы исследования устойчивости линейных систем и т.п.

Синергетика рассматривает процесс развития как многократное чередование порядка и хаоса. Она полагает, что хаос обладает творческой силой, способной рождать новый порядок. Важно, что рождение нового порядка из хаоса не вынуждается какой-то внешней (по отношению к данной реальности) силой, а имеет спонтанный характер. Поэтому синергетика является теорией самоорганизации (а не теорией организации).

Синергетика – теория нестационарных быстро развивающихся структур в открытых нелинейных средах. Она претендует на количественное описание нестабильности, многообразия путей изменения и развития систем, моделирует катастрофические ситуации и т.п. Синергетика занимается системами, состоящими из нескольких или многих одинаковых или разнородных частей, которые находятся во взаимосвязи друг с другом; нелинейными системами, открытыми системами, находящимися вдали от теплового равновесия, системами при внутренних и внешних колебаниях, нестабильными системами, системами, в которых происходят качественные изменения, в том числе – эмерджентные, возникают пространственные, временные, пространственно-временные или функциональные структуры (упорядоченные или хаотические).

Замечание. Одно время на синергетику возлагали большие надежды, как на основу междисциплинарного мышления и направление установления связи между естественными и гуманитарными науками, и, возможно, религией. Они не оправдались. В настоящее время синергетика подвергается жесточайшей критике и ей пророчат исчезновение (как это уже случилось с кибернетикой). Сейчас это раздел нелинейной динамики, занимающийся процессами самоорганизации. Мы используем термин "синергетика" именно для

обозначения этого узкого направления и то из-за его краткости и чёткого звучания на разных языках (из-за всеобщей привычке к древнегреческому).

В этой главе мы рассмотрим сложные (принципиально не разложимые на отдельные компоненты) системы и процессы их самоорганизации. Более важные с практической точки зрения процессы организации под действием внешних сил будут описаны в других главах учебника.

8.2 Детерминизм, случайность и неопределённость

Сложные процессы включают две составляющие: строго предопределённость, когда прошлое определяет будущее, и случайность, делающая будущее неопределённым.

Детерминизм – теория, согласно которой определенные результаты полностью предопределены.

Детерминизм – учение о взаимосвязи и взаимной определённости всех явлений и процессов, доктрина о всеобщей причинности. Согласно детерминизму, все происходящее в мире, включая ход человеческой жизни и человеческой истории, предопределено судьбой, Богом, природой, человеческой волей или обществом. Детерминизм – утверждение, согласно которому имеется только одно, точно заданное возможное будущее (фатализм). Противоположностью детерминизма является индетерминизм.

Приверженцем абсолютного детерминизма был П.Лаплас. Он постулировал, что если бы какое-нибудь разумное существо смогло узнать положение и скорость всех частиц в мире, оно могло бы совершенно точно предсказать все события Вселенной. Детерминизм как представление о взаимосвязи всех явлений и процессов является важнейшей составной частью научной методологи, нацеливающей исследователей на выявление причинности и закономерностей в природе, обществе и мышлении. Детерминизм не подразумевает обратимость времени, исходя из предположения, что частица не обязательно придёт в исходное состояние при обращении времени, т.к. траектория не всегда однозначно определяется конечными условиями.

Индетерминизм – философское воззрение, отрицающие либо объективность причинной связи, либо познавательную значимость причинного объяснения в науке, и утверждающие, что фундаментальные законы природы имеют вероятностный характер, а случай является не только равноправной по отношению к необходимости сущностью природы, но и более фундаментальной, позволяющей объяснить её самотворящий и эволюционный характер.

Необходимость – характеристика явления, однозначно определённого некоторой областью действительности, предсказуемого в рамках знания о ней. Необходимость противопоставляют случайности.

Случайность – проявление внешних неустойчивых связей в действительности, результат пересечения независимых процессов; дополнение к законам необходимости. Первоначально научное естествознание отторгало случайность, а неоднозначность и неопределенность рассматривались как неполное выражение знаний об исследуемых объектах – господствовал детерминизм. Но затем стали разрабатываться статистические теории, которые основывались на идеях и методах теории вероятностей.

Первыми материальными системами, исследуемыми в рамках статистических теорий, были газы. Движения молекул газа в таких системах относительно независимы и равноправны. Хаотические состояния таких систем – идеальное воплощение случайности. В термодинамике появилось представление о точках бифуркации – тех моментах, когда какие-либо системы в ходе своих внутренних изменений и усложнений приобретают черты крайней неустойчивости, что приводит к качественным преобразованиям. В такие переломные моменты открываются разнообразные пути таких качественных преобразований. В точках бифуркации царствует случайность.

Механистический (жёсткий) детерминизм – идея полной предопределённости всех будущих событий; на единственно возможной траектории движения материальной точки

при заданном начальном состоянии; на концепции полной выводимости всего будущего (и прошлого) Вселенной из её современного состояния с помощью законов механики; на ньютоновском типе законов, где случайность не принимается во внимание.

При детерминистском подходе динамическая теория однозначно связывает между собой значения физических величин, характеризующих состояние системы. Примеры динамических теорий: механика, электродинамика, термодинамика, теория относительности, эволюционная теория Ламарка, теория химического строения. При статистическом (вероятностном) подходе невозможно достаточно точно задать начальное состояние системы: любая допущенная в измерениях или расчётах погрешность очень быстро нарастает с течением времени – возникает динамический хаос. Примеры систем с динамическим хаосом: погода и климат, турбулентность, фондовые рынки.

Система детерминированного хаоса – система, демонстрирующая кажущиеся случайными результаты, даже тогда, когда эти результаты порождаются системой дифференциальных уравнений.

Статистический (вероятностный) детерминизм – результат взаимодействия большого числа элементов, индивидуально детерминированных. Событие, в котором имеется несколько альтернатив.

Основные типы природных и общественных законов в биологии, квантовой физике, общественных отношениях, истории носят вероятностный характер. Для описания неупорядоченных систем разработана статистическая теория, которая однозначно связывает между собой вероятности тех или иных значений физических величин. К понятиям статистики относится случайность (непредсказуемость), вероятность (числовая мера случайности), среднее значение величины, флуктуация (случайное отклонение системы от среднего (наиболее вероятного) состояния). Примеры статистических теорий: молекулярно-кинетическая теория, теории квантовой физики, эволюционная теория Дарвина, молекулярная генетика. Предсказания динамических и статистических теорий совпадают, когда можно пренебречь флуктуациями; в остальных случаях статистические теории дают более детальное и точное описание реальности.

Ранее полагали, что простые универсальные законы существуют, познаваемы, а их использование будет исключительно полезным; как бы ни были сложны уравнения, следующие из этих законов, сколько бы их ни было, их удастся решить. Детерминизм задавал уверенность в том, что можно, решив уравнения, заглянуть как угодно далеко в будущее и в прошлое. Однако вскоре было обнаружено, что математика позволяет решить далеко не все задачи. Например, теория динамического хаоса демонстрирует, что даже для довольно простых детерминированных систем (в которых будущее однозначно определяется настоящим) существует горизонт прогноза, заглянуть за который нельзя.

Сейчас полагают, что в окружающем нас мире действуют и жесткий детерминизм, характерный для плавного, эволюционного развития систем, и случайность, характерная для поведения системы в точке бифуркации. После того, как путь для системы выбран (один из многих возможных) вновь вступает в силу детерминизм. В природе преобладают необратимые процессы, что сказывается на необратимости времени. Необратимые процессы в открытой системе порождают высокие уровни организации. Согласно теории эволюционизма всё существует в развитии; развитие как чередование медленных количественных и быстрых качественных изменений (бифуркаций); законы природы как принципы отбора допустимых состояний из всех мыслимых; фундаментальная и неустранимая роль случайности и неопределенности; непредсказуемость пути выхода из точки бифуркации (прошлое влияет на будущее, но не определяет его); устойчивость и надежность природных систем как результат их постоянного обновления. Судя по всему, главенствующую роль в окружающем нас мире играют не порядок, стабильность и равновесие, а неустойчивость и неравновесность.

Механистическая наука уделяла много внимания устойчивости, порядку, однородности и равновесию, но изучала замкнутые системы и линейные соотношения, в

которых малый сигнал на входе вызывает равномерно во всей области определения малый отклик на выходе. Случайность не востребована в этой науке, оно – досадное недоразумение. Здесь исходным рубежом событий служат начальные условия. Атомы или частицы движутся по определённым траекториям. Задав начальные условия, мы можем выпустить из исходной мировой точки траекторию как назад по времени – в прошлое, так и вперед по времени – в будущее. Совершенно иная ситуация имеет место при рассмотрении некоторых химических реакций, например в случае, когда две жидкости, слитые в один сосуд, диффундируют до тех пор, пока смесь не станет однородной, или гомогенной. Обратная диффузия, которая бы приводила к разделению смеси на исходные компоненты, никогда не наблюдается (хотя принципиально и возможна). В любой момент времени смесь отличается от той, которая была в сосуде в предыдущий момент и будет в следующий. Весь процесс ориентирован во времени.

В результате процесса самоорганизации возможно спонтанное возникновение порядка и организации из беспорядка и хаоса. В состояниях, далеких от равновесия, происходят многие спонтанные, нередко весьма значительные перераспределения материи во времени и в пространстве. В таких состояниях очень слабые возмущения, или флуктуации, могут усиливаться до гигантских волн, разрушающих сложившуюся структуру, что объясняет всевозможные процессы качественного или резкого (не постепенного, не эволюционного, а катастрофического) изменения. Основным условием нормального развития сложных систем является развитие обеих составляющих – детерминированной и случайной при сохранении баланса между ними. Победа любой из сторон приводит к разрушению системы. В природе действуют и детерминизм, и случайность, причём необходимость и случайность согласуются, дополняя друг друга. Особую роль в мировом эволюционном процессе играет принцип минимума диссипации энергии: если допустимо не единственное состояние системы (процесса), а целая совокупность состояний, согласных с законами сохранения и связями, наложенными на систему (процесс), то обычно (но не всегда!) реализуется состояние, отвечающее минимальному рассеянию энергии (минимальный рост энтропии).

Энтропия открытой системы не просто безостановочное соскальзывание системы к состоянию, лишённому какой бы то ни было организации. При определенных условиях энтропия становится прародительницей порядка. Утверждение, что при неравновесных условиях энтропия может производить не деградацию, а порядок, организацию и, в конечном счёте, жизнь, противоречит традиционным представлениям классической термодинамики. Энтропия, как источник организации, утрачивает характер жесткой альтернативы, возникающей перед системами в процессе эволюции: в то время как одни системы вырождаются, другие развиваются по восходящей линии и достигают более высокого уровня организации.

Катастрофные этапы – это изменение самой структуры исходной системы, её перерождение, возникновение нового качества. При этом новая структура позволяет системе перейти на новую термодинамическую траекторию развития, которая отличается меньшей скоростью производства энтропии, или меньшими темпами диссипации энергии. Возникновение нового качества происходит на основании усиления малых случайных движений элементов – флуктуаций. Это объясняет тот факт, что в момент бифуркации состояния системы возможно не одно, а множество вариантов структурного преобразования и дальнейшего развития объекта. Таким образом, сама природа ограничивает наши возможности точного прогнозирования развития, оставляя, тем не менее, возможности важных качественных заключений.

8.3 Простые и сложные системы

Как уже упоминалось, системы бывают закрытыми, изолированными, открытыми, линейными и нелинейными. Они участвуют как в равновесных, так и неравновесных,

обратимых и необратимых, случайных или эргодических процессах, в стационарном или нестационарном состоянии. Но системы могут быть простыми и сложными.

Простая система – равновесная система, физическое состояние которой вполне определяется значениями двух независимых переменных – функций состояния простого тела (x,y), например, значениями температуры и удельного объема (t, v) или давления и удельного объёма (P, v) . Выражение зависимости трёх характеристик состояния простого тела (x, y, z), являющихся попарно независимыми, называется уравнением состояния этого тела: $\varphi(x, y, z)=0$. Простая система может быть эффективно разложена на отдельные компоненты и изучена классическим системным анализом. Простая система – аддитивная система. Простыми телами являются изотропные тела (равенство характеристик состояния и физических свойств тела во всех его точках и во всех направлениях), в частности: газы, пары, жидкости и многие твёрдые тела, находящиеся в термодинамическом равновесии и не подверженные действию поверхностного натяжения, гравитационных и электромагнитных сил и химических превращений. Простые открытые системы отличаются способностью обмениваться веществом с окружающей средой. Для термодинамического описания таких систем с k независимыми компонентами необходимы k+2 независимых параметра состояния, включая массу (количество вещества, число частиц) каждого независимого компонента.

Сложные системы – системы, не разложимые компоненты, в них не выполняется принцип аддитивности (имеет место синергетический эффект и к ним неприменим системный анализ). К сложным системам относятся диэлектрики, магнетики, сверхпроводники, упругие твёрдые тела, поверхности раздела фаз, системы в поле тяготения и в состоянии невесомости, электрохимические системы, равновесное тепловое излучение. Важным примером является живой организм. Для термодинамического описания таких систем, как упругий стержень/нить или пружина, поверхность раздела фаз, тепловое излучение необходим только один независимый параметр состояния.

Если входящие в состав системы вещества в рассматриваемом диапазоне условий (давление, температура) химически не взаимодействуют между собой, то систему называют физической. Если же вещества системы реагируют друг с другом, то говорят о химической системе.

Долгое время под сложными системами понимали биологические системы, причём такие, которые нельзя описать математически. Сейчас число непознанных биологических процессов постепенно уменьшается, поскольку новые теоретические подходы позволяют интерпретировать многие биологические системы достаточно адекватно. Одновременно обнаружены небиологические (как техногенные, так и гуманитарные) системы, которые могут быть простыми или сложными, но которые способны претерпевать сложные превращения, не описываемые классическим математическим аппаратом.

Синергетика занимается сложными самоорганизующимися системами, состоящими из разнородных элементов, связанных между собою структурно и/или функционально.

Система, в которой цель четко детерминирована, а её конструкция (элементы и связи) и поведение не допускают изменений, называется замкнутой. Считается, что в замкнутой системе процессы самоорганизации не идут: самоорганизация и дальнейшая эволюция возможна лишь в открытой системе. Открытость системы выражается в её диссипативности, т.е. способности обмениваться энергией, информацией с окружающей средой и внутри своей конструкции. Для самоорганизации необходима иерахичность, т.к. в этом случае уровни (само)управления системы также создаются самостоятельно.

Неравновесное состояние системы – необходимое условие самоорганизации, заключающееся в том, что малые изменения её состояния (т.е. небольшие отклонения величин её параметров) приводят к значительной трансформации её устройства и поведения. При линейном развитии малые изменения параметров системы вызывают незначительные отклонения в её состоянии, происходит затухание возмущений; при нелинейном развитии малые изменения параметров вызывают большие отклонения.

Микроструктура большинства сложных систем состоит из многих элементов, в некотором смысле однородных и неразличимых между собой по форме и/или по своим функциям. Элементы способны к активному взаимодействию между собой и с внешней средой (диссипасивность). На микроуровне все процессы в таких системах являются массовыми. Поэтому открытость, диссипация и нелинейность – глобальные свойства сложных систем. Понятия устойчивость/неустойчивость системы имеют свои критерии, связанные с эффектами положительной и отрицательной обратной связи.

К **диссипативным системам** относятся – физические или химические структуры, для поддержания которых требуется больше энергии, чем для поддержания более простых структур, на смену которым они приходят. Это – устойчивые пространственно неоднородные структуры, возникающие в результате развития неустойчивостей в однородной неравновесной диссипативной среде. Процесс самоорганизации происходит быстрее при наличии в системе внешних и внутренних «шумов»: шумовые эффекты приводят к ускорению процесса «самоорганизации».

Основными свойствами сложной системы являются:

– Организованная сложность системы характеризуется наличием взаимосвязи между элементами (существует три типа связи: функционально-необходимые, избыточные (резервные), синергетические (дающие увеличение эффекта системы за счёт взаимодействия элементов)).

– Декомпоризуемость.

– Целостность системы – принципиальная несводимость свойств системы к сумме свойств составляющих её элементов, и, в то же время, зависимость свойств каждого элемента от его места и функций внутри системы.

– Ограниченность системы связана с внешней средой, в состав входят все системы элементов любой природы, оказывающие влияние на систему или находящиеся под ее воздействием. Возникает задача локализации системы (определения её границ и существенных связей). Выделяют открытые и замкнутые системы. Открытые системы имеют связи с внешней средой, закрытые не имеют.

– Структурность – группирование элементов внутри системы по определенному правилу или принципу в подсистемы. Структура системы – совокупность связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие. Разделяют связи двух типов: горизонтальные и вертикальные. Внешние связи, направленные внутрь системы называют входами, из системы во внешнюю среду – выходами. Внутренние связи – связи между подсистемами.

– Функциональная направленность системы.

Сложная система характеризуется единой целью функционирования; иерархической системой управления; большим количеством связей внутри системы; комплексным составом системы; устойчивостью к воздействию внешних и внутренних воздействующих факторов; наличием элементов саморегуляции; наличием подсистем.

Известна шкала сложности систем:

1) Уровень статической структуры (например, расположение электронов в атоме, строение кристалла, анатомия животного и т.п.).

2) Простые детерминированные динамические системы (солнечная система, механическое устройство, структура теории физики или химии).

3) Уровень управляющего механизма или кибернетической системы (термостат). Система характерна тем, что стремится к сохранению равновесия.

4) Уровень открытой системы (биологическая клетка, река, пожар).

5) Уровень генетического сообщества (растения, специализация клеток): разрозненность приёмников информации и неспособность обрабатывать её большие объёмы.

6) Уровень животных: мобильность, целесообразное поведение, самосохранение. (развитые информационные рецепторы, нервная система, мозг).

7) Уровень человека: самосознание, отличное от самосохранения; рефлексия, речь.

8) Уровень социальной организации.
9) Уровень трансцендентальных систем, не поддающихся анализу, но обладающих структурой.

Сложные системы бывают различной степени сложности:
– структурной, или организационной (не хватает ресурсов для построения, описания, управления структурой);
– динамической или временной (не хватает ресурсов для описания динамики поведения системы и управления её траекторией);
– информационной (не хватает ресурсов для информационного описания системы);
– вычислительной (не хватает ресурсов для эффективного прогноза, расчётов параметров системы, или их проведение затруднено из-за нехватки ресурсов);
– алгоритмической (не хватает ресурсов для описания алгоритма функционирования или управления системой, для функционального описания системы);
– развития (не хватает ресурсов для устойчивого развития, самоорганизации).

Примером сложной системы является полидисперсная гетерогенная среда, в которой идут процессы с фазовыми переходами и химическими реакциями. Если в гомогенной смеси каждый компонент рассматривается как занимающий весь объём смеси равномерно с другими компонентами, то в гетерогенной смеси каждая фаза занимает лишь часть объёма. При описании таких систем неравновесная термодинамика, в отличие от равновесной, использует теорию поля.

Можно выделить несколько основных свойств сложной системы.
Многоуровневость – часть системы сама является системой; вся система, в свою очередь, является частью более крупной системы.
Наличие внешней среды: всякая система ведёт себя в зависимости от того, в какой внешней среде она находится; нельзя механически распространять выводы, полученные о системе в одних внешних условиях, на ту же систему, находящуюся в других внешних условиях.
Открытость: способность системы постоянно обмениваться веществом, энергией, информацией с окружающей средой и обладать как «источниками» – зонами подпитки её энергией окружающей среды, действие которых способствует наращиванию структурной неоднородности системы, так и «стоками» – зонами рассеяния, сброса энергии, в результате действия которых происходит сглаживание структурных неоднородностей.
Нестабильность: сложные системы стремятся иметь много возможных мод поведения, между которыми они блуждают в результате малых изменений параметров, управляющих динамикой.
Неприводимость: сложные системы выступают как целое и не могут быть изучены разбиением их на части, рассматриваемые изолированно, т.е. поведение системы определяется взаимодействием систем, но редукция системы к её частям разрушает большинство аспектов, привносящих в систему индивидуальность.
Адаптивность: сложные системы часто состоят из множества интеллектуальных агентов, которые принимают решения и действуют исходя из частичной информации о системе в целом и её окружения. Эти агенты изменяют правила своего поведения на основе такой частичной информации. Сложные системы обладают способностью извлекать скрытые закономерности из неполной информации, обучаться на этих закономерностях и изменять своё поведение на основе новой поступающей информации.
Будущее открыто и непредсказуемо, но не произвольно. Существуют спектры возможных будущих состояний в виде наборов структур-аттракторов сложных эволюционных процессов.

Как уже упоминалось, в закрытой системе конечное состояние однозначно определяется начальными условиями: например, движение в солнечной системе, где положения планет в данный момент времени однозначно определяются их предыдущими положениями. Или при химическом равновесии, конечные концентрации реагентов

естественно зависят от первоначальных концентраций. Если начальные условия или процесс меняются, то конечное состояние также будет изменено. В открытых системах это не так. В них одно и то же конечное состояние может быть достигнуто при различных начальных условиях и разными путями. Кроме того, открытые системы способны к понижению уровня энтропии и увеличению степени организованности. Изменение энтропии в закрытых системах всегда положительное; порядок постоянно разрушается. Однако в открытых системах имеет место не только производство энтропии вследствие необратимых процессов, но и поток энтропии, который также может быть отрицательным. Так происходит в живом организме, в который доставляются сложные молекулы с высоким уровнем свободной энергии. Таким образом, живые системы, поддерживающие себя в устойчивом состоянии, могут избегать возрастания энтропии, и могут даже развиваться в направлении состояний повышенного порядка и организации.

Основная задача теории систем – управление сложностью.

Постоянный приток вещества, энергии или информации является необходимым условием существования неравновесных состояний в противоположность замкнутым системам, неизбежно стремящимся к однородному равновесному состоянию. Открытые системы – это системы необратимые; в них важным оказывается фактор времени. В открытых системах ключевую роль, наряду с закономерным и необходимым, могут играть случайные факторы, флуктуационные процессы. Иногда флуктуация может стать настолько сильной, что существовавшая организация разрушается.

Флуктуация – любое случайное отклонение какой-либо величины.

Флуктуации – случайные колебания отдельных параметров системы выступают как источник самоорганизации. При усилении малых случайных движений элементов (флуктуаций) может возникнуть новое качество. В момент бифуркации (смены качества) появляется не одно, а множество вариантов структурного преобразования и дальнейшего развития объекта. Флуктуация вынуждает систему выбрать ту ветвь, по которой будет происходить дальнейшая эволюция системы. Неустойчивость (результат флуктуации) сначала локализована в малой части системы, а затем распространяется и приводит к новому макроскопическому состоянию.

Все реальные процессы необратимы. Примеры необратимых процессов: диффузия, термодиффузия, теплопроводность, вязкое течение и др.

Система может находиться в состоянии устойчивого (стационарного) и динамического равновесия. Равновесие стационарно, если при изменении параметров системы, возникшем под влиянием внешних или внутренних возмущений, система возвращается в прежнее состояние. Состояние динамического (неустойчивого) равновесия имеет место тогда, когда изменение параметров влечёт за собой дальнейшие изменения в том же направлении и усиливается с течением времени. Такого рода устойчивое состояние может возникнуть в системе, находящейся вдали от стационарного равновесия. Длительное время в состоянии равновесия могут находиться лишь закрытые системы, не имеющие связей с внешней средой, тогда как для открытых систем равновесие может быть только мигом в процессе непрерывных изменений. Равновесные системы не способны к развитию и самоорганизации, поскольку подавляют отклонения от своего стационарного состояния, тогда как развитие и самоорганизация предполагают качественное его изменение.

Неравновесность – состояние открытой системы, при котором происходит изменение ее макроскопических параметров, т.е. ее состава, структуры и поведения.

Неравновесность ведёт как к порядку, так и беспорядку, открывая возможность возникновения уникальных событий, ибо спектр возможных способов существования объектов в этом случае значительно расширяется (в сравнении с образом равновесного мира)». Открытый характер большинства физических систем приводит к их неустойчивости и неравновесности. Неравновесность порождает избирательность

системы, её необычные реакции на внешние воздействия среды. Неравновесные системы имеют способность воспринимать различия во внешней среде и "учитывать" их в своём функционировании. И эти функции уже нелинейные.

Нелинейность – свойство системы иметь в своей структуре различные стационарные состояния, соответствующие различным допустимым законам поведения этой системы.

Всякий раз, когда эволюцию сложной системы удаётся выразить системой уравнений, эти уравнения оказываются нелинейными в математическом смысле. Математическим объектам с таким свойством соответствует возникновение спектра решений вместо одного единственного решения системы уравнений, описывающих поведение системы. Каждое решение из этого спектра характеризует возможный способ поведения системы. В отличие от линейных систем, подсистемы которых слабо взаимодействуют между собой и практически независимо входят в систему, т.е. обладают свойством аддитивности (целая система сводима к сумме её составляющих), поведение каждой подсистемы в нелинейной системе определяется в зависимости от координации с другими. Идея нелинейности включает в себя многовариантность, альтернативность выбора путей эволюции и ее необратимость. Нелинейные системы испытывают влияние случайных, малых воздействий, порождаемых неравновесностью.

Благодаря диссипации в неравновесных системах могут спонтанно возникать новые типы структур, может совершаться переход от хаоса и беспорядка к порядку и организации, возникать новые динамические состояния. Диссипативность проявляется в различных формах: в способности "забывать" детали некоторых внешних воздействий, в "естественном отборе" из множества микропроцессов ликвидирует те, что не отвечают общей тенденции развития; в когерентности (согласованности) микропроцессов и т.д.

Нестабильность (динамичность) – состояние системы, характеризующееся неоднородностью и разновремённостью каждого из протекающих процессов и всех изменений в целом. Это форма наблюдаемых взаимосвязей и причинной обусловленности всех явлений, противоположная стабильному и метастабильному состоянию.

Сложные системы стремятся иметь много возможных мод поведения, между которыми они блуждают в результате малых изменений параметров, управляющих динамикой.

Устойчивость системы – её способность компенсировать внешние или внутренние воздействия, направленные на разрушение или быстрое изменение системы;

Старение системы – это ухудшение эффективности и постепенное разрушение системы за длительный период времени.

Целостность – внутреннее единство объекта, его относительная автономность, независимость от окружающей среды.

Система имеет целостность, которая самоорганизуется, влияет на части системы и на связи между ними, заменяет их для сохранения себя как целостности, ориентируется во внешней среде и т.д.

Полиструктурность – наличие у одной и той же системы большого количества структур; при рассмотрении системы с разных точек зрения, в ней выявляются разные структуры.

Неприводимость: – свойство системы выступать как целое.

В процессе эволюции эмерджентность выражается как возникновение новых функциональных единиц системы, которые не сводятся к простым перестановкам уже имевшихся элементов. В классификации систем эмерджентность может являться основой их систематики как критериальный признак системы.

Непредсказуемость эволюции сложных систем получила название стохастичности.

Сложность бывает различных видов: контекстуальная, логическая и пр. Сложность – способность системы к самоорганизации; она связана с наличием большого количества

и разнообразия частей, с богатством связей между этими частями; обусловлена целостностью, организацией или эмерджентностью своих свойств и т.д.; сложность связана с хаосом, поскольку хаос – наиболее яркая метафора сложности.

Система функционирует на основе самоорганизации, если она самостоятельно способна адекватно реагировать на внешние воздействия, изменяя самостоятельно свои параметры, структуру, функции и тем самым сохраняя себя. Ответ системы – не обязательно пассивный, он может изменять её положение и влиять на внешнюю среду. Систему, действующую на основе самоорганизации, называют самоуправляемой. Основными факторами, способствующими созданию и саморазвитию системы, являются иерархичность, неравновесное состояние, а также свойство диссипативности.

Сложные системы бывают статическими и динамическими. Далее мы будем заниматься в основном динамическими системами.

8.4 Анализ систем

Напомним, что в настоящее время при определении характеристик систем и процессов используются разные идеологии и методы.

Редукционизм – методологический принцип, согласно которому сложные явления могут быть полностью объяснены с помощью законов, свойственных явлениям более простым. Этот подход абсолютизирует сведение сложного к простому и высшего к низшему, игнорируя эмерджментные свойства систем высоких уровней организации.

Анализ – процедура мысленного расчленения предмета на части в целях его дальнейшего изучения.

Системный анализ – метод познания, представляющий собой последовательность действий по установлению структурных связей между переменными или элементами исследуемой системы. Это методология решения сложной проблемы путём последовательной декомпозиции её на взаимосвязанные частные подпроблемы. Любой объект бесконечно сложен, поэтому для его анализа её задачу упрощают путём выделения только тех элементов и связей, которые обеспечивают достижение цели. Системное исследование представляет собой процедуру описания объекта, способа его функционирования и тенденций развития. Полезность системного анализа обусловлена глубоким проникновением в суть проблемы, выявлением взаимосвязей, способствующих обнаружению нестандартных решений, в большей четкости формулирования целей, в большей эффективности распределения ресурсов. Ограниченность системного анализа – неизбежной неполнотой анализа, приближённая оценка эффективности, отсутствие способов точного прогнозирования перспективы.

Холизм – учение о целостности нашего мира, о том, что все его элементы, живая и неживая природа связаны как части единой большой системы – Бога, Мира, Вселенной. Идея холизма: – все свойства некоей системы (физическая, биологическая, химическая, социальная, экономическая, психическая, языковая и др.) не могут быть определены или объяснены по свойствам отдельных составных частей. Наоборот, система как целое, определяет поведение своих частей.

Редукция предполагает, что сложные явления могут быть объяснены на основе законов, свойственных более простым системам. Сводя сложное к более простому, анализ игнорирует специфику более высоких уровней организации. Аналитический подход показал свою эффективность при решении многих задач теории и практики. Но и в естественных и гуманитарных науках возникли кризисы, для борьбы с которыми системный анализ оказался не только бесполезен, но и вреден, поскольку не воспринимает сложную систему, как целое, а потому неспособен управлять протекающими в сложной системе неожиданными процессами.

Древнегреческая наука базировалась на цельной идеологии. За 2,5 тысячи лет развития наука расколола единое бытие на природу, технику, общество. Наука дифференцировалась и потеряла внутреннюю связанность, а научная картина мира стала

мозаичной. Целостное разбилось на кусочки. Изучение сложных систем и процессов стало невозможным. В стремлении к адекватной интерпретации явлений, протекающих в системах, принципиально не разложимых на отдельные составляющие возникло учение о холизме. Разработка способов анализа сложных систем потребовала полного отказа от методов системного анализа, применимого при исследовании простых систем.

В данном курсе лекций мы не обсуждаем детали борьбы холизма с системным анализом, но принципы холизма будем учитывать.

8.5 Параметры порядка (управляющие параметры)

Степень упорядоченности сложных структур характеризуется параметром порядка. Этот параметр первоначально был введён в теории фазовых переходов.

Параметр порядка – термодинамическая величина, характеризующая дальний порядок в среде. Используется для описания спонтанного нарушения симметрии при фазовом переходе. *Равновесный* параметр порядка равен нулю в *неупорядоченной* фазе и отличен от нуля в *упорядоченной*. При фазовом переходе 2-го рода параметр порядка непрерывно возрастает от нулевого значения в точке перехода, а при переходе 1-го рода сразу принимает конечное значение.

Теория сложных систем существенное внимание уделяет исследованию иерархичности структуры, т.е. отношению составных вышестоящих уровней по с нижестоящими, поскольку то, что для низшего уровня есть структура-порядок, для высшего есть бесструктурный элемент хаоса, строительный материал. Примеры: кварки, нуклоны, ядра, атомы, молекулы. Связываясь между собой в структуру, элементы передают ей часть своих функций степеней свободы, которые выражаются от всей системы как целого. Эти "коллективные" переменные находятся на более высоком иерархическом уровне, чем элементы системы. В синергетике их называют **параметрами порядка**, т.к. они описывают поведение аттрактора системы. Роль параметров порядка определяется принципом подчинения.

В процессе временной эволюции система, находящаяся в одном состоянии, переходит в новое состояние (старое состояние утрачивает устойчивость). При описании перехода из одного состояния в другое не все параметры состояния имеют одинаковое значение. Некоторые параметры состояния (быстрые переменные) выражаются через медленные переменные (параметры порядка), в результате чего количество независимых переменных уменьшается. Возможность представления быстрых переменных в виде функций параметров порядка составляет содержание принципа подчинения.

Изменение параметра порядка определяет поведение множества элементов низшего уровня, образующих систему. Их согласованное сосуществование определяет явление **самоорганизации.** Обычно полагают, что параметры порядка высшего уровня управляют поведением элементов системы только соседнего нижнего уровня: невозможна полная редукция иерархических систем. Каждый уровень имеет внутренний предел сложности описания. Поэтому, например, нельзя свести всех свойства живого организма к законам физики элементарных частиц, хотя этот организм из них и состоит. Параметры порядка называют **управляющими параметрами**. Меняя их, можно менять систему нижестоящих уровней. Сложной системой можно управлять извне, изменяя действующие на неё управляющие факторы. Иногда эти изменения носят кризисный характер и тогда говорят о критических значениях управляющих параметров (бифуркациях).

Когерентное поведения элементов системы (самоорганизация) определяется тремя компонентами: параметры порядка, принцип подчинения, циклическая причинность. В неравновесной открытой системе, в которую накачивается энергия, в результате флуктуации и конкуренции параметров порядка (мод) устанавливаются коллективные образцы поведения. Хотя система может состоять из огромного количества элементов, обладающих большим числом степеней свободы, её макроскопическое поведение может быть описано небольшим количеством существенных мод (параметров порядка) или даже

всего лишь одной модой. Параметры порядка определяют поведение всех элементов системы (принцип подчинения), которые, в свою очередь, обратно воздействуют на параметры порядка и определяют их.

Процессы самоорганизации возможны при обмене энергией и массой с окружающей средой, т.е. при поддержании состояния равновесия, когда потери на диссипацию компенсируются извне. Эти процессы описываются нелинейными уравнениями для макроскопических функций. Возникновение макроскопических структур обусловлено рождением, под действием крупномасштабных флуктуаций, коллективных типов движения, их конкуренцией, подавлением одних и развитием других – наиболее приспособляемых к данным условиям. Сходство процессов возникновения диссипативных структур с фазовыми переходами в равновесных системах дало основание называть их неравновесными (кинетическими) фазовыми переходами. Формальная общность кинетических и равновесных фазовых переходов заключается в кооперативном характере процесса: в системе, обладающей бесконечным числом степеней свободы, находится одна или несколько таких, изменение которых подчиняет себе изменение остальных.

Параметр порядка и принцип подчинения принадлежат к числу наиболее фундаментальных понятий синергетики.

Параметры порядка (управляющие или контрольные параметры) – независимые переменные динамической системы, функции параметров состояния, значения которых определяют состояние системы (топологию пространства состояний). Число параметров порядка много меньше числа параметров состояния. Параметры порядка – медленные (самые существенные) параметры, определяющие временную эволюцию системы при её переходе из одного состояния в другое. При эволюции системы не все параметры состояния имеют одинаковое значение, и одни параметры состояния (быстрые переменные) можно выразить через другие (медленные переменные), в результате чего количество независимых переменных уменьшается. Параметры порядка практически полностью описывают поведение системы.

Управляющие параметры характеризуют *решения*, которые надо осуществлять в каждый данный момент времени из интервала между начальным и конечным *состояниями системы*. Оптимальное управление обеспечивает достижение наибольшей эффективности управляемого процесса, т.е. максимального или минимального значения *целевой функции*.

Принцип подчинения Хакена – связь между параметрами порядка и отдельными частями системы. В случае двух соседних временных уровней (например, микро- и макро), долгоживущие переменные управляют короткоживущими; вышележащий уровень, нижележащим. Переход от параметров состояния (быстрых переменных) к параметрам порядка обеспечивает сильное сжатие информации: вместо того чтобы характеризовать систему посредством большого количества её индивидуальных компонентов, её описывают посредством параметров порядка.

Циклическая (круговая) причинность – принцип, утверждающий, что существуют функции, обратные тем, которые задают параметры порядка в зависимости от значений параметров состояния. Поведение остальных элементов системы определяется параметрами порядка, причём эти остальные элементы, в свою очередь, воздействуют на параметры порядка и изменяют их. Круговая причинность делает сжатие информации обратимым.

Для многих сложных систем характерно явление *самоорганизации.* В этом случае для характеристики объекта, который описывается большим или даже бесконечным числом величин, оказывается достаточно всего несколько переменных – параметров порядка, которые, «подчиняют» остальные переменные, определяя их значения. Такой подход базируется на теориях русел и джокеров.

Русла – области параметров многомерного мира, в которых поведение системы определяется его проекцией небольшой размерности. Найти русло – упростить описание.

Области джокеров – области в пространстве переменных, описывающие ситуации, где нет русел, где игровые моменты, случайности, резкие изменения играют решающую роль.

Если структура сохраняется при изменении условий среды, т. е. управляющих параметров, то эта структура устойчива, а если изменяется, то относительно неустойчива. Важны неустойчивости, вызванные изменениями параметров управления. В условиях нового управляющего параметра система сама создает специфические структуры (самоорганизация). Часто поведение системы, близкое к таким точкам неустойчивости, зависит от поведения очень немногих переменных (параметров порядка). Важно, что эти параметры определяют не только порядок; они также управляют беспорядочными, хаотическими состояниями. Параметры порядка определяют поведение отдельных частей, которые в свою очередь генерируют параметр порядка своим коллективным поведением (круговая причинная связь). В технических системах такая круговая причинная связь известна как обратная связь. Однако, в отличие от технических систем, в которых параметр порядка фиксирован с самого начала, в сложных системах параметры порядка создаются отдельными частями системы. Понятие информационного сжатия исходит из принципа подчинения. Оно используется для описания поведения сложной системы в относительно простых условиях. Есть различие между поведением параметров порядка и подчиненных частей с течением времени. Параметры порядка реагируют на возмущения извне медленно, а части – быстро, параметры порядка живут дольше, части короче.

Параметров порядка в системе может быть несколько, но он может быть и один.

а) Один параметр порядка. Состояние одного параметра порядка можно представить в форме положения шарика на холмистой поверхности. Когда шарик находится «в глубокой ямке», имеется только одно состояние параметра порядка. Это состояние устойчиво. После каждого возмущения шар возвращается в позицию равновесия. При изменении управляющего параметра поверхность может искажаться, делая более плоской нижнюю часть углубления. Если параметр порядка подчинен незначительным случайным событиям (колебаниям), то шарик будет кататься с довольно большими задержками на плоской нижней части. Но если колебания параметра порядка становятся большими, то возникают критические флуктуации. При широком плоском дне ямке флуктуации могут отодвинуть шарик далеко от первоначальной точки равновесия (критические колебания). Однако шарик возвращается к позиции равновесия, только очень медленно (критическое замедление). Когда значение управляющего параметра превзойдет критическое, может появиться новый ландшафт – с двумя минимумами (ямками). Позиция шарика станет непостоянной, шарик теперь может скатиться в любой из двух минимумов (т. е. имеет место нарушение симметрии). В этой ситуации маленькое колебание решит, в каком направлении будет двигаться шарик. Система спустится только в левый или правый минимум, что нарушит симметрию.

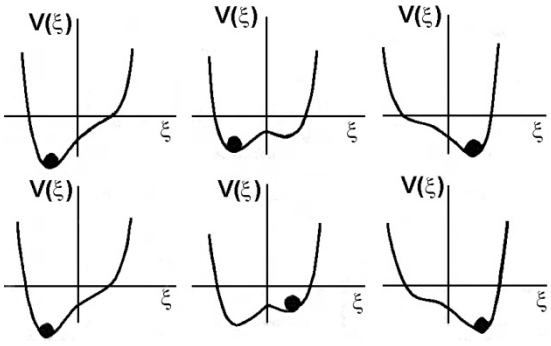


Рис.1. Визуализация эффекта гистерезиса

б) Два параметра порядка. Значение некоторого управляющего параметра в случае двух параметров порядка можно представить в форме ландшафта. На левой части верхнего ряде (рис. 70) шарик, представляющий состояние параметра порядка, сидит в самой низкой ямке. Средняя часть показывает, как с изменением значения управляющего параметра ландшафт искажается, но шарик всё ещё сидит в старой позиции. Наконец, по мере дальнейшего увеличения параметра управления, ландшафт приобретает «правую» форму. В правой части ряда как шарик занял новую позицию, указывающую, что параметр порядка и система в целом изменила своё состояние. Теперь изменим управляющий параметр в противоположном направлении и проследим это по нижнему ряду рис. 1. В средней части

шарик остаётся в разной позиции при одном и том же значении управляющего параметра. Здесь фиксируются состояния системы при одних и тех же (трёх) значениях управляющего параметра, однако последовательность, в которой были заданы эти значения, сыграла роль в состоянии системы при промежуточном значении управляющего параметра. Таким образом, состояние системы зависит от её истории – из каких предыдущих состояний пришла система к настоящему состоянию. Для одного и того же значения управляющего параметра существуют два возможных состояния. Такая двойственность перспектив в развитии системы и задержка, инерционность системы в переходе к качественно другому состоянию есть гистерезис и появляется потому, что существуют два, а не один параметр порядка.

в) Три параметра порядка. В случае трёх параметров порядка ситуация может быть подобна ситуации с двумя параметрами порядка, т. е. существованию фиксированных точек, но могут появляться и ограниченные циклы, может возникнуть совершенно неправильное движение – детерминированный хаос (пример: странный аттрактор Лоренса). Точка, характеризующая параметры порядка, двигается по кривой и переходит нерегулярным образом из левого к правому круговому движению. В этом случае три параметра порядка изменяются необычным способом. Здесь становится очевидной проблема предсказуемости системы, связанная с её чувствительностью к начальным условиям. Механический пример для этой чувствительности к начальным условиям –шар, которому позволяют скатиться по вертикальному лезвию бритвы. В зависимости от позиции центра тяжести шара и наклона лезвия бритвы траектории движения будут совершенно разными. Если мы визуализируем механизм, по которому шар снова и снова скатывается, то обнаружим ряд траекторий, в каждом случае принимающих разную форму. Движение хаотично.

Принцип конкуренции параметров порядка удобно иллюстрировать на примере подогреваемой жидкости, в которой бурление происходит в виде завихрений жидкости. Сначала состояние жидкости заключается в форме двух противоположно направленных завихрений. Каждый из этих циркулирующих паттернов управляется специфическим параметром порядка. По мере развития начального состояния, начинается конкуренция между параметрами порядка, и побеждает параметр порядка, который относится к более сильной циркуляции. Это приводит к тому, что победившее завихрение заставляет все больше жидкости циркулировать («бурлить») в этом направлении. Тем самым, после того, как один параметр порядка выиграл соревнование, он порабощает систему в целом. Здесь частично упорядоченная система приведена в полностью упорядоченное состояние через этап конкуренции параметров порядка.

8.6 Процессы самоорганизации

Термин самоорганизация впервые появился в статье У. Эшби «*Principles of the Self-Organizing Dynamic System*» (1947).

В сложных системах возможно спонтанное образование новых структур и систем, в том числе и более сложных, чем исходные: из беспорядка самопроизвольно возникает порядок, причём не только в живой, но и в неживой природе. Система называется самоорганизующейся, если она без специфического воздействия извне обретает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру.

В отдельных случаях образование новых структур имеет регулярный, волновой характер, и тогда они представляют собой автоволновые процессы. Феномен появления структур трактуется как всеобщий механизм наблюдаемого в природе направления эволюции: от элементарного и примитивного – к сложносоставному и более совершенному (упорядоченному): к образованию всё более сложных нелинейных, открытых и диссипативных систем.

Самоорганизация – процесс, в ходе которого создаётся, воспроизводится или совершенствуется организация сложной динамической системы; процесс упорядочения

элементов одного уровня в системе за счёт внутренних факторов, без внешнего специфического воздействия (изменение внешних условий может также быть стимулирующим либо подавляющим воздействием). Результат – появление единицы следующего качественного уровня.

Процесс самоорганизации представляет собой возникновение макроскопических пространственных, временных, пространство-временных и функциональных структур. Отличительная особенность процессов самоорганизации – их целенаправленный, но вместе с тем и естественный, спонтанный характер: эти процессы, протекающие при взаимодействии системы с окружающей средой, в той или иной мере автономны, относительно независимы от неё. Имеет место и обратное явление – переход от упорядоченного состояния к особого рода хаосу. Процессы эти бывают как детерминированнми, так и стохастическими.

Замечание. Г. Хакен так определяет понятие самоорганизующейся системы: «Мы называем систему самоорганизующейся, если она без специфического воздействия извне обретает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру. Под специфическим внешним воздействием мы понимаем такое, которое навязывает системе структуру или функционирование. В случае же самоорганизующихся систем испытывается извне неспецифическое воздействие….»

Самоорганизация – явление, характеризующееся изменением числа степеней свободы элементов системы и формированием новых макроскопических свойств, которыми не обладают её составные части.

Самоорганизующиеся системы без какого-либо внешнего вмешательства приобретают новые присущие только данным системам структуры и свойства. Самоорганизация – процесс упорядочения (пространственного, временного или пространственно-временного) в открытой системе, за счёт согласованного взаимодействия множества элементов её составляющих. Этот процесс происходит быстрее при наличии в системе внешних и внутренних «шумов». Самоорганизация – результат синтеза хаоса и порядка. В самоорганизующейся системе они не исключают, а, наоборот, порождают и дополняют друг друга. Хаос возникает из порядка, а порядок – из хаоса. При этом рождение порядка из хаоса и хаоса из порядка обусловливается не внешней средой, а внутренней природой диссипативной системы, действующими в ней механизмами.

Для того чтобы система эволюционировала от хаоса к порядку, шёл процесс самоорганизации, должны выполняться определённые условия.

1. Система должна быть открытой, и удалённой от точки термодинамического равновесия. В этом случае существенной становится неустойчивость и неравновестность, непрерывные флуктуации.
2. Фундаментальным условием самоорганизации служит возникновение и усиление порядка через флуктуации.
3. В особой точке бифуркации флуктуация достигает такой силы, что организации системы не выдерживает и разрушается, и принципиально невозможно предсказать: станет ли состояние системы хаотичным или она перейдет на новый, более дифференцированный и высокий уровень упорядоченности. В точке бифуркации система может начать развитие в новом направлении, изменить свое поведение.
4. Новые структуры, возникающие в результате эффекта взаимодействия многих систем, называются диссипативными, потому что для их поддержания требуется больше энергии, чем для поддержания более простых, на смену которым они приходят. В точке бифуркации система встаёт на новый путь развития. Те траектории или направления, по которым возможно развитие системы после точки бифуркации и которые отличаются от других относительной устойчивостью, образуют аттрактор: относительно устойчивое состояние системы, притягивающее к себе множество «линий» развития, возможных после точки бифуркации. Случайность и необходимость взаимно дополняют друга в процессе возникновения нового.

5. Диссипативные структуры существуют лишь при рассеивании энергии системой (при производстве энтропии). Из энтропии возникает порядок с увеличением общей энтропии. Энтропия не просто соскальзыванием системы к дезорганизации, она становится прародительницей нового порядка.

Для процесса самоорганизации характерен интенсивный обмен энергией/веществом с окружающей средой, причём совершенно хаотически (не вызывая упорядочение в системе); макроскопическое поведение системы описывается несколькими величинами – параметром порядка и управляющими параметрами; имеется некоторое критическое значение управляющего параметра (связанного с поступлением энергии/вещества), при котором система спонтанно переходит в новое упорядоченное состояние (переход к сильному неравновесию); новое состояние обусловлено согласованным (когерентным) поведением элементов системы, эффект упорядочения обнаруживается только на макроскопическом уровне; новое состояние существует только при безостановочном потоке энергии/вещества в систему. При увеличении интенсивности обмена система проходит через ряд следующих критических переходов; в результате структура усложняется вплоть до возникновения турбулентного хаоса. В процессе самоорганизации происходит непрерывное разрушение старых и возникновение новых структур, новых форм организации материи, обладающих новыми свойствами.

К свойствам процессов самоорганизации и организации особенностей сложных явлений относят: динамизм и связь с открытыми системами; нелинейность математических уравнений, описывающих процесс; иерархическая сложность явлений; фрактальность и самоподобие структур; образование классических и странных аттракторов и т. д.

Следует различать самоорганизацию и организацию.

Главное условие самоорганизации – необратимость, причина – диссипация, а движущая сила – отрицательная энтропия, поглощаемая открытой системой из окружающей среды при обмене веществ. Для самоорганизации требуется неравновесность. В ходе прогрессивной эволюции происходит саморазвитие самоорганизации систем с постоянным ростом коэффициента полезного использования энергии обменного процесса на самоорганизацию и понижением степени необратимости обменного процесса до нуля. В процессе самоорганизации имеет место упорядочение элементов одного уровня в системе за счёт внутренних факторов, без внешнего специфического воздействия (изменение внешних условий может быть стимулирующим либо подавляющим воздействием). Результат – появление следующего качественного уровня. В зависимости от подхода к описанию самоорганизации в определение включают характеристики системы, тип внутреннего фактора, особенности процесса.

Порядок и хаос в диссипативной системе сопутствуют друг другу постоянно, но их соотношение в ходе эволюции диссипативной системы изменяется. На одних этапах преобладает порядок, на других – хаос. Крайними случаями являются состояние максимальной стабильности, когда в системе воцаряется устойчивый порядок, а беспорядок сводится к минимуму, и состояние неустойчивости, нестабильности, в котором хаос быстро нарастает, а порядок уменьшается и может рухнуть под воздействием малейшей случайности. Возможны различные режимы переходов системы от одних состояний к другим.

Самоорганизация – элементарный процесс эволюции, состоящий из неограниченной последовательности процессов самоорганизации. Термин "самоорганизация" используется для обозначения диссипативной самоорганизации, т. е. образования диссипативных структур. Наряду с диссипативной самоорганизацией существуют и другие формы самоорганизации, такие как консервативная самоорганизация (образование кристаллов, биополимеров и т. д.) и дисперсионная самоорганизация (образование солитонных структур).

Самоорганизация – процесс возникновения макроскопически упорядоченных пространственно временных структур в сложных нелинейных системах. Система под воздействием самых незначительных воздействий (флуктуаций) может резко изменить свое состояние. Этот переход часто характеризуют как возникновение порядка из хаоса (*Всё возникает из хаоса*). Благодаря флуктуациям система в одних случаях приобретает упорядоченность, в других эта упорядоченность, исчерпав себя, разрушается, при этом система попадает в состояние неустойчивости. Смена режимов устойчивости и неустойчивости происходит в системах, где есть подвод вещества, энергии и информации.

Диссипативная система способна обмениваться информацией с внешней средой, увеличивать или уменьшать число элементов. Однако способность сохранять устойчивость ещё не делает эту систему развивающейся. Порождаемая неравновесными внешними условиями неустойчивость приводит к увеличению интенсивности диссипации, вследствие чего создаются условия возникновения новой неустойчивости, т.е. в системе увеличивается интенсивность протекания некоторых необратимых процессов, благодаря чему и отклонение системы от равновесия становится ещё большим. Это означает, что вероятность существования такого класса флуктуаций, по отношению к которым новые процессы становятся неустойчивыми, возрастает. С другой стороны, если бы в результате возникновения неустойчивости интенсивность диссипации снижалась, то система по своим свойствам приблизилась бы к некоторой равновесной замкнутой системе, т. е. к состоянию, в котором затухают любые флуктуации.

Интенсивность диссипации, т. е. увеличение энтропии, можно связать с интенсивностью роста числа новых элементов в системе. Если флуктуации вызывают интенсивный рост новых элементов и между ними не успевают образовываться связи, организация системы нарушается, энтропия возрастает, система становится структурно неустойчивой. Существование неустойчивости можно рассматривать как результат флуктуации, которая сначала была локализована в малой части системы, а затем распространилась и привела к новому макроскопическому состоянию.

Удаленность от равновесия, нелинейность может служить причиной возникновения упорядоченности в системе. Биологическая упорядоченность, генерация когерентного света лазером, возникновения пространственной и временной упорядоченности в химических реакциях и гидродинамике, автоволны в различных средах, наконец, функционирование экосистем в животном мире или жизнь человеческого общества – все эти примеры являются иллюстрацией явлений самоорганизации, образования диссипативных структур. Эти структуры наряду с регуляторными свойствами проявляют необычайную гибкость и разнообразие.

Эволюцию можно рассматривать как проблему структурной устойчивости. В исходной неупорядоченной системе за счёт последовательно реализующихся неравновесных неустойчивостей, за счёт когерентного поведения элементов может возникнуть функциональная организованность. Переход системы после критической точки из неустойчивого состояния к устойчивому (к диссипативной структуре) можно рассматривать как качественный скачок в развитии системы, в результате которого возросла организованность, упорядоченность системы.

Процессы самоорганизации идут только в системах с большим количеством элементов, связи между которыми имеют не жёсткий, а вероятностный характер. Эти процессы происходят за счёт перестройки существующих и образования новых связей между элементами системы. Различают три типа процессов самоорганизации. Первый – это самозарождение организации, т.е. возникновение из некоторой совокупности объектов определенного уровня новой целостной системы со своими специфическими закономерностями. Второй тип – процессы, благодаря которым система поддерживает определенный уровень организации при изменении внешних и внутренних условий её функционирования (гомеостатические механизмы, в частности, действующие по

принципу обратной связи). Третий тип связан с совершенствованием и с саморазвитием таких систем, которые способны накапливать и использовать прошлый опыт.

При самоорганизация имеет место спонтанное образование высокоупорядоченных структур из зародышей или даже хаоса, спонтанный переход от неупорядоченного состояния к упорядоченному за счёт совместного, кооперативного (синхронного) действия многих подсистем. При этом из хаоса порождается порядок. В синергетике в противоположность кибернетики исследуются механизмы возникновения новых состояний, структур и форм в процессе самоорганизации, а не сохранения и поддержания старых форм. Поэтому она опирается на принцип положительной обратной связи, когда изменения, возникающие в системе, не подавляются и корректируются, а, наоборот, постепенно накапливаются и, в конце концов, приводят к разрушению старой и возникновению новой системы. Кибернетика отличается от синергетики тем, что она акцентирует внимание на анализе динамического равновесия в самоорганизующихся системах. Поэтому она опирается на принцип отрицательной обратной связи, согласно которому всякое отклонение системы корректируется управляющим устройством после получения информации об этом.

Обратная связь – процесс, приводящий к тому, что результат функционирования какой-либо системы влияет на параметры, от которых зависит функционирование этой системы. На вход системы подаётся сигнал, пропорциональный её выходному сигналу. Различают положительную и отрицательную обратную связь. Отрицательная обратная связь изменяет входной сигнал таким образом, чтобы противодействовать изменению выходного сигнала. Это делает систему более устойчивой к случайному изменению параметров. Положительная обратная связь, наоборот, усиливает изменение выходного сигнала. Системы с сильной положительной обратной связью проявляют тенденцию к неустойчивости, в них могут возникать незатухающие колебания, т.е. система становится генератором.

В самоорганизующихся системах характеристики объекта управления меняются во времени и нельзя полностью устранить неопределенность. Однако в тех случаях, когда процесс адаптации быстро сходится к оптимальному процессу, качество адаптивного управления может мало отличаться от оптимального. Адаптивные системы подразделяются на самонастраивающиеся и самоорганизующиеся. В первом случае в соответствии с изменениями внешней среды меняются значения параметров системы, а во втором – меняется структура, организация системы. Формы поведения и динамики адаптивных систем весьма разнообразны. В частности, они проявляются в изменении поведения системы в условиях флуктуаций среды с целью поддержания существенных переменных в определенных границах или сохранения основных свойств и т.д. (т. е. осуществляют **гомеостаз**).

Гомеостаз – саморегуляция, способность открытой системы сохранять постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия.

Самоорганизующиеся и высокоорганизованные адаптивные системы обладают способностью так изменять внешнюю среду, чтобы изменение собственного поведения системы не являлось необходимым. Они в состоянии изменять (адаптировать) внешние условия для достижения собственных целей. Если управляемая система и окружающая среда стационарны, то адаптивная управляющая система по истечении определенного периода времени накапливает необходимую информацию, устраняет неопределенность, и качество адаптивного управления приближается к качеству оптимального управления в условиях полной информации. С одной стороны, невозможно осуществить эффективное управление, не зная характеристик управляемой системы, с другой – можно изучить эти характеристики в процессе управления и тем самым улучшить управление, стремясь к оптимальному. Управляющие воздействия носят двойственный характер: они служат

средством как активного изучения, познания управляемой системы для будущего, так и непосредственного управления в текущий момент.

Адаптация – процесс накопления и использования информации в системе, направленный на достижение определенного (оптимального), состояния или поведения системы при начальной неопределенности и изменяющихся внешних условиях. При этом могут изменяться параметры и структура системы, алгоритм функционирования, управляющие воздействия и т.п.

Адаптация работает в тех случаях, когда воздействующие на систему факторы являются полностью или частично неизвестными. В процессе адаптации система накапливает данные об этих факторах и определяет их характеристики. А реализуется в адаптивных системах управления, частным случаем которых являются самонастраивающиеся системы. Примеры: «живые» (человек, семья, организация); механические: системы контроля и управления (за счет механизма обратной связи); компьютерные (искусственная нейронная сеть); кибернетические (система, в процессе эволюции демонстрирующая свою способность к целенаправленному поведению в сложных средах. Адаптивная система может приспосабливаться к изменениям как внутренних, так и внешних условий.

Для динамических систем, зависящих от некоторого параметра, характерно, как правило, плавное изменение характера поведения при изменении параметра. Однако для параметра может иметься некоторое критическое значение, при переходе через которое система претерпевает качественную перестройку и, соответственно, резко меняется её динамика, например, теряется устойчивость. Потеря устойчивости происходит, как правило, переходом от точки устойчивости к устойчивому циклу (мягкая потеря устойчивости), выход траектории с устойчивого положения (жесткая потеря устойчивости), рождение циклов с удвоенным периодом. При дальнейшем изменении параметра возможно возникновение хаотических процессов.

Нелинейность системы придаёт процессу самоорганизации неоднозначный ("стохастический") характер. Переход системы от одного состояния к другому требует выбора из множества возможных новых структур какой-то одной. Поэтому на место традиционного динамического детерминизма приходит новый, вероятностный детерминизм. Цепочка бифуркаций может не только увести самоорганизующуюся систему от исходного состояния, но и вернуть её в это состояние. Для конкретной системы, взаимодействующей с конкретной средой, существует свой аттрактор – предельное состояние, достигнув которого, система уже не может вернуться ни в одно из прежних состояний. Диссипативная структура претерпевает множество бифуркаций, как бы балансируя между простыми и странными аттракторами.

Для процесса самоорганизации характерен интенсивный обмен энергией/веществом с окружающей средой, причём совершенно хаотический (не вызывая упорядочение в системе); макроскопическое поведение системы описывается несколькими величинами – параметром порядка и управляющими параметрами (исчезает информационная перегруженность системы).

Критические уровни – величины управляющих параметров, при которых изменяется природа нелинейной динамической системы. Такая система может бифурцировать или совершить переход от устойчивого состояния к турбулентности. Примером может служить соломинка, переломившая верблюжью спину.

Система с критическими параметрами может совершать бифуркации или совершить переход от устойчивого состояния к турбулентности.

Пример: соломинка, переломившая верблюжью спину.

Имеется некоторое критическое значение управляющего параметра (связанного с поступлением энергии/вещества), при котором система спонтанно переходит в новое упорядоченное состояние (переход к сильному неравновесию). Новое состояние

обусловлено согласованным (**когерентным**) поведением элементов системы, эффект упорядочения обнаруживается только на макроскопическом уровне. Оно существует только при безостановочном потоке энергии/вещества в систему. При увеличении интенсивности обмена система проходит через ряд следующих друг за другом критических переходов; в результате структура усложняется вплоть до возникновения турбулентного хаоса. Примеры: лазер – пространственное упорядочение; ячейки Рэлея-Бенара – пространственное упорядочение; реакция Белоусова-Жаботинского – пространственно-временное упорядочение.

Когерентность – коррелированность (согласованность) нескольких колебательных или волновых процессов во времени, проявляющаяся при их сложении. Колебания когерентны, если разность их фаз постоянна во времени, и при сложении колебаний получается колебание той же частоты. Классический пример двух когерентных колебаний — два синусоидальных колебания одинаковой частоты.

Фундаментальный принцип самоорганизации – возникновение нового порядка и усложнение систем через флуктуации (случайные отклонения) состояний их элементов и подсистем. Такие флуктуации обычно подавляются во всех динамически стабильных и адаптивных системах за счёт отрицательных обратных связей, обеспечивающих сохранение структуры и близкого к равновесию состояния системы. Но в сложных открытых системах, благодаря притоку энергии извне и усилению неравновесности, отклонения со временем возрастают, накапливаются, вызывают эффект коллективного поведения элементов и подсистем и приводят к «расшатыванию» прежнего порядка и через относительно кратковременное хаотическое состояние системы вызывают либо разрушение прежней структуры, либо возникновение нового порядка. Поскольку флуктуации носят случайный характер, то состояние системы после бифуркации обусловлено действием суммы случайных факторов. Самоорганизация, имеющая своим исходом образование через этап хаоса нового порядка или новых структур, может произойти лишь в системах достаточного уровня сложности, обладающих определённым количеством взаимодействующих между собой элементов, имеющих некоторые критические параметры связи и относительно высокие значения вероятностей своих флуктуаций. В противном случае эффекты от синергетического взаимодействия будут недостаточны для появления коллективного поведения элементов системы и тем самым возникновения самоорганизации. Недостаточно сложные системы не способны ни к спонтанной адаптации, ни к развитию и при получении извне чрезмерного количества энергии теряют свою структуру и необратимо разрушаются. Этап самоорганизации наступает только в случае преобладания положительных обратных связей, действующих в открытой системе, над отрицательными обратными связями. Функционирование динамически стабильных, неэволюционирующих, но адаптивных систем (гомеостаз в живых организмах, и автоматические устройства) основано на получении обратных сигналов от рецепторов или датчиков относительно положения системы и последующей корректировки этого положения к исходному состоянию исполнительными механизмами. В самоорганизующейся эволюционирующей системе возникшие изменения не устраняются, а накапливаются и усиливаются вследствие общей положительной реактивности системы, что может привести к возникновению нового порядка и новых структур, образованных из элементов прежней, разрушенной системы. Таковы, к примеру, механизмы фазовых переходов вещества или образования новых социальных формаций.

Самоорганизация в сложных системах, переходы от одних структур к другим, возникновение новых уровней организации материи сопровождаются нарушением симметрии. Развитие сложных систем часто представляет собой лавинообразную и продолжительную самоорганизацию. Эволюция характерна для нелинейных сред, имеющих фрактальную структуру детерминированного хаоса; состоящих из элементов, способных к размножению, к изменению в процессе существования и конкуренции друг с другом за ресурсы; существующих в среде способной доставлять в систему те или иные

ресурсы (веществ и/или энергии) и оказывать на элементы вредные влияния, способные уничтожать при некоторых условиях различные элементы системы.

За процессами самоорганизации удобно следить по изменению величины энтропии системы. Как уже упоминалось, согласно теореме И.Р.Пригожина, если открытую термодинамическую систему при неизменных во времени условиях предоставить самой себе, то прирост энтропии будет уменьшаться до тех пор, пока система не достигнет стационарного состояния динамического равновесия; в этом состоянии прирост энтропии будет минимальным. Например, в течение времени жизни живой системы её элементы постоянно подвергаются распаду. Энтропия этих процессов положительна (возникает неупорядоченность). Для компенсации распада должна совершаться внутренняя работа в форме процессов синтеза элементов взамен распавшихся. Следовательно, эта внутренняя работа является процессом с отрицательной энтропией – негэнтропией.

----*

Рассматривая современное состояние синергетики, легко убедиться, что эта наука за 50 лет своего существования скатилась от претензий на меганауку, объединяющую всё и вся, до третьестепенного направления, интересного только для отдельных её адептов (философов и прочих словоблудов). В этом отношении она повторила путь кибернетики, когда-то модного учения отразившегося в названиях лабораторий (типа лаборатория "химическая кибернетика" и т.п.), но теперь являющее собой направление исследования проблем управления и роли в ней обратных связей. Глобальная экологии тоже претендовала одно время на меганауку (одно "экология мышления" чего стоит!), но вернулась туда, откуда вышла – в биологическую экологию. Не вышло ничего и из попыток объединения нескольких наук (физико-химическая медицина и т.п.). Похоже, по этому пути идёт и информатика.

С Единой теорией Мира и Единой теорией науки как-то не вытанцовывается.

Да, синергетика возникла с большим грохотом и пылью.

Научный мир испытал такой же шок, как при кончине витализма, когда в 1828 Ф. Вёлер синтезировал мочевину из неорганических компонентов (из письма Вёлера Берцелиусу: "Я стал свидетелем великой трагедии в науке – убийства прекрасной гипотезы уродливым фактом". «Прекрасной гипотезой» был витализм учение о наличии в живых организмах нематериальной сверхестественной силы, управляющей жизненными явлениями – «жизненной силы», «души»; «уродливым фактом» – пробирка с кристаллами мочевины). Вторым потрясением было открытие лауреатом нобелевской премии А. Сент-Дьёрди (1926) того факта, что витамин С (выделяемый из шиповника, лимона и т.п.) оказался аскорбиновой кислотой, $C_6H_8O_6$. И вот третье потрясение. Оказалось что простые (неорганические) системы способны к самоорганизации, к переходу от беспорядка к порядку (порядок так себе, не шары в урне, но всё же...). Кто бы мог подумать! Раньше полагали, что только живое движется от более простых форм к более сложным (Дарвин), а неживое – от порядка к беспорядку (Больцман). К тому же оказалось, что один и тот же математический аппарат применим к описанию процессов в живой и неживой природе, а так же к обществу, к социальным процессам. Удивительно! Хотя, что тут удивительного: математике всегда было наплевать на материальный мир, она развивается по своим собственным законам, не имеющим отношение к реальности (Колмогоров). Математике всё равно складываете ли вы грибы в корзину, или пересчитываете членов академии (2+3 всегда 5, вне зависимости от материи). Она одним и тем же уравнением описывает распределение Ферми-Дирака, кинетику химической реакции 2-го порядка и изотерму адсорбции Ленгмюра.

Казалось: открылись гигантские перспективы. Можно объяснить возникновение звёзд и планетных систем из пыли, биений в радиосхемах, химических колебательных процессов, потрясений на бирже, явление турбулентности, цунами и всяческих катастроф.

Увы! Ничего из этого не вышло.

Никаких бифуркационных процессов предсказать не удалось. Даже на вопрос: когда произойдёт очередная революция в России, с какой интенсивностью и с какими последствиями (на какой бардак (порядок) сменится современный бардак (порядок)) синергетика ответить не может. Предложите спецу по синергетике решить более простую задачу. Дан монокристалл нитрата калия (KNO_3), начинаем его нагревать. Вопросы: произойдёт ли в нём фазовый переход (полиморфное превращение), если произойдёт, то при какой температуре, в какую кристаллическую модификацию, с какой скоростью и как процесс будет развиваться в пространстве? Синергетик застрелится, но не на один вопрос не ответит. Откуда ему знать, что при 129°C кристалл ромбической формы переходит в ромбоэдрическую, рассыпаясь при этом в пыль? Ничто ему не поможет. Сколько не рассуждай о бифуркациях и катастрофах...

Единой теории, объединяющей термодинамику и теорию эволюции на базе синергетики, создать не удалось. Живое рождает себе подобное. Если кошка беременна, то, скорее всего она родит котят, а не змей, орлов или хотя бы собак. Никаких эволюций-революций в её утробе не ожидается. Их и не будет. Неживое же размножаться пока не научилось. Я уж не говорю об интеллекте или сознании.

Как не печально, но критики, с самого начала утверждавшие, что синергетика не способна объяснить многие явления, формы неживой и живой природы, а также феномены социального и, особенно, духовного порядка, оказались правы. В настоящее время синергетика отвергнута, как необоснованная псевдонаучная претензия, большинством ученых практически во всех странах мира (за исключением России, но и здесь интерес к ней падает, по мере вымирания её адептов). Синергетика – не наука, а несвязный конгломерат разнородных представлений и чудовищный язык, понятный только её ревностным приверженцам, умышленно вводящих легковерных в заблуждения. В синергетике больше загадок, странностей, неопределенностей, постановок новых вопросов, чем ясности, там больше незнания, чем знания, больше неоднозначности и метафоричности, чем определенности и обоснованности. Положения синергетики не поддаются экспериментальной проверке, позитивным, чувственным критериям истинности. Основная ценность этой науки – это название: краткое, греческое и непонятное. Никакой новизны в ней нет.

Основная проблема синергетики состоит в том, что ей за 50 лет так и не удалось создать собственный математический аппарат. Для решения отдельных задач она привлекает нелинейные дифференциальные уравнения, большинство которых не имеет решения. Поэтому не удивительно, что она любит рассуждать о самоорганизации, но не способна описать не один такой процесс, ни качественно, ни количественно.

Теорией организации и самоорганизации сложных открытых систем занимается нелинейная динамика. Но и ей удалось решить лишь нескольких задач, тогда как большинство практически важных проблем оказалось в подвешенном состоянии (в основном из-за слабого развития современной математики).

Таким образом, синергетика имеет исторический интерес. Из учебника "Нелинейная динамика" главу "Синергетика" можно удалить. Вряд ли кто из читателей это заметит.

9. СИСТЕМЫ И ЗАКОНЫ ИХ ЭВОЛЮЦИИ

Система – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство.

Все известные системы можно подразделить на статические и динамические (консервативные и динамические), а математические модели, описывающие их эволюцию во времени, – на статические и динамические. При этом процессы эволюции могут быть обратимыми и необратимыми, системы открытыми или закрытыми, а математический аппарат - линейным или нелинейным.

Термин нелинейная динамика может ввести в заблуждение: можно подумать, что динамика отрицает статику, а нелинейность отрицает линейность. Это конечно не так, динамика включает статику, как свой базовый компонент, а нелинейная математика включает линейную, как частный случай и, к тому же, при моделировании реальных систем нелинейная математики быстро скатывается к линейный. Нелинейный мир включает линейный, изучает системы, как простые, так и сложные, как находящиеся в покое, так и эволюционирующие в пространстве и времени.

В данной главе нелинейная динамика рассматривается как общая наука, исследующая процессы в системах произвольного типа, приводящие как к упрощению, так и усложнению структур.

9.1 Статические системы

Все известные к настоящему времени системы можно классифицировать с точки зрения их распределенности во времени, их структуры во временном пространстве.

Статическая система – вырожденный случай временно распределенной системы. Все элементы статической системы находятся в одном пространственно-временном срезе. Свойства статической системы определяются исключительно пространственной структурой и природой связей между элементами, которые (и структура, и связи) не меняются со временем. Системообразующими элементами статических систем являются пространственно локализованные (точечные) объекты. Вступая во взаимодействие между собой, они образуют фиксированные связи, определяя тем самым структурустатических систем, которая и является их системообразующим фактором.

Стационарная система может быть представлена как совокупность последовательных во времени статических систем – фиксированных структур, которые и являются ее системообразующими элементами. Для описания стационарной системы уже недостаточно оперировать ее качествами в единичном временном срезе, она необходимо представляется несколькими точками на временной оси, соответствующими переходам из одного статического состояния в другое. Специфику стационарной системы определяют переходы между ее статическими состояниями, т.е. между реализуемыми ею структурами. Именно переходы можно выдвинуть на роль системообразующих факторов стационарных систем.

Система называется **статической**, если множества $\{A\}$, $\{R\}$ и $\{P\}$ не меняются с течением времени. Неизменность $\{A\}$ и $\{P\}$ означает постоянство состава системы (и структуры) и поля её свойств. Статические модели используются для описания структуры системы, для выяснения из каких объектов она состоит, как эти объекты связаны с друг с другом и каковы свойства этих объектов. Статическая модель – “фотография” существенных свойств системы в некоторый момент времени.

Статика (στατός, «неподвижный») – раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием приложенных к ним сил и моментов. В настоящее время понятие статики вышло далеко за пределы механики. Обычно под статикой понимают состояние системы в равновесии.

Статическая система – система, в которой значения входных и выходных переменных постоянны во времени; функционирует в установившемся режиме; обладает мгновенной реакцией на входное воздействие; реакция на входное воздействие не зависит от предыстории, от поведения системы в прошлом, а также от предыдущих значений входа. Статические модели относятся к объектам, практически неизменяющимся во времени или рассматриваемым в отдельные временные сечения. Описывается алгебраическим уравнением $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$. Примеры статических моделей: карта местности, схема персонального компьютера, перечень планет Солнечной системы с указанием их массы; зависимость длительности технологической операции от затрат ресурсов, организационная структура учреждения и др.

Статическая характеристика – зависимость между входной и выходной величинами в установившемся режиме. Может быть представлена и математической моделью вида $Y=F(X)$ и графической моделью.

Статические (структурированные) процессы - неизменные по форме процессы, а также процессы, протекающие в длительный период времени. Поскольку структура таких процессов известна заранее, их можно описать простым алгоритмом.

Пусть $u(t)$, $y(t)$ – вход и выход системы в момент t. У статической системы для каждого t выход $y(t)$ можно определить однозначно по значению $u(t)$ в тот же момент времени. Для этой цели служит статическая характеристика $y=f(u)$ или $y=f(u,t)$ (для нестационарных систем). В соответствии с ней получаем $y(t)=f(u(t))$.

Статическая система может быть равновесной и неравновесной.

Неизменность равновесной системы достигается за счёт нескольких процессов, идущих в противоположных направлениях и уравновешивающих друг друга. Примерами могут служить система «вода – насыщенный пар», равновесие в которой достигается процессами испарения и конденсации; экологическая система с равновесием хищных и нехищных животных; система «человек» или «животное» с уравновешивающими друг друга процессами ассимиляции и диссимиляции; предприятие или целое государство, в которых сбалансированы доходы и расходы.

Статичность системы не означает отсутствие в ней процессов.

Математические модели статических систем могут характеризоваться постоянными или переменными параметрами, быть линейными или нелинейными, дискретными или непрерывными.

9.2 Динамические системы

Теория динамических систем не относится к физическим феноменам, это - математическая теория, концепции и методы которой применимы к достаточно широкому диапазону явлений, включая хаос.

Динамика (сила, мощь) – состояние движения, ход развития, изменение какого-либо явления под влиянием действующих на него факторов. В механике динамика противопоставляется кинематике.

Динамическая система – система, выходные сигналы которой в данный момент времени определяются характером входных воздействий в прошлом и настоящем (состояние системы зависит от предыстории); множество элементов, для которого задана функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве каждого элемента системы; система, эволюционирующая во времени; любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени.

Динамическая система – система любой природы (физическая, химическая, биологическая, социальная, экономическая и т.д.), состояние которой изменяется (дискретно или непрерывно) во времени. С математической точки зрения, динамическая система уравнений, где выход одного уравнения образует является входом другого.

Замечание. В первое время под термином динамическая система понимали механическую систему с конечным числом степеней свободы. Состояние такой системы характеризуется ее положением (конфигурация, местоположение) и скоростью изменения этого положения, тогда как закон движения описывает скорость изменения состояния системы.

Динамические системы бывают физическими, биологическими, химическими и т.п., а так же могут быть вычислительными процессами, процессами преобразования информации и др.

Динамическая модель – математическая модель, в которой в той или иной форме раскрываются причинно-следственные связи, определяющие процесс перехода системы из одного состояния в другое.

Примеры: набор формул небесной механики, описывающий движение планет Солнечной системы, движения маятника в часах, развития популяции зайцев в лесу, изменений температуры в течение суток, динамику извержения вулкана, изменения спроса на какой-либо товар под влиянием рекламы, изменения температуры электроплиты при её включении, описание процесса изменения показателей эффективности за некоторый период времени и т.п.

Элементами динамической системы являются последовательные состояния некой пространственной структуры, которая она определена как система (обладает специфическими системными качествами) находящаяся в движении, как непрерывная последовательность (поток) переходовс. В качестве системообразующих элементов динамической системы выступают переходы. Поскольку они определены как переходы между структурами, то динамической системе в каждый момент времени можно поставить в соответствие вполне определенную структуру – конкретное взаимное положение пространственных элементов и определенные связи между ними. Однако, структура, соответствующая единовременному срезу динамической системы, вообще не является пространственной (статической) системой, т.е. не обладает системными качествами и не может существовать вне динамической системы, вне процесса, (что и отличает динамические системы от стационарных – последние в промежутках между переходами представляют собой полноценные статические системы). Системообразующим фактором динамической системы является процесс как взаимосвязанная, имеющая конкретное направление последовательность переходов.

Наглядно во временном отображении динамическую систему можно представить как отрезок на временной оси (в отличие от точки или нескольких точек, соответствующих статической и стационарной системам). Это графическое изображение призвано подчеркнуть исключительную распределенность во времени системы: динамическая система как таковая не может быть зафиксирована во временной точке, а лишь исключительно на некотором временном промежутке, равном длительности (периоду) процесса.

Совокупность процессов интерпретируется как **функциональная система**. Системообразующими элементами функциональной системы являются согласованно взаимодействующие динамические системы, т.е. направленные процессы. На временной оси функциональная система представлена уже не линейной последовательностью точек процесса (отрезком), а параллельными процессами, объединенными в некую совокупность – действие, с однозначно выделенными как минимум двумя точками синхронизации процессов, задающими границы действия: событиями его начала и завершения – результата. Именно наличие этих точек синхронизации процессов позволяет представить функциональную систему как некий самостоятельный феномен, систему во временном пространстве, обладающую свойствами, не сводимыми к совокупности качеств ее элементов (процессов динамических систем). В качестве примеров функциональных систем можно привести совокупность процессов в нейронных сетях головного мозга, действия биологических организмов.

Функциональная система имеет пространственное отображение — совокупность структур составляющих ее динамических систем (процессов). Однако это отображение

случайно, однозначно не фиксировано (отдельные динамические системы не объединены «жесткими» пространственными связями), оно формируется и сохраняется лишь в процессе функционирования системы. Временные границы функциональной системы определены не формально, как у динамической системы, в которой они задавались продолжительностью процессуального цикла, а конкретно и содержательно – между двумя событиями: началом и результатом действия.

Система считается динамической, если она эволюционирует во времени и/или пространстве. Она характеризуется своим начальным состоянием и законом, по которому система переходит из начального состояния в другое. Состояние динамической системы в любой момент времени описывается множеством вещественных чисел (или векторов), соответствующим определённой точке в пространстве состояний. Эволюция динамической системы определяется детерминированной функцией, определяющей время, когда система примет конкретное состояние, зависящее от предыдущего.

Пример: погода (температура, влажность, атмосферное давление взаимодействуют друг с другом, вызывая шторм).

В любой момент времени динамическая система имеет состояние, заданное набором действительных чисел (вектором), которое может быть представлено точкой в соответствующем пространстве состояний (геометрическое многообразие). Закон эволюции динамической системы – это функция, описывающая, какие состояния будущего следует из текущего состояния. Часто функция детерминирована, т. е. для данного временного интервала из текущего состояния следует только одно будущее состояние. Детерминированная эволюция обратима, если каждое состояние имеет единственный прецедент (прообраз).

Некоторые системы являются стохастическими (случайными), поскольку случайные события также влияют на эволюцию переменных состояния. Динамическая система считается случайной**,** если существует вероятностное распределение последующих событий (идеализированный бросок монеты имеет два последовательных результата с равной вероятностью для каждого начального состояния: орёл и решка).

В физике под динамической системой понимают частицу или ансамбль частиц, состояние которых изменяется со временем, подчиняясь дифференциальным уравнениям с производными по времени. Для предсказания будущего поведения системы, проводится аналитическое решение таких уравнений или их интеграция методом компьютерного моделирования.

Теория динамических систем важна для таких наук, как математика, физика, биология, химия, инженерия, экономика, и медицина. Динамические аспекты являются фундаментальной частью теории детерминированного хаоса, логистических отображений, теории бифуркаций и катастроф, самоорганизации и т.п.

Концепция динамической системы представляет собой некое формальное «правило», описывающего зависимость от времени положения точки в окружающем её пространстве. В математике таких «правил» много: различные варианты выбора времени измерения и особые свойства окружающего пространства могут дать представление об обширности класса объектов, описанных в этом понятии. Время может быть измерено целыми числами, вещественными или комплексными числами или может быть более общим алгебраическим объектом, потерявшем память о своём физическом происхождении, а окружающее пространство может быть просто множеством без необходимости без введения гладкой пространственно-временной структуры.

Известны два подхода к описанию динамической системы и её эволюции: геометрический (топологический) и эргодический (вероятностный). Геометрический (топологический) подход к динамике (аналогичен качественной теории дифференциальных/разностных уравнений), направлен на изучение асимптотических геометрических свойств фазовой структуры динамической системы. Он используется при изучении низкоразмерных систем (системы с дискретным и непрерывным временем, с

одной или двумя переменными). Однако для исследования систем больших размерностей эргодический подход, основанный на теории вероятностей и нацеленный на исследование статистических свойств фазовых траекторий, более эффективен.

Протекание динамических (неструктурированных) процессов зависит от индивидуальных условий, в которых они протекают. Уравнения, описывающие динамические процессы, содержат так много переменных, что моделирование практически невозможно, невозможно подобрать чёткий алгоритм расчётов.

Отличие статических и динамических моделей заключено в учёте времени: в статике его как бы не существует, а в динамике это основной элемент. Динамические системы характеризуются тем, что их выходные сигналы в данный момент времени определяются характером входных воздействий в прошлом и настоящем (зависит от предыстории). В противном случае системы называют статическими. Динамическая модель описывает неустановившийся режим работы изучаемого объекта. Динамическая система характеризуется своим начальным состоянием и законом, по которому система переходит из начального состояния в другое.

В термодинамике помимо статического и динамического рассматривают и квазистатический процесс.

Квазистатический процесс – идеализированный процесс, состоящий из непрерывно следующих друг за другом *квазистатических состояний*, в которых характеризующие систему термодинамические величины за время наблюдения не изменяются. Если каждое такое квазистатическое состояние системы близко к состоянию равновесия и, следовательно, систему в каждый момент времени можно считать находящейся в термодинамическом равновесии, то такие процессы называют равновесными, или, точнее, *квазиравновесными*

Примеры: изохорный, изобарный, изотермический, адиабатический процессы.

Любой обратимый процесс обязательно является квазистатическим, однако обратное неверно. Квазистатические процессы, связанные с производством энтропии, необратимы. Примером квазистатического процесса, который не является обратимым, является сжатие против системы с поршнем, подверженным трению, – хотя система всегда находится в тепловом равновесии, трение обеспечивает генерацию диссипативной энтропии, что прямо противоречит определению обратимости.

Динамическая система может функционировать в непрерывном или дискретном (квантованном на равные интервалы) времени, в непрерывном или дискретном пространстве. Все объекты, переменные которых (включая, при необходимости, время) могут принимать несчётное множество сколь угодно близких друг к другу значений, называются непрерывными или континуальными. Подавляющее большинство реальных физических и теоретических объектов, состояние которых характеризуется только макроскопическими физическими величинами (температура, давление, скорость, ускорение, сила тока, напряженность электрического или магнитного полей и т.д.) обладают свойством непрерывности. При модельном описании таких объектов используется аппарат дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Модели, у которых входные и выходные переменные являются непрерывными по времени и по величине, называют непрерывными. Объекты, переменные которых могут принимать некоторое, практически всегда конечное число наперёд известных значений, называются дискретными. Модели, у которых входные и выходные переменные дискретны или по времени, или по величине, называют дискретными. Основой формализованного описания дискретных объектов является аппарат математической логики (логические функции, аппарат булевой алгебры, алгоритмические языки, конечно-разностные уравнения).

В системах с дискретным временем (каскад, отображение) поведение системы (или, что то же самое, траектория системы в фазовом пространстве) описывается последовательностью состояний. В системах с непрерывным временем (фазовые потоки), состояние системы определено для каждого момента времени на вещественной или

комплексной оси. Динамическая система (как с дискретным, так и с непрерывным временем) часто описывается автономной системой дифференциальных уравнений, заданной в некоторой области и удовлетворяющей там условиям теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Для задания динамической системы необходимо описать её фазовое пространство, множество моментов времени и некоторое правило, описывающее движение точек фазового пространства со временем. Множество моментов времени может быть как интервалом вещественной прямой (время непрерывно), так и множеством целых или натуральных чисел (дискретное время). Во втором случае «движение» точки фазового пространства больше напоминает мгновенные «скачки» из одной точки в другую: траектория такой системы является не гладкой кривой, а просто множеством точек (орбита). Положениям равновесия соответствуют особые точки дифференциального уравнения, а замкнутые фазовые кривые – его периодическим решениям.

Динамическая модель стационарна, если свойства преобразования входных переменных не изменяются со временем. Стационарность объекта – неизменность его структуры и параметров; он описывается выражением, которое включает в себе только постоянные коэффициенты. Объект может считаться стационарным, если его параметры меняются медленно по сравнению со временем, которое требуется для идентификации объекта. Нестационарность может иметь место относительно параметров, относительно структуры и одновременно. Чаще имеет место нестационарность относительно параметров, т.е. рассматривается объект с переменными коэффициентами. Общей теории и математического аппарата для описания существенно нестационарных объектов переменной структуры не существует.

Различают детерминированные и стохастические (вероятностные) модели.

Детерминированная система – система, поведение которой можно абсолютно точно предвидеть (точнее – предсказать с точностью, допускаемой экспериментальными погрешностями).

Детерминированный оператор позволяет однозначно определить выходные переменные по известным входным переменным. Детерминированность модели означает лишь неслучайность преобразования входных переменных, которые могут быть как детерминированными, так и случайными. Состояние динамической системы в любой момент времени описывается множеством вещественных чисел (или векторов), соответствующим определённой точке в пространстве состояний. Динамическая система представляет собой такую математическую модель процесса, в которой пренебрегают «флуктуациями и всеми другими статистическими явлениями».

Стохастическая система – система, состояния которой зависит не только от контролируемых, но и от неконтролируемых воздействий или если в ней самой находится источник случайности. Последствия случайных процессов в сложных средах с большим числом степеней свободы можно прогнозировать только с некоторой степенью вероятности.

Если в модели среди величин имеются случайные, т.е. определяемые лишь некоторыми вероятностными характеристиками, то модель называется стохастической (вероятностной, случайной). В этом случае и все результаты, полученные при рассмотрении модели, имеют стохастический характер. Стохастический оператор позволяет определить по заданному распределению вероятностей входных переменных и параметров системы распределение вероятностей входных переменных.

При стохастическом подходе нельзя судить как будет развиваться конкретное проявление процесса. Однако если процесс наблюдается часто, то, не имея возможности предсказать конкретное течение процесса, можно делать заключения о его основных особенностях (нельзя точно сказать, какая погода будет в Москве в 7-го июля следующего года, но всё же днём $+25^{o}$ вероятнее, чем -25°). Такая информация мало полезна обывателю, но важна для городского хозяйства.

Граница между детерминированными и стохастическими моделями довольно расплывчата. Удобный практический приём состоит в том, что при малых отклонениях от фиксированных значений модель считается детерминированной, а отклонение результата исследуется методами оценок или анализа её чувствительности. При значительных же отклонениях применяется методика стохастического исследования.

Вполне детерминированные системы (системы без стохастических компонент) малых размеров (небольшое число переменных) и с простыми нелинейностями (например, с одной квадратичной функцией) могут проявлять стохастическое (случайное) поведение. Это означает, что даже, если параметры исходного состояния хаотических систем измерены с хорошей точностью, новое состояние оказывается совершенно случайным, и предсказать его заранее невозможно.

Основное содержание теории динамических систем – исследование кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Сюда входит разбиение фазового пространства на траектории и исследование предельного поведения этих траекторий: поиск и классификация положений равновесия, выделение притягивающих (аттракторы) и отталкивающих (репеллеры) множеств.

Задача предсказания поведения изучаемой системы во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии сводится к нахождению некоторого закона, который позволяет по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени в некоторой точке пространства определить его будущее в любой следующий момент времени. В зависимости от степени сложности самого объекта этот закон может быть детерминированным или вероятностным, может описывать эволюцию объекта только во времени, только в пространстве, а может описывать пространственно-временную эволюцию.

Моделирование эволюции динамической системы сводится к решению дифференциального уравнения и построению двух графиков: графика изменения возмущения во времени и графика реакции выхода на это возмущение – графической зависимости изменения выхода во времени. Процессы, протекающие в сложных системах, характеризуются большим числом параметров (в том смысле, что соответствующие уравнения и соотношения аналитически не могут быть разрешены). Модель считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно её состояние, и указан закон эволюции.

Динамическая система это набор параметров + оператор её эволюции во времени на пространстве состояний. Динамическая система состоит из абстрактного фазового пространства (пространства состояний), координаты которого описывают состояние в любой момент, и динамического правила, определяющего непосредственное будущее всех переменных состояния, учитывая только настоящие значения тех же переменных состояния. Например, параметры состояния маятника - его угол и угловая скорость, а правило эволюции - уравнение Ньютона $F=ma$.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно её состояние, и указан закон эволюции. Методы описания эволюции динамических систем довольно разнообразны: дифференциальные уравнения, дискретные отображения, теория графов, теория марковских цепей и т.п.

Свойства динамической системы задаются динамическими характеристиками.

Динамическая характеристика – реакция системы на возмущение (зависимость изменения выходных переменных от входных и от времени).

Обычно состояние системы задается некоторым набором чисел (фазовых координат) и представляет собой область в многомерном пространстве или многообразие. Эволюция системы представляется как движение точки фазового пространства.

Для задания динамической системы необходимо описать её фазовое пространство X, множество моментов времени t и некоторое *правило*, описывающее движение точек

фазового пространства со временем. Множество моментов времени t может быть как интервалом вещественной прямой (тогда говорят, что время *непрерывно*), так и множеством целых или натуральных чисел (*дискретное* время). Во втором случае «движение» точки фазового пространства больше напоминает мгновенные «скачки» из одной точки в другую: траектория такой системы является не гладкой кривой, а просто множеством точек, и называется обычно орбитой.

Теория динамического процесса базируется на системе уравнений, где выход одного уравнения является частью входа другого. Модель динамической системы задана, если определены параметры, характеризующие состояние системы, и указан оператор, позволяющий установить изменение координат во времени.

Динамическая система – совокупность трёх объектов:

1. Фазовое пространство (пространство состояний), представляющее собой некое развивающееся во времени множество X, элементы которого определяют конкретные состояния системы. Фазовое пространство в общем случае – топологическое пространство. Измерение расхождения между разными состояниями требует введения расстояния, тогда X – метрическое пространство.
2. Время (набор времён), которое может быть дискретным или непрерывным.
3. Закон эволюции, позволяющий определить состояние системы в момент времени t.

Динамические системы подразделяются на **консервативные** и **диссипативные**. Консервативные системы характеризуются неизменным запасом энергии (в механике их называют гамильтоновыми). Они не имеют притягивающих областей в фазовом пространстве, т. е. в них, их фазовый объём постоянен и невозможны ни асимптотически устойчивые неподвижные точки, ни предельные циклы, ни странные аттракторы.

Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются неконсервативными. Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются диссипативными. В отличие от консервативных, диссипативные динамические системы, характеризуются сокращением во времени объемов фазового пространства. Системы, в которых энергия во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчёта времени на противоположное.

Динамические системы называются автономными, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат.

Динамические системы могут описываться линейными или нелинейными уравнениями, динамика таких систем может быть как регулярной, так и стохастической. Возможны системы с непрерывным и дискретным временем. Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Различают линейные и нелинейные колебательные системы, сосредоточенные и распределенные, консервативные и диссипативные, автономные и неавтономные. Особый класс динамических систем включает автоколебательные системы.

Динамические системы классифицируют по виду операторов: линейные и нелинейные. Для линейных систем реакция на сумму двух иди более различных воздействий эквивалентна сумме реакций на каждое возмущение в отдельности, для нелинейных – это не выполняется. Существуют системы с непрерывным и дискретным временем (потоки и каскады); колебательные системы (линейные и нелинейные, сосредоточенные и распределённые, автономные и неавтономные, автоколебательные); консервативные (гамильтоновы) и неконсервативные.

Важным объектом исследования является сосредоточенная динамическая система.

Сосредоточенная (точечная) система – динамическая система, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений.

Сосредоточенность или распределённость характеризуют объекты с точки зрения роли, которую играет в их описании пространственная протяженность. Если пространственной протяженностью объекта можно пренебречь и считать, что независимой переменной является только время, говорят об объекте с сосредоточенными параметрами. Описание протяженных объектов требует учёта не только времени, но и пространственных координат. Объекты с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Распределённая система – система, для которой отношения местоположений элементов (или групп элементов) играют существенную роль с точки зрения функционирования системы, а, следовательно, и с точки зрения анализа и синтеза системы. Для распределённых систем характерно распределение функций, ресурсов между множеством элементов (узлов) и отсутствие единого управляющего центра, поэтому выход из строя одного из узлов не приводит к полной остановке всей системы. Типичной распределённой системой является Интернет.

Распределённые системы в физике – системы, динамические характеристики которых (например, масса и упругость в механических системах, индуктивность и ёмкость в электрических) несосредоточены (только) в точечных элементах, а распределены тем или иным образом непрерывно по пространству, поверхностям, линиям и т.п., в противоположность дискретным системам.

Распределенная во времени (временно-распределенная) система – это система, элементы которой не находятся (не наблюдаемы) в единовременном пространственном срезе, а составляют временную последовательность.

Динамика сложных систем, как правило, описывается системой нелинейных уравнений, однако практическая реализация такого подхода встречает непреодолимые трудности, поскольку нелинейные динамические системы в целом не имеют замкнутой формы решения. Для хотя бы частичного преодоления таких трудностей приходится прибегать к линеризации нелинейных уравнений. Преимущество линейных динамических систем состоит в том, что могут быть решены точно (аналитически). Линеаризация используется для понимания поведения динамических систем, путём расчёта точек равновесия системы и приближения её в виде линейной системы вокруг каждой такой точки.

Для описания эволюции простых динамических систем достаточно знать траекторию их развития, но большинство динамических систем слишком сложны для понимания в терминах отдельных траекторий. Трудности возникают по разным причинам.

Изучаемые системы могут быть известны лишь приблизительно – параметры описывающих их уравнений могут быть не определены, а некоторые вообще отсутствовать. Используемые аппроксимации могут вызывать сомнение в обоснованности или актуальности численных решений. Для преодоления таких трудностей были введены несколько понятий устойчивости, например, устойчивость по Ляпунову и структурная устойчивость. Устойчивость динамической системы подразумевает, что существует класс моделей и начальных условий, для которых траектории будут эквивалентны. Операция сравнения траекторий с целью установления их эквивалентности подбирается с учетом различных понятий устойчивости.

Тип траектории может быть более важным, чем сама конкретная траектория. Некоторые траектории могут быть периодическими, тогда как другие блуждают по многим различным состояниям системы. Классификация всех возможных траекторий привела к качественному изучению динамических систем, т. е. свойств, которые не меняются при изменении координат.

Поведение траекторий в зависимости от величин параметра важно для приложений. При изменении параметра динамические системы могут встретиться точки бифуркации, в которых изменяется качественное поведение динамической системы. Пример: переход от периодического движения жидкости к беспорядочному поведению, турбулентности.

Траектории системы могут выглядеть беспорядочными, случайными. В этих случаях может потребоваться вычисление средних значений с использованием одной очень длинной траектории или многих разных траекторий. Средние значения хорошо определены для эргодических систем и для гиперболических систем. Понимание вероятностных аспектов динамических систем помогло установить законы статистической механики и хаоса.

Важнейшие понятия теории динамических систем – устойчивость состояний равновесия (сохранение системой своей базовой структуры и основных выполняемых функций в течение определенного времени и при относительно небольших и разнообразных внешних воздействиях и внутренних возмущениях) и грубость (сохранение свойств при малых изменениях математической модели).

Устойчивость состояний равновесия – способность системы при малых изменениях начальных условий сколь угодно долго оставаться около положения равновесия или на заданном многообразии.

Грубая система – система, качественный характер движений которой не меняется при достаточно малом изменении параметров.

Теория устойчивости – дисциплина, изучающая закономерности поведения систем под действием внешних воздействий. В аналитическом аспекте является разделом теории дифференциальных уравнений. В прикладном аспекте наибольшее развитие получила теория устойчивости механических систем, поскольку именно механика, как старейшая наука, впервые столкнулась с проблемами устойчивости. В наиболее общем виде теория устойчивости была разработана А.М.Ляпуновым, сформулировавшим и доказавшим основные теоремы теории устойчивости движения. Важной частью теории устойчивости является проблема аналитического и практического определения запасов устойчивости сложных систем и процессов. В этой части теории устойчивости особую актуальность с развитием сложной техники приобрели задачи диагностирования и прогнозирования запасов устойчивости процессов, связанных с эксплуатацией больших технических систем.

Бифуркация – всевозможные качественные перестройки или метаморфозы различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят.

Замечание. Разделов науки, в названия которых входит термин "динамика", довольно много. Есть динамика механических систем, регулярная и хаотическая динамика, топологическая динамика, символьная динамика и др. Мы далее будем в основном заниматься нелинейной динамикой.

9.3 Линейные динамические системы

Математически динамическая система определяется ее состоянием и динамикой. Классический пример динамической системы – маятник.

Динамика линейна, если причинная взаимосвязь между текущим состоянием системы и её последующим состоянием линейна.

Линейная динамическая система – система, эволюция которой во времени можно описать линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (для систем с дискретным временем -линейным разностным уравнением).

В математической модели линейной системы это означает, что оператор преобразования "вход-выход" линеен. Иногда линейное свойство системы называют принципом суперпозиции.

Условия линейности:

– гомогенность – при изменении амплитуды входного сигнала в k раз также в k раз изменяется и амплитуда выходного сигнала;

– аддитивность – при суммировании входных сигналов результирующий сигнал на выходе будет равен сумме реакций от исходных сигналов;

– *инвариантность* – когда смещение входного сигнала во времени вызывает аналогичное смещение выходного сигнала; статическая линейность – когда основные законы в системе описываются линейными уравнениями;
– гармоническая верность – если на вход системы подать синусоидальный сигнал, то на выходе будет сигнал той же частоты.

Свойства линейных систем:
– порядок установки линейных систем не влияет на результирующий сигнал;
– любая сложная система будет линейна, если составлена из линейных систем и блоков суммирования;
– перемножение сигнала на константу является линейной операцией, а перемножение двух сигналов – нелинейной.

В прикладной математике линейным принято называть вычислительный процесс, в котором операции выполняются последовательно, в порядке их записи. Каждая операция является самостоятельной, независимой от каких-либо условий.

Линейные системы важны для понимания процессов классической механики, в теории электричества и сопротивления материалов, в баллистике и т.п. К линейному миру относится квантовая механика, которая до сих пор принципиально линейна.

Процессы в линейных системах описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Основными свойствами таких уравнений являются однозначность, единственность и точность решений, что соответствует представлениям о детерминизме и однозначности причинно-следственных связей. Именно эти свойства системы дают возможность научного эксперимента – возможности воспроизвести явление в разных лабораториях в разное время.

Линейный математический аппарат хорошо разработан, причем требуемые результаты могут быть получены различными способами. Линейные системы важны для понимания поведения сложных, нелинейных динамических систем. При этом используется тот факт, что фазовые траектории в районе точек равновесия могут быть линеаризованы, и задачи решены методами линейной алгебры.

9.4 Нелинейные динамические системы

Классический математический аппарат естествознания базируется на линейной основе, причём равным изменениям одной (независимой) величины отвечают равные перемены в зависимой. Однако по мере развития науки было установлено, что возможности линейного подхода для описания реальных систем весьма ограничены: линейная зависимость не обладает избирательностью, не может описывать ни резонансных всплесков, ни насыщения, ни колебаний, ни хаоса – ничего, кроме равномерного роста или убывания.

Нелинейное мышление – мышление, рассматривающее поведение любых объектов с использованием таких параметров, как пороговость, насыщение, наличие обратных связей. Воздействие влияет на систему только тогда, когда оно превосходит пороговое значение его восприятия системой. Однако при превышении воздействием определенной величины, система уже не реагирует на это превышение, а итоговый отклик на несколько воздействий не равен сумме откликов на каждое воздействие в отдельности. С позиций нелинейного мышления все реальные системы – нелинейны и могут считаться линейными лишь приближенно.

Нелинейная наука – научное направление, исследующее процессы в открытых нелинейных сферах. Она включает в себя комплекс близко родственных смежных научных дисциплин: термодинамику необратимых процессов, теорию катастроф, синергетику или теорию самоорганизующихся систем. Методы нелинейной науки находят широкое применение не только в естественно-научных исследованиях, но также в сфере гуманитарных дисциплин (социология, демография, образование и др.).

Нелинейная динамика – междисциплинарная наука, направленная на изучение свойств нелинейных динамических систем**. Использует для описания систем нелинейные модели, описываемые дифференциальными уравнениями и дискретными отображениями. Включает в себя теорию устойчивости, теорию динамического хаоса, эргодическую теорию**, теорию интегрируемых систем и теорию катастроф.

Необходимость адекватного описания реальных сред потребовала перехода на нелинейный математический аппарат. Нелинейный эффект – это эффект, математически описываемый некоторой нелинейной зависимостью. Математически такого рода зависимости выражаются нелинейными функциями одного или нескольких переменных. Геометрический образ нелинейной функции – кривая на плоскости, искривленная поверхность или гиперповерхность в пространстве трёх или большего числа измерений. На одинаковые приращения независимой переменной одна и та же нелинейная функция откликается по-разному в зависимости от того, какому значению независимой переменной придаётся приращение. Почти полным безразличием к изменению одних и повышенной чувствительностью к изменению других значений независимой переменной нелинейные функции разительно контрастируют с линейными. В какой бы области естествознания ни возникала нелинейность явлений, она глубоко функциональна. В физике нелинейность - это учёт различного рода взаимодействий, обратных влияний и тонких эффектов, ускользающих от более грубых сетей линейной теории. В биологии нелинейность позволяет системам охватить громадный диапазон жизненно значимых воздействий среды. Использование нелинейных математических моделей позволяет объединить и описать большой круг разрозненных явлений, обнажить их глубинную сущность.

В прошлом физика знала немало нелинейных теорий, например, в сфере гидродинамики и небесной механики. Но в целом классический подход нельзя назвать нелинейным. Активное внедрение нелинейных теорий в естествознание началось с развитием теории теплопроводности и диффузии. Теории этих явлений аналогичны: в линейном приближении законы Фурье и Фика устроены одинаково, уравнения теплопроводности и диффузии с точностью до обозначений совпадают. Если создать начальное возмущение температуры или концентрации, то со временем оно рассосётся, распределение температуры и концентрации будет стремиться к постоянному значению. Однако выяснилось, что если диффузия сопровождается химической реакцией или теплопроводность наблюдается в среде с распределенными источниками тепла, то начальное возмущение может переходить в бегущую волну, движущуюся со скоростью, намного превышающей скорость диффузии. Важность такого открытия станет ясной, если учесть, что такие системы описывают процессы, происходящие при горении газовых смесей, распространении нервного импульса, транспорта ионов через клеточные мембраны, динамику популяций различных организмов и многое другое. Диффузия оказалась одной из первых наук, в которой начался переход от линейного математического аппарата.

Основные свойства нелинейных динамических систем:

– изменения на выходе системы не пропорциональны изменениям на входе;

– протекающие системе процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (уравнение содержит член с порядком 2 и выше);

– меняет свойства под действием проходящих через неё потоков (вещества, энергии, информации);

– не действует принцип суперпозиции (наложения), т. е. совместные действия причин A и B вызывают эффекты, которые не имеют ничего общего с результатами воздействия A и B по отдельности;

– частота выходного сигнала зависит от его амплитуды и др.;

– процессы часто носят пороговый характер - при плавном изменении внешних условий поведение системы изменяется скачком.

– сильно подвержены влиянию случайных, малых воздействий, порождаемых неравновесностью;
– нелинейные уравнения могут иметь несколько решений в зависимости от начальных условий
– демонстрируют колебания и хаотическое поведение;
– создают и поддерживают неоднородности в среде; между системой и средой могут создаваться отношения обратной положительной связи, т.е. система влияет на свою среду таким образом, что в среде вырабатываются условия, которые, в свою очередь, обуславливают изменения в самой этой системе; последствия таких эффектов могут быть самыми неожиданными и необычными;
– устойчивое равновесие при непрерывном изменении параметров системы может стать неустойчивым, а непрерывный процесс с течением времени может стать разрывным.
– сложные системы невозможно свести к простой сумме её частей;
– являются эргодическими.

Эргодичность – свойство некоторых динамических систем**, состоящее в том, что в процессе эволюции почти каждое состояние с определённой вероятностью проходит вблизи любого другого состояния системы.**

Эргодическая теория – раздел общей динамики. Возникла в связи с задачей замены средних значений, взятых по фазовому пространству, временными средними. Состояние некоторой физической системы, например, какого-либо объёма газа, определяется импульсами и координатами составляющих её частиц, т.е. 6*N* величинами (*N* – число частиц). Возможные состояния системы удобно представлять себе как точки 6*N*-мерного пространства – фазового пространства, а её эволюцию с течением времени – как некоторое движение (траекторию) в этом пространстве. Различные физические величины, связанные с данной системой (температура, давление и т.п.), являются функциями координат и импульсов, составляющих систему частиц, т.е. функциями точки её фазового пространства. Система является эргодической, если её фазовое пространство нельзя разбить на сумму двух инвариантных (т.е. состоящих из целых траекторий) множеств, каждое из которых имеет положительный объём.

Нелинейные системы могут казаться хаотичными, непредсказуемыми или противоречивыми, в отличие от простых линейных систем. Математическое описание нелинейной системы намного сложнее, чем линейной (часто оно вообще невозможно).

Нелинейность – свойство системы иметь в своей структуре различные стационарные состояния, соответствующие различным допустимым законам поведения этой системы.

Нелинейная система – динамическая система, в которой протекают процессы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями**.**

В отличие от линейных систем, подсистемы которых слабо взаимодействуют между собой и практически независимо входят в систему, поведение каждой подсистемы в нелинейной системе определяется в зависимости от координации с другими. Идея нелинейности включает в себя многовариантность, альтернативность выбора путей эволюции и ее необратимость.

Факт, что нелинейные системы и процессы широко распространены в природе, известен давно.

Например, природные объекты иерархически структурированы в разные виды открытых нелинейных систем: динамически стабильные, адаптивные и эволюционирующие. Связь между ними осуществляется через хаотическое, неравновесное состояние систем соседствующих уровней. Неравновесность – необходимое условие появления новой организации, нового порядка, новых систем. Когда нелинейные динамические системы объединяются, новое образование не равно сумме частей, а образует систему другой организации или систему иного уровня. Общее для всех эволюционирующих систем: неравновесность, спонтанное образование новых локальных

образований, изменения на макроскопическом уровне, возникновение новых свойств системы, этапы самоорганизации и фиксации новых качеств системы. Развивающиеся системы всегда открыты и обмениваются энергией и веществом с внешней средой, за счёт чего и происходят процессы локальной упорядоченности и самоорганизации. В сильно неравновесных состояниях системы начинают воспринимать те факторы воздействия извне, которые они бы не восприняли в более равновесном состоянии. В неравновесных условиях относительная независимость элементов системы уступает место корпоративному поведению элементов: вблизи равновесия элемент взаимодействует только с соседними, вдали от равновесия – «видит» всю систему целиком и согласованность поведения элементов возрастает. В состояниях, далёких от равновесия, действуют бифуркационные механизмы – наличие кратковременных точек раздвоения перехода к долговременному режиму системы – аттрактору. Заранее невозможно предсказать, какой из возможных аттракторов займёт система.

Появление компьютеров и численных алгоритмов решения дифференциальных уравнений, позволило несколько продвинуть теорию нелинейных систем. При этом алгоритмы описания динамических систем оказались сильно геометрически ориентированными. Однако количественного подхода до сих пор создать не удалось. Вместо количественных решений (которые могут быть получены практически всегда только численно) изучаются качественные аспекты проблемы. Определяется тип решений, их устойчивость, выясняются возможности бифуркаций, катастроф и т.п.

В настоящее время важность нелинейной механики заключается в исследовании динамического хаоса, т. е. нерегулярных решений детерминированного уравнения движения. Такое поведение, невозможное в линейной динамике, вызывает большой интерес, особенно в связи с тем, что хаотическое поведение возникает в очень простых выражениях. Такого от них никто не ожидал.

Замечание. То, что в сложной системе возможны качественные изменения характера движения при непрерывном изменении параметров системы (бифуркации), потеря устойчивости, приводящая к стохастичности движения (динамический хаос), известно давно. Их возникновение связано со случайностью движения очень большого числа частиц, с большим числом степеней свободы. Удивительным оказалось, что нелинейная простая система, состоящая всего из двух-трёх частиц, может обладать вышеперечисленными и многими другими аномальными свойствами, никак не проявляющимися в линейных системах.

Нелинейность внедряется сейчас даже в квантовую механику, хотя она этому активно сопротивляется. Предпринимаемые сейчас попытки великого объединения всех фундаментальных физических теорий, таких как теория струн и конформная теория поля, ведутся именно в нелинейной сфере. По этой причине анализ нелинейных систем активно развивается, но на этом пути возникли существенные трудности, в каком-то смысле даже непреодолимые. В нелинейном математическом аппарате многие важные вопросы остаются без ответа; некоторые нелинейные уравнения принципиально не могут быть решены; существование и уникальность решений не гарантировано; явные формулы трудно найти; линейная суперпозиция здесь уже недоступна; численные аппроксимации не достаточно точны, и т. д. и т. п.

В связи с неразвитостью современной математики, нелинейной динамике приходится использовать многие методы линейной динамики. Они играют роль фундамента, с которого начинается атака на нелинейность. Кроме того, многие важные физические системы «слабо нелинейны» в том смысле, что, хотя нелинейные эффекты играют некоторую роль, линейные члены доминируют, и поэтому в первом приближении система близка к линейной. В результате основные нелинейные явления могут быть поняты путем соответствующего возмущения их линейных приближений. К счастью,, существуют нелинейные уравнения, которые поддаются сравнительно простой

линеаризации. Впрочем, комбинируя численные и аналитические методы, можно добиться разумных результатов и в решении линейных задач.

В поведении нелинейных систем существует постоянное балансирование между чётким порядком, свойственным линейным системам и полным хаосом. Некоторые эффекты нелинейности, например, гомеостаз, самоорганизация, самосинхронизация, накопление малых воздействий, аттракторы противодействуют хаотическим тенденциям, переводят систему в более организованное состояние. Напротив, неустойчивость, бифуркации, цепные реакции, самоорганизованная критичность, самовозбуждение колебаний, эффект запаздывания ответа, гигантские флуктуации, перемежаемость, разрывные функции и скачки, странные аттракторы переводят систему в менее организованное состояние, способствуют хаотическим тенденциям. Размерные эффекты, фракталы, степенное распределение вероятностей, самовозбуждение колебаний могут приводить как к повышению, так и понижению организации.

Система нелинейна, если в разное время, при разных внешних воздействиях её поведение определяется различными законами. Эволюция поведения (и развития) данного типа систем сложна и неоднозначна, поэтому внешние или внутренние воздействия могут вызвать отклонения такой системы от её стационарного состояния в любом направлении. Одно и то же стационарное состояние такой системы при одних условиях устойчиво, а при других – не устойчиво (тогда система может перейти в другое стационарное состояние). Подобные эффекты затрудняет прогнозирование и управление сложными системами, а часто делает то и другое невозможным.

Нелинейность рассматривается как необычная реакция на внешние воздействия, когда «правильное» воздействие оказывает большее влияние на эволюцию системы, чем воздействие более сильное, но организованное неадекватно её собственным тенденциям. Здесь важен механизм **резонансного возбуждения:** система, находящаяся в неравновесном состоянии, чутка к воздействиям, согласованным с её собственными свойствами. Поэтому флуктуации во внешней среде оказываются не «шумом», а фактором генерации новых структур. Малые, но согласованные с внутренним состоянием системы внешние воздействия на неё могут оказаться более эффективными, чем большие. Нелинейные системы демонстрируют неожиданно сильные ответные реакции на отвечающие их внутренней организации резонансные возмущения.

В результате встречного действия различных эффектов, нелинейная система находится обычно в промежуточном состоянии между полностью упорядоченным и хаотическим, причем возможны разные варианты:

– Соотношение порядок/хаос меняется во времени, система становится более организованной, затем скатывается к хаосу, потом снова организуется и т.п.

– Соотношение порядок/хаос меняется в пространстве: в системе чередуются зоны высокой организации и хаотичности, причем эти зоны могут менять свое положение и степень организации

– Система приобретает фрактальную структуру, в которой сочетаются элементы порядка и хаоса фактически в каждой точке пространства и/или в каждый момент времени.

Наиболее частый случай в сложных нелинейных системах – сочетание всех трёх способов баланса между порядком и хаосом.

Если линейные системы, описываемые простыми уравнениями, отличаются простым поведением, то в нелинейном мире простые детерминистские уравнения характеризуются разнообразным поведением. С другой стороны, сложное и кажущееся хаотичным поведение может породить упорядоченные структуры, тонкие и изящные паттерны (картины, узоры). Важно, что расчёты по нелинейным строго детерминированным уравнениям не при водят к точным предсказаниям.

Существуют два основных подхода к изучению динамических систем: геометрический подход (основанный на теории дифференциальных/разностных уравнений) и эргодический подход (основанный на аксиоматике теории вероятностей).

При применении их описанию нелинейных динамических систем математический аппарат существенно усложняется, поскольку нелинейные модели обнаруживают эффекты, невозможные в линейных системах.

Нелинейная динамика изучает системы, изменяющие свои свойства под действием проходящих через них потоков (вещества, энергии, информации), в которых не действует принцип суперпозиции. Для нелинейной системы характерны такие эффекты, как детерминированный (динамический хаос), степенное распределение вероятностей, непредсказуемость критической эволюции, управляемость эволюции, типовые признаки наступления кризиса, свойство самоорганизации (самоусложнения). Нелинейные системы – это неравновесные системы с избирательным характером реакции на внешние воздействия среды, со способностью активно воспринимать различия во внешней среде и «учитывать» их в своем функционировании на основе положительной обратной связи и скачкообразным характером поведения, приводящим к радикальному качественному изменению системы.

Важная особенность нелинейных систем – возможность самоорганизации: элементы внутри системы влияют друг на друга, создавая порядок в системе. Задача теории нелинейных динамических систем состоит в нахождении и исследовании моделей самоорганизации, т. е. спонтанного образования, развития и функционирования сложных упорядоченных структур, Основные принципы этой науки: системность, нелинейность, самоорганизация. Это направление включает кибернетику, занимающуюся управляемыми системами (поддержание устойчивости путём использования отрицательной обратной связи), общую теорию систем (принципы организации систем: дискретность, иерархичность и т.п.) и теорию хаоса (неравновесность, нестабильность как естественное состояние открытых нелинейных систем, множественность и неоднозначность путей их эволюции). Проблема исследования сложных систем заключается в наличии сложной иерархии достаточно автономных подсистем. Системы верхнего уровня управляют нижележащими системами, однако это управление не является прямым, «директивным», подчиняющим. Управляющие команды подготавливают возможные переходы нижележащих подсистем из одного состояния в другое.

Обладая сложной внутренней структурой, каждая подсистема при выходе на следующий уровень во взаимодействиях с другими подсистемами проявляет себя не многочисленными внутренними элементами низшего уровня, а существенно меньшим количеством параметров порядка и управления. Эти параметры играют важную роль в сложных системах, определяя характер и направление развития, задают набор возможных финальных состояний. Параметры порядка могут появляться или качественно изменять свои значения при изменении управляющего параметра. Они изменяют свое значение медленно, в то время как подчиненные части изменяются быстро. При определенных условиях возникают критические колебания в системе, в результате чего порождаются новые параметры порядка, между ними начинается конкуренция, исход которой зависит от структуры и топологии системы. Упорядоченное состояние системы устанавливается тогда, когда один из параметров выигрывает или достигается определенная форма кооперации между ними. Можно сказать, что параметры порядка и управления позволяют достаточно просто описать процессы нижележащей системы в терминах, единых для уровня более высокого. Управляющие параметры должны сохраняться намного дольше, чем первичные элементы системы; требуется, чтобы они были устойчивы во времени и взаимосвязаны с элементами системы. Эти параметры не только довлеют над элементами, заставляя их следовать стандартным паттернам развития, функционирования, но и реализуют принцип обратной связи.

Теория выделяет и анализирует ситуации неустойчивости и нелинейности в процессах, находит точки, где теряется единственность решений (точки бифуркаций), исследует параметры управления и порядка, а также зависимости процессов от принимаемых этими параметрами значений. Математика динамических сложных систем

позволяет проводить анализ на макро– и микроуровнях. Этот процесс определяется через последовательность сходящихся и расходящихся стадий и оказывается особенно полезным для описания и исследования большого числа развивающихся одновременно локальных подсистем, составляющих единое целое.

Методология нелинейных динамических систем, позволяет реализовать ситуацию, когда, при условии, что зависимая переменная однозначно детерминирована группой независимых переменных, невозможно заранее определить точное значение зависимой переменной в тот или иной момент времени. Имеет место высокая чувствительность к начальным условиям. Небольшие различия на старте могут существенно повлиять на развитие процесса, описываемого системой простых уравнений. В отличие от стохастической (беспорядочной) структуры, структуры детерминированного хаоса обладают устойчивостью возникающих в системе образований по отношению к малым возмущениям при видимой непредсказуемости. Установить эту устойчивость можно математически, хотя визуально (если смотреть зависимость какого-либо показателя, определяющего состояние системы от времени) случайный процесс и детерминированное поведение различить трудно.

Динамические системы подразделяют на два класса: консервативные (например, механические колебательные системы в отсутствие трения) и диссипативные. Для диссипативных сред характерно то, что режим динамики, возникающий в системе, предоставленной самой себе в течение длительного времени, становится не зависящем от начального состояния.

9.5 Эволюция динамической системы

В теории динамических (линейных и нелинейных) систем используются методы различных разделов математики: топологии и алгебры, фрактальной геометрии, теории меры, теории дифференциальных форм, теории особенностей и катастроф, математической статистики и теории вероятности и др. Математический аппарат последовательно развивается, начиная с дифференциальных уравнений первого порядка и их бифуркаций, с последующим анализом фазовых плоскостей, предельных циклов и их бифуркаций, и заканчивается уравнениями Лоренца, хаосом, итерированными картами, удвоением периода, перенормировкой, фракталами и странными аттракторами.

Нелинейная динамика – междисциплинарная наука, в которой изучаются свойства нелинейных динамических систем. Нелинейной называется теория, использующая нелинейные математические модели. Нелинейная динамика включает в себя *теорию устойчивости, теорию динамического хаоса, эргодическую теорию, теорию интегрированных систем.*

Хаос – детерминистическая нелинейная динамическая система, которая может продуцировать кажущиеся случайными результаты. Хаотическая система имеет фрактальную размерность и проявляет чувствительную зависимость от начальных условий.

Теория хаоса – математический аппарат, описывающий поведение некоторых нелинейных динамических систем, подверженных при определённых условиях явлению, известному как хаос (динамический хаос, детерминированный хаос). Поведение такой системы кажется случайным, даже если модель, описывающая систему, является детерминированной. Для акцентирования особого характера изучаемого в рамках этой теории явления, обычно принято использовать название: теория динамического хаоса. Примерами подобных систем являются атмосфера, турбулентные потоки, некоторые виды аритмия сердца, биологические популяции, общество как система коммуникаций и его подсистемы: экономические, политические, психологические и другие социальные системы.

Эргодическая теория – один из разделов общей динамики. Эргодичность – свойство некоторых динамических систем, состоящее в том, что в процессе эволюции почти каждое состояние с определённой вероятностью проходит вблизи любого другого состояния системы. Система, в которой фазовые средние совпадают с временными, называется эргодической. Такие системы можно описывать статистическими методами. Например,

температура газа – это мера средней энергии молекулы. Естественно, предварительно необходимо доказать эргодичность данной системы. Для эргодических систем математическое ожидание по временным рядам должно совпадать с математическим ожиданием по пространственным рядам. Более простое объяснение: для расчёта/определения параметров системы можно долго наблюдать за поведением одного её элемента, а можно за очень короткое время рассмотреть все её элементы. В обоих случаях получатся одинаковые результаты, если система обладает свойством эргодичности.

Теория интегрируемых систем – раздел математической физики, изучающий недиссипативные решения дифференциальных уравнений, в том числе уравнений в частных производных. Такие системы имеют соответствующие высшие симметрии. Под интегрируемыми понимают такие системы, решения которых могут быть представлены в явном виде не сложнее, чем через квадратуры — интегралы, зависящие от начальных данных задачи.

Динамическая система является пространством состояний (S) множеством времен (T) и правилом (R) для эволюции R: $S\text{x}T \to S$, что дает следствие (s) в состояние $s \in S$. Динамическую систему можно рассматривать как *модель,* описывающую временную эволюцию системы.

Пространство состояний представляет собой набор координат, необходимых для полного описания системы. Учитывая текущее состояние системы, правило эволюции предсказывает следующее состояние или состояния. Помимо состояния, эволюционирующего во времени, модель может также зависеть от параметров, которые являются постоянными или, возможно, известными функциями времени, например, масса тел в механической модели или рождаемости в популяционной модели.

Пространство состояний может быть дискретным или непрерывным. Например, монета может быть смоделирована пространством состояний, состоящим из двух состояний: орёл и решка. В дискретном пространстве также может быть бесконечно много состояний; например, случайное блуждание может быть ограничено решеткой точек, а состояние системы - это просто та точка решетки, которая в настоящее время занята частицей.

Пространство состояний обычно называют **фазовым пространством** динамической системы, а траекторию движения изображающей точки в этом пространстве – **фазовой траекторией**.

Пространство состояний – один из основных методов описания поведения динамической системы. Движение системы в пространстве состояний отражает изменение её *состояний*.

Фазовое пространство – набор элементов (называемых "точками"), представляющих возможные состояния системы в некоторый момент времени (обычно гладкое, конечномерное множество); совокупность всех допустимых состояний динамической системы; плоскость с осями координат, с отложенными переменными *x* и *y*, на которой представлено множество всех состояний системы так, что каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства; пространство значений параметров системы.

Фазовое пространство динамической системы (пространство состояний) - множество всех её возможных состояний в фиксированный момент времени.

Фазовая траектория (орбита) - движение фазовой (изображающей) точки вдоль некоторой линии.

Состояние системы – характеристика системы на данный момент ее функционирования; совокупность значений некоторых характеристик системы в данный момент времени. Поскольку система описывается определенным комплексом существенных переменных и параметров, то для того, чтобы выразить состояние системы, нужно определить значения, принимаемые ими в рассматриваемый момент. Состояние системы описывается вектором (портрет системы). Поскольку каждая *система* может иметь множество **допустимых состояний, то говорят, что** состояние системы **в момент *t* — это вектор**

или точка в пространстве состояний системы. Описывает изменение состояния системы во времени эволюционный оператор.

Предельное множество – множество состояний, которое достигает математический объект, зависящий от времени (например, динамическая система), через бесконечный интервал времени. Это множество состояний, к которым объект неограниченно приближается при неограниченном возрастании (или убывании) времени.

Состояние динамической системы – некоторый параметр (число или вектор), позволяющий сделать однозначным определение ее выхода по входу. Различные начальные состояния приводят к различной реакции на одно и то же входное воздействие.
Пример. Для неуправляемого маятника состояние однозначно определяется углом φ и угловой скоростью $\omega=d\varphi/dt$. В случае driving вождения фаза побуждения θ также необходима, и маятник тогда описывается неавтономной системой.

В пространственно распределённых системах состояние представляет собой поле (скалярное или векторное). Такое поле – функция с пространственными координатами, как независимыми переменными. Поле скоростей жидкости является известным примером.

Когда пространство состояний непрерывно, оно часто является гладким многообразием, его и называют фазовым пространством. Например, простой маятник моделируется как жесткий стержень, который подвешен в вертикальном гравитационном поле на стержне, вбитом в стену, что позволяет маятнику колебаться в плоскости. Согласно Ньютону, знание угла стержня относительно вертикали, θ, и угловой скорости, $\nu=d\theta/dt$, является достаточным для описания состояния маятника. Таким образом, фазовое пространство маятника представляет собой совокупность возможных значений θ и ν двумерного многообразия. Это многообразие является цилиндром, так как θ является периодическим. В дополнение к состоянию маятника модель также зависит от двух параметров: длины маятника и силы тяжести. Фазовое пространство также может быть бесконечным, например, функциональным пространством. Это относится к динамике, моделируемой дифференциальными уравнениями с частными производными.

Пространство состояний представляет собой совокупность всех возможных состояний динамической системы; каждому состоянию системы соответствует уникальная точка в пространстве состояний. Например, состояние идеального маятника однозначно определяется его углом и угловой скоростью, поэтому пространство состояний представляет собой совокупность всех возможных пар «(угол, скорость)». Пространство состояний (фазовое пространство) может быть конечным, состоящим всего из нескольких точек, но может состоять из бесконечного числа точек, образующих гладкое многообразие, что обычно для обыкновенных дифференциальных уравнений и отображений. В **символической динамике** это канторовское множество, которое является нульмерным. Число степеней свободы динамической системы есть размерность ее фазового пространства, это число переменных, которые необходимы для полного описания системы. В контексте гамильтоновых систем число степеней свободы – это число пар переменных состояния.

Динамическая система на многообразии обычно описывается уравнениями, используя эвклидовы переменные. Сложное поведение фазовых траекторий динамической системы может быть описано последовательностью символов.

Символическая динамика – практика моделирования топологической или гладкой динамической системы дискретным пространством, состоящим из бесконечных последовательностей абстрактных символов, каждый из которых соответствует состоянию системы с динамикой (развитие), данное оператором изменения. Объединяет динамические системы, для которых точками фазового пространства являются последовательности в некотором конечном алфавите «символов», а отображение заключается в сдвиге последовательности на один символ влево. Простейшими примерами являются сдвиг Бернулли и сдвиг Маркова. В символической динамике у таких понятий, таких как гетеро-

и гомоклинические отображения есть особенно простое представление. В символической динамике время дискретно.

Топологическая динамика – раздел теории динамических систем, в которой качественные, асимптотические свойства динамических систем изучают с точки зрения общей топологии. Она довольно тесно связана с эргодической теорией динамических систем.

Топологическая динамическая система – топологическое пространство, вместе с непрерывным преобразованием и/или непрерывным потоком.

Пример. В случае неуправляемого маятника фазовое пространство имеет два размера, тогда как для ведомого маятника их три.

Размер фазового пространства бесконечен в случаях, когда состояние системы определяется полем.

Если возникающее новое состояние не однозначно определено предыдущим, это свидетельствует о том, что фазовое пространство не является полным. Известны два класса систем, в которых фазовое пространство является неполным: неавтономные системы и стохастические системы. Неавтономные системы имеют уравнение движения, которое явно зависит от времени. Закон, определяющий последующее состояние, зависит не только от текущего состояния, но и от времени эволюции системы. Однако есть простой способ сделать фазовое пространство полным: следует включить время в определение состояния. Для этого вводится новая переменная состояния τ. Тогда динамика описывается $d\tau/dt=1$ или $\tau_{n+1}=\tau_n$ в зависимости от того, является ли время непрерывным или дискретным.

Пример. Управляемый маятник – пример неавтономной системы. Для периодически возбуждаемого маятника фазу возбуждения θ также считают переменной состояния. Уравнение движения такого маятника $d\theta/dt=2\pi f$ где f – частота возбуждения (угловая частота привода равна $2\pi f$).

В стохастической системе, число и характер переменных, необходимых для заполнения фазового пространства, обычно неизвестны. Поэтому следующее состояние не может быть выведено из настоящего и детерминированные законы заменяются статистическими. Вместо следующего состояния оно только оценивает вероятности всех точек в фазовом пространстве последующих состояний.

Фазовая траектория (орбита) – в случае непрерывного времени решение уравнения движения - кривая в фазовом пространстве, параметризованная переменная времени. Для дискретной системы это упорядоченное множество точек в фазовом пространстве.

Поток - отображение всего фазового пространства непрерывной динамической системы на себя для заданного шага времени t. Если t – бесконечно малый шаг времени dt, то поток просто задаётся правой частью уравнения движения (т. е. F). В общем случае поток для конечного шага по времени аналитически неизвестен, поскольку для его нахождения требуется решение уравнения движения.

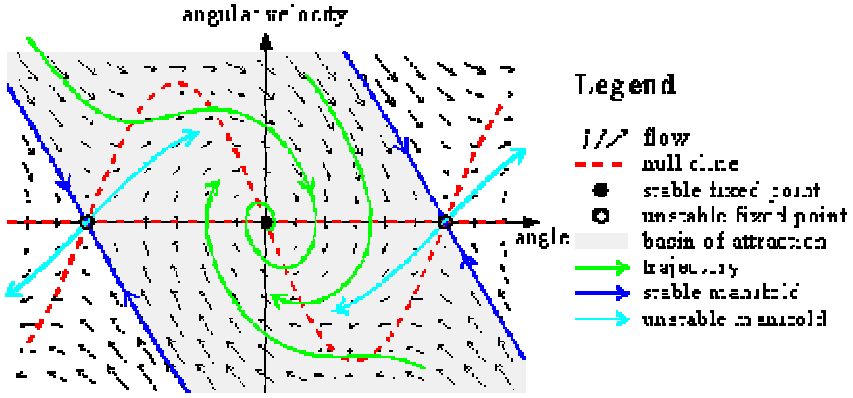


Рис. 1. Фазовая диаграмма колебания маятника.

В качестве примера на рис.1 показан поток затухающего маятника. Черные стрелки векторного поля F тангенциальны на траекториях. На двумерном фазовом пространстве можно представить качественную картину потока и орбит. Сначала на рисунок наносят нулевые изоклины. Это прямые, рассчитанные в предположении, что производная по времени одного компонента переменной состояния равна нулю. Здесь один нулевой изоклин – это угловые оси, потому что временная производная угла равна нулю, когда угловая скорость равна нулю. В случае колебания маятника, другой нулевой изоклин $\omega=\omega_0 2\sin(\varphi/\gamma)$. На этих нулевых изоклинах строят векторное поле вертикально или горизонтально. Между нулевыми изоклинами наносят векторное поле в направлении северо-восток, юго-восток, юго-запад или северо-запад. Направление определяется знаками производных $d\varphi/dt$ и $d\omega/dt$. В точках пересечения нулевых изоклин векторное поле равно нулю, т. е. $d\varphi/dt=0$ и $d\omega/dt=0$. Эти точки называются неподвижными точками. Они соответствуют стационарным решениям. Неподвижные точки – неблуждающие множества. Они могут быть устойчивыми или неустойчивыми

В построении фазовых диаграмм существенную роль играет отображение Пуанкаре – тщательно подобранная (изогнутая) плоскость в фазовом пространстве, пересекаемая почти всеми орбитами. Это инструмент, разработанный Анри Пуанкаре для визуализации потока в фазовом пространстве более чем двух измерений. Сечение Пуанкаре на один размер меньше фазового пространства. Отображение Пуанкаре отображает точки сечения Пуанкаре на себя. Оно связывает две последовательные точки пересечения. Отметим, что подсчитываются только те точки пересечения, которые исходят с одной и той же стороны плоскости. Отображение Пуанкаре превращает непрерывную динамическую систему в дискретную. Если сечение Пуанкаре подобрано тщательно, информация о качественном поведении динамики не теряется. Карты Пуанкаре - это обратимые карты, потому что можно найти u_n из u_{n+1}, следуя назад по фазовой траектории.

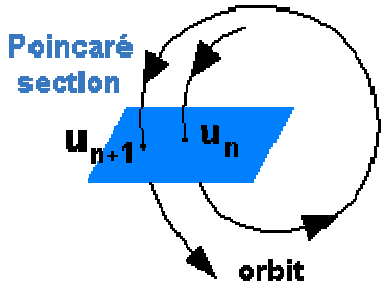


Рис.2 . Сечение Пуанкаре.

Неблуждающее множество набор – набор точек в фазовом пространстве, обладающий следующим свойством: все орбиты, начиная с точки этого множества, проходят сколь угодно близко и произвольно часто через любую точку множества.

Неблуждающие комплекты бывают четырёх видов:

1) Фиксированные точки: стационарные решения. Для ненаправленного маятника и для маятника с вертикальным приводом – неподвижные точки.

2) Предельные циклы: периодические решения. Эти решения распространены, например, в слабо управляемом маятнике.

3) Квазипериодические орбиты. Периодические решения с по меньшей мере двумя несоизмеримыми частотами (т. е. Отношение частот является иррациональным числом). В случае маятника эти решения встречаются только в незатухающем, но управляемом маятнике.

4) Хаотические орбиты. Связанные непериодические решения. Эти решения возникают в управляемом маятнике, если движение достаточно сильное.

Первые три типа могут также возникать в линейной динамике. Четвертый тип появляется только в нелинейных системах. Его возможность предсказал Анри Пуанкаре, а компьютеры превратили это ранее противоречивое поведение в широко распространенный опыт. Это странное поведение называли детермированным хаосом. На карте Пуанкаре предельные циклы становятся неподвижными. Неблуждающее множество может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Изменить стабильность

неблуждающего набора можно изменением числа неблуждающих множеств в ходе бифуркации.

Помимо задания фазовых состояний системы в динамике важны законы эволюции.

Закон эволюции - правило, которое позволяет, если известно состояние системы в некоторый момент времени, определить состояние системы в любой другой момент времени.

Существование закона эволюции динамической системы эквивалентно предположению, что исследуемый процесс детерминирован и в прошлом и в будущем. Предполагается, что сам закон эволюции не зависит от времени, т.е. для любого значения t, t_0 - результат эволюции в течение времени t стартующий в момент времени t_0 не зависит от t_0.

В математическом аппарате динамики время может быть дискретным или непрерывным или представлено топологической группой. Динамическая система с дискретным временем (пример – идеальная монета), оценивает свое состояние только после определенных дискретных интервалов. В случае броска монеты игнорируется процессы падения и отскока монеты, и состояние монеты анализируется только тогда, когда она достигла равновесия. Примеры систем с дискретным временем: динамика численности населения (дискретность, относящуюся к последующим поколениям), бильярд (учитываются состояния в момент ударов). Обычно дискретный временной интервал нормируется на единицу, поэтому множество допустимых времен задаётся целыми числами, чаще неотрицательными целыми числами. Это удобно даже для систем типа бильярда, в которых интервал между ударами может быть непостоянным.

В математике предпочитают обозначать дискретное время как набор значений в наборе целых чисел Z, а непрерывное – как набор реальных чисел R.

Обозначим X фазовое пространство динамической системы. Введем эволюционный оператор g_t для времени t с помощью следующего соотношения: для любого состояния $x \in X$ системы в момент времени 0 состояние системы в момент времени t равно $g_t x$, тогда

g_t: X $\rightarrow X$.

Предположим, что закон эволюции не зависит от времени и существует оператор эволюции, так что справедливо тождество:

$g_s(g_{t+x}) = g_{t+s}(x)$.

Поэтому множество $\{g_t\}$ является коммутативной группой относительно операции композиции:

$g_s g_t = g_s(g_t)$.

Обратным элементом к g_t является g_{-t}. Эта группа изоморфна Z или R для случаев дискретного или непрерывного времени соответственно. В случае дискретного времени такие группы называются однопараметрическими группами преобразований с дискретным временем (фазовыми каскадами). В случае непрерывного времени такие группы называются однопараметрическими группами преобразований (фазовые потоки).

Динамическая система – это триада (X, Ξ, G), где X – множество (фазовое пространство), Ξ либо Z, либо R, а G - однопараметрическая группа преобразования X (с дискретным временем, если $\Xi = Z$) Множество $\{g_t x, t \in \Xi\}$ называется траекторией или орбитой точки $x \in X$.

Замечание. Для случая дискретного времени $g_n = (g_1)_n$.

Орбита точки x есть $...x, g_1 x, (g_1)_2 x, (g_1)_3 x$.

Обычно рассматриваются гладкие многообразия.

Пример 1 (вращение круга) $X=S_1=R/(2\pi Z)$, $\Xi=Z$, g_1: $S_1 \rightarrow S_1$, $g_1 x = x+\alpha \bmod 2\pi$, $\alpha \in R$.

Пример 2 (обмотка тора) $X=T_2 = S_1 \times S_1$, $\Xi=R$, g_t: $T_2 \rightarrow T_2$, $g_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + t\omega_1 \bmod 2\pi \\ x_2 + t\omega_2 \bmod 2\pi \end{pmatrix}$

Пример 3 (экспонента) $\boldsymbol{X=R}$, $\Xi = \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{g_t}$: $\boldsymbol{R \rightarrow R}$, $\boldsymbol{g_t x = e_t x}$

Пусть (***X***, ***R***, ***G***) – гладкая динамическая система, $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{g_t}, \boldsymbol{t}\in\boldsymbol{R}\}$. Она определяет векторное поле ***v*** на ***X***:

$$v(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^t x\right)_{t=0}$$

Это векторное поле определяет автономный $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x)$. Тогда $g_t x$, $t\in R$ является решением этого ОДУ с начальным условием x при $t = 0$. Действительно,

$$\frac{d}{dt} g^t x = \left(\frac{d}{d\varepsilon} g^{t+\varepsilon} x\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{d}{d\varepsilon} g^{\varepsilon} g^t x\right)_{\varepsilon=0} = v(g^t x)$$

Для любого автономного ОДУ, решения которого для всех начальных условий определены для всех значений времени, генерирующих динамическую систему, сдвиг по траекториям ОДУ является эволюционным оператором этой динамической системы. Динамические системы с непрерывным временем обычно описываются через соответствующие автономные ОДУ

Неавтономный ODE

$$\frac{dx}{dt} = v(x,t)$$

можно свести к автономному путем введения новой зависимой переменной y: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=1$. Однако это часто нецелесообразно, потому что таким образом скрыты свойства повторения временной зависимости.

Пример (квазипериодическая временная зависимость):

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t\omega), x \in R^n, \omega \in R^m,$$

функция v является 2π-периодической в каждом из последних m аргументов. Полезно изучить автономный ODE

$$\frac{dx}{dt} = v(x,\varphi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

фазовое пространство которого $R_n \times T_m$. При $m = 1$ обратное отображение Пуанкаре для сечения $\varphi = \varphi=0 \bmod 2\pi$ сводит задачу к динамической системе с дискретным временем. Для ОДУ некоторые решения могут определяться только локально во времени, при $t_- < t < t_+$, где t_-, t_+, зависят от начального условия. Важным примером такого поведения является «раздутие», когда решение системы непрерывного времени в $X=R^n$ приближается к бесконечности за конечное время.

Для уравнения $\dot{x} = x^2$, $x \in R$ решение с положительным (или отрицательным) начальным условием при $t=0$ стремится к $+\infty$ (соответственно $-\infty$), когда время приближается к некоторому конечному моменту в будущем (соответственно в прошлое). Единственное решение, определяемое для всех времен, равно $x\equiv 0$. Такие уравнения определяют только локальные фазовые потоки.

9.6 Математическое описание эволюции динамической системы

Основное препятствие в описании динамики нелинейных систем заключается в том, что соответствующие нелинейные уравнения за редким исключением даже в простейших случаях не имеют аналитических решений и могут быть решены только численными методами, что затрудняет математическое моделирование и ставит крест на любые попытки обработки результатов эксперимента. Хуже того есть уравнения (и число их растёт), которые вообще не имеют решения и можно как-то обсуждать лишь методом асимптот.

В простейших случаях состояние системы характеризуются величинами $w_1,\ldots,w_n$ которые могут принимать произвольные (реальные) значения; два разных набора множеств $w_1,\ldots,w_n$ и $\dot{w}_1,\ldots,\dot{w}_n$ соответствуют разным состояниям, причём если значения w_i и $\dot{w}_i$ близки для всех i, то соответствующие состояния системы тоже близки. В этом

случае закон движения можно записать как автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{w}_i = f_i(w_1,...,w_n), \quad i = 1,...,n. \qquad (1)$$

Если величины $w_1,...,w_n$ есть координаты точки w в n-мерном пространство, то соответствующее состояние динамической системы может быть представлено точкой w. Эту точку назвали фазовой точкой, а пространство – фазовым пространством системы. (Причиной таких названий: раньше значительное внимание уделяли колебательным процессам (маятнику), а там состояние системы обозначалось фазой). Изменение состояния во времени изображается движением фазовой точки по некоторой кривой (фазовой траектории) в фазовом пространстве. В этом пространстве векторное поле определяют, сопоставляя каждой точке вектор $f(w)$ с компонентами

$$(f_1(w_1,...,w_n),...,f_n(w_1,...,w_n)). \qquad (2)$$

Дифференциальные уравнения (1) могут быть записаны в сокращенной форме как

$$\dot{w} = f(w), \qquad (3)$$

Они означают, что в любой момент времени вектор скорости движения фазовой точки равен вектору $f(w)$ исходя из w фазового пространства, занятого движущейся фазовой точкой в этот момент времени. Это кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений (1).

Например, состояние частицы без внутренних степеней свободы (материальная точка), движущейся в потенциальном поле с потенциалом $U(x_1,x_2,x_3)$ характеризуется своим положением $x=(x_1,x_2,x_3)$ и скоростью $\dot{w}$; последняя величина может быть заменена (линейным) импульсом $p = m\dot{x}$, где m- масса частицы. Закон движения имеет вид

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = -gradU(x). \qquad (4)$$

Формулы (4) есть системы из шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Здесь фазовое пространство представляет собой шестимерное евклидово пространство, шесть компонент вектора фазовой скорости – это компоненты обычной скорости и силы, а проекция фазовой траектории на пространство x_1 (параллельно импульсному пространству) является траекторией частицы в обычном смысле слова.

В ряде случаев невозможно установить соответствие между всеми состояниями динамической системы и точками евклидова пространства. Однако такое соответствие может быть установлено локально: для состояний, достаточно близких друг к другу. Если термин «фазовое пространство» отнести к совокупности всех состояний динамической системы, можно сказать, что в общем случае фазовое пространство не является евклидовым пространством, а скорее дифференцируемым многообразием W^n. Локально движение динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений, типа Ур.1. С другой стороны, глобальное (т. е. подходящее для всех состояний динамической системы) и инвариантное (т. е. не зависящее от выбора диаграммы) описание движения дается формулой (3), где f- векторное поле, определенное на W^n, которое ассоциируется с каждой точкой w вектора $f(w)$ в касательном пространстве многообразия в этой точке; Ур.3 означает, что в процессе движения фазовая точка, совпадающая в данный момент времени с точкой $w \in W^n$, имеет скорость $f(w)$ в этот момент. В локальных координатах вектор $f(w)$ представляется в терминах его компонентов (2), а (3) сводится к (1).

Даже если фазовое пространство является евклидовым, часть движения исследуемой динамической системы может быть описана с помощью векторного поля на некотором инвариантном многообразии W, т. к. подмногообразие фазового пространства такое, что вся траектория, проходящая через произвольную точку $w \in W$ заключается в W. Так, в предыдущем примере, если речь идёт об определенном значении энергии E, система (4) не должна изучаться на протяжении всего 6-мерного евклидового

пространство переменных (x,p), а лишь в 5-мерном подмногообразии, определяемом уравнением

$$\frac{p^2}{2m}+U(x)=E,$$

где $p^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2$. Инвариантность этого многообразия отражает тот факт, что энергия частицы, движущейся в потенциальном поле, сохраняется, т. е. $p^2/2m+U(x)$ является первым интегралом системы (4) (так называемый интеграл энергии).

Динамика (уравнение движения) – причинно-следственная связь нынешнего состояния системы с новым состоянием в ближайшем будущем. Это детерминированный закон.

Как уже упоминалось, динамическая система может иметь дискретное или непрерывное время.

В случае **непрерывного времени** временной шаг бесконечно мал, и уравнение движения представляет собой дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений:

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=F(u)$$

где u - состояние, а t - временная переменная.

Пример. Уравнение движения неуправляемого и незатухающего маятника.

В случае дискретного времени шаги по времени отличны от нуля, и динамика описывается отображением:

$u_{n+1}=F(u_n)$,

с дискретным временем n.

Замечание. Моменты времени t_n не обязательно разделены одинаковыми интервалами. Только порядок их следования одинаков: $n<m$ означает $t_n<t_m$.

Динамические системы классифицируются на основе свойств T, X и f_t. При этом учитывается является ли набор времён T непрерывным или дискретным, конечно или бесконечно пространство состояний X, непрерывно оно или дискретно, являются ли объекты в X – конечномерными (например, векторами) или бесконечномерными (функции).

В векторной форме уравнение динамической системы записывается в форме:

$$\dot{x}=F(x)$$

где $F(x)$ – вектор-функция размерности N.

Число степеней свободы, n, и размерности фазового пространства динамической системы, N, – связанные понятия. Под числом степеней свободы понимается наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния системы. Под координатами понимают пространственные переменные, характеризующие взаимное расположение тел и объектов. Для однозначного решения соответствующих уравнений движения необходимо помимо координат задать соответствующие начальные значения импульсов или скоростей. Поэтому система с n степенями свободы характеризуется фазовым пространством в два раза большей размерности ($N=2n$).

С математической точки зрения динамическая система относится к задаче с начальным значением (при t=0, x=x(0)). Подразумевается, что существует понятие *времени* и что состояние в начальное время переходит в новое состояние (или набор состояний в последующие промежутки времени. Таким образом, состояния могут быть упорядочены по времени, а время можно рассматривать как единственную переменную.

Эволюция динамической системы с непрерывным временем определяется потоком

$$x(t)=f_t(x(0)),$$

который задаёт состояние системы в момент времени t, при условии, что в момент времени 0 состояние было x(0).

Динамическая система представляет собой триплет $\{T, X, \mathrm{f}_t\}$, где T – набор времён, X – пространство состояний, а f_t:$X\to X$ – семейство эволюционных операторов,

параметризованных $t \in T$ и удовлетворяющих следующим свойствам: f_0 – тождественный оператор, т. е. для $x \in X$, $f_0 x = x$; $f_{t*s} = f_t \circ f_s$, т. е. для $x \in X$, $f_{t*s} x = f_t (f_s x)$.

Гладкий поток можно дифференцировать по времени, чтобы даёт дифференциальное уравнение $dx/dt = X(x)$. Функция $X(x)$, называемая векторным полем, задаёт вектор, указывающий направление скорости в каждой точке фазового пространства.

Поток – детерминированная динамическая система на многообразии M, непрерывно дифференцируемой по времени. Он определяется функцией $f: R \times M \to M$, так что фазовая траектория задаётся уравнением $x(t) = f(x(0))$. Свойства потоков: 1) идентичность $f_0(x) = x$; 2) групповое свойство $f_{t+s}(x) = f_t(\varphi_s(x))$; 3) дифференцируемость $\frac{d}{dt} f_t(x)\big|_{t=0} = X(x)$. Второе свойство известно как групповое свойство; оно означает, что динамику можно перезапустить в любой точке $x(s)$ вдоль своей траектории, получив тот же результат $x(t+s)$, что при непрерывно текущем времени. Последнее свойство, дифференцируемость, определяет векторное поле X, которое связано с любым потоком. Следствием группового свойства является то, что орбиты потока являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{d}{dt} x = X(x)$.

Определить динамику, связанную с дифференциальными уравнениями, через концепцию потока удобно, потому, что тогда можно избежать вопросов существования и единственности решений ОДУ: фазовые траектории потока уникальны (только одна орбита проходит через каждую точку в M) и существуют во все времена. Полупоток представляет собой поток, определенный только для неотрицательных значений времени. Полупотоки обычно возникают для уравнений с частными производными.

Эволюция детерминированной системы с **дискретным временем** в непрерывном пространстве определяется отображением f_t. При этом учитывается, является ли динамическая система детерминированной или стохастической, автономна или зависит от времени, обратима или нет. (Некоторые авторы делают различие между динамическими системами с обратимой эволюцией времени и *полудинамическими* системами, для которых f_t не обратима, т. е. эволюция назад во времени не определена.)

Отображение может зависеть от некоторых параметров, величины не изменяются при эволюции, но могут различаться в зависимости, например, от экспериментальных условий.

Эволюция системы определяется итерацией $s_{t+1} = f(s_t)$. Отображение может быть взаимно однозначным (обратимым) или нет. Обратимые отображения могут быть непрерывными с непрерывным обратным порядком (гомеоморфизм) или быть гладкими и гладко обратимыми (диффеоморфизм).

Гомеоморфизм – взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение топологических пространств.

Диффеоморфизм – взаимнооднозначное и гладкое отображениегладкого многообразия в гладкое многообразие , обратное к которому тоже является гладким.

При известном начальном состоянии

$x_1 = f(x_0)$,

которое даёт состояние x_1 возникающее из начального состояния в следующий момент времени. После n-временных интервалов

$x_n = f_n(x_0)$,

где f_n – n-ая итерация f.

Простым примером является логистическое отображение динамики населения.

10. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОПИСАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Математическая теория систем (как простых, так и сложных, как статических, так и динамических, как линейных, так и нелинейных) строится на использовании дифференциальных уравнений, дискретных отображений, символьных динамических уравнений, теории графов, теории марковских цепей и др. Большее распространение получили три вида математического аппарата: дифференциальные уравнения (потоки; время непрерывно), разностные уравнения (отображения, каскады; время дискретно) и символические динамические уравнения. Сравнительно простые задачи динамики обычно сводят к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), т.е. уравнений для функции от одной переменной $f(x)$ или к системе ОДУ – функции от двух переменных $f(x,y)$.

Данная глава посвящена особенностям описания эволюции динамических систем обыкновенными дифференциальными уравнениями. Другой важный метод теории динамических систем, основанный на отображениях, будет рассмотрен в следующих главах.

10.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основное содержание теории динамических систем – это исследование кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Сюда входит разбиение фазового пространства на траектории и исследование предельного поведения этих траекторий: поиск и классификация положений равновесия, выделение притягивающих (аттракторы) и отталкивающих (репеллеры) множеств (многообразий).

Динамика системы может быть описана обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальное уравнение – уравнение, в которое входят производные функции, и может входить сама функция, независимая переменная и параметры. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем не ограничен). Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или могут отсутствовать вовсе, кроме хотя бы одной производной. Не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением. Например, не является дифференциальным уравнением.

Порядок дифференциального уравнения – наивысший порядок производных, входящих в него. Если дифференциальное уравнение является многочленом относительно старшей производной, то степень этого многочлена называется степенью дифференциального уравнения.

Пример 1. Уравнение является уравнением второго порядка, четвёртой степени.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) – дифференциальные уравнения для функции от одной переменной. (Этим они отличаются от уравнения в частных производных, где неизвестная – это функция нескольких переменных.)

ОДУ – это уравнения вида

$$F(x^{(n)},\ldots,x',x,t)=0 \qquad (1)$$

где штрих означает дифференцирование по x. Число n (порядок старшей производной, входящей в данное уравнение) называется порядком дифференциального Ур.1.

Дифференциальное уравнение для функции $x(t)$ содержит непосредственно функцию $x(t)$, её производные по времени t и, возможно само время t. *Порядок* дифференциального уравнения определяется как наивысший порядок производных функции $x(t)$, встречающихся в записи уравнения.

Типичными примерами ОДУ являются:

$dx/dt=2x$ (1 пор.);

$d^2x/dt^2+4(dx/dt)^3+4x=0$ (2 пор.);

$d^3x/dt^3+x^2(1+t^4)=0$ (3 пор).

Дифференциальное уравнение – *линейное*, если члены уравнения содержат функцию $x(t)$ и её производные только в первой степени, и нет членов, содержащих произведение функции на ее производную (таких, как xdx/dt). Иначе – уравнение *нелинейное*. Простейшими примерами дифференциального уравнения второго порядка служат уравнения $\ddot{x}+x=0$ и $\ddot{x}+\sin x=0$. Первое из них – линейное, оно описывает малые колебания математического маятника, второе (нелинейное) описывает колебания произвольной амплитуды. Если коэффициенты линейного дифференциального уравнения зависят от времени, то говорят о линейном уравнении с переменными коэффициентами. в тех случаях, когда коэффициенты постоянные, уравнение называется *стационарным*, или уравнением с постоянными коэффициентами.

Если время непрерывно, то общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$dx/dt+a(t)x=f(t)$. (2)

В более простом случае:

$dx/dt=f(x;t)$ `` (3)

Система ОДУ называется автономной (динамической или консервативной), если в неё явно не входит независимая переменная. Под независимой переменной обычно понимают время (t), а решение автономной системы интерпретируется как движение точки. Автономная система описывает закон движения, не изменяющийся с течением времени, – именно таково большинство физических законов.

Состояние автономных систем в каждый момент времени характеризуется единственной величиной – значением переменной x в данный момент t

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=f(x) \quad (4)$$

Автономия – собственная закономерность, определяемость какого-либо явления его внутренними законами. Применительно к системе уравнений подчёркивает отсутствие внешних воздействий.

Автономная система – динамическая система, описываемая уравнением $\frac{dx}{dt}=\dot{x}=f(x)$, в котором f непосредственно не зависит от времени t, а только через переменную x. Если же f непосредственно зависит от t, $\frac{dx}{dt}=\dot{x}=f(x,t)$, то уравнения такого типа называются неавтономными.

Замечание. Линейные автономные системы допускают точные решения, которые выражаются просто через экспоненту того линейного оператора, который стоит в правой части системы. Ситуация с линейными неавтономными системами уравнений совершенно иная. Линейные неавтономные системы, как правило, не решаются, т.е. существует формул, которые выражают решения линейных неавтономных систем через их коэффициенты с помощью элементарных функций, алгебраических операций, логарифмирования, дифференцирования, интегрирования. Поэтому неавтономные линейные системы анализируют лишь качественно.

Решениями Ур.4 $x(t)$ являются кривые на плоскости t, x, называемые интегральными кривыми. Функция f, входящая в Ур.4 называется векторным полем (полем фазовых скоростей), так как она присваивает каждой точке $x\in U$ вектор фазовой скорости $f(x)$. Специфика автономной системы состоит в том, что поле фазовых скоростей не меняется с изменением времени.

Пусть заданы начальные условия $x=x_0$ при $t=0$ или, иначе, пусть на плоскости t, x задана точка с координатами (t_0,x_0). Если для Ур.4 выполнены условия *теоремы Коши*, то имеется единственное решение Ур.4, удовлетворяющее этим начальным условиям, и через точку (t_0,x_0) проходит одна единственная интегральная кривая $x(t)$.

Интегральные кривые Ур. 4 не могут пересекаться. Решения Ур. 4 не могут быть периодическими, они монотонны. Поведение интегральных кривых на плоскости *t, x* можно установить, не решая в явном виде дифференциального Ур. 4, если известен характер движения изображающей точки на фазовой прямой. Рассмотрим плоскость *t, x*, причем фазовую прямую совместим с осью *x***.** Построим на плоскости *t, x* точку с абсциссой *t* и с ординатой, равной смещению изображающей точки по оси *x* в данный момент времени *t*. С течением времени в соответствии с Ур. 4 изображающая точка будет двигаться по фазовой прямой, а на плоскости *t, x* описывать некую кривую. Это будет интегральная кривая Ур. 4. Решения одного автономного дифференциального уравнения либо уходят в бесконечность (чего не бывает в реальных системах), либо асимптотически приближаются к стационарному состоянию.

В стационарном состоянии значения переменных в системе не меняются со временем, т.е. d*x*/d*t*=0, откуда

$$f(x) = 0. \qquad (5)$$

Корни этого алгебраического уравнения: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ – стационарные состояния дифференциального Ур. 4. На плоскости (*t, x)* прямые $x = \bar{x}_i$ – асимптоты, к которым приближаются интегральные кривые. На фазовой прямой стационарное состояние $\bar{x}_i$ – точка, к которой стремится величина *x*.

Лишь для ограниченных классов ОДУ разработаны аналитические методы решения. К ним относятся:

1. Уравнения с разделяющимися переменными решаются в интегралах.
2. Линейные дифференциальные уравнения (не обязательно автономные).
3. Некоторые специальные виды уравнений.

Независимая переменная интерпретируется как время, *t.* Переменная *y* – некоторая величина (или совокупность величин, если *y* является вектор-функцией), изменяющаяся со временем. Например, *y* может означать набор координат точки в пространстве; в этом случае Ур.4 описывает движение точки в пространстве, т. е. изменение её координат с течением времени. Независимая переменная *x* обычно принимает вещественные значения, однако рассматриваются и дифференциальные уравнения, в которых переменная x комплексная (уравнения с комплексным временем).

Динамическая система обычно описывается не одним уравнением, а системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Нормальная автономная система ОДУ имеет вид

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1,...,x_n), \quad k = 1, 2,...,n \qquad (6)$$

в которой все функции $x_1,...,x_n$ и $f_1,...,f_n$ - вещественные. Её векторная запись

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}). \qquad (6a)$$

Пусть функции $f_k(x_1,...,x_n)$, k=1,.2,..,n, непрерывно дифференцируемы в некоторой области D пространства переменных $x_1,...,x_n$. Тогда выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши, и для любого числа to и любой точки $\bar{X}(0) \in D$ существует единственное решение $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ системы (6), удовлетворяющее условию $\bar{\varphi}(t) = \bar{X}(0)$.

Всякое решение $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$ системы (6) – это интегральная кривая в (n+1) пространстве переменных t, $x_1,...,x_n$. Если же рассматривать t как параметр, то решение $\bar{X} = \bar{\varphi}(t)$, т.е. x_1=φ$_1$(t), x_2=φ$_2$(t), , x_n=φ$_n$(t), в n-мерном пространстве переменных $x_1,...,x_n$ описывает некоторую кривую, для которой x_1=φ$_1$(t), x_2=φ$_2$(t),..., x_n=φ$_n$(t) – её параметрическое представление. Эта кривая называется фазовой траекторией, а пространство R^n, в котором решение автономной системы (6) интерпретируется в виде

траектории, называется её фазовым пространством. На траектории выбирается направление движения в сторону возрастания параметра (времени) t.

В каждой точке области D своего фазового пространства система (6) задаёт вектор $\bar{f}(\bar{X})$, называется вектором скорости.

На области D система (6) определяет векторное поле – поле фазовых скоростей. Точки, в которых $\bar{f}(\bar{X})=0$, называются особыми (иногда характеристическими) точками векторного поля. Специфика автономной системы состоит в том, что поле фазовых скоростей не меняется с изменением времени.

Если в точке $\bar{a}\in D$ фазовая скорость равна нулю: $f(\bar{a})=0$, то вектор функция $\bar{X}(t)\equiv\bar{a}$ есть решение системы (1). Действительно, подставляя в систему $\bar{X}(t)\equiv\bar{a}$ получим $\dfrac{d\bar{a}}{dt}=\bar{f}(\bar{a})$. Верно и обратное, если $\bar{X}(t)\equiv\bar{a}$ есть решение, то $\bar{f}(t)\equiv 0$ так как $\bar{f}(\bar{a})=\dfrac{dX}{dt}=\dfrac{d\bar{a}}{dt}=0.$

Это решение $\bar{X}(t)\equiv\bar{a}$ называется положением равновесия (или точкой покоя) автономной системы (1). Таким образом, особые точки векторного поля определяют положения равновесия автономной системы - это все решения системы $\bar{f}(\bar{X})=0.$

Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши следует, что через каждую точку области D фазового пространства проходит одна фазовая траектория, изображающая решение системы (6). Говорят, что фазовое пространство автономной системы расслаивается на непересекающиеся траектории (для неавтономных систем это не так).

Можно доказать, что всякая фазовая траектория системы (6) принадлежит к одному из трёх типов:

– положение равновесия;

– замкнутая гладкая кривая (цикл) - периодическое решение с наименьшим периодом $T>0$.

– гладкая кривая без самопересечений.

Для автономной системы фазовая траектория есть проекция интегральной кривой системы на фазовое пространство. Интегральная кривая $\bar{X}=\bar{\varphi}(t)$ – это линия в $(n+1)$ пространстве переменных t, $x_1,...,x_n$, а фазовая траектория – это видимая траектория в пространстве переменных $x_1,...,x_n$ (рис. 1).

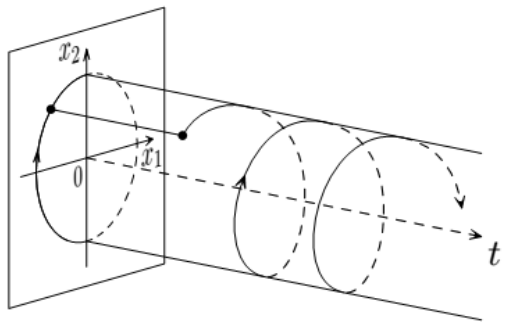


Рис. 1. Фазовая траектория на фазовом пространстве.

Если коэффициенты линейного дифференциального уравнения зависят от времени, то говорят о линейном уравнении с переменными коэффициентами. В тех случаях, когда коэффициенты постоянные, уравнение называется *стационарным*, или уравнением с постоянными коэффициентами. Для линейных дифференциальных уравнений разработаны аналитические методы их решения; теория нелинейных дифференциальных уравнений развита значительно хуже; общих методов решения таких уравнений не существует, описаны лишь отдельные типы уравнений, которые могут быть проинтегрированы, такие как уравнения Бернулли, Риккати и др.

Непрерывное и дискретное времена используются в различных областях теории динамических систем: первые – непрерывные кривые в пространстве состояний, а вторые – последовательности точек в пространстве. ОДУ могут быть как линейными, так и нелинейными. Важная особенность линейных систем – они обычно имеют единственное

решение (причём сумма их решений также является решением), тогда как нелинейные системы либо не имеют решений, либо их несколько.

Напомним, что при решении обыкновенных дифференциальных уравнений используются три подхода: численный, структурный и символьный. В первом случае входные данные представляют собой массивы чисел или числовые матрицы, которые обрабатываются соответствующими программами; во втором исходная математическая модель представляется в виде структурной схемы из сумматоров, интеграторов и других вычислительных блоков; в третьем случае исходная математическая модель задаётся математическими формулами, записанными относительно символьных переменных.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (неявное дифференциальное уравнение) в общем виде записывают как

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right), \qquad (7)$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, зависящая от независимой переменной , штрих означает дифференцирование по x. Число (порядок старшей производной, входящей в данное уравнение) называется *порядком* дифференциального Ур.7.

Независимая переменная часто интерпретируется как время, поэтому её обозначают буквой . Переменная – некоторая величина, изменяющаяся со временем, например, набор координат точки в пространстве; в этом случае Ур.7 описывает *движение* точки в пространстве, то есть изменение её координат с течением времени.

Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)}=f(x,y,',y'',...,y^{(n-1)})) \qquad (8)$$

в которых старшая производная $y^{(}$выражается в виде функции от переменных и производных порядков меньше Такие дифференциальные уравнения называются *нормальными* или *разрешёнными относительно производной*.

Уравнение (8) имеет множество решений, для выбора одного из них требуется дополнительное условие, например, начальное условие.

Дифференциальное уравнение вида

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}x^{(n-1)}(t)+...+a_1x'(t)+a_0x(t)=f(t) \qquad (9)$$

называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами. Если возмущающая функция $f(t)$ равна нулю, то уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным решением.

Решения линейного однородного дифференциального уравнения

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+...+a_1x'+a_0x=0 \qquad (10)$$

обладают следующими свойствами:

1. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – два решения Ур. 10, то функция $x_3(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$, где c_1 и c_2 – любые постоянные коэффициенты, также является решением Ур. 7. Это – принцип суперпозиции для однородных систем.
2. Существует n различных линейно независимых решений Ур. 10.
3. Общее решение Ур. 10 имеет вид $x_0(t)=c_1x_1(t)+\ldots+c_nx_n(t)$, где $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ – линейно независимые решения Ур. 10; $c_1,\ldots,c_n$ – произвольные коэффициенты.

Неоднородное Ур. 9 обладает следующими свойствами:

4. Общее решение Ур. 9 равно сумме какого-либо частного решения $x_ч(t)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения $x_0(t)$: $x(t)=x_0(t)+x_ч(t)=c_1x_1(t)+...+c_nx_n(t)+x_ч(t)$.
5. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения Ур. 9 с правыми частями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно, то $x_1(t)+x_2(t)$ будет решением уравнения $x^{(n)}(t)+a_{n-1}x^{(n-1)}(t)+...+a_1x'(t)+a_0x(t)=f_1(t)+f_2(t)$.

Это свойство является принципом суперпозиции для неоднородных систем.

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка зависит от n произвольных постоянных $x=x(t, c_1,\ldots,c_n)$. Придавая постоянным $c_1,\ldots,c_n$ числовые значения, будем получать различные частные решения дифференциального уравнения.

Пример 2. Уравнение малых колебаний математического маятника

$$\ddot{x}+x=0 \qquad (11)$$

имеет решение $x=\sin t$; $x=\cos t$ также является решением этого уравнения. Функция $x(t)=c_1\sin t+c_2\cos t$ – решение Ур. 11 при любых c_1 и c_2. Для выбора конкретного решения необходимы дополнительные условия. Найдем, например, решение Ур. 11, проходящее через точку $x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=3$. Подставляя эти значения в общее решение, получим $1=c_1\sin 0+c_2\cos$, $3=c_1\cos 0-c_2\sin 0$. Отсюда $c_1=3$, $c_2=1$, т. е. искомое решение имеет вид $x=3\sin t+\cos t$.

Рассмотрим аналитические методы решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Одним из наиболее распространенных является метод, основанный на нахождении корней характеристического полинома. Пусть дано однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и начальными условиями

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=x_1,\ldots,x^{(n-1)}(0)=x_{n-1} \qquad (12)$$

Будем искать решение в виде $x=e^{pt}$. Подставив $x=e^{pt}$ в Ур.10 и сократив на e^{pt}, получим характеристическое уравнение

$$p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0=0 \qquad (13)$$

Если $p_1, \ldots, p_n$ – корни этого уравнения и среди них нет кратных, то общее решение задачи согласно свойству 3 имеет вид

$$x(t)=c_1e^{p_1t}+\ldots+c_ne^{p_nt}. \qquad (14)$$

Таким образом, для получения аналитического решения требуется:

– записать характеристическое уравнение;
– определить его корни $p_1, \ldots, p_n$;
– найти общее решение Ур. 13;
– используя начальные условия, определить значения коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$.

Для однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0$$

характеристическим уравнениям является уравнение

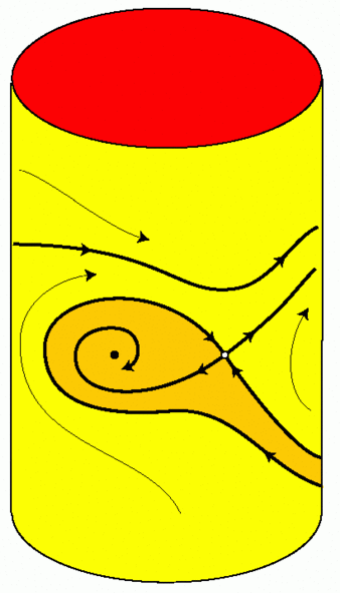
$$p_0\lambda^n+p_1\lambda^{(n-1)}+\ldots+p_n=0$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'''+2y''-y'-2y=0.$$

Составим соответствующее характеристическое уравнение:$\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=0$. Решая его, находим корни:$\lambda^2(\lambda+2)-(\lambda+2)=0,\Rightarrow(\lambda+2)(\lambda^2-1)=0,\Rightarrow(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0,\Rightarrow\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. Видно, что все три корня действительные. Поэтому, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+C_3e^{-x}$, где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

10.2 Фазовое пространство и пространство состояний



Изменение состояний динамической системы во времени представляет собой движение в пространстве состояний. Пространство состояний играет важную роль в теории управления, применяется оно и в динамике под названием фазовое пространство.

Замечание. Обычно пространство состояний и фазовым пространство динамической системы считают синонимами, но чаще пространство состояний встречается не при описании систем с непрерывным временем, а теории дискретных систем, в которых пространство состояний представляет собой набор значений принимаемых процессом.

Пространство состояний - совокупность всех возможных состояний динамической системы; каждому состоянию системы соответствует уникальная точка в пространстве состояний.

Рис. 2: Пространство состояний затухающего маятника с крутящим моментом.

Пример. Состояние маятника однозначно определяется его углом и

угловой скоростью, поэтому пространство состояний представляет собой совокупность всех возможных пар «(угол, скорость)», которые образуют цилиндр (S^1xR), как на рис. 2.

Пример 4. Элемент электрической схемы с обратной связью. Схема – на рис. 3, фазовый портрет – на рис. 4.

Система уравнений

$$G(s)=\frac{5}{s(s+1)}\begin{cases}\omega_n=2{,}236\\ \xi=0{,}2236\end{cases}$$

r(t)=1(t)

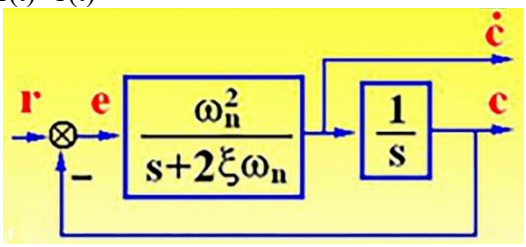


Рис. 3. Схема с обратной связью.

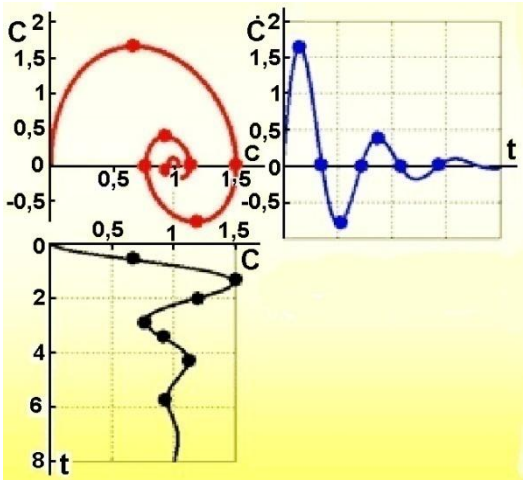


Рис. 4. Фазовый портрет системы с обратной связью.

В принципе, любой абстрактный набор параметров может быть пространством состояний конкретной динамической системы. Пространство состояний может быть *конечным*, состоящим всего из нескольких точек, но может быть *конечномерным*, состоящим из бесконечного числа точек, образующих гладкое многообразие. Это типично для ОДУ и отображений. Именно такое пространство состояний называют **фазовым пространством**. Пространство состояний может быть *бесконечномерным*, например, в уравнениях с частными производными, а в символической динамике - это канторово множество, которое *нульмерно*.

Замечание. Согласно самому абстрактному определению динамическая система – гомоморфизм абелевой группы всех автоморфизмов. Пространство X является пространством состояний динамической системы по определению. Это может быть любое пространство с любой топологией или вообще без топологии; оно может быть конечным или бесконечным.

Идеи фазового пространства и фазовой плоскости, пространство состояний, фазовый портрет, фазовые траектории, особые точки и т.п. широко используются при наглядном представлении решений обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих состояние динамической системы.

Пространство состояний – конечномерное пространство, которому принадлежит вектор состояния обыкновенного дифференциального уравнения в форме Коши.

Линеаризация – выделение из векторного дифференциального уравнения в форме Коши линейной части с помощью матриц Якоби (производных Фреше) при малых отклонениях относительно выбранной (номинальной, рабочей) траектории «вход – состояние».

Переходная матрица состояния – фундаментальная матрица решений векторного линейного однородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, которая позволяет перейти из начального состояния в любое другое в пространстве состояние.

Идеи фазового пространства стали использоваться в классической и статистической механике в последней трети 19-го века. Есть указания на то, что первым этот термин употребил французский математик Ж. Лиувилль в 1838 г. Сама концепция фазового пространства была разработана в конце 19 века Л. Больцманом, А.Пуанкаре и У.Гиббсом применительно к задачам физической статистики, линейной и нелинейной динамики.

Состояние сколь угодно сложной системы представляется в фазовом пространстве единственной точкой, а эволюция этой системы – перемещением этой точки. Фазовое пространство динамической системы представляет собой пространство, в котором представлены все возможные состояния системы, причём каждое возможное состояние соответствует одной единственной точке в фазовом пространстве. Траекторию движения изображающей точки в этом пространстве называют фазовой траекторией.

В классической механике движение изображающей точки определяется уравнениями Гамильтона, описывающими поведение сложных систем в фазовом пространстве гладких многообразий.

Уравнения Гамильтона (канонические уравнения) в физике и математике – система дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (15)$$

где точкой над p и q обозначена производная по времени. Система состоит из $2N$ дифференциальных уравнений первого порядка (j=1, 2,…, N) для динамической системы, описываемой N (обобщёнными) координатами, являющихся уравнения движения (одной из форм таких уравнений, наравне с уравнениями Лагранжа, являющейся обобщением ньютоновских уравнений движения) системы, где $H=H(q,p,t)\equiv H(q_1,q_2,...,q_N, p_1,p_2,...,p_N,t)$ – так называемая функция Гамильтона, также иногда именуемая гамильтонианом, t — врем, q_i – (обобщенные) координаты $q_1,q_2,...,q_N$, и p_i – обобщённые импульсы $(p_1,p_2,...,p_N)$ определяющие состояние системы (точку фазового пространства).

Напомним, что в классической механике фазовое пространство является пространством всех возможных состояний системы. Состояние механической системы определяется составляющими импульсами p и координатами q, которые вместе определяют будущее поведение этой системы. Если известны значения p и q в момент времени t, можно вычислить p и q в момент времени t+1, используя теоремы классической механики, математическую базу которых и составляют уравнения Гамильтона.

Для описания движения отдельной частицы вам необходимы 6 переменных: 3 координаты и 3 импульса, т.е. 6-ти мерное пространство. Каждая точка в этом 6-мерном пространстве характеризует состояние частицы, конечно же ограниченное законами классической механики. Для описания системы из N частиц используется $6N$-мерное фазовое пространство.

В простом случае гамильтониан H представляет энергию физической системы, которая есть сумма кинетической и потенциальной энергий. В случае механических систем это пространство чётной размерности, координатами в котором являются обычные пространственные координаты и их импульсы. Например, фазовое пространство для системы, состоящей из одной свободной материальной точки, имеет 6 измерений: 3 обычные координаты и 3 – компоненты импульса. Фазовое пространство для системы из двух свободных материальных точек содержит 12 измерений и т.д.

Пример 5. Простой маятник состоит из стержня, вращающегося в одной плоскости вокруг гвоздя, вбитого в стену. Он полностью описывается одной координатой и одним импульсом. Его импульс

равен нулю в верхней части и максимум внизу. Его положение определяется углом и изменяется между плюсом/минусом θ. Если построить состояния p и θ в декартовой системе координат, то получим эллипсоид (или, если подобраны адекватные координаты, круг), который полностью описывает все возможные состояния маятника.

В квантовой механике термин фаза так же используется: он относится к сложной фазе комплексных чисел, волновые функции которой принимают значения в. В квантовой механике координаты p и q фазового пространства обычно становятся операторами в гильбертовом пространстве. Квантовомеханическое состояние не обязательно имеет чётко определенную координату или чётко определенный импульс (и никогда не может иметь обоих в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга). Понятие фазового пространства и гамильтониана H можно рассматривать как важную связь между тем, что в противном случае выглядит как две очень разные теории. Состояние теперь не является точкой в фазовом пространстве, а представляет собой комплекснозначную волновую функцию. Гамильтониан H становится оператором и описывает наблюдаемую величину.

В теории динамических систем фазовое пространство является более общим понятием, чем в механике. Оно не обязательно чётномерно и динамика в нём не обязательно задаётся уравнениями Гамильтона. Решение уравнений Гамильтона $p_i(t)$, $q_i(t)$, i=1, N определяет траекторию в объединенном $2N$-мерном пространстве обобщенных координат и импульсов, называемых фазовым пространством системы. В физике фазовое пространство представляет собой концепцию, которая объединяет классическую (гамильтоновскую) механику и квантовая механика; в математике фазовое пространство - это концепция, которая объединяет **симплектическая геометрия** с гармоническим анализом решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Симплектическая геометрия – область дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии, изучающая симплектические многообразия: гладкие многообразия с выбранной замкнутой невырожденной 2-формой. Исходно симплектическая геометрия возникла из гамильтонова формализма в классической механике, когда фазовое пространство для классической системы оказывалось симплектическим многообразием.

Фазовое пространство в теории динамических системе – абстрактное пространство, ассоциированное с конкретной динамической системой, точки в котором однозначно характеризуют все возможные состояния данной системы. Предполагается, что это пространство снабжено естественным определением меры (расстояний, площадей и т.д.).

Фазовое пространство – пространство, на котором множество всех состояний системы представлено так, что каждому возможному состоянию системы соответствует одна и только одна точка этого пространства (изображающая точка) и, наоборот, каждой точке этого пространства соответствует одно и только одно состояние системы. Таким образом, изменению состояний системы, – т.е. её динамике – можно соподчинить движение изображающей точки; траекторию этой точки называют фазовой траекторией (её не следует смешивать с действительной траекторией движения), а скорость такой изображающей точки – фазовой скоростью**.** Как правило, выбирают пространства с евклидовой метрикой, используя либо декартову, либо полярную систему координат. Для систем с одной степенью свободы фазовое пространство вырождается в фазовую плоскость.

Фазовая траектория – траектория перемещения точки, отображающей состояние динамической системы, в фазовом пространстве; совокупность точек на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных *x(t)* и *y(t)*, согласно заданным уравнениям исследуемой системы набор точек в фазовом пространстве, последовательно посещаемых системой. Траектория материальной точки – линия в пространстве, по которой движется тело, представляющая собой множество точек, в которых находилась, находится или будет находиться материальная точка при своём перемещении в пространстве относительно выбранной системы отсчёта. Существенно, что понятие о траектории имеет физический смысл даже при отсутствии какого-либо по ней движения. Иногда фазовую траекторию называют орбитой.

Фазовая плоскость – координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка. Фазовая плоскость является частным случаем фазового пространства, которое может иметь большую размерность.

Фазовый портрет – топологическое представление зависимости друг от друга величин, описывающих состояние системы (динамических переменных) или фазового пространства; это совокупность фазовых траекторий при различных начальных значениях переменных.

Число степеней свободы динамической системы - размерность её фазового пространства, т. е. количество переменных, которые необходимы для полного описания системы. В контексте гамильтоновых систем число степеней свободы - число пар переменных состояния.

Динамические режимы, такие как состояние покоя или периодические колебания, соответствуют геометрическим объектам, таким как точка или замкнутая кривая, в фазовом пространстве. Эволюция динамической системы соответствует траектории (или орбите) в фазовом пространстве. Различные начальные состояния приводят к различным траекториям. Множество всех траекторий формирует фазовый портрет динамической системы, хотя на практике рассматриваются только репрезентативные траектории. Поскольку, как правило, невозможно получить явную формулу для решения нелинейного уравнения, анализ фазовых портретов является чрезвычайно полезным способом визуализации и понимания качественных характеристик решений.

Решения ОДУ часто удобнее изображать не в привычном виде $u_1(t),...,u_N(t)$, которые называются растровыми графиками, а в фазовом пространстве, по осям которого откладываются значения каждой из найденных функций. Такой график - фазовый портрет системы – является кривой в фазовом пространстве и поэтому особенно нагляден. Размерность фазового пространства равна числу неизвестных N, а аргумент t входит в графики лишь параметрически.

В случае механического движения фазовый портрет график типа координата – скорость, в электричестве – заряд-ток, в популяционной задаче – количество хищников – жертв и т.д. На фазовом портрете размерность высоты представляет длину векторов. Важно, что фазовый портрет можно построить, не решая динамические уравнения системы. Фазовый портрет облегчает анализ поведения динамической системы. Он вычисляется путём взятия интеграла уравнений, порождающих пространство состояний. Построение паттерна помогает сделать выводы о характеристике изменений переменных x и y без знания аналитических решений исходной систем уравнений.

Точечная система – система, которая описываются обыкновенным дифференциальным уравнением.

Изображающая точка – точка на фазовой плоскости, за поведением которой ведётся наблюдение.

Особенность фазового пространства заключается в том, что состояние сколь угодно сложной системы представляется в нём одной единственной точкой, а эволюция этой системы – перемещением этой точки. При рассмотрении нескольких одинаковых систем, задаётся несколько точек в фазовом пространстве. Совокупность таких систем называют статистическим ансамблем. В классической механике фазовыми пространствами служат гладкие многообразия.

Фазовое пространство – это график, показывающий все возможные состояния системы. В фазовом пространстве значение переменной наносится против возможных величин других переменных в один и тот же момент времени. Если система описывается тремя переменными, строится трёхмерное фазовое пространство, в котором каждой переменной соответствует одна размерность.

В фазовом пространстве каждая степень свободы или параметр системы представляется в виде оси многомерного пространства; одномерная система называется

фазовой траекторией, а двумерная система – фазовой плоскостью. Для каждого возможного состояния системы или допускаемой комбинации значений параметров системы точка включается в многомерное пространство. Траектория фазового пространства представляет собой набор состояний, совместимых с началом от одного конкретного начального условия, расположенного в полном фазовом пространстве, которое представляет собой набор состояний, совместимых с любым начальным условием. В целом фазовая диаграмма отражает все изменения состояний в системе, и ее форма позволяет легко выявить качества системы, которые другим способом не обнаруживаются. Фазовое пространство может содержать большое количество измерений. Например, газ с большим числом молекул, может потребовать отдельного измерения для каждой частицы x, y и z положений и импульсов, а также любого количества других свойств.

Если состояние динамической системы может быть задано скалярным значением ($x \in R^1$), то система является одномерной. Часто только подмножество фазовой линии R^1 соответствует физически значимым состояниям системы, и часто более естественно рассматривать одномерные фазовые пространства в виде интервалов и окружностей. Например, система может представлять собой химическую реакцию, характеризующуюся концентрацией реагента или RC-контур, характеризуемый напряжением на конденсаторе. В первом случае используют только неотрицательные значения R^1, поэтому фазовое пространство $[0, \infty]$.

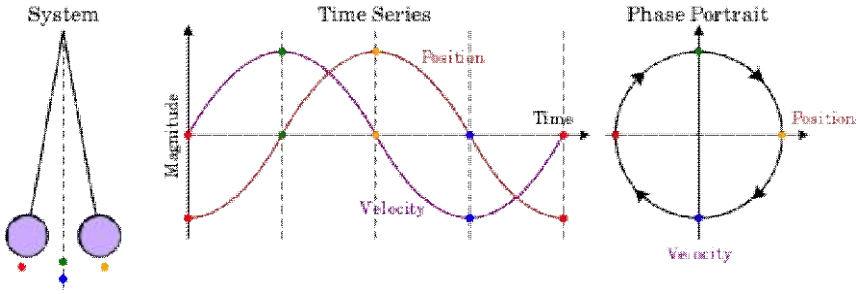


Рис. 5. Схема построения фазового портрета движения простого маятника.

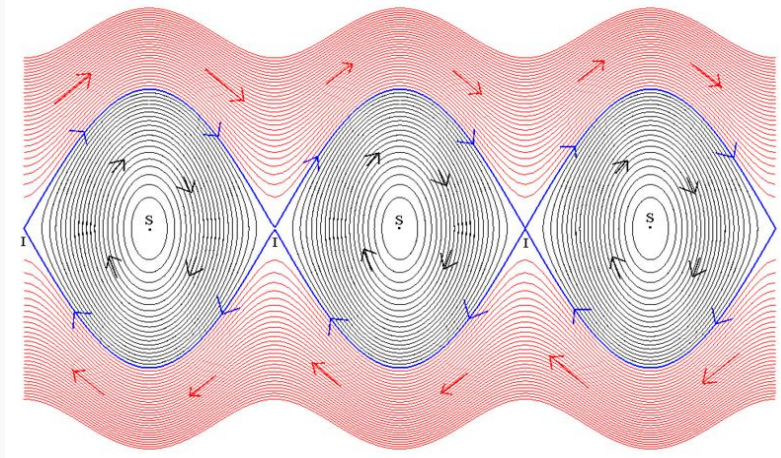


Рис. 6. Зависимость потока от времени, рассчитанная по уравнению колебания маятника и представленная в фазовом пространстве. *На оси x – положение маятника, а на оси y – его скорость.*

Фазовое пространство двумерной системы называется фазовой плоскостью, которая встречается в классической механике для одной частицы, движущейся в одном измерении, и где две переменные – это положение частицы и её скорость. В этом случае эскиз фазового портрета может дать качественную информацию о динамике системы. Примером является осциллятор Ван дер Поля.

Рис. 5. иллюстрирует схему построения фазового портрета на примере на примере простого маятника; на рис. 6 представлен его фазовый портрет.

У простых систем в фазовом пространстве может быть не более одного или двух степеней свободы. Одна степень свободы есть у автономного ОДУ с одной переменной, одномерной системы можно судить по форме фазовой траектории. Простейшими примерами являются экспоненциальная модель роста/распад (одно неустойчивое/устойчивое равновесие) и модель логистического роста (два равновесия, одно стабильное, одно неустойчивое).

При помощи уравнений траектории в фазовом пространстве (фазовой плоскости) для исследуемой системы строят интегральные кривые, – т.е. кривые в фазовом пространстве такие, что в каждой их точке касательная имеет наклон, задаваемый уравнением траектории. Геометрическое построение интегральных кривых называют «качественным интегрированием уравнений». Понятия «интегральная кривая» и «фазовая траектория» в общем случае следует различать, так как одна интегральная кривая может состоять не из одной, а сразу из нескольких фазовых траекторий. Картину кривых в фазовом пространстве (на фазовой плоскости) можно описать либо одним уравнением – в координатной форме, т.е. при помощи уравнений, которые не содержат времени, – и изучать с его помощью интегральные кривые, либо описать системой уравнений в параметрической форме, – где независимая переменная (время t) выполняет роль параметра – и изучать фазовые траектории. Необходимость различения этих двух способов изображения одного и того же семейства кривых можно продемонстрировать на примере простейшей консервативной системы, описываемой уравнением $\ddot{x} = f(x)$ в этом случае для особой точки условия теоремы Коши окажутся нарушенными при рассмотрении координатного уравнения, но будут выполнены для уравнения, записанного в параметрической форме. Целой фазовой траекторией называют ту кривую в фазовом пространстве, которую описывает изображающая точка за всё время своего движения (от t=-∞ до t=+∞).

Фазовый портрет исследуемой системы – это совокупность фазовых траекторий для всевозможных начальных условий. Его можно рассматривать как интегральное многообразие. Поскольку при изучении поведения системы интересуются, прежде всего, стационарными движениями в системе, то фазовый портрет можно также рассматривать как разбиение фазового пространства на области притяжения стационарных решений.

На основании особенностей фазового портрета характера можно провести классификацию особых точек системы уравнений (см. далее). Важно, что при изменении параметров системы, фазовая плоскость обычно как-то деформируется. Качественному изменению фазовой плоскости соответствует исчезновение существующих и рождение новых стационарных решений, – и такое изменение фазовой плоскости называют бифуркационной ситуацией.

Для удобства, изучение фазового портрета системы разделяют на исследование характера движений системы вблизи состояний равновесия, и на всей фазовой плоскости. При изучении фазового портрета интересует, прежде всего, общая топологическая картина движений на фазовой плоскости. Фазовая скорость – это скорость изменения состояния системы; она соответствует скорости движения изображающей точки в фазовом пространстве. Для вычисления величины фазовой скорости вводят понятие «фазовый радиус-вектор», как это делается в классической механике. Вычисление фазовой скоростью даёт возможность более точно прослеживать изменения в системе. Так, к примеру, в случае бифуркации седло-узел можно обнаружить область состояний системы, в которой происходит значительное уменьшение модуля фазовой скорости.

Основные свойства траекторий в фазовом пространстве:

1. В любой заданный момент времени траектории в фазовом пространстве не пересекаются.

2. Любая граница C_1, охватывающая в момент времени t_1 в фазовом пространстве некое множество начальных условий к моменту t_2 трансформируется в границу C_2 охватывающее то же множество траекторий. Поэтому для понимания временной эволюции подмножества достаточно знать поведение его границы.

Фазовый портрет представляет собой геометрическое представление структуры фазовых траекторий динамической системы и потому полезный инструмент анализа её качественных свойств. Однако фазовая диаграмма может использоваться только для исследования динамических систем одного, двух и (иногда) трёх измерений.

Одномерные системы часто задаются (ОДУ) вида

$$\dot{x} = f(x), \qquad (16)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ – производная от переменной состояния x по времени t. Это ОДУ является автономным, т. к. f явно не зависит от времени t.

Фазовая траектория одномерного ОДУ разделена точками равновесия (точки, где $f(x)=0$) и отрезками, соединяющими точки равновесия. Устойчивость равновесия определяется направлениями траекторий, зависящими от знака правой части функции $f(x)$. Для прогнозирования динамики системы и ее зависимости от начального условия нет необходимости решать Ур. 16 или знать особенности функции $f(x)$.

Одномерные системы также могут быть заданы итерационным отображением в виде $x_{t+1}=f(x_t)$, где состояние в момент времени $t+1$ является функцией состояния в момент времени t. Фазовые портреты таких систем могут быть довольно сложными, особенно когда динамика хаотична.

Одномерные пространства состояний могут быть очень сложными, например, графы или дендриты.

Если состояние конкретной динамической системы полностью характеризуется заданием n переменных, т. е. поведение системы описывается n обыкновенными дифференциальными уравнениями 1-го порядка

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (17)$$

Тогда такой системе ставится в соответствие n-мерное фазовое пространство, по осям координат которой откладывают значения переменных x_1, x_2,..., x_n (фазовых переменных). Определение нормы в этом пространстве вводится, исходя из смысла переменных $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример 6. Динамическая система, описываемая уравнением $\ddot{x} + 2\mu\left(1 - \beta x^2\right)\dot{x} + \omega^2 x = 0$, имеет двухмерное фазовое пространство, по осям координат которого откладываются значения x и $\dot{x}$.

Векторным полем F, заданным в области M пространства R^m, называется соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ приложенный к ней вектор F пространства R^m.

Эволюция динамической системы определяется посредством задания значений фазовых переменных в начальный момент времени

$$x\big|_{t=0} = x(0) \text{ или } x_i\big|_{t=0} = x_i(0), \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (18)$$

и задания эволюционного оператора T_t, преобразующего начальное состояние в состояние в момент времени t (задача Коши): $x(t)=T_t x(0)$ или T_t: $x_i(0) \to x_i(t)$, $i=1, 2, ..., n$.

Тем самым в фазовом пространстве выделяется фазовая траектория, проходящая через точку $x(0)$. Оператор T_t задаёт однопараметрическую группу преобразований фазового пространства на себя (параметр - время t) и удовлетворяет групповому свойству $T_t T_m = T_{t+m}$. Группа преобразований фазового пространства, задаваемая оператором T_t называется фазовым потоком.

Если начальные точки не лежат на одной фазовой траектории, т. е. не могут быть получены одна из другой сдвигом с помощью оператора T_t за какое-либо конечное время t, то они порождают различные фазовые траектории. Совокупность всевозможных

фазовых траекторий образует фазовый портрет динамической системы. Изучение фазовых портретов как способа геометрических представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений было начато А. Пуанкаре в конце 19 в.

Различные фазовые траектории одной достаточно гладкой динамической системы не пересекаются в фазовом пространстве (в противном случае, выбирая точку пересечения за начальное условие, мы получили бы, что из одной точки начинаются более одной фазовой траектории; последнее противоречит теореме Коши). Фазовые траектории могут представлять собой либо отдельные точки, либо замкнутые кривые, либо отрезки кривых конечной длины, заключённые между двумя точками (последние не принадлежат данной траектории), либо кривые, неограниченные в одну или обе стороны. Траектории, являющиеся точками, называются особыми точками и отвечают стационарным состояниям динамической системы. Классификация структурных элементов фазового портрета выполнена в теории колебаний.

Во многих случаях необходимо рассматривать зависимость свойств системы от каких--либо параметров, например, изучать систему, описываемую уравнением

$$\dot{x}_i = F_i(x_1,...,x_n;\mu), \quad i=1,2,...,n, \qquad (19)$$

где $\mu=(\mu_1, \mu_2,...,\mu_k)$ -совокупность физ. параметров.

Пример 7. В случае нелинейного осциллятора $\ddot{x}+\omega^2 x+\varepsilon^2 - x^3 = 0$ качественно различными параметрами являются ω и ε.

Все системы (19) (т. е. отвечающие различным значениям μ) можно рассматривать с помощью одного и того же фазового пространства. Это позволяет сопоставлять свойства систем, отличающихся конкретными значениями параметров. Например, может оказаться, что в некоторых интервалах значений μ для траекторий доступны не все области фазового пространства из числа тех, которые доступны при других значениях.

Пример 8. Для системы, описываемой уравнением $\ddot{x}+\sqrt{x^2+\mu}=0$, при μ>0 фазовым траекториям доступно всё фазовое пространство (при подходящем выборе начальных условий), тогда как при μ<0 область $|x|<\sqrt{-\mu}$ является "запрещённой".

Семейством ОДУ называется множество систем уравнении вида

$$\dot{x} = F(x,t,\mu), \quad x \in M \subset R^m, \quad \mu \in L \subset R^k, \quad t \in I \subset R, \qquad (20)$$

заданных в фазовом пространстве M векторными полями F, зависящими от координат векторов системных параметров μ, лежащих в области L пространства R^k.

Потенциалом в теории динамических систем называется величина

$$U(x,\mu) = -\int_{x_0}^{x} F(z,\mu)dz \qquad (21)$$

Автономной системой дифференциальных уравнений, соответствующей векторному полю F, называется система

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in M \subset R^m \qquad (22)$$

где точка над буквой означает дифференцирование по t. Область M называется фазовым пространством системы, а прямое произведение IxM – расширенным фазовым пространством, где I – интервал вещественной оси времени t.

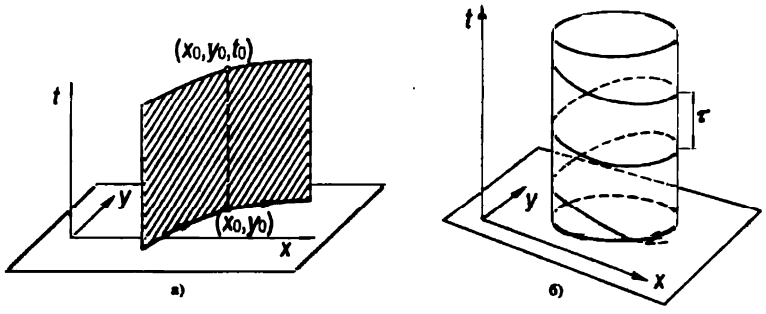


Рис. 7. Проекции отрезка интегральной кривой или спирали с шагом τ на фазовую плоскость (x,y) в виде отрезка (а) и замкнутой кривой (б).

Интегральной кривой системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x,t)$ называется график ее решения, а фазовой кривой - проекция интегральной кривой на фазовое пространство вдоль оси *t*. Примеры интегральных и фазовых кривых (траеторий) изображены на рис. 7.

Теорема. Через каждую точку расширенного фазового пространства дифференцируемого векторного поля проходит одна и только одна интегральная кривая с системы дифференциальных уравнений (22) с вещественным временем.

Задание начального условия в начальный момент времени $x(0)=x_0$ однозначно определяет решение системы дифференциальных уравнений в любой момент времени *t*: $x(t) = \varphi^t(x_0)$. Задача нахождения решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется задачей Коши, Отображение φ^t является отображением фазового пространства *M* в себя и называется **фазовым потоком.** Любая область *G* фазового пространства под воздействием фазового потока переходит за время *t* в некоторую другую область $G_t=\varphi^t(G)$.

10.3 Линейные ОДУ на плоскости

Фазовые плоскости возникают в двумерных автономных ОДУ, записаны в виде

$$\dot{x} = f_1(x,y); \quad \dot{y} = f_2(x,y) \qquad (23)$$

Здесь f_1 и f_2 - функции. Эти две переменные могут описывать, например, положение и скорость частицы, состояние системы хищник-жертва или концентрации двух реагентов в гомогенной химической реакции.

Если $x(t)$, $y(t)$ - решение системы, то в каждый момент времени $t=p$, $x(p)$, $y(p)$ определяет точку в фазовой плоскости. Точка изменяется со временем, поэтому все решения, $x(t)$, $y(t)$, прослеживает кривую или траекторию в фазовой плоскости.

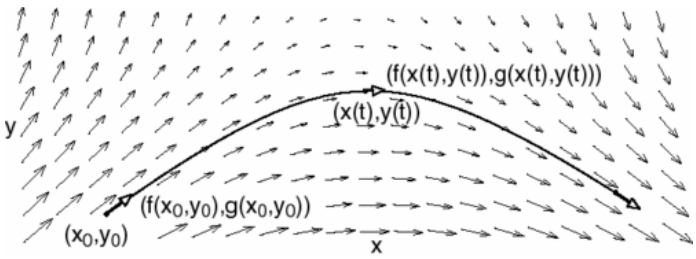


Рис. 8. Фазовая плоскость. Правая часть двумерной динамической системы определяла векторное поле. *Решения уравнений определяют кривые или траектории в фазовой плоскости. Векторное поле всегда указывает направление движения траекторий.*

Конечно, не каждая произвольная кривая на фазовой плоскости представляет собой решение уравнения. Особенность траекторий решения заключается в том, что вектор скорости в каждой точке вдоль траектории задается правой частью указанного выше дифференциального уравнения. То есть вектор скорости траектории $x(t)$, $y(t)$ в точке $x(p)$, $y(p)$ задается формулой $(x', y') = (f_1(x(p), y(p)), f_2(x(p), y(p))$. Важное геометрическое свойство - вектор $f_1(x, y), f_2(x, y)$ всегда указывает в направлении потока решения - полностью характеризует траектории решения (рассматриваемые как подмножества фазового пространства). Функция, которая присваивает $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ к (x, y) называется **векторным полем**.

Двумерные фазовые пространства возникают также в дискретных динамических системах вида $x_{t+1}=f_1(x_t,y_t)$; $y_{t+1}=f_2(x_t,y_t)$. В общем случае, как и в случае непрерывного времени, фазовое пространство может быть подмножеством R^2 или любой поверхностью с границей или без неё.

Точки равновесия двумерной динамической системы – это где $f_1=0$ и $f_2=0$. Заметим, что если (x_0, y_0) является равновесием, то $((x(t), y(t)))=(x_0, y_0)$ для всех времен является (постоянным) решением системы. Равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

Непостоянное решение $((x(t), y(t))$ динамической системы является периодическим если $((x(0), y(0))=(x(T), y(T)))$ для некоторого $(T>0)$ Минимальный *T*, удовлетворяющий этому требованию, называется периодом. Поскольку $((x(t), y(t))=(x(t+T), y(t+T)))$ для всех *t,* периодическое решение соответствует замкнутой кривой в фазовой плоскости.

Периодические решения могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Грубо говоря, периодическое решение устойчиво, если решения, начинающиеся вблизи замкнутой кривой, остаются близкими для всех $t>0$ (это соответствует орбитальной устойчивости периодической орбиты).

Обычно гораздо труднее найти периодические решения, чем найти равновесия. Точка равновесия $((x_0,\ y_0))$ удовлетворяет уравнениям $(f_1(x_0,\ y_0)=f_2(x_0,\ y_0)=0)$, и эти уравнения обычно можно решить с помощью простых численных методов. Мы также отмечаем, что равновесие является локальным объектом - это просто одна точка в фазовом пространстве. Колебания или периодические орбиты являются глобальными объектами; они соответствуют целой кривой в фазовом пространстве, которая восстанавливается. Эта кривая может быть довольно сложной.

Систему ОДУ обычно решают матричным методом.

На всякий случай сначала напомним некоторые элементы линейной алгебры.

Задача на **собственные значения** матрицы формулируется следующим образом.

Пусть A- квадратная матрица n-го порядка, X – вектор-столбец, λ – число.

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Всякий ненулевой вектор столбец $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется **собственным вектором матрицы *A***, если существует такое ненулевое число λ, что

$$AX=\lambda X. \qquad (24)$$

Число λ при этом называется **собственным значением вектора** X относительно матрицы A, соответствующий собственному вектору X. Совокупность всех собственных значений называется **спектром** матрицы A.

Замечание. В более общем виде используется следующий алгоритм вычисления собственного значения для матрицы. Если задана $n\times n$ квадратная матрица A над вещественными или комплексными числами, собственное значение λ и соответствующий ему корневой вектор X – это пара, удовлетворяющая равенству: $(A-\lambda E_n)^k X=0$, где: X – ненулевой $n\times 1$ вектор-столбец, E_n – единичная матрица $n\times n$, k – положительное целое число, λ и X могут быть комплексными, даже если A вещественна. Если $k=1$, вектор v просто называется собственным вектором. В этом случае: $AX=\lambda X$.

Матричное уравнение (24) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора X:

$$(A-\lambda E_n)X=0, \qquad (25)$$

где E_n - единичная матрица.

Единичная матрица – квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице поля, а остальные равны нулю. Единичная матрица раз мера $n$xn обозначается E_n или I_n: $E_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Матрица $A-\lambda E_n$ – **характеристическая матрица** матрицы A, многочлен $|A-\lambda E_n|$ – характеристический многочлен матрицы A, уравнение $|A-\lambda E_n|=0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

Собственными числами матрицы A являются корни характеристического уравнения $|A-\lambda E_n|=0$ и только они. Координаты собственного вектора X соответствующего собственному значению λ находятся из однородной системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + ... + a_2x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...(a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Собственный вектор – понятие в линейной алгебре, определяемое для квадратной матрицы как вектор, умножение матрицы на который даёт коллинеарный вектор – тот же вектор, умноженный на некоторое скалярное значение, называемое собственным числом (собственных значением) матрицы. Одному собственному значению может соответствовать несколько (линейно независимых) собственных векторов, в таком случае говорят о собственном подпространстве для данного собственного значения.

Собственный вектор матрицы *A* – ненулевой вектор $\bar{u}$, который при умножении на некоторую квадратную матрицу *A* превращается в самого же себя с числовым коэффициентом λ ($A\bar{u} = \lambda\bar{u}$). Число λ – собственное значение (собственное число) данной матрицы. Собственный вектор u соответствует собственному значению λ.

Определитель линейного оператора *A* - det*A*, многочлен относительно λ, называется характеристическим многочленом оператора *A*. Он не зависит от выбора базиса. Необходимое и достаточное условие разрешимости системы (24) описывается уравнением

$$\det(A-\lambda E_n)=0, \quad (27)$$

которое называется характеристическим (или вековым) уравнением оператора *A* задачи на собственные значения.

Для того чтобы число λ было собственным значением оператора *A*, необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического оператора *A*. Существует хотя бы один собственный вектор, соответствующий каждому собственному значению λ.

Рассмотрение поведения динамической системы на двумерной фазовой плоскости начнём с системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Двумерная система линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ f_2(x,y) = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (28)$$

Эта система может быть решена аналитически путём интегрирования

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by} \quad (29)$$

Если трактовать переменную *t* как время, то решение *x*=*x*(*t*), *y*=*y*(t) описывает закон движения точки (*x;y*) на плоскости *x*0*y*, называемой фазовой плоскостью. Кривая, по которой движется точка, называется траекторией, а уравнения *x*=*x*(*t*), *y*=*y*(*t*) задают параметризацию этой кривой.

При равновесии, система (28) переходит в систему:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Систему (28) можно преобразовать в матричную форму

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ или } \dot{X} = \frac{dx}{dt} = AX, \quad (31)$$

где A – 2x2 матрица коэффициентов $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и (x,y) – вектор координат двух независимых переменных $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Положения равновесия находятся из решения стационарного уравнения $AX=0$.

$\lambda X=\lambda E_n X=(\lambda E_n)X$; $AX=(\lambda E_n)X$ или $(A-\lambda E_n)X=0$

$$A-\lambda E_n=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$A-\lambda E_n)X=0\Rightarrow\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}x\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Система имеет тривиальное решение $x\equiv 0$, $y\equiv 0$. Это означает, что если в момент времени $t=t_0$ точка находилась в начале координат, то с течением времени она не меняет своего положения (система, оказавшаяся в положении равновесия, не может выйти из этого положения). Таким образом, точка (0;0) представляет собой целую траекторию, которая называется особой точкой (точкой равновесия, неподвижной точкой, точкой покоя, см.далее).

Задача теории – описание всех возможных видов траекторий исходной системы уравнений в случае $\det A=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\neq 0$.

Решение системы ищем в форме

$$x(t)=u_1e^{\lambda t},\quad y(t)=u_2e^{\lambda t}. \quad (34)$$

Подставив эти выражения в исходную систему, получим

$$\begin{cases} u_1\lambda e^{\lambda t}=au_1e^{\lambda t}+bu_2e^{\lambda t} \\ u_2\lambda e^{\lambda t}=cu_1e^{\lambda t}+du_2e^{\lambda t} \end{cases} \quad (35)$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (a-\lambda)u_1+bu_2=0 \\ cu_1+(d-\lambda)u_2=0 \end{cases} \quad (36)$$

Эта система имеет тривиальное решение, если и только если определитель

$$\det(A-\lambda E_n)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad (37)$$

где E_n – единичная матрица.

Решив систему уравнений

$$(A-\lambda_iE_n)V_i=\begin{pmatrix} a-\lambda_i & b \\ c & d-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

для каждого собственного значения λ_i, получим собственные вектора

$$V_i=\begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{pmatrix},\quad i=1,\quad 2. \quad (39)$$

Теперь можно обобщить решение нашей исходной системы

$$\underline{x}=C_1V_1e^{\lambda 1t}+C_2V_2e^{\lambda 2t} \quad (40)$$

или

$$\begin{cases} x(t) = C_1 u_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 u_{12} e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = C_1 u_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 u_{22} e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (41)$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Собственные значения – это показатели степени экспонент, а собственные векторы – коэффициенты. Если решения записываются в алгебраической форме, они выражают фундаментальный мультипликативный множитель экспоненциального члена. Из-за неединственности собственных векторов каждое полученное таким образом решение имеет неопределенные константы C_1, C_2,...C_n.

В общем решение есть

$$x = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (42)$$

где λ_1 и λ_2 – собственные значения, а (u_{11}, u_{21}), (u_{12}, u_{22}) – основные собственные векторы.

Константы C_1 и C_2 учитывают неединственность собственных векторов и не разрешимы, если для системы не задано начальное условие.

В практических заданиях сначала разыскиваются собственные значения и только потом собственные векторы. У квадратной матрицы размером nxn существует ровно n собственных значений, причём некоторые из них (или даже все) могут быть кратными (совпавшими). некоторые или все собственные значения могут быть комплексными. Каждому собственному значению соответствует хотя бы один собственный вектор, и если все собственные числа матрицы A различны, то она имеет ровно n собственных векторов.

Обычно классификацию положений равновесия линейной системы, основанную на собственных значениях. Однако тип точки равновесия можно определить и без вычисления собственных значений λ_1,λ_2, а зная лишь только определитель матрицы $detA$ и её след trA.

Собственные значения матрицы – все корни характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение матрицы имеет следующий вид:

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0. \quad (43)$$

которое удобно представить или как

$$\lambda^2-p\lambda+q=0 \quad (44)$$

или как

$$\lambda^2-trA\cdot\lambda+detA=0. \quad (45)$$

где $p=a+d=tr(A)$, $q=ad-bc$.

Здесь $trA=a+d$ – *след матрицы* – число, равное сумме диагональных элементов: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $detA=ad-bc$.

Решение исходной системы уравнений:

$$\begin{cases} x = C_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 V_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}, \quad (46)$$

Здесь V_1 и V_2 – корни уравнения $bV^2 + (d-a)V - c = 0$.

Сейчас будем рассматривать только случаи, когда характеристические корни λ_1, λ_2 не равны нулю и, следовательно, $bc-ad\neq 0$. соответствующие критические точки называются особыми точками первого порядка или элементарными точками.

Собственные значения λ_1 и λ_2 линейного оператора A находят путём решения характеристического уравнения. Они равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2-4q}\right) = \frac{1}{2}\left(trA \pm \sqrt{D}\right) = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}, \quad (47)$$

где дискриминант этого квадратного уравнения определяется соотношением, $D=(trA)^2-4detA$, где trA – след матрицы, а $\Delta=detA$ – определитель матрицы A.

В зависимости от знака подкоренного выражения $(a+d)^2-4(ad-bc)$ корни характеристического уравнения могут принимать как действительные, так и комплексные значения. От этих значений зависит то, как будет выглядеть фазовый портрет системы.

Пример 9. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{bmatrix}$. Обозначим через $\bar{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ неизвестный собственный вектор. Тогда матричное уравнение $A\bar{u}=\lambda\bar{u}$ запишется как: $\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.В левой части по обычному правилу проведём матричное умножение, в правой части – внесём λ: $\begin{pmatrix}-x-6y\\ 2x+6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix}$Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы. Приравниваем соответствующие элементы *векторов-столбцов* и получаем однородную систему линейных уравнений: $\begin{cases}-x-6y=\lambda x\\ 2x+6y=\lambda y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-x-6y-\lambda x=0\\ 2x+6y-\lambda y=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(-x-\lambda)x-6y=0\\ 2x+(6-\lambda)y=0\end{cases}$.

Уравнения линейно зависимы и определить матрицы системы равен нулю: $\begin{vmatrix}-1-\lambda & -6\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0$.

Это характеристическое уравнение матрицы A, корни которого являются собственными числами данной матрицы. Сначала найдём собственные значения. Составим характеристическое уравнение. Смотрим на исходную матрицу $\begin{vmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{vmatrix}$ и записываем её определитель, вычитая при этом λ из чисел *главной диагонали*: $\begin{vmatrix}-1-\lambda & -6\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0$. Раскроем определитель и решим квадратное уравнение: $(-1-\lambda)(6-\lambda)-2(-6)=\lambda^2-5\lambda-6+12=\lambda^2-5\lambda+6=0$.

Дискриминант $D=25-24=1$, $\sqrt{D}=1$; $\lambda_1=\frac{5-1}{2}=2$; $\lambda_2=\frac{5+1}{2}=3$, Собственные значения $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, каждому из них соответствует свой собственный вектор. Рассмотрим собственное число $\lambda_1=2$ и подставим значение $\lambda=\lambda_1=2$ в однородную систему уравнений $\begin{cases}(-1-\lambda)x-6y=0\\ 2x+(6-\lambda)y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x-6y=0\\ 2x+4y=0\end{cases}$. Замечание проще подставить $\lambda=\lambda_1=2$ в определить $\begin{vmatrix}-1-\lambda & -6\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}$, откуда коэффициенты системы $\begin{vmatrix}-3 & -6\\ 2 & 4\end{vmatrix}$. Из обоих уравнений системы следует: $\begin{cases}-3x-6y=0\\ 2x+4y=0\end{cases}\Rightarrow x=-2y$ Координаты собственного вектора $\bar{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ определены не однозначно; следует подобрать y так, чтобы x-координата собственного вектора была целой, положительной и минимальной. Пусть $y=-1$, тогда $x=-2\cdot(-1)=2$ и $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$.

Найдём второй собственный вектор. Для этого подставим $\lambda=\lambda_2=3$ в определитель $\begin{vmatrix}-1-\lambda & -6\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}$ и запишем вторую однородную систему $\begin{cases}-4x-6y=0\\ 2x+3y=0\end{cases}$ Из обоих уравнений следует, что $x=(-3/2)y$.

Положим $y=-2$, тогда $x=-\frac{3}{2}\cdot(-2)=3$. В результате собственный вектор $\bar{u}_2=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$

Ответ: собственные числа $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, собственные векторы $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$, $\bar{u}_2=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$ или $\bar{u}_1=(2;-1)$, $\bar{u}_2=(3;-2)$

Пример 2. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ Решение $\begin{vmatrix}0-\lambda & 2\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$, $-\lambda(5-\lambda)=\lambda 2-5\lambda-6=0$, $D=25+24/$ $\sqrt{D}=7$, $\lambda_{1,2}=\frac{5\mp 7}{2}$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=6$ – собственные значения. Найдём собственные векторы 1) $\lambda=\lambda_1=-1$ $\begin{cases}x+2y=0\\ 3x+6y=0\end{cases}\Rightarrow x=-2y.$ Пусть $y=-1\to x=2$, $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ – собственный вектор.

2) $\lambda=\lambda_2=6$ $\begin{cases}-6x+2y=0\\ 3x-y=0\end{cases}\Rightarrow y=3x.$ Пусть $x=1\to y=3$, $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ – собственный вектор

Ответ: собственные значения: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=6$, собственные векторы $\bar{u}(2;-1)$, $\bar{u}(1;3)$.

Пример 10. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=-2x+5y,\quad \frac{dy}{dt}=x+2y$$

Вычислим собственные значения λ_i матрицы A, составленной из коэффициентов заданных уравнений:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 5\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,\Rightarrow(-2-\lambda)(2-\lambda)-5=0,\Rightarrow(\lambda+2)(\lambda-2)-5=0,\Rightarrow\lambda^2-9=0,\Rightarrow\lambda_1=3,\lambda_2=-3$$

В данном примере характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Найдем собственный вектор V_1, соответствующий собственному числу $\lambda_1=3$. Подставляя $\lambda_1=3$, получаем векторно-матричное уравнение для определения V_1: $(A-\lambda E_n)V_1=0$. Пусть собственный вектор V_1 имеет координаты $V_1=(V_{11},V_{21})^T$ (здесь индекс T означает операцию транспонирования). Тогда предыдущее уравнение можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix}-2-3 & 5\\ 1 & 2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix}=0,\Rightarrow\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix}=0.$$

После перемножения матриц получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases}-5V_{11}+5V_{21}=0\\ V_{11}-V_{21}=0\end{cases}$$

Оба уравнения являются линейно зависимыми. Из второго уравнения находим соотношение между координатами собственного вектора: $V_{11}=V_{21}$. Полагаем $V_{21}=1$. Следовательно, $V_{11}=1$. Таким образом, собственный вектор V_1 имеет координаты $V_1=(1,1)^T$. Аналогично определяем 2-ой собственный вектор V_2, соответствующий $\lambda_2=-3$. Пусть $V_2=(V_{21},V_{22})^T$. Тогда

$$\begin{pmatrix}-2+3 & 5\\ 1 & 2+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix}=0,\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix}=0.$$

Получаем систему двух одинаковых уравнений:

$$\begin{cases}V_{21}+5V_{22}=0\\ V_{21}+5V_{22}=0\end{cases}$$

Отсюда находим координаты собственного вектора V_2: $V_{21}=-5V_{22}$, $V_{22}=1$, $V_{21}=-5$. Следовательно, $V_2=(-5,1)^T$. Таким образом, система уравнений имеет два различных собственных числа и два собственных вектора. Общее решение выражается формулой

$$x(t)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix},$$

или $\begin{cases}x(t)=C_1e^{3t}-5C_2e^{-3t}\\ y(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}\end{cases}$

где C_1, C_2 – произвольные числа.

Решение систем линейных ОДУ методом собственных значений и собственных векторов можно обобщить на систему уравнений высокого порядка.

Общее решение ОДУ n-го порядка содержит n произвольных коэффициентов, чтобы их найти нужно задать n дополнительных условий. С этой целью задают значения переменной и её производных в определенные моменты времени. если указанные значения относятся к одному и тому же моменту времени, то они называются *начальными условиями*. Дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями называются **задачей Коши**. Зная общее решение уравнения и начальные условия $x(t_0)$, $x'(t_0),...,x^{(n-1)}(t_0)$ легко найти постоянные $c_1,\dots,c_n$. Если же эти значения относятся к разным моментам времени, например, $x(t_1)=A_1$; $x(t_2)=A_2,...,x(t_n)=A_n$, то задача называется **краевой**. Аналитическое решение краевой задачи полностью аналогично решению задачи Коши. единственное отличие заключается в том, что при определении произвольных коэффициентов, входящих в решение, используются не начальные, а краевые условия.

Пример 11. Приведём алгоритм решения задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=0$$

с краевыми условиями $x(t_1)=A_1$, $x(t_2)=A_2$

Найдём общее решение, которое в случае простых вещественных корней p_1, p_2, характеристического уравнения имеет вид $x(t)=c_1e^{p_1t}+c_2e^{p_2t}$. После этого, полагая $t=t_1$ и $t=t_2$, получим систему алгебраических уравнений для определения постоянных c_1 и c_2:

$$c_1e^{p_1t_1}+c_2e^{p_2t}=A_1;\quad c_2e^{p_1t_2}+c_2e^{p_2t_2}=A_2$$

Пример 12. Решить систему $\begin{cases}\dot{x}=\lambda_1x\\ \dot{y}=\lambda_2y\end{cases}$ ($\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$)

Эта система распалась на два независимых уравнения, её общее решение:

$x=C_1e^{\lambda_1 t}$, $y=C_2e^{\lambda_2 t}$.

Значениям $C_1=0$, $C_2=0$ соответствует точка покоя (0;0).

Если $C_1=0$, $C_2>0$, то точка $(x;y)$ движется по лучу $x=0$, $y>0$. Направление движения определяется знаком λ_2: при $\lambda_2>0$ с ростом t точка удаляется от начала координат, в при $\lambda<0$ – приближается к нему. Причём, при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка пробегает весь луч. Аналогично, если $C_1=0$, $C_2<0$, то точка $(x;y)$ движется по лучу $x=0$, $y<0$. Таким образом, прямая $x=0$ состоит из трёх непересекающихся траекторий – **точки покоя (неподвижной точки)** и двух открытых лучей. Значения $C_2=0$, $C_1\neq0$ задают ещё две траектории луча, лежащих на прямой $y=0$. Если же $C_1\neq0$ и $C_2\neq0$, исключив из уравнений движения параметр t, получим уравнение траекторий в виде $y=Cx^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$. Графики этих степенных функций имеют существенные различия в зависимости от знака показателя λ_1/λ_2. Пусть λ_1 и λ_2 имеют одинаковый знак ($\lambda_1\cdot\lambda_2>0$), тогда $\lambda_2/\lambda_1>0$. График функции $y=Cx^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ проходит через точку (0:0) и касается в этой точке оси Ox при $|\lambda_2|>|\lambda_1|$ Oy $|\lambda_2|<|\lambda_1|$. Точка (0;0) разбивает каждую параболу на две траектории.

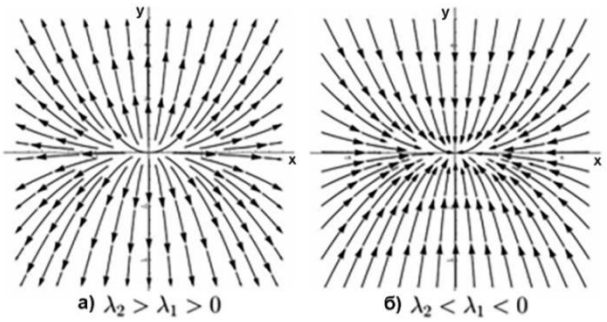


Рис. 9. Траектории в задаче 1 (собственные значения одного знака).

На рис. 26а, б изображены траектории рассматриваемой системы в случае ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Стрелками указано направление движения точки при возрастании параметра t. Такую картину траекторий и точку (0;0) называют узлом. В случае $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ узел называется неустойчивым (рис.26а), в случае $\lambda_1 < 0$, $\lambda < 0$ – устойчивым (рис. 26б). Точная формулировка понятия устойчивости будет дана позднее, сейчас же нам достаточно того, что в первом случае точки, отличные от (0;0), с ростом времени удаляются от начала координат, а во втором случае – притягиваются к нему. В частном случае $\lambda_1 = \lambda_2$ все траектории, отличные от положения равновесия, являются лучами. Такая картина траекторий называется дикритической или звёздным узлом (рис.27, 26).

Если λ_1 и λ_2 различных знаков (($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), то графиком функции $y = Cx^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ является гипербола с асимптотами $x=0$ и $y=0$. На рис.28 изображены траектории в случае $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. При движении по траектории $y=0$ ($x>0$ или $x<0$) точка приближается к началу координат. При движении по остальным траекториям при $t \to +\infty$ точка удаляется от точки покоя. В такой ситуации точка (0;0) называется **седлом**.

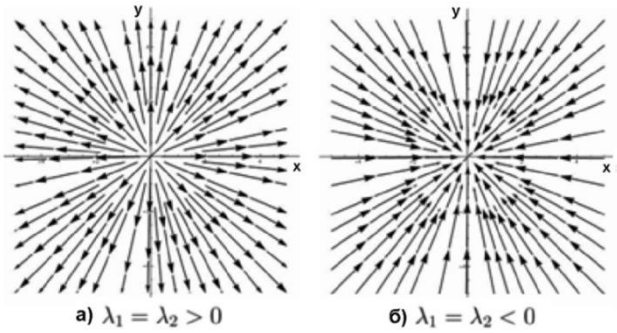


Рис. 10. Траектории в задаче 1 (равные собственные значения.

Пример 13. Найти траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \quad (\lambda \neq 0)$$

Решение этого уравнения $x = \frac{y}{\lambda} \ln Cy$. Можно построить график функции $x=x(y)$. В точке (0;0) все траектории касаются оси Ox. Определить направление движения по траектории можно из первого уравнения системы: в точке $(x;0)$ вектор скорости $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}$. Точка (0;0) называется вырожденным **узлом (**см. далее**)**: устойчивым, если $\lambda < 0$, и неустойчивым, если $\lambda > 0$.

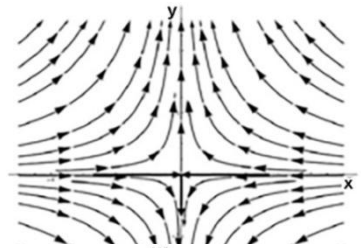


Рис. 11. Траектории в задаче 2 (собственные значения разных знаков).

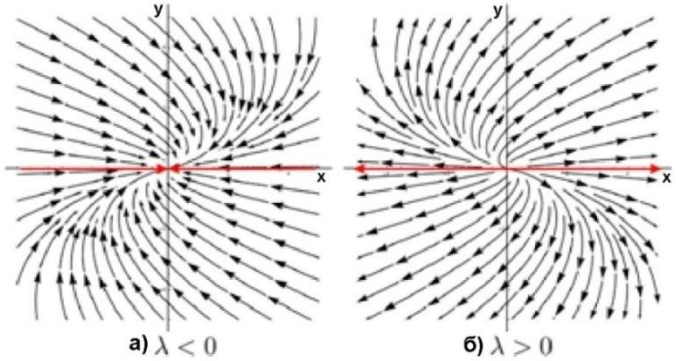


Рис. 12. Траектории в задаче 2.

Задача 3. Нарисовать траектории системы

$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$ $\beta \neq 0$.

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Её характеристический многочлен $(\lambda-\alpha)^2+\beta^2$ имеет два комплексно-сопряжённых корня $\lambda_{1,2}=\alpha+i\beta$. Перейдём в полярную систему координат, положив $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда решение $-\alpha\rho^2 d\varphi=\beta\rho d\rho$. При $\rho=0$ имеем точку покоя (0;0). Если же $\rho>0$, то

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{\beta}\rho \Rightarrow \rho = Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}.$$

Траектории, соответствующие этим решениям являются спиралями. Если $\alpha/\beta>0$, то с ростом φ расстояние ρ от точки на траектории до начала координат уменьшается, т.е. спираль сужается при движении по ней в направлении против часовой стрелки. Если $\alpha/\beta<0$, то спираль расширяется.

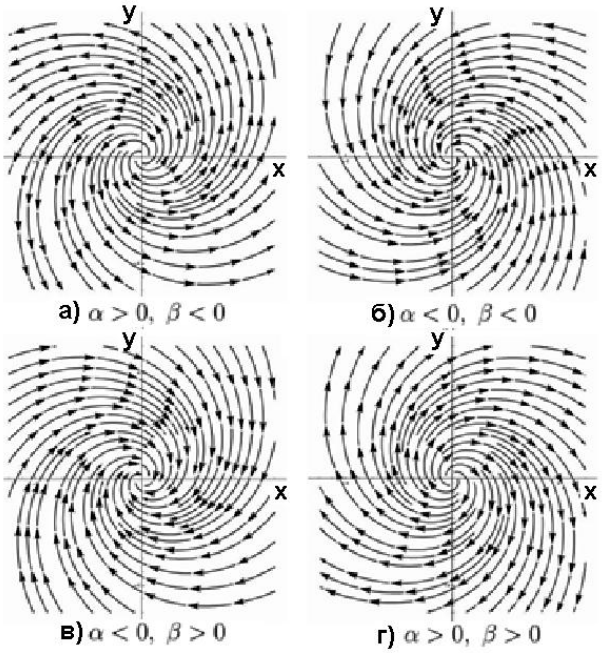


Рис. 13. Траектории в задаче 3.

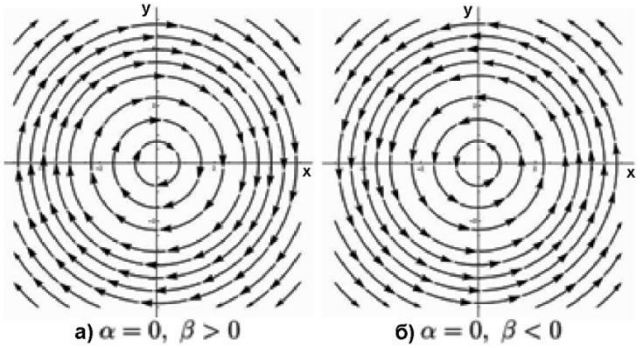


Рис. 14. Траектории в задаче 4.

Решение системы можно записать через матричную экспоненту

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Это позволяет определить направление движения точки при возрастании параметра t. Множитель $e^{\alpha t}$ показывает, что точка $(x;y)$, двигаясь по траектории, с ростом t удаляется от положения равновесия, если $\alpha>0$, и приближается к нему, если $\alpha<0$. На рис.90(*a–d*) изображены траектории системы при различных значениях α и β. Точка (0;0) – фокус, устойчивый, если $\alpha<0$, или неустойчивый, если $\alpha>0$.

Пример 14. Найти фазовые траектории системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y \\ \dot{y} = -\beta x \end{cases} \quad \beta \neq 0.$$

Здесь все траектории являются окружностями $x^2+y^2=C$.

Из решения системы $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ следует, что движение имеет периодический характер, и точка пробегает окружность бесконечно много раз. Соответствующие траектории являются замкнутыми. Точка (0;0) системы называется центром. Направление движения по окружностям определяется знаком β. Чтобы увидеть это направление, построим вектор скорости в произвольной точке, например, $x=0$, $y=0$. Из решения исходной системы уравнений получаем $\dot{x} = \beta y, \quad \dot{y} = 0,$ т.е. движение происходит против часовой стрелки, если $\beta>0$, и по часовой стрелке, если $\beta<0$.

10.4 Нелинейные дифференциальные уравнения

Как уже упоминалось, нелинейная система - это система, процессы на выходе которой не пропорциональны процессам на вводе. В отличие от линейных, нелинейные динамические системы, эволюционирую во времени хаотично и непредсказуемо или противоречиво. Поведение нелинейной системы описывается в математике **нелинейной системой уравнений**, которая представляет собой набор обыкновенных уравнений, в которых неизвестные (или неизвестные функции) представляют собой переменные полинома степени выше единицы. В нелинейной системе уравнений решаемое уравнение не может быть записано как линейная комбинация неизвестных переменных или функций, в них участвующих.

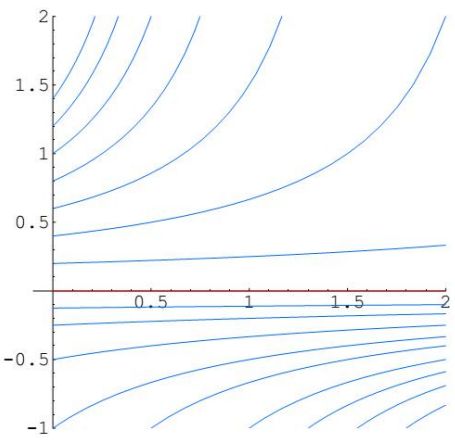
Нелинейное дифференциальное уравнение – это уравнение, в котором неизвестной величиной является некоторая функция. В самом дифференциальном уравнении участвует не только неизвестная функция, но и различные её производные в нелинейном виде

Нелинейное дифференциальное уравнение – дифференциальное уравнение (обыкновенное или с частными производными), в которое по крайней мере одна из производных неизвестной функции (включая и производную нулевого порядка - саму неизвестную функцию) входит нелинейно. Различают обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения (ОДУ) и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

Иногда под нелинейным дифференциальным уравнением понимается наиболее общее уравнение определенного вида. Например, нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ с произвольной функцией $f(x,y,u)$; при этом линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка соответствует частному случаю $f(x,y,u)=a(x)u+b(x)y$.

Общий вид нелиненого уравнения с одним неизвестным имеет вид: $F(x)=0$. Далеко не все уравнения решаются аналитически. Например, уравнение $ax^2+bx+c=0$ решается легко (имеет два корня), а уравнение $ax^n+bx+c=0$ аналитического решения не имеет (решение проводят численными методами).

Пример 15: $y''=\ln(x)+2y$ – линейное уравнение; $yy'=x-y-3$ – нелинейное уравнение.



В отличие от линейных, нелинейные дифференциальные уравнения в общем случае не имеют методов решения, кроме некоторых частных случаев.

Примерами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений являются уравнения Бернулли, Риккати, Лагранжа, Клеро, Д'Аламбера, Эйлера, Навье-Стокса, нелинейное уравнение

Шредингера и множество других. Они могут быть первого, второго и более высоких порядков.

Рис. 15. Решения уравнения $\dot{u} = u^2$**.**

Пример 16. Дано автономное (правая часть явной форме не зависит от времени) дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = u^2$$

с начальным условием $u(t_o)=u_0$.

Решение начнём с того, что разделим переменные

$$\frac{du}{u^2} = dt,$$

и проинтегрируем обе стороны

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{du}{u^2} = t + k.$$

Решив это алгебраическое уравнение, получим

$u = -\frac{1}{t+k}$, откуда $k = -\frac{1}{u_0} - t_0$.

Решение имеет вид: $u = \frac{u_0}{1 - u_o(t - t_0)}$.

Некоторые типы зависимости u от t для Ур.1 представлены на рис.15.

Когда t приближается к своему критическому значению $t^*=t_0+1/u_0$, решение «взрывается», т.е. $u(t)\to\infty$ при $t\to t^*$. Время взрыва t^* зависит от начального условия: чем больше $u_0>0$, тем быстрее решение уходит в бесконечность. Если начальное условие отрицательно ($u_0<0$), то решение хорошо определено для всех $t>t_0$, но имело особенность в прошлом при $t^*=t_0+1/u_0<t_0$. Единственное решение, существующее для всего положительного и отрицательного времени, есть постоянное решение $u(t)\equiv 0$, соответствующее начальному условию $u_0=0$.

Этот пример демонстрирует важность проблемы устойчивости при решении нелинейных дифференциальных уравнений.

Аналитическое решение нелинейного ОДУ – исключительный случай. Даже простые нелинейные уравнения не могут быть решены в замкнутой форме. Например, решение уравнения Риккати

$$\frac{du}{dt} = u^2 + t$$

не может быть записано в терминах элементарных функций, хотя и может быть выражено в терминах специальных функций.

С уравнением Абеля дело обстоит ещё хуже

$$\frac{du}{dt} = u^3 + t\ .$$

так как его общее решение не может быть записано в терминах стандартных специальных функций; решение представляют в виде степенных рядов.

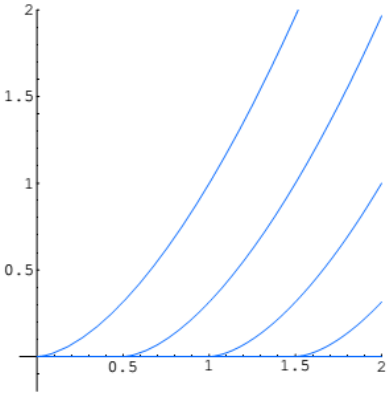
Крупная неприятность при работе с нелинейным дифференциальным уравнением заключается в том, что одно и то же уравнение при конкретном начальном условии и при непрерывном времени может иметь несколько, а то и бесконечное множество решений.

Пример 17. Автономное скалярное уравнение

$$\frac{du}{dt} = \frac{5}{3}u^{\frac{2}{5}}, \quad u(0) = 0.$$

решается обычным методом $\int \frac{3}{5}\frac{du}{u^{\frac{2}{5}}} = u^{\frac{3}{5}} = t + c$. Тогда $u = (t+c)^{\frac{5}{3}}$.

Подставив в начальное условие, найдём, что c=0, и, следовательно, $u(t)=t^{5/3}$ является решением начальной задачи. С другой стороны, поскольку правая часть дифференциального уравнения обращается в нуль при u=0, постоянная функция $u(t)\equiv 0$ есть равновесное решение дифференциального уравнения. Более того, равновесное решение имеет одно и то же начальное значение $u(0)$=0. Поэтому построили два разных решения начальной задачи. Нет единственного решения! Хуже того, на самом деле существует бесконечное число решений проблемы начального значения. Для любого $a>0$ функция



$$u(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le a\\ (t-a)^{\frac{5}{3}}, & t>a\end{cases}$$

дифференцируема всюду, даже при $t=a$. К тому же она удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и начальному условию и, следовательно, определяет решение проблемы с начальным условием. Некоторые из этих решений представлены на рис. 16.

Рис. 16. Решения дифференциального уравнения $\dot{u}=\frac{5}{3}u^{2/5}$

Таким образом, для обеспечения единственности решений требуется ввести более строгие условия, помимо простой непрерывности.

<u>Теорема</u>: Если исходная функция F(t, u)$\in C^1$ непрерывно дифференцируема, то существует одно и только одно решение для задачи с начальными условиями:

$$\frac{du}{dt}=F(t,u),\quad u(t_0)=a$$

Трудность с решением состоит в том, что функция $F(u)=\frac{5}{3}u^{\frac{2}{5}}$, хотя и непрерывна всюду, но не дифференцируема при u=0, и, следовательно, теорема единственности не применима. С другой стороны, $F(u)$ непрерывно дифференцируема вне u=0, и поэтому любое ненулевое начальное условие $u(t_0)=u_0\neq 0$ даёт единственное решение – для любых u вдали от точки u=0.

Поскольку нелинейные динамические уравнения решить трудно, или вообще невозможно, то нелинейные системы обычно аппроксимируют (с использованием тех или иных приближений) линейными уравнениями (линеаризация).

<u>Пример 18.</u> Линейное уравнение гармонического осциллятора $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2 y=0$ можно рассматривать как приближение нелинейного уравнения математического маятника $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2\sin y=0$ для случая малых амплитуд, когда $y\approx\sin y$.

<u>Пример 19</u>. Нарисовать фазовый портрет системы и найти её особые точки

$$\begin{cases}\dot{x}=1-x^2-y^2\\ \dot{y}=2xy\end{cases}$$

Система $\begin{cases}1-x^2-y^2=0\\ 2xy=0\end{cases}$ имеет четыре точки покоя: ($\pm$1) и (0;$\pm$1). Уравнение траекторий $(1-x^2-y^2)dy=2xy\,dx$ является уравнением в полных дифференциалах, и в нём есть интегрируемые комбинации: $(1-y^2)dy-(x^2dy+ydx^2)=0$. Следовательно, общий интеграл имеет вид $\left(y-\frac{y^3}{3}\right)-x^2y=C$. Можно представить поведение траекторий, рассматривая их линии как линии уровня функции $F(x;y)=x^2y+\frac{y^3}{3}-y$. График этой функции представлен на рис.17а, а сечение полученной поверхности по плоскостям $z=C$ - на рис.17а.

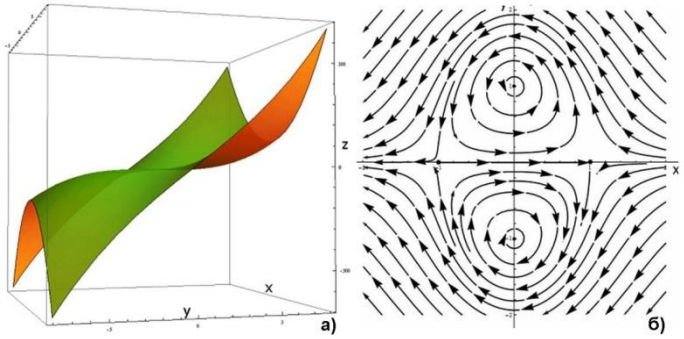


Рис. . Построение фазового портрета в примере 1: а – поверхность z=F(x;y); б – фазовый портрет системы.

Прямая y=0 – решение уравнений траекторий $(1-x^2-y^2)\,dy = 2xy\,dx$. Однако точки покоя ($\pm$1;0) разбивают её на несколько траекторий. Замкнутая линия проходит через точки ($\pm$1;0), она разбивается этими точками на две траектории, движение по каждой из них происходит от точки (1;0) к точке (-1;0). Это иллюстрирует факт, что линия функции $F(x;y)$ может состоять из нескольких траекторий. Все эти траектории лежат на линии $F(x;y) = x^2y + \frac{y^3}{3} - y = 0$.

Локальные портреты точек ($\pm$1;0) обладают всеми свойствами седла; две траектории входят в точку, две – выходят из нее, остальные точки сначала приближаются к точке покоя вдоль входящей траектории, а затем удаляются от точки покоя вдоль уходящей траектории. Поэтому точки. Поэтому точки ($\pm$1;0) мы тоже назовём седлом. Точки (0;$_+$1) окружены замкнутыми траекториями, и их локальный портрет есть центр.

Как показывает пример 19, в нелинейном случае поведение траекторий в некоторой окрестности точки покоя может обладать теми же существенными чертами, что и траектории линейной системы, т.е. выглядеть как седло, узел, фокус или центр (фазовые портреты точек покоя качественно эквивалентны). Поэтому можно заменить нелинейную автономную систему линейной, имеющую точку покоя того же типа.

Допустим, что система второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x;y) \\ \dot{y} = Q(x;y) \end{cases} \qquad (48)$$

имеет точку покоя (0;0). Если правые части системы можно записать в виде

$P(x;y) = a_{11}x + a_{12}x + g_1(x;y)$, $Q(x;y) = a_{21}x + a_{22}x + g_2(x;y)$

где $g_i(x;y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ при $(x^2+y^2) \to 0$, то система

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad (49)$$

называется линеаризацией системы (48) в точке (0;0).

Линеаризацию системы можно провести в любой точке покоя (x_0;y_0), введя локальные координаты (ξ;η) по правилу $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$. При такой замене переменных точка покоя будет иметь координаты ξ=0, η=0). Более эффективным методом построения линеаризации является разложение правых частей системы по формуле Тейлора в окрестности точки покоя. Из этой формулы следует, что матрица линеаризованной системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_x \end{pmatrix}\Bigg|_{x_0;y_0} \qquad (50)$$

Теорема о линеаризации устанавливает связь фазового портрета нелинейной системы (48) в окрестности точки покоя с фазовым портретом её линеаризации. Эта теорема утверждает, что в невырожденном случае $\left(\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right)$ их фазовые портреты качественно эквивалентны, если только точка покоя линеаризованной системы не является центром. Другими словами, центр является единственным исключением. Если

же точка покоя является седлом, узлом, вырожденным узлом или фокусом, то такой характер имеет и точка покоя нелинейной системы.

Вернёмся к примеру 19. В точках $(\pm 1;0)$ линеаризованная система имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$. И той и другой точке собственные числа этой матрицы имеют разные знаки, следовательно, по теореме о линеаризации, у нелинейной системы каждая точка является седлом. В точках $(0;\pm 1)$ линеаризованная система имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$, и для нее эти точки являются центрами. В этом случае теорема не позволяет сделать вывод о характере поведения траекторий нелинейной системы. Хотя по линиям уровня первого интеграла $F(x;y)$ эти точки действительно являются центрами. Изучение линий уровня первого интеграла – один из эффективных способов определения центра, поскольку линеаризация в таком случае не работает.

Автономное уравнение второго порядка $\ddot{x} = f(x;\dot{x})$ можно свести к автономной системе, положив $y = \dot{x}$. Фазовым пространством уравнения второго порядка, таким образом, следует считать плоскость $(x;\dot{x})$.

Линеаризация применима в пределах допустимой точности и для небольшого диапазона входных значений, но некоторые интересные явления, такие как солитоны, хаос и особенности она описать не может. Поэтому некоторые аспекты динамического поведения нелинейной системы и кажутся противоречивыми, непредсказуемыми или даже хаотичными. Хотя такое хаотичное поведение похоже на случайное, оно не является случайным. Эта нелинейность - причина невозможности точных долгосрочных прогнозов.

Одна из самых больших трудностей нелинейных задач состоит в том, что в общем случае невозможно объединить известные решения в новые решения. В линейных задачах семейство линейно независимых решений может быть использовано для построения общих решений по принципу суперпозиции. Даже если удаётся найти несколько конкретное решение нелинейного уравнения, отсутствие принципа суперпозиции препятствует построению окончательного решения.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка часто точно решаются путем разделения переменных, особенно для автономных уравнений.

Пример 20. Нелинейное уравнение $\frac{du}{dx} = -u^2$ имеет общее решение $u = \frac{1}{x + C}$ как общее решение (а также u=0 как частное решение, соответствующее пределу общего решения, когда $C \to \infty$). Уравнение нелинейно, поскольку оно может быть записано как $\frac{du}{dx} + u^2 = 0$. Левая часть уравнения не является линейной функцией от u и ее производных. (Если u^2 заменить на u, то проблема станет линейной (задача радиоактивного распада).

Типы нелинейного динамического поведения: хаос – значения системы не могут быть предсказаны бесконечно далеко в будущее, а колебания апериодичны; мультистабильность – наличие двух или более стабильных состояний; амплитудная смерть – любые колебания, присутствующие в системе, прекращаются из-за какого-то взаимодействия с другой системой или обратной связи одной и той же системы; солитоны – самоусиливающиеся одиночные волны.

11. ОТОБРАЖЕНИЯ

Как уже упоминалось математические модели динамики можно разделить на три класса: 1) дифференциальные уравнения (потоки), 2) разностные уравнения (отображения, каскады) и 3) символические динамические уравнения. До сих пор мы в основном находились в рамках первого класса моделей, теперь несколько подробнее остановимся на втором: на разностных уравнениях динамики, в которых время дискретно.

Помимо непрерывных динамических систем, т.е. систем, описываемых дифференциальными уравнениями с непрерывным временем (потоки), существуют и абстрактные дискретные динамические системы (каскады, т.е. траектории в фазовом пространстве), описываемые последовательностью состояний. Решения ОДУ ведутся численными методами (например, методом конечных разностей) в которых **время дискретно**, данные представляют собой некоторое численное множество, а все функции рассчитываются методом итераций. Дискретные системы, описывающие **итерационные процессы**, дают простые примеры хаоса и служат инструментом анализа хаотических решений дифференциальных уравнений.

Некоторые важные аспекты нелинейной динамики можно изучать, используя дискретные отображения, поскольку они проще дифференциальных уравнений, чаще допускают аналитические решения и весьма наглядны. К тому же, многие отображения играют самостоятельную роль поскольку, не могут быть получены из систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Примером является логистическое распределение. Важно, что при переходе к отображению размерность системы уменьшается.

Динамические системы с дискретным временем (каскады) встречаются во многих практически важных ситуациях. Они, например, возникают при *квантизации* динамических систем с непрерывным временем (потоков). При описании реальных сред уже исходные математические модели оказываются динамическими системами с дискретным временем. Рассматривая периодические решения дифференциальных уравнений часто полезно перейти к рассмотрению решений лишь в точках n_p, кратных периоду р. И, наконец, динамические системы с дискретным временем возникают при исследовании автономных систем, для которых удается найти *поверхность Пуанкаре* и построить *отображение Пуанкаре.*

11.1 Системы с дискретным временем в отображениях

Одномерное отображение – это простейшая модель эволюционного процесса, когда состояние системы характеризуется единственной переменной, а время – дискретно.

Одномерное отображение задаётся итерационным соотношением

$$x_{n+1}=f(x_n) \qquad (1)$$

Это - функция, показывающая зависимость последующих значений параметров от предыдущих значений.

Дискретное отображение (1) по заданному начальному значению x_1 позволяет определить все последующие значения переменной: x_2, x_3 и т.д. Действительно:

$x_2=f(x_1)$,
$x_3=f(x_2)$,
$x_4=f(x_3)$,
.....

В зависимости от вида функции $f(x)$ Ур.1 может демонстрировать сложную и разнообразную динамику. При этом важным является *установившийся режим*, который будет наблюдаться после некоторого переходного процесса. Можно выделить три основных типа установившегося режима:

а) неподвижная точка, когда переменная перестает изменяться;

б) цикл, когда переменная «пробегает» последовательно несколько значений (их число равно периоду цикла), а затем динамика повторяется;
в) хаотический режим, когда динамика не повторяется и визуально кажется случайной.

Пусть M – подмножество q – мерного пространства R^q. Как правило, M является замкнутым ограниченным множеством (компактом) или гладким многообразием в R^q. Пусть Z – множество целых чисел и R – множество вещественных. Динамической системой называется **непрерывное отображение** $\Phi(x,t)$, где $x\in M$, $t\in Z$ (или $t\in R$), такое, что Φ: $M\times Z\to M$ (или Φ: $M\times R\to M$), $\Phi(x, 0)=x$, $\Phi(\Phi(x,t),s) = \Phi(x,t+s)$, где t, s принадлежат Z (или R). Переменная t – время, а многообразие M – фазовое пространство).

Отображение однозначное – закон, по которому каждому элементу некоторого заданного множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент другого заданного множества Y (при этом X может совпадать с Y). Такое соотношение между элементами $x\in X$ и $y\in Y$ записывается в виде $y=f(x)$, или $f:X\to Y$ и говорит, что отображение f действует из X в Y. Отображение называется непрерывным, если близкие элементы множества A переходят в близкие элементы множества B. Точнее это означает, что если элементы $x_1, x_2,.., x_n,..$ сходятся к x, то элементы $f(x_1), f(x_2),...,f(x_n),...$ сходятся к $f(x)$. В ряде случаев в множествах A и B можно ввести координаты, т.е. задавать каждую точку этих множеств системой чисел $(x_1,...,x_n)$ и $(y_1,...,y_n)$. Тогда отражение задаётся системой функций $y_k=f_k(x_1,...,x_n)$. $1\le k\le m$. В большинстве встречающихся на практике случаев функции f_1, $f_2,...f_m$ дифференцируемые: тогда отображение называется дифференцируемым. Если отражение дифференцируемо, $m=n$ и Якобиан отражения отличен от нуля, то отражение взаимно однозначно.

Конформное отображение – преобразование отображение одной фигуры на другую, при котором две любые кривые, пересекающиеся под некоторым углом во внутренней точке первой фигуры, преобразуются в кривые второй фигуры, пересекающиеся под тем же углом.

Инвариантное множество – множество в фазовом пространстве X, состоящее из целых траекторий (является объединением некоторой совокупности траекторий). Может быть как положительным, так отрицательным.

Математические методы исследования отображений подобны методам исследования дифференциальных уравнений. Обычно находят равновесные или неподвижные точки отображения и проводят классификацию этих точек с помощью анализа отображения, линеаризованного вблизи данной точки.

Отображение – соответствие, при котором каждому из элементов множества X сопоставляется единственный элемент из множества Y. Обозначение отображения из множества X в множество Y $f: X \to Y$. Если X и Y состоят из чисел, то f – функция. Множество X – область определения отображения, обозначается $X=D(f)$; $E(f)$ – множество значений отображения, $E(f)=\{y\in Y|\exists x\in X, y=f(x)\}E(f)=\{y\in Y|\exists x\in X, y=f(x)\}$. Множество $\Gamma(f)$ – график отображения.

Отображение – способ присвоения каждому объекту в одном наборе определенного объекта в другом (или таком же) наборе. Сопоставление применяется к любому набору: все целые числа, все точки в строке или все, что находится внутри круга. Например, «умножить на два» означает отображение множества всех целых чисел на множество четных чисел. Вращение – это отображение плоскости или всего пространства в себя.

Дискретная, аффинная динамическая система имеет вид матричного разностного уравнения:

$$x_{n+1}=Ax_n+b \qquad (2)$$

с матрицей A и вектором b. Изменение координат $x\to x+(1-A)^{-1}b$ убирает слагаемое b из уравнения. В новой системе координат начало координат является фиксированной точкой отображения, а решения – линейной системой $A^n x_0$. Решения для отображения, в отличие от решений ОДУ, уже не являются кривыми, а точками в фазовом пространстве. Орбиты организованы в виде кривых, которые представляют собой совокупности точек, которые отображаются сами в себя под действием отображения.

Как и в непрерывном случае, собственные значения и собственные векторы матрицы A определяют структуру фазового пространства. Например, если u_1 является собственным вектором оператора A с вещественным собственным значением, меньшим единицы, то прямые, заданные точками вдоль αu_1, с $\alpha \in R$, являются инвариантной кривой отображения. Точки в этой прямой линии попадают в неподвижную точку.
Существует также множество других дискретных динамических систем.

Пусть f – некоторое отображение из множества X в множество Y. Если x при этом отображении сопоставляется y, то $y=f(x)$. При этом y называется образом x, или значением отображения f в точке x, а x – прообразом элемента y.
Исходя из определения отображения, видно, что не требуется, чтобы все элементы в множестве Y являлись образами какого-либо x и при том единственного.

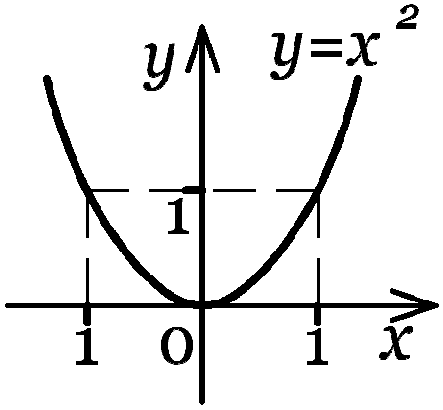
Пример 1. Даны два множества X={с,е,нт,я,б,р,ь} и Y={1,2,3,4,5,9,10,11}. Отображение из множества X в множество Y имеет следующий вид:

с,	е,	н,	т,	я,	б,	р,	ь
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1,	2,	3,	4,	5,	9,	10	11

Совокупность всех элементов из множества X, образом которых является y из Y, называется полным прообразом y из X. Обозначается: $f^{-1}(y)$.

Пусть $A \subset X$ (A – подмножество X). Совокупность всех элементов $f(a)$, $a \in A$ называется полным образом множества A при отображении f.

Пусть $B \subset Y$. Множество всех элементов из X, образы которых принадлежат множеству B, называется полным прообразом множества B.



Пример 2. $X=Y=R$, $y=x^2$.
$A=[-1;1] \subset X$
Полный образ $f(A)=[0;1]$
$B=[0;1] \subset Y$
Полный прообраз $f^{-1}(B)=[-1;1]$

Рис. 1. Отображение функции $y=x^2$.

Пример 3. Арифметическая прогрессия. Скорость тела, скользящего по наклонной плоскости без трения, зависит от времени: $v=v_0+gt\sin\alpha$, где $g\sin\alpha$ – проекция ускорения тела на плоскость, t – время. Если скорость v_n изменяется в моменты времени t_n через интервалы длительности τ (n – номер измерения), то $v_n=v_0+t_n g\sin\alpha$, следующее измерение $v_{n+1}=v_0+t_{n+1}g\sin\alpha$. Так как $t_{n+1}=t_n+\tau$, то

$$v_{n+1}=v_n+b, \qquad (3)$$

где $b=\tau g\sin\alpha$ – некоторое уравнение относительно дискретной переменной v_n.

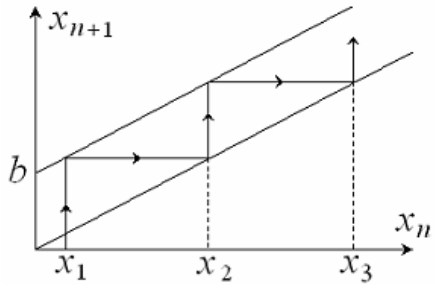


Рис. 2. Итерационная диаграмма, соответствующая арифметической прогрессии.

Такие уравнения называют разностными уравнениями (отображениями). Итерационная диаграмма арифметической прогрессии (Ур.3) представлена на рис. 2: тело равномерно набирает скорость, которая может нарастать до бесконечности. Это отображение линейно, поскольку ему отвечает линейная функция $f(x)=x+b$.

Пример 4. Геометрическая прогрессия. Линейной функции типа $f(x)=ax$ соответствует отображение

$$x_{n+1}=ax_n \qquad (4)$$

Эта геометрическая прогрессия может быть как сходящейся, так и расходящейся (рис. 3).

Пример 5. Затухающая геометрическая прогрессия. Тело движется по плоскости в некоторой среде, причём сила сопротивления пропорциональна скорости. Уравнение движения $ma=-$

$kv=m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)=-kv$, его решение $v(t)=v(0)\cdot e^{-\frac{kt}{m}}$, где $v(0)$ – начальная скорость. Рассматривая значения скорости (проводя сечения) через время τ, получаем

$$v_n(t)=v(0)\cdot e^{-\frac{kt_n}{m}},$$

$$v_{n+1}(t)=v(0)\cdot e^{-\frac{kt_n}{m}-\frac{k\tau}{m}}$$

Тогда дискретное отображение геометрической прогрессии

$$v_n(t)=v(0)\cdot e^{-\frac{k\tau}{m}}, \qquad (5)$$

где знаменатель $a=e^{-\frac{k\tau}{m}}$. Прогрессия затухающая: тело тормозится, и его скорость падает до нуля.

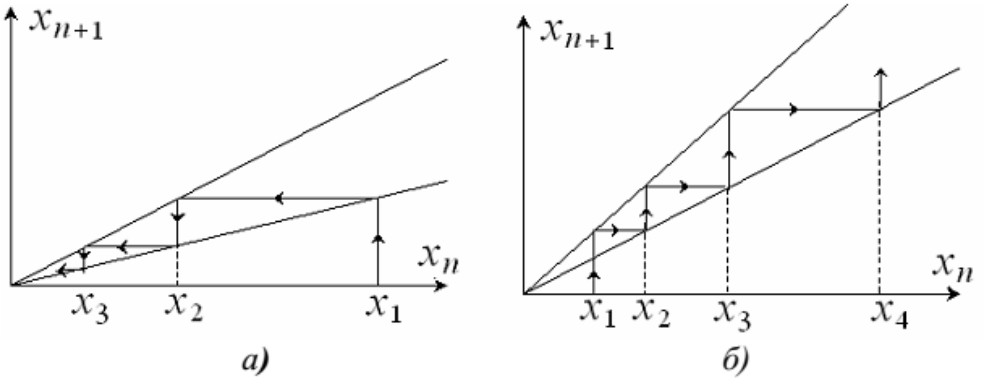


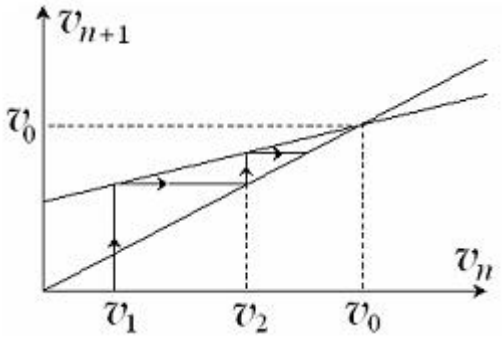
Рис. 3. Итерационные диаграммы, соответствующие сходящейся (а) и расходящейся (б) гео- метрическим прогрессиям.

Пример 6. Движение тела в вязкой среде поддерживает импульсная внешняя сила.

Пусть движущемуся по плоскости телу периодически (через время τ) некоторая внешняя сила придаёт импульс P. Сразу после n-го удара скорость тела v_n, в течение времени τ она движется свободно. Перед следующим ударом его скорость $v=v_n e^{-\frac{k\tau}{m}}$, в момент удара его скорость P/m, сразу после удара $v=v_n e^{-\frac{k\tau}{m}}+\frac{P}{m}=v_{n+1}$. Отображение имеет вид

$$n_{n+1}=av_n+b, \qquad (6)$$

где $a=e^{-\frac{k\tau}{m}}$, $b=P/m$.



Это общий вид линейного отображения (рис. 4).

Рис. 4. Итерационная диаграмма линейного отображения.

Здесь «лесенка» итераций сходится к некоторой точке. В теории дискретных отображений её называют неподвижной точкой (v_0), которая удовлетворяет соотношению $v_0=f(v_0)$. Под действием импульсов скорость тела возрастает, но затем, из-за возросшего сопротивления среды, становится постоянной.

Важное свойство отображения состоит в том, что конечная динамика (значение скорости, соответствующее неподвижной точке) не зависит от начальной скорости тела.

В анализе отображений существенную роль играют критические точки, которые могут быть неподвижными, притягивающими (аттракторы), отталкивающими (репеллеры) или нейтральными.

Точка бифуркации – смена установившегося режима работы системы; критическое состояние системы, при котором система становится неустойчивой относительно флуктуаций и возникает неопределённость: станет ли состояние системы хаотическим или она перейдёт на новый, более дифференцированный и высокий уровень упорядоченности.

Точка бифуркации (точки ветвления решения) – точка, в которой решение ОДУ расщепляется на две ветви. В точке бифуркации одно устойчивое состояние сменяется на другое устойчивое состояние (или одно неустойчивое состояние сменяется на другое устойчивое состояние), однако в некоторых точках бифуркации динамическая система переходит из устойчивого состояния в неустойчивое (или наоборот). Такая точка бифуркации называется критической точкой.

Критическая точка равновесия динамической системы (точка бифуркации, предельная точка) – точка, при преодолении которой система из устойчивого исходного состояния равновесия переходит в неустойчивое состояние.

Предельная точка числового множества, имеющего бесконечное число элементов, – точка числовой прямой, в любой окрестности которой содержится бесконечно много элементов этого множества. Верхняя предельная точка числового множества – это наибольшая из его предельных точек. Нижняя предельная точка числового множества – это наименьшая из его предельных точек. В эволюции динамической системы предельная точка обычно соответствует неустойчивому равновесию. Предельные точки исходной формы равновесия являются критическими.

Неподвижная точка – точка, которую заданное отображение переводит в неё же, т.е. решение уравнения $f(x)=x$. Особенность неподвижной точки отображения состоит в том, что при отражении она переходит сама в себя, тогда как прочие точки при отображении сдвигаются, например x_1 переходит в x_2 и т.д.

Периодическая точка – точка, возвращающаяся в себя после определённого числа итераций, т. е. решения уравнения $f(f(...f(x)....))=x$. Неподвижная точка – это периодическая точка периода 1.

Закон эволюции динамической системы определяется каким-то одним моментом времени, так что знание состояния системы в некоторый момент времени t_0 определяет состояние системы в любой момент времени $t>t_0$. Это обстоятельство позволяет свести описание динамической системы к функции вида $G(t, t_0, x_0)$, которая определяет состояние системы $G(t, t_0, x_0)$ в момент времени t при условии, что в момент времени t_0 она имела состояние x_0. Функция (**отображение**) G определяется как G: $T\times T\times X\to X$, где T – множество моментов времени, в которые можно наблюдать состояние системы; X – фазовое пространство системы, т.е. совокупность возможных состояний системы.

Отображение G обладает следующим важным свойством: $G(t,t_1,G(t_1,t_0,x_0)=G(t,t_0,x_0)$, которое называется групповым. Если обозначить $\tau_1=t-t_1$, $\tau_0=t_1-t_0$ и преобразовать обозначение $G(t, t_0, x_0)\to G_\tau(x_0)$ (момент времени считаем фиксированным и выводим за пределы аргументов), то групповое свойство запишется так: $G_{\tau 1+\tau 0}=G_{\tau 1}\circ G_{\tau 0}$.

При изучении функции G часто фиксируют все аргументы, кроме одного, в данном случае варьироваться могут t или x_0. Если варьируется t, а x_0 фиксировано, мы получаем описание развития процесса во времени (динамики) с данным начальным состоянием x_0.

При этом используют такую терминологию:

• множество $\{x\in X: x=G(t, t_0, x_0\}, t\in T$ – траектория, или **орбита**;

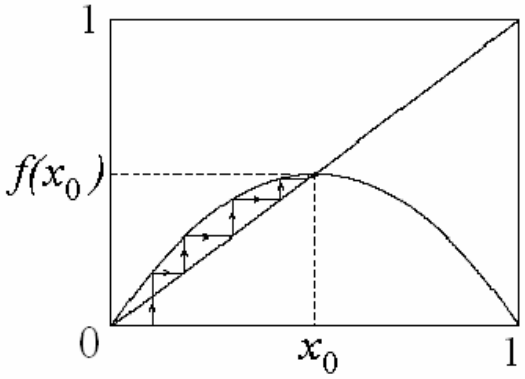
• множество $\{x\in X: x=G(t, t_0, x_0, t\in T, t>0\}$ – правая (положительная) полутраектория (полуорбита);

• множество $\{x\in X: x=G(t, t_0, x_0, t\in T, t<0\}$ – левая (отрицательная) полутраектория (полуорбита).

Если $G(t, t_0, x_0)$ не зависит от t, т.е. $G(t, t_0, x_0)\equiv x_0$, то орбита называется стационарной точкой. Если функция $G(t, t_0, x_0)$ по t периодична, то траекторию называют периодической.

Существуют множества, которые при итерации сжимаются и сходятся к одной точке. В этом случае точка, которой идёт схождение, есть притягивающая **неподвижная точка** (аттрактор). Но при итерации могут появляться ортиты, исходящие из точки, такая точка есть неустойчивая неподвижная точка. Если точки орбиты сходятся к одному или нескольким пределам, то набор точек накопления орбит называется предельным множеством (набор ω-пределов). Возможны и блуждающие точки - точки, которые удаляются, и никогда не возвращаются и даже не приближаются к точке, в которой они возникли.

Пример. Доказать, что неподвижная точка отображения $f(x)=Cx+D$ есть $a=D/(1-C)$. Имеем: $Cx+D=x$; $Cx-x+D=0$; $(C-1)=-D$, откуда $D/(1-C)=a$.



Неподвижную точки x_0 находят по уравнению $x_0=f(x_0)$. Неподвижной точке отвечает точка пересечения графика функции и биссектрисы (прямой, выходящей из начала координат под углом 45°) на итерационной диаграмме, рис.5.

Рис.5. Неподвижная точка x_0 на итерационной диаграмме.

Неподвижная точка отображения f - точка x_0, удовлетворяющая условию $f(x_0)=x_0$. Неподвижная точка называется притягивающе в том случае, если орбиты всех точек из некоторой её окрестности (возможно, очень малой) сходятся к ней. Неподвижная точка x называется отталкивающей, если орбиты всех достаточно близких к ней точек удаляются от неё.

Простой способ определения, является ли неподвижная точка притягивающей или отталкивающей в рассмотрении величины $|f'(x)|$, в предположении, что она существует. Если x неподвижная точка и $|f'(x)<1|$, то x – притягиваюшая, а если $|f'(x)>1|$, то x – отталкивающая. В случае, когда $|f'(x)=1|$, определённого вывода сделать нельзя: точка x может быть притягивающей, отталкивающей или ни той, ни другой.

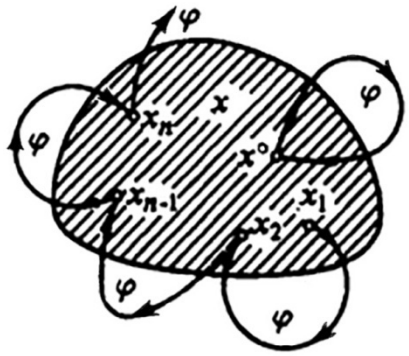


Рис. 6. Схема итерационных последовательностей.

Орбита называется периодической с периодом p, если $x_{n+p}=x_n$ для $n=0,1,2,...$ Если уравнение периодичности $x_{n+p}=x_n$ становится справедливым только после некоторого конечного числа шагов, скажем для $n\geq n_0$, то говорят, что орбита является в конечном итоге периодической.

Многие задачи вычислительной математики можно свести к отысканию неподвижных точек, для чего используют метод последовательных приближений, или метод итераций, суть которого состоит в построении итерационного алгоритма. Если задать первое приближение $x_1\in X$, то можно построить итерационную последовательность (рис.6) $\{x_n\}=\{x_1,\ x_2=f(x_1),...,x_{n+1}=f(x_n),...\}$ элементов $x_n\in X$, $n\in N$. При определённых условиях, зависящих от свойств множества X, отображения f и выбора элемента x_1 в качестве первого приближения, элементы этой последовательности могут сходиться к неподвижной точке.

11.2 Итерации в исследовании динамических систем

В теориях динамических систем существенную роль играют **итерации.** В процессе итерации дискретной динамической системы, время – непрерывная переменная – «квантуется». Интересно, что даже итерация простой квадратичной функции приводит к удивительному разнообразию явлений, таких как конвергенция, удвоение периода, хаос и

др. Дискретные динамические системы возникают не только в математике, но и лежат в основе теории роста и распада биологических популяций, в моделях хищник-жертва, распространение инфекционных заболеваний, и множества других природных явлений. Более того, многие методы численного решения систем алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и т. д. – основаны на итерационном методе.

Итерация – результат повторного применения какой-либо математической операции. Так, если $y=f(x)\equiv f_1(x)$ есть некоторая функция от x, то функции $f_2(x)=f[f_1(x)]$, $f_3(x)=f[f_2(x)]$,...,$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$ называется соответственно второй, третьей,..., n-й итерациями функции $f(x)$. Например, полагая $f(x)=x^a$, получают $f_2(x)=(x^\alpha)^\alpha=x^{\alpha^\alpha}$, $f_2(x)=(x^\alpha)^\alpha=x^{\alpha^\alpha}\ldots f_n(x)=(x^{n-1})^\alpha=x^{\alpha^n}$. Индекс n называется показателем итерации, а переход от функции $f(x)$ к функциям $f_2(x)$, $f_3(x)$,... – итерированием. Для некоторых классов функций можно определить итерации с произвольным действительным и даже комплексным показателем. Итерации используют при решении различного рода уравнений и систем уравнений.

Итеративная система вида $x^{(k+1)}=f(x^{(k)})$ – дискретная динамическая система. Решение представляет собой дискретный набор точек $x^{(k)}$, в которой индекс k=0, 1, 2, 3,..., принимает неотрицательные целочисленные значения (индексы (k) это не порядок производной, а число итераций, это – дискретное время: дней, лет, секунд и т. д.).

Функция $f:R^n\to R^n$ обычно считается непрерывной и достаточно гладкой: имеет всюду по крайней мере одну или две непрерывные частные производные. Если $f(x)=Ax$ - линейная функция, она обязательно задаётся умножением на $n\times n$-матрицу A. В нелинейном случае отображения имеют более сложный вид.

Если начальное условие (начальная итерация) задана в виде

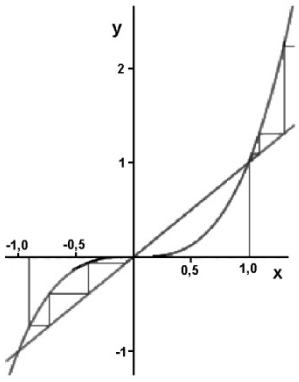
$$x^{(0)}=c, \qquad (7)$$

то решение находится легко: $x^{(1)}=f(x^{(0)})=f(c)$, $x^{(2)}=f(x^{(1)})=f(f(c))$, $x^{(3)}=f(x^{(2)})=f(f(f(c)))$.., и т. д. Пока каждая последующая итерация $x^{(k)}$ находится в области определения f, процесс просто повторяется до получения решения

$$x^{(k)}=f\circ f\circ \ \circ f(c),\ k=0,\ 1,\ 2,.\ ,\ ,\ , \qquad (8)$$

Замечание. Решение дискретной динамической системы получают многократным нажатием клавиши f на калькуляторе. Например, многократное попадание клавиши sin даёт решение системы $x^{(k+1)}=\sin x^{(k)}$. Обычно считают, что функция f определена на всех R^n. В противном случае нужно следить, чтобы последовательные итерации $x^{(k)}$ никогда не покидали область определения f, иначе процесс итераций разрушится.

Важное значение имеет сходимость итераций. Она определяется следующими положениями:



1) Решение с неподвижной точкой или равновесием дискретной динамической системы есть вектор $x_0\in R^n$ такой, что $f(x_0)=x_0$. Каждая **неподвижная точка** обеспечивает постоянное решение, $x^{(k)}\equiv x^*$, дискретной динамической системы, причём сходящееся решение всегда сходятся к неподвижной (фиксированной) точке.

2) Если сходится решение дискретной динамической системы, то $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x_0$; предел x_0 – **неподвижная точка** системы.

Рис. 7. Отображение с тремя неподвижными точками: функция кривая 1 $y=x$; кривая 2 - $y=f(x)=x^3$.

Конечно, не все решения дискретной динамической системы обязательно сходятся, но если сходятся, то сходятся к **неподвижной точке**. Требуется определить сходится ли решение, и если да, то что собой представляет неподвижная точка: не превышает ли она единицы. (В линейном случае важно лишь понять сходится ли вообще система, поскольку большинство систем сходится к

единственной неподвижной точке, а именно x=0.) Неподвижные точки грубо делятся на три класса: асимптотически устойчивые (все ближайшие решения сходятся к нему), стабильные(все близлежащие решения остаются рядом), и нестабильны (почти все близлежащие решения удаляются от неподвижной точки. Поэтому сходимость итератов дискретной динамической системы требует асимптотической устойчивости неподвижной точки.

Функция $f(x)=x^3$ имеет три фиксированные точки, x= -1, 0, 1 (рис. 8). Если $|x_0|>1$, то итерации расходятся до бесконечности, а если $|x_0|<1$, то итерации сходятся к неподвижной точке при x=0.

Информацию об орбитах на реальной можно представить диаграммой рис.#.

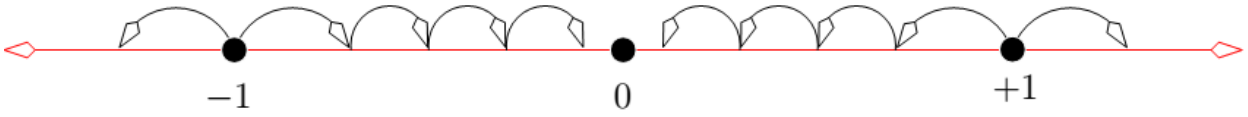


Рис. 8. Фазовый портрет функции $f(x)=x^3$.

Фазовый портрет показывает, как точки на реальной линии перемещаются в новые точки на действительной линии при применении функции $f(x)$. Хотя эта диаграмма не дает больше информации, чем диаграмма паутины, мы можем использовать фазовые портреты для систем с более высокой размерностью, где мы не можем применять диаграммы паутины.

Пример. Отображение $f(x)=x^2-3x+3$ имеет **неподвижные точки** x=1 и x=3, поскольку $f(1)=1$ и $f(3)=3$. Неподвижные точки есть не у всякого отображения, например, отображение $f(x)=x+1$ вещественной прямой в себя неподвижных точек не имеет.

Неподвижная точка $x=f(x)$ отображения f – **притягивающая**, если итерации любой начальной точки y, достаточно близкой к x, будут стремиться к x:

$$f\left(\underbrace{f(\ldots f(y)\ldots)}_{n\ раз}\right)\to x,\quad n\to\infty \qquad (9)$$

Важно, чтобы итерации y не покидали некоторой большей окрестности точки x — т. е., чтобы точка x была асимптотически устойчива.

Если производная $|f'(x)|<1$, то неподвижная точка является притягивающей.

Одним из применений идеи притягивающей неподвижной точки является метод Ньютона, в котором искомое решение оказывается притягивающей неподвижной точкой построенного отображения, и потому может быть найдено как предел (очень быстро сходящейся) последовательности итераций.

Пример. Квадратный корень из числа $a>0$ можно представить как последовательность итераций отображения $f(x)=\dfrac{x+\dfrac{a}{x}}{2}$

В теории динамических систем используются итерируемые функции.

Итерированная функция – это функция $X\to X$ (т.е. функция от некоторого множества X на себя самого), получаемая путем сопоставления другой функции $f:X\to X$ с собой определенное количество раз. Процесс многократного применения одной и той же функции называется итерацией. В этом процессе, начиная с некоторого начального числа, результат применения данной функции снова вводится в функцию как вход, и этот процесс повторяется.

Системы итерированных функций (СИФ, *IFS*) – конечное множество сжимающих отображений в полном метрическом пространстве. Они применяются для построения фракталов, поскольку результат их применения всегда самоподобен. Впрочем, аттрактор, возникший при применении системы итерированных функций, не всегда является фракталом, им может быть или квадрат или иное замкнутое ограниченное множество.

Для построения СИФ рассматривают совокупность **сжимающих отображений**, каждое со своим коэффициентом сжатия $s<1$.

Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях один из простейших и в то же время наиболее важных – так называемый **принцип сжимающих отображений**.

Пусть (X, ρ)–метрическое пространство и $A: X \to X$ – отображение метрического пространства X в себя. Тогда отображение A называется сжимающим отображением, если существует такое число $0 < \alpha < 1$, что для любых x, $y \in X$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$. В этом случае отображение A также называется сжатием. Элемент $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения A, если $Ax = x$, т.е. неподвижные точки – это решения уравнения $Ax = x$.

Пусть $\{f_1, \dots, f_n\}$ – конечный набор сжимающих отображений в (X, ρ) с коэффициентами сжатия $s_1, \dots, s_n$. СИФ состоит из полного метрического пространства (X, ρ) и конечного множества сжимающих отображений $f_n: X \to X$ с коэффициентами сжатия s_n. Коэффициент сжатия СИФ определяется как $s = max\{s_1, \dots, s_n\}$.

Основной задачей теории систем итерированных функций является ответ на вопрос, когда заданная система итерированных функций порождает предельное множество E:

$$E = \lim_{n\to\infty} T^n(E_0) = \lim E_n \qquad (10)$$

где последовательность $\{E_n\}$ порождается итерационной схемой (E_0 – произвольное множество):

$$E_0$$
$$E_1 = T(E_0)$$
$$\vdots$$
$$E_n = T(E_{n-1})$$
$$\vdots$$

где T – сжимающее отображение.

Если предел существует, то его называют аттрактором системы итерированных функций. При этом аттрактор часто (но не всегда) оказывается фрактальным множеством.

Теорема. Пусть $\{(X, \rho); \{T_m\}_{m\in 1..M}\}$ ***– система итерированных сжимающих отображений. Для произвольного компактного начального множества*** $E_0 \in H(X)$***, последовательность*** $\{E_n\} = \{T^n(E_0)\}$ ***сходится в метрике Хаусдорфа к единственному множеству E. Множество E называется аттрактором системы итерированных функций. Обратно, множество*** E ***можно представит в виде:*** $E = lim_{n\to\infty} T^n(E_0)$.

Сжимающее отображение – отображение метрического пространства в себя, уменьшающее расстояние между любыми двумя точками. Согласно теореме Банаха, у сжимающего отображения полного метрического пространства *M* в себя существует неподвижная точка, причём ровно одна. Это утверждение, также называется «принципом сжимающих отображений».

Теорема Банаха о неподвижной точке ***(принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве X, имеет одну и только одну неподвижную точку. Пусть*** $A: X \to X$ ***– такое непрерывное отображение в полном метрическом пространстве X, что некоторая его степень*** $B = A^n$ ***является сжатием. Тогда отображение A имеет одну и только одну неподвижную точку.***

Теорема Банаха о неподвижной точке – утверждение в метрической геометрии, гарантирующее наличие и единственность неподвижной точки у определённого класса отображений метрических пространств; содержит метод нахождения этой точки. Теорема Банаха используется в теории дифференциальных уравнений для доказательства существования и единственности решения некоторых классов краевых задач, некоторых

видов нелинейных интегральных уравнений, а также в численных методах и в теории фракталов.

Отображение A метрического пространства M в себя называется сжимающим отображением (сжатием), если существует такое число $\alpha<1$, что для любых точек $x,y\in M$ выполняется неравенство $\rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho$.

Точка x называется неподвижной точкой отображения A, если $A(x)=x$: неподвижные точки – решения уравнения $Ax=x$.

Неподвижная точка *f* – любой элемент *x*∈*X*, для которого *f*(*x*)=*x*. Она остаётся на месте при отображении *f*. Неподвижные точки *f* - это точки пересечения графика *f* с диагональю в *X*x*X*.

Принцип сжимающего отображения лежит в основе метода простой итерации – одного из простейших численных методов решения уравнений. Принцип сжимающего отображения применительно к численным методам называется методом последовательных приближений.

Идея метода простой итерации состоит в том, чтобы уравнение $f(x)=0$ привести к эквивалентному уравнению $x=\varphi(x)$, так, чтобы отображение было сжимающим. Если это удаётся, то последовательность итераций $x_{i+1}=\varphi(x_i)$ сходится. Такое преобразование можно делать разными способами. В частности, сохраняет корни уравнение вида $x=x-\lambda(x)f(x)$, если $\lambda(x)\neq0$ на исследуемом отрезке. Оптимальным выбором является $\lambda(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$, что приводит к методу Ньютона, который является быстрым, но требует вычисления производной. Если в качестве $\lambda(x)$выбрать константу того же знака, что и производная в окрестности корня, то мы получаем простейший метод итерации.

Займёмся проблемой нахождения неподвижных точек **скалярных функций**.

Скалярные функции – детерминированные функции, возвращающие одно значение. Они могут принимать множество параметров, выполнять вычисления, но в результате выдают одно значение.

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x^{(k+1)}=d(x^{(k)}),\ x^{(0)}=c, \qquad (11)$$

в которой $f:R\to R$ – непрерывная скалярнозначная функция.

Аффинная функция

$$f(x)=ax+b, \qquad (12)$$

приводит к аффинной дискретной динамической системе

$$x^{(k+1)}=ax^{(k)}+b. \qquad (13)$$

Единственной неподвижной точкой является решение $x_0=f(x_0)=ax_0+b$:

$$x_0=\frac{b}{1-a} \qquad (14)$$

где $a\neq1$.

Аффинные функции – функции, графики которых – прямые линии на плоскости (неправильно называются линейными). Каждая аффинная функция полностью определяется своим "наклоном" и значением в одной-единственной точке. Функции, которые переводят ноль в ноль, называются линейными (совершенно правильно) и имеют форму "умножений на разные константы".

Можно показать, что $x^{(k)}\to x_0$, тогда и только тогда, когда $|a|<1$. Это критерий асимптотической устойчивости неподвижной точки, т.е. сходимость аффинной итеративной системы (13). Величина $|a|<1$ определяет скорость сходимости, и чем ближе a к 0, тем быстрее итерации приближаются к неподвижной точке.

Пример. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{4}x+2$, применим итерационную схему $x^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}x^{(k)}+2.$

Начиная с начального условия u(0)=0, следующие значения:

k	1	2	3	4	5	6	7	8

$x^{(k)}$	2,0	2,5	2,625	2,6562	2,6641	2,6660	2,6665	2,6666

После 8 итераций, итерации сходятся к неподвижной точке x_0=8/3 с точностью до 4 знаков после запятой. Скорость сходимости равна 1/4:

$$\left|x^{(k)}-x_0\right|=\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(x^{(0)}-x_0\right)=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Поясним поведение системы в случае, когда значения переменной близки к предельному значению x_0 (x_0=f(x_0)). Положим $x_{n+1}=x_0+\tilde{x}_{n+1}$ и $x_n=x_0+\tilde{x}_n$, где знаком "~" отмечены малые добавки к x_0. Тогда из x_{n+1}=f(x_n) имеем

$$x_0+\tilde{x}_{n+1}=f\left(x_0+\tilde{x}_n\right)\approx f(x_0)+f'(x_0)+f'(x_0)\tilde{x}\Rightarrow\tilde{x}_{n+1}=f'(x_0)\tilde{x}_n \qquad (15)$$

Если имеется некоторая маленькая добавка к значению x_0, то после первой итерации она умножается на постоянное число C=f'(x_0), после второй – на C^2, после третьей – на C^3 и т.д. Это означает, что переменная x приближается к неподвижной очке по закону геометрической прогрессии с показателем C, т.е. в окрестности x_0 f(x) аппроксимируется касательной (рис. 14).

Из свойств геометрической прогрессии очевидно, что если |f'(x_0)|<1, то итерации сходятся, а если |f'(x_0)|>1, то итерации расходятся. Это позволяет судить об устойчивости неподвижной точки. В первом случае неподвижную точку называют устойчивой, а во втором – неустойчивой. В силу большой важности величины f'(x_0), она носит специальное название – **мультипликатор**, и обозначается

$$\rho=f'(x_0). \qquad (16)$$

Поведение траекторий в окрестности предельного цикла связано со значениями его мультипликаторов. Если абсолютные величины всех **мультипликаторов** меньше 1, то все траектории неограниченно приближаются к нему и он устойчив. Устойчивый предельный цикл является математическим образом периодических автоколебаний.

Поведение траекторий в окрестности предельного цикла связано со значениями его мультипликаторов. Если абсолютные величины всех **мультипликаторов** меньше 1, то все траектории неограниченно приближаются к нему и он устойчив. Устойчивый предельный цикл является математическим образом периодических автоколебаний.

Если все мультипликаторы по модулю больше 1, то предельному циклу неустойчив (устойчив при обращении направления движения по траектории). Переход через единичное значение абсолютных величин одного или нескольких мультипликаторов при изменении параметров динамической системы свидетельствует о бифуркации смены устойчивости или исчезновения предельных циклов.

Пример. Рассмотрим отображение прямой в себя

$f_0(x)=-x\pm x^3$

Мультипликатор неподвижной точки 0 равен -1.

На каждом шаге дискретного времени возмущение умножается на величину, равную мультипликатору.

Неподвижная точка устойчива (возмущение убывает), если |ρ|<1 (т.е. -1<ρ<1) и неустойчива (возмущение нарастает), если |ρ|>1. Скорость сходимости определяется мультипликатором ρ=f'(x_0). Если ρ=0, то сходимость будет самой быстрой. Такие неподвижные точки называют **сверхустойчивыми.**

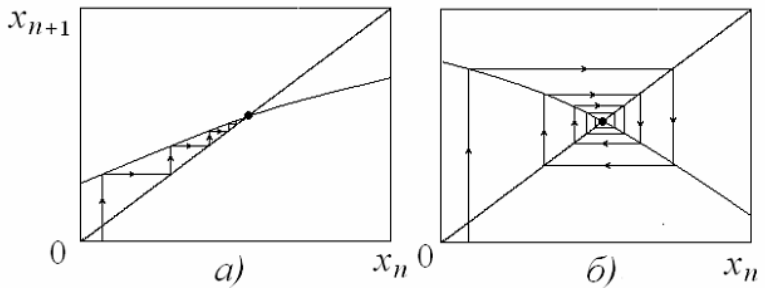


Рис. 9. Два типа неподвижных точек, отличающихся знаком мультипликатора.

По характеру приближения траектории к неподвижной точке на итерационной диаграмме можно дополнительно выделить два типа неподвижных точек. Первый тип отвечает положительным значениям мультипликатора. В этом случае изображающая точка приближается к неподвижной точке таким образом, что все время находится от нее с одной и той же стороны, рис. 9а. Если же мультипликатор отрицателен, то изображающая точка приближается к неподвижной точке, перемещаясь на итерационной диаграмме так, что попеременно оказывается то справа, то слева от нее, рис. 9б. Используя терминологию теории систем с непрерывным временем можно назвать первую точку точкой типа «узел», а вторую – точкой типа «фокус».

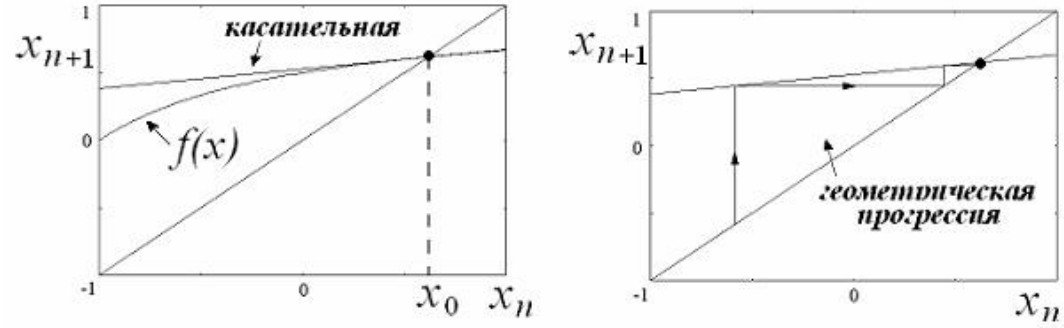


Рис. 10. а) Аппроксимация отображения f(x) касательной, б) сходимость к неподвижной точке.

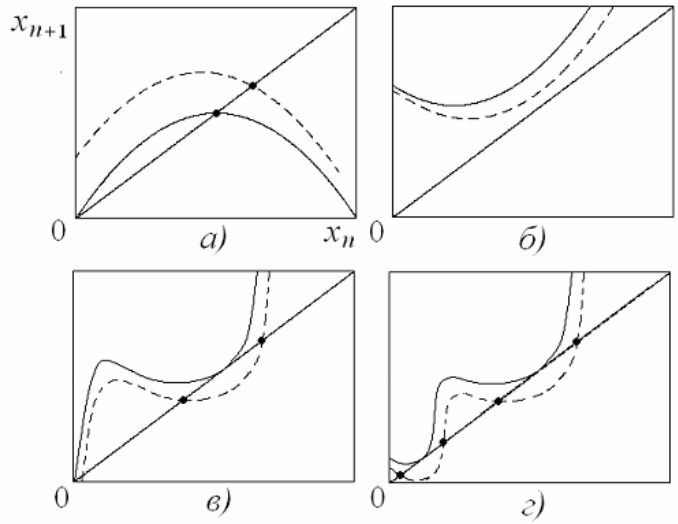


Рис. 11. а), б) Случаи общего положения, в) вырожденная (бифуркационная) ситуация, г) двукратно вырожденная ситуация. Пунктир – положение функции при небольшом изменении параметра.

Если слегка изменить параметр, характеризующий отображение, то обычно неподвижная точка сохраняется и сохраняет свой характер устойчивости (рис. 11а). (Отметим, что неподвижной точки может не быть вообще (рис.11б)). Однако возможны *вырожденные*) ситуации), когда это не так. В этих случаях, даже если слегка «пошевелить» параметр, то динамика изменится существенным образом (рис.11в). Такая ситуация и соответствует *бифуркации*. Поэтому говорят, что обычный случай является *грубым*, а бифуркационная ситуация – *негрубой.* Степень вырождения может быть разной. Например, для ситуации на рис.11г «произвольное» шевеление параметров разрушит обе ситуации касания. Однако, можно некоторым специальным образом регулировать параметры так, что одно из касаний сохранится, а второе – разрушится.

Отображение f в нелинейной системе (в отличие от линейной) не предполагается сжимающим, теорема о неподвижной точке неприменима и уже нельзя сделать вывод о сходимости последовательности $f^{(n)}$.

Вблизи данной точки любая (гладкая) нелинейная функция может быть аппроксимирована её касательной линией, которая является аффинной (линейной) функцией. Вблизи неподвижной точки x_0 поведение нелинейной системы ведёт себя как её аффинная аппроксимация. Это пример анализа нелинейной системы основанный на её линейном (точнее, аффинном) приближении.

11.3 Графические методы нахождения неподвижных точек и исследования их свойств

Графические методы исследования отображений основаны на построении диаграмм.

Диаграмма – графическое представление данных линейными отрезками или геометрическими фигурами, позволяющее быстро оценить соотношение нескольких величин. Представляет собой геометрическое символьное изображение информации с применением различных приёмов техники визуализации.

Диаграмма Верхулста (паутина) – визуальный инструмент, применяемый в исследованиях качественного поведения одномерных итерированных функций (например, логистического отображения). Используется для изучения долгосрочного влияния начального условия при длительных итерациях.

Построение диаграмм в теории нелинейной динамики используют процесс рекурсии.

Рекурсия - процесс, с помощью которого предыдущий результат используется как вход для следующего результата. При рекурсии компьютерная подпрограмма вызывает сама себя.

Рекурсия – способ организации вычислений, при котором процедура или функция в ходе выполнения обращается сама к себе; это определение через себя, сведение общего случая к аналогичным частным случаям.

Пример. Рекурсивное определение понятия факториала $N!$ ($N \geq 0$)

$$N! = \begin{cases} 1, & при \quad N = 0 \\ N \cdot (N-1)!, & при \quad N > 0 \end{cases}$$

Здесь факториал $N!$ выражается через факториал $(N-1)!$, т.е. через себя, поэтому данное определение $N!$ является рекурсивным.

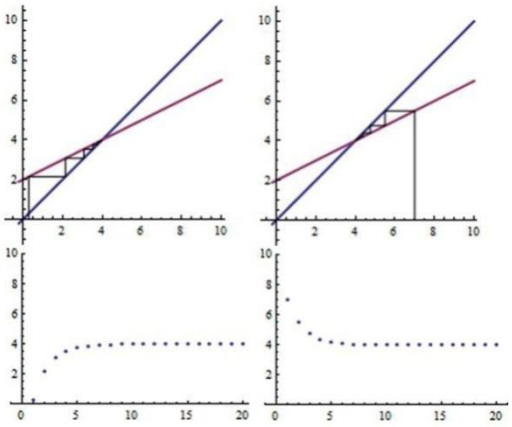
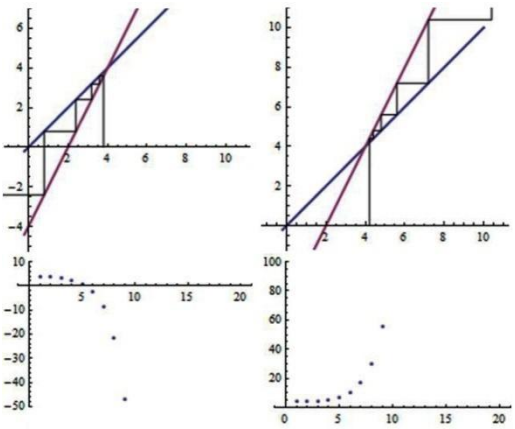


Рис. 12. Две диаграммы для последовательности a_n=frac12a_{n-1}+2.

При создании паутинной диаграммы для рекурсивной формулы $a_n=f(a_{n-1})$, действуйте следующим образом.

1. Графа (в той же прямоугольной системе координат) уравнения $y=f(x)$ и $y=x$.
2. Начинают с точки $(a_1,0)$.
3. Проводят линию вертикально до встречи с исследуемой кривой $y=f(x)$.
4. Проводят линию горизонтально до встречи с исследуемой кривой $y=x$.
5. Возвращаются к шагу 3.

Рассмотрим диаграммы паутины для некоторых простых случаев и их результирующие графы. На рис. 12 представлены две диаграммы для последовательности a_n=frac12a_{n-1}+2. На обеих этих диаграммах наклон рекурсивной функции меньше единицы, и итерации паутины приближаются к пересечению функции с линией $y=x$ Эта последовательность сходится к значению 4, решению уравнения $x=f(x)$. Уравнение $x=f(x)$ называется уравнением с фиксированной точкой, а его решение является **фиксированной точкой** рекурсивного уравнения. Если первый член последовательности был решением уравнения с фиксированной точкой, то последовательность была бы постоянной.



Диаграммы паутины трёх связанных уравнений (рис. 14) демонстрирует, что в первом

циклическое поведение возможно, а второй и третий графики показывают, что небольшие изменения в уравнении могут привести к тому, что итерации либо приближаются, либо расходятся с неподвижной точкой.

Рис. 13. Две диаграммы для последовательности $a_n=2a_{n-1}-4$.

Возможное поведение последовательности может быть весьма непредсказуемым. Хотя значения последовательности, изображенной ниже, полностью определяются рекурсивной формулой и явно ограничены, но они не сходятся к неподвижной точке и не являются циклическими. Фактически, за исключением того, что все значения находятся между нулем и единицей, долгосрочное поведение этой системы кажется довольно хаотичным.

На диаграммах рис. 13 наклон рекурсивной функции больше единицы, и итерации паутины расходятся от пересечения функции с линией $y=x$. Значения этой последовательности неограниченны.

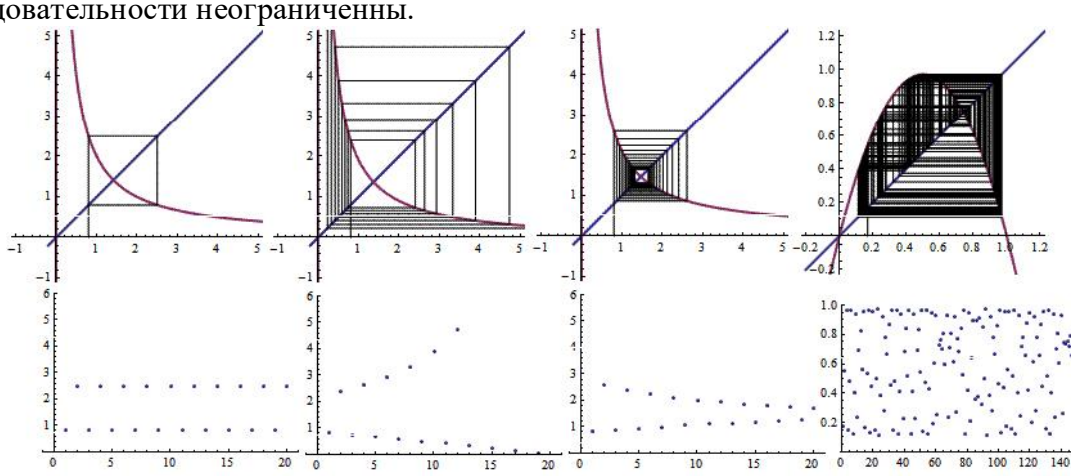


Рис. 14. Диаграммы паутины трёх связанных уравнений.

Арифметические последовательности могут показывать только один тип конечного поведения, неограниченность (если общая разница не равна нулю). Геометрические последовательности могут быть либо неограниченными, либо сходятся к неподвижной точке. Ни арифметические, ни геометрические последовательности не проявят циклического или хаотического поведения. Классическим примером последовательности, которая показывает все эти конечные поведения, является логистическая последовательность.

Если $f(x)=x$ для некоторого x из X (т. е. период орбиты x равен 1), то x – неподвижная точка **итерированной** последовательности. Множество неподвижных точек часто обозначается как $\boldsymbol{F_i x}(f)$. Существует ряд теорем о неподвижной точке которые гарантируют существование неподвижных точек в различных ситуациях, например, теорема Банаха о неподвижной точке и теорема Брауэра о неподвижной точке.

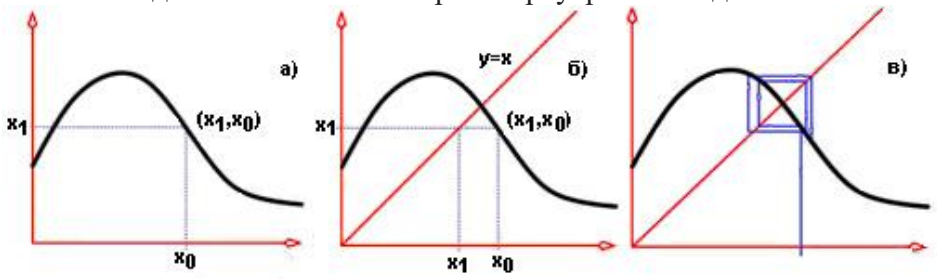


Рис. 15. Графическое нахождение особых точек.

Особенно удобным способом графического представления орбиты вещественнозначной функции f является паутинная диаграмма.

Для данной итерированной функции $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ график состоит из диагональной ($x=y$) линии и кривой, представляющей $y=f(x)$. Изучение поведения x_0 ведут этапами.

1. Находят точку на функциональной кривой с x-координатой x_0: точка (x_0.
2. Проводят горизонтальную прямую от этой точки до диагональной линии.
3. Строят вертикальную линию от точки на диагонали до функциональной кривой.

При необходимости повторяют шаг 2.

На участке паутины устойчивая неподвижная точка соответствует внутренней спирали, а неустойчивая неподвижная точка – внешней спирали. Эти спирали будут стремиться к точке, где диагональ $y=x$ пересекает график функции. Орбита периода 2 представлена прямоугольником, в то время как более длительные циклы производят более сложные замкнутые контуры. На хаотичной орбите будет отображаться «заполненная» область, указывающая на бесконечное количество неповторяющихся значений.

Диаграммы паутины позволяют итерировать функцию полностью графическими средствами и без прибегания к аналитическим или численным методам. Рассмотрим приведенную ниже функцию $f(x)$. Начиная с точки x_0, мы можем найти следующая итерация функции $x_1=f(x_0)$, просто рисуя вертикальную линию на график функции; x_1 можно пометить на вертикальной оси, вычерчивая горизонтальную линию из точки пересечения.

Чтобы найти $x_2=f(x_1)$, нужно переместить точку x_1, отмеченную на вертикальной оси (рис.15, на ту же точку на горизонтальной оси. Это осуществляют путём нахождения пересечения горизонтальной линии с линией $y=x$. Так как горизонтальная линия имеет уравнение $y=x_1$, это пересечение произойдёт в точке (x_0, x_1) (рис. 15а) Затем проведя вертикальную линию вниз к горизонтальной оси отмечают точку x_1. Имея точку x_1 на горизонтальной оси, можно найти точку $x_2=f(x_1)$ проведя вертикальную линию до графика функции (рис. 15б). Этот процесс можно повторить для создания «паутинной диаграммы», которая показывает позиции последующих итераций функции (рис. 15в) В этом примере мы видим, что итераты фиксируются в 2-цикле (который отмечен синим).

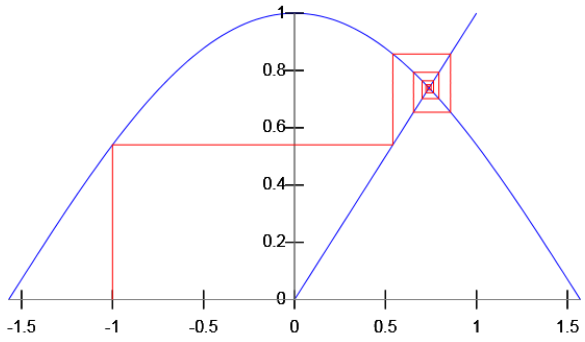
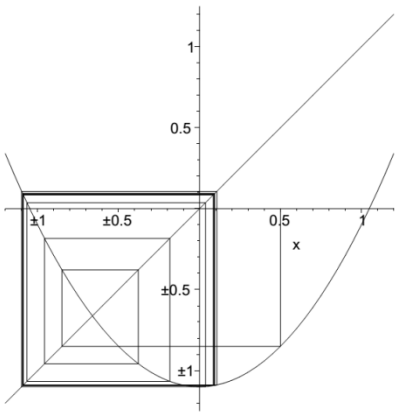


Рис. 16. Шаги метода простой итерации $x_{n+1}=\cos x_n$ с начальным значением $x_1=-1$, итераты сходятся к неподвижной точке $x\approx 0{,}739$.

На паутинных диаграммах хорошо видна динамика орбит, особенно если на отрезках показаны стрелки, обозначающие направления движения.

Пример 1. Функция $f(x)=x^2$ (рис. 17). Если начальная точка $x_0=0$ или $x_0=1$, т.е. x_0 принимает значения неподвижных точек f, то орбиты постоянны. Если $x_0>1$, то орбита стремится к $+\infty$. Если $0<x_0<1$ или $-1<x_0<0$, то орбита сходится к неподвижной точке 0. Если $x_0=1$, то орбита принимает вид: [-1 1 1 1...], т.е. орбита является в конечном итоге периодической. Если $x_0<0$, то $x_n\to\infty$. В этом случае говорят, что орбита расходится. В данном примере неподвижная точка 0 является притягивающей, а неподвижная точка – отталкивающей.



Пример 2. Функция $f^{(x)}=x^2-1$ (рис. 18). Две неподвижные точки равны $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Обе они отталкивающие, т.к. $|f'(x)|=2|x|>1$ в обоих случаях. Любая неподвижная точка $f^{(2)}(x)=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$ есть точка периода 2 функции $f(x)$. В этом случае орбиты принимают вид: [x_0 x_1 x_0 x_1 x_0]. Неподвижные точки $f^{(2)}(x)$ суть корни полинома x^4-2x^2-x и равны 0, -1 и $(1\pm\sqrt{5})/2$. Две последних являются к тому

же неподвижными точками $f(x)$, поэтому они обладают периодическими орбитами наименьшего периода 1. Орбиты двух новых точек, 0 и 1: [0 -1 0 -1 0...] и -1 0 -1 0 -1 ...], имеют наименьший период 2.

Рис. 17. Паутина диаграммы итераций x_0=0,5 при x_2 $\pm$1,1: итераты сходятся к двум циклам в $\{p_+, p_-\} \approx \{0{,}0916, -1{,}0916\}$.

Функции x^2 и x^2-1 – частные случаи отображения x^2+c которое часто встречается в теории нелинейной динамики. Хотя $f(x)=x^2+c$ – всего-навсего квадратичная функция, она применяется во всех областях теории, например, во множествах Мандельброта и Жюлиа, которые получаются в результате рассмотрения того же квадратичного полинома, но только с использованием комплексных чисел, вместо действительных.

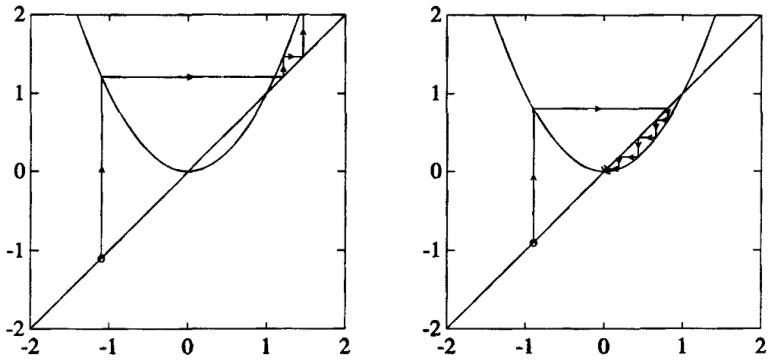


Рис. 18. Функция $f(x)=x^2$: а - x_0=1,1: б - x_0=-0,9

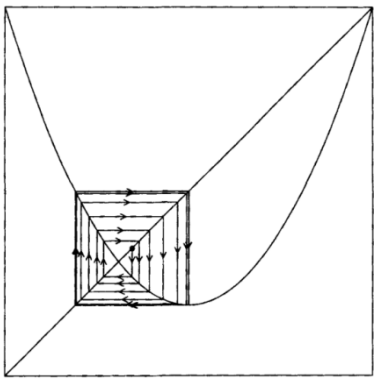


Рис. 19. Функция $f(x)=x^2$-1; x_0=-0,5.

Пусть x - действительное число. Для любого значения c неподвижные точки, которые суть решения уравнения $x^2+c=x$, имеют вид: $\xi = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$, $\eta = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$. Неподвижные точки будут действительными числами только, если $1-4c \geq 0$. Алгебраически несложно показать, что если $c \leq 1/4$, то $-\xi < \eta < \xi$. Кроме того, $f(-\xi)=\xi$. Орбиты для $x_0 > \xi$ и $x_0 < -\xi$ не представляют интереса, т.к. для этих случаев все они стремятся к $+\infty$. Далее будем полагать, что $c \leq 1/4$ и $-\xi < x_0 < \xi$. Для $f(x_0) < +\xi$, если $-2 \leq c$, то $-\xi \leq f(x_0)$. Три возможных случая, соответствующих – $2 < c \leq 1/4$, c=-2 и c<-2, приведены на рис.5.

Пусть I – замкнутый интервал $[-\xi,\xi]$. В случае $-2 \leq c \leq 1/4$, если $x_0 \in I$, то $f(x_0) \in I$ и вся орбита целиком находится в I. Если c<-2 и $x_0 \in I$, то возможны два случая: либо орбита остаётся в I или же в конечном счёте некоторое значение x_0 становится меньше $-\xi$ и тогда орбиты устремляются к $+\infty$.

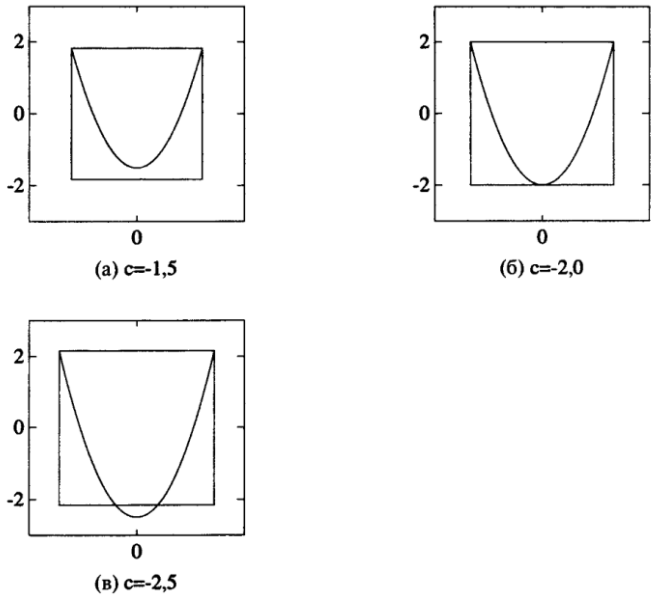


Рис. 20: а –2<c≤1/4, б – c=-2, в – c<2.

Когда -3/4<*c*<1/4, неподвижная точка η является притягивающей, т.к. $|f'(\eta)| = |1-\sqrt{1-4c}| < 1$ и все орбиты (начинающиеся в *I*) сходятся к η. По мере того как *c* убывает и становится меньше -3/4, величина |*f*'(η)| возрастает и становится больше 1, т.е. η становится отталкивающей. В то же время функция $f^{(2)}$ доставляет пару притягивающих неподвижных точек, которые приводят к появлению цикла с периодом 2 для *f* (рис. 21 и 22). Этот феномен наблюдался в примере 2. Говорят, что система претерпевает бифуркацию удвоения периода, когда *c* переходит через значение -3/4.

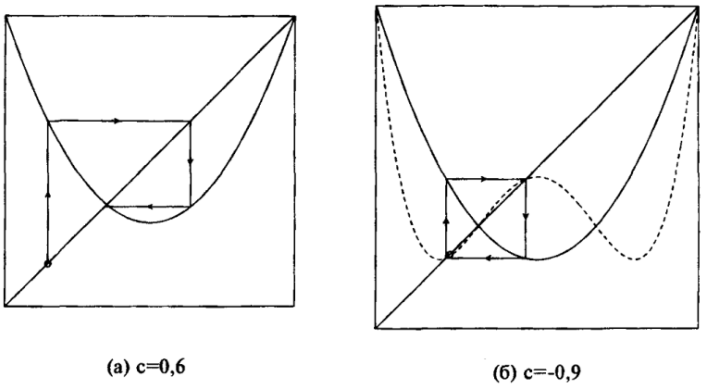


Рис. 21. Бифуркация удвоения периода.

Другая бифуркация удвоения периода возникает при *c*=-5/4. Когда *c* становится меньше этого значения, орбиты начинают притягиваться циклом с периодом 4. По мере того как *c* убывает, мы последовательно встречаем притягивающие периодические орбиты длины 8, 16 и так далее. С помощью удвоения периода система погружается в хаос.

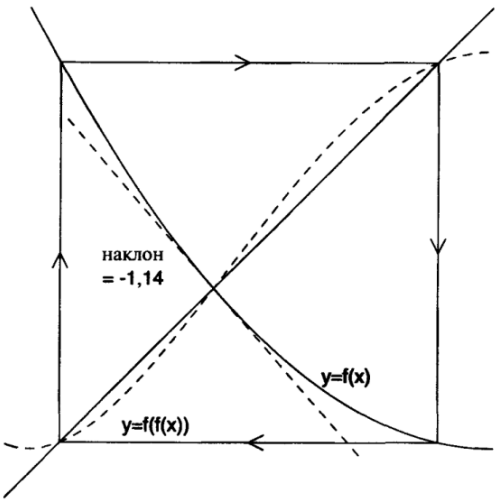
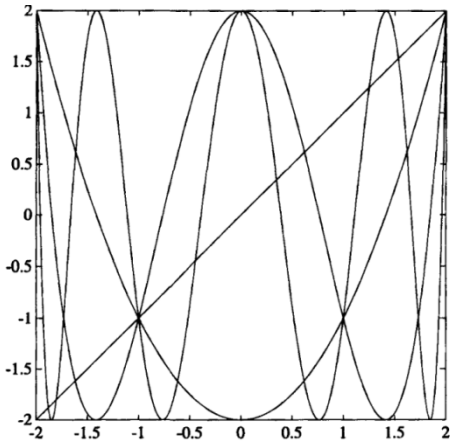


Рис. 22. Увеличенное изображение графика $f(x)=x^2-0,9$.

Частный случай *c*=-2 заслуживает особенного внимания. При этом ξ=2, а *I*=[-2, 2]. Как следует из рис. 21б, график *y*=*f*(*x*) для x∈*I* в точности заполняет квадрат *I*x*I*, в том смысле, что не существует меньшего квадрата со сторонами, параллельными осям координат, который был бы полностью содержал данный график. То же самое верно для $y=f^{(2)}(x)$, $y=f^{(3)}(x)$,... Прямая ***y***=*x* пересекает график *y*=*f*(*n*) точно 2^n раз в квадрате *I*x*I*. Каждое пересечение есть не что иное, как неподвижная точка функции $f^{(n)}$ и, следовательно, периодическая точка с



периодом n (не обязательно наименьшим). Для c=-2 существуют периодические орбиты функции f с периодами длины 2, 3, 4,...

Рис. 23. Графики f, $f^{(2)}$ и $f^{(3)}$ при c=-2.

Графически особые точки находят с помощью построения Ламерея (лестница Ламереля, рис. 24). С этой целью на графике исследуемой зависимости строят прямую, выходящую из начала координат под углом 45°. Неподвижные точки - точки пересечения исследуемой кривой с прямой линией. Далее из некоторой начальной точки x_0 строят вертикальную линии до пресечения с кривой и точку пересечения горизонтальной линией проецируют на прямую (метод линеаризации, функциональный масштаб, метод особых точек), из точки на прямой вновь проводят вертикаль до пересечения с прямой и т.д. Непрерывная кривая превращается в набор дискретных точек на прямой (кривая линеаризуется). Аналогично можно поступить с плоскостью или объёмом. Устойчивость неподвижной точки определятся по углу наклона касательной к кривой в точке её пересечения с прямой (рис. 25).

Неподвижные точки могут быть устойчивыми или неустойчивыми, аттракторами, репеллерами или нейтральными. Так, на рис. 25 точка x^* (неподвижная, если $x^*=f(x^*)$) неустойчивая, точки x^{**} и x^{***} – устойчивые (***Точка x**** – неустойчива, если $|f'(x^*)|>1$. ***Точки x**, x****** – устойчивы, если $|f'(x^{**}, x^{***})|<1$).

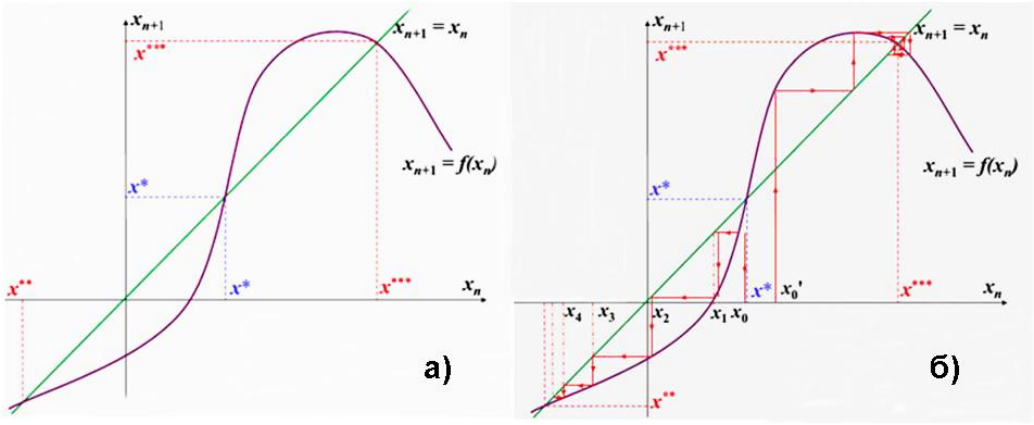


Рис. 24. Особые точки отображений: а - построение прямой $x_{n+1}=x_n$ и нахождение особых точек; б - построение Ламерея («лестница Ламерея»).

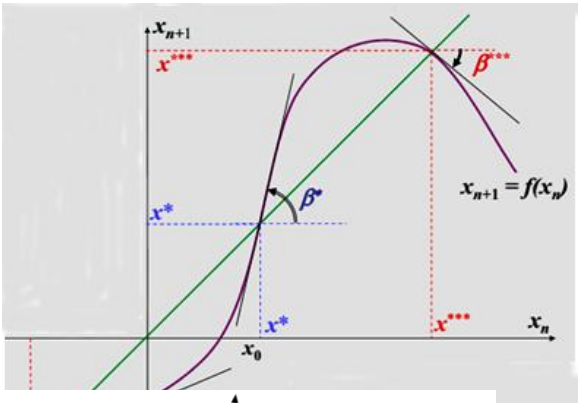


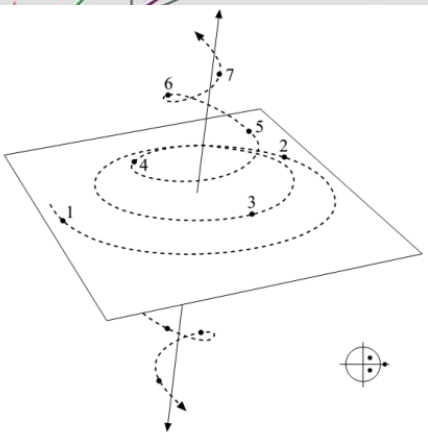
Рис. 25. Графическая оценка устойчивости точек: углы β^{**}, $\beta^{***}<45^o$, угол $\beta>45^o$.

В линейной системе с дискретным временем

$$x_{n+1}=Bx_n \qquad (17)$$

равновесное решение x=0 является единственным равновесием.

Существует важное различие между решениями систем непрерывного времени и решениями систем дискретного времени относительно состояния инвариантных линий, определяемых собственными векторами. Реальные собственные векторы, связанные с вещественными собственными значениями для систем разностных



уравнений, по-прежнему являются инвариантными множествами, т. е. последовательности множеств, начинающихся на этих множествах, остаются на множествах. Однако в отличие от непрерывного времени инвариантные непрерывные прямые не являются фазовыми траекториями решений. Стабильные, неустойчивые и центральные собственные области определяются способом, аналогичным используемому для систем непрерывного времени, с очевидной разницей в том, что дискриминирующим фактором для систем с дискретным временем является то, являются ли модули соответствующих собственных значений соответственно меньшими, большими или равными единице.

Рис. 26. Система с дискретным временем в трёхмерном пространстве.

Дискретная автономная система на плоскости

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (18)$$

11.4 Многопараметрические отображения

До сих пор мы рассматривали отображения, характеризуемые одним управляющим параметром. В реальности, однако, часто встречаются ситуации, в которых система характеризуется не одним, а несколькими параметрами. Если система включает два параметра, то для её описания в простом варианте используются следующие отображения:

$x_{n+1}= 1-\lambda_1 x_n^2$, (19а)

$x_{n+2}=1-\lambda_2 x_{n+1}^2$. (19б)

Эта задача приводится к одномерному «квартичному» отображению:

$x_{n+1}=1-ax_n^2-bx_n^4$. (20)

Здесь начинается переход от отображения с единственным квадратичным экстремумом к отображению с двумя экстремумами. Простейшей функцией является кубическая парабола, для которой

$x_{n+1}=a-bx_n+x_n^3$ (21а)

$x_{n+1}=a-bx_n-x_n^3$ (21б)

Это кубические отображения.

Функция, задающая кубическое отображение, может иметь два экстремума. Вследствие этого резко возрастает (по сравнению с квадратичным) количество возможных типов циклов. Как уже упоминалось, если цикл опирается на экстремум отображения, то его мультипликатор равен нулю и цикл является сверхустойчивым. Опирающийся на два экстремума цикл характеризуется двойной сверхустойчивостью: слегка «пошевелив» параметры, мы сможем наблюдать сверхустойчивые циклы, опирающиеся только на максимум либо только на минимум. Таким образом, от точки, соответствующей циклу двойной сверхустойчивости, на плоскости параметров должны отходить две линии, соответствующие «простым» сверхустойчивым циклам. Двигаясь вдоль них, можно вновь добиться ситуации, когда цикл (уже более высокого периода, после пересечения с линией бифукации удвоения периода) опирается на оба экстремума.

В общем виде двумерное отображение задаётся соотношениями

$x_{n+1}=f(x_n,y_n)$, (22а)

$y_{n+1}=g(x_n,y_n)$. (22б)

Здесь $f(x_n,y_n)$, $y_{n+1}=g(x_n,y_n)$ - некоторые (обычно гладкие) функции.

Динамика двумерных отображений происходит на *фазовой плоскости* двух переменных (x,y). За счёт появления второго измерения она может быть более разнообразной, чем в случае одномерных отображений. В частности, наряду с неподвижными точками, циклами и хаосом, возможны *квазипериодические режимы*.

Неподвижной точкой двумерного отображения называют такую точку, которая переходит сама в себя при его однократной итерации. Соответственно, она является решением следующей системы уравнений:

$x_0=f(x_0,y_0)$; $y_0=g(x_0,y_0)$. (29)

Мультипликаторы неподвижной точки двумерного отображения могут быть либо действительными, либо косвенными. Это новый момент, связанный с существованием двух измерений. Неподвижной точки двумерного отображения: она устойчива, если оба мультипликатора лежат в диапазоне от -1 до +1, и неустойчива вне этого диапазона. Нетрудно также понять, как будет выглядеть динамика вблизи неподвижной точки. В ходе итераций в ее окрестности изображающая точка будет совершать «прыжки» по плоскости, характер которых зависит от величины и знака мультипликатора. Анализ устойчивости неподвижных точек двумерных отображений легко переносится на циклы. Для отображения в общем виде элементы 2-цикла определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1, y_1); \quad x_1 = f(x_2, y_2); \\ y_2 &= g(x_1, y_1) \quad y_1 = g(x_2, y_2) \end{aligned} \quad \text{и} \quad (30)$$

В общем виде трехмерное отображение задается:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n, z_n); \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n, z_n); \\ z_{n+1} &= v(x_n, y_n, z_n). \end{aligned} \quad (31)$$

Оно может иметь неподвижную точку (x_0,y_0,z_0), одна итерация которой приводит в ту же точку, т.е.

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0, z_0); \\ y_0 &= g(x_0, y_0, z_0); \\ z_{n+1} &= v(x_n, y_n, z_n). \end{aligned} \quad (32)$$

Возможны модели с большим числом управляющих параметров. Для математического моделирования таких динамических процессов используется понятие коразмерности.

Коразмерность – количество параметров, необходимых для реализации бифуркации. В точке бифуркации коразмерности *k* выполняется *k* бифуркационных условий (условий типа равенств) и ряд условий невырожденности – условий типа неравенств.

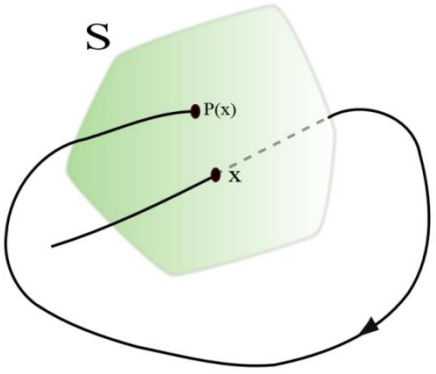
11.5 Примеры некоторых важные отображений

Приведём примеры некоторых отображений.

Отображение Пуанкаре.

Важным инструментом исследования динамических систем является отображение Пуанкаре, которое устанавливает связь между векторными полями и их потоками с одной стороны и итерациями отображения – с другой. А. Пуанкаре предложил процедуру, которая сопоставляет динамике в рамках дифференциальных уравнений некоторое отображение. Она позволяет заменить потоковую систему n-го порядка на отображение (n-1)-го порядка с дискретным временем, называемое отображением Пуанкаре. Определение отображения Пуанкаре гарантирует, что его предельные множества соответствуют предельным множествам указанной потоковой системы.

Полезность отображений Пуанкаре состоит в понижении порядка системы и в том факте, что они служат мостом между системами с непрерывным и дискретным временем. Метод сечения Пуанкаре – основной метод анализа гамильтоновой динамики, поскольку он позволяет выявить скрытые интегралы движения. Отображения Пуанкаре иногда помогают отличить друг от друга движения качественно различающихся типов, например периодические, квазипериодические и хаотические.



Отображение Пуанкаре (отображение первого возвращения) – проекция некоторой площадки в фазовом пространстве на себя (или на другую площадку) вдоль траекторий (фазовых кривых) системы.

Рис. 27. Отображение Пуанкаре трансверсальной площадки на себя определяется точкой первого возвращения траектории на площадку.

В теории динамических систем отображение Пуанкаре представляет собой пересечение периодической орбиты в пространстве состояний непрерывной динамической системы с некоторым подпространством меньшего размера (сечение Пуанкаре, расположенное трансверсально к потоку в системе). Из некоторой точки сечения Пуанкаре выходит траектория системы (периодическая орбита), которая затем покидает систему, но затем снова пронизывает плоскость Пуанкаре. Фиксируются координаты точки возвращения фазовой кривой в сечение. Затем устанавливается соответствие точки возникновения орбиты к точке первого возвращения (отображение первого возвращения). Если траектория, выпущенная из некоторой точки сечения, никогда не возвращается на трансверсаль, то отображение Пуанкаре в этой точке не определено.

Замечание. Трансверсальность сечения Пуанкаре означает, что периодические орбиты, начинающиеся на подпространстве, протекают через него и не параллельны ему.

Отображение (карту) Пуанкаре можно интерпретировать как дискретную динамическую систему с пространством состояний на один размер меньше, чем у исходной непрерывной динамической системы. Поскольку оно сохраняет много свойств периодических и квазипериодических орбит исходной системы и имеет пространство с более низкой размерностью, оно часто используется для более простого анализа исходной системы. На практике это не всегда возможно, поскольку не существует общего метода построения отображения Пуанкаре.

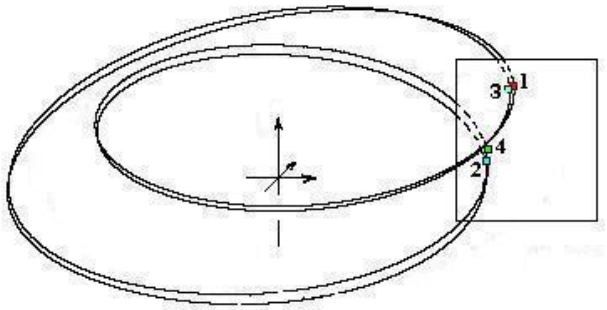


Рис. 28. Построение отображения Пуанкаре в фазовом пространстве автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

Неподвижные и периодические точки отображения Пуанкаре соответствуют замкнутым траекториям системы. Тем самым, устанавливается связь между векторными полями и их потоками с одной стороны и итерациями отображений — с другой.

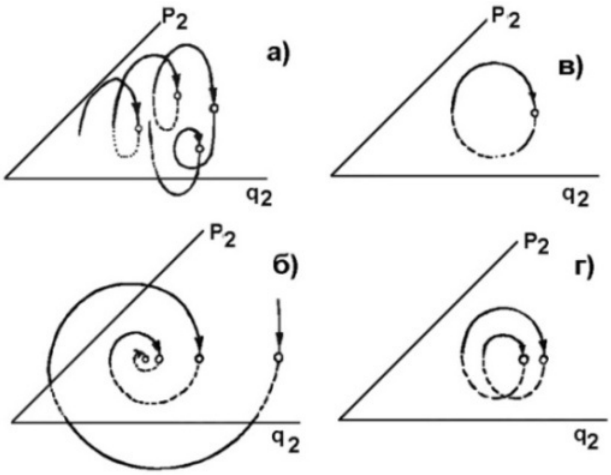
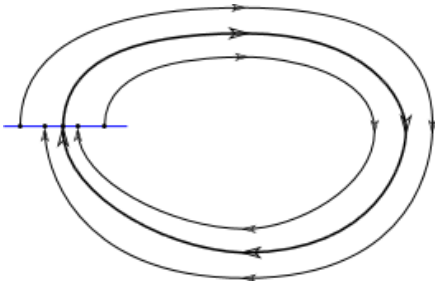


Рис. 29. Качественно разные траектории отличаются сечениями Пуанкаре: а – хаотическое движение; б – движение к неподвижной точке; в – цикл;, г – цикл удвоенного периода.

Определённую качественную и количественную информацию о системе можно получить, анализируя эволюцию параметров системы на дискретно выбранных моментах времени. Например, с помощью сечения Пуанкаре можно получить разностные эволюционные уравнения для непрерывно эволюционирующей системы. Отображения Пуанкаре помогают отличить друг от друга движения качественно различающихся типов, например, периодические, квазипериодические и хаотические.



Согласно подходу Пуанкаре в фазовом пространстве строится некоторая поверхность, и

изучается поведение точек пересечения фазовой траектории и секущей. На рис. 28 показано сечение Пуанкаре четырехоборотного предельного цикла. Можно видеть, что в таком сечении изображающая точка будет последовательно занимать положения, отмеченные цифрами 1, 2, 3 и 4. Таким образом, в терминах отображений можно сказать, что реализуется цикл периода 4. Понятно, что те или иные перестройки предельного цикла будут приводить и к перестройкам в сечении Пуанкаре. Последнее изучать гораздо проще, что и определяет важность этого метода. При анализе конкретных систем сечение Пуанкаре строится при помощи компьютера.

Рис. 30. Притягивающий предельный цикл и отображение Пуанкаре на трансверсали к нему.

Предельный цикл – это один из возможных вариантов стационарного состояния системы. Предельный цикл векторного поля на фазовой плоскости – замкнутая (периодическая) траектория этого векторного поля, в окрестности которой нет других периодических траекторий. Всякая достаточно близкая к предельному циклу траектория стремится к нему либо в прямом, либо в обратном времени.

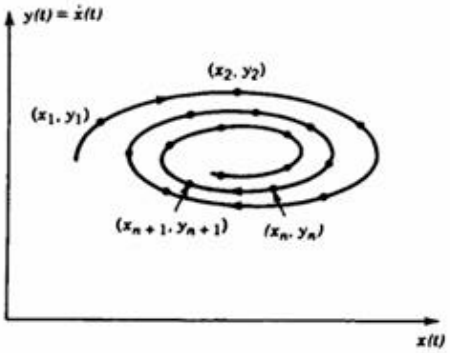


Рис. 31. Схематическая иллюстрация временной эволюции точек Пуанкаре из выборки цифровых измерений.

Теоремы Пуанкаре-Бендиксона и Андронова-Понтрягина утверждают, что *типичная* система с непрерывным временем на плоскости, состояние которой задаётся двумя вещественными параметрами, например, напряжением и током, или положением и скоростью точки на прямой, может стремиться только к положению равновесия или к предельному циклу.

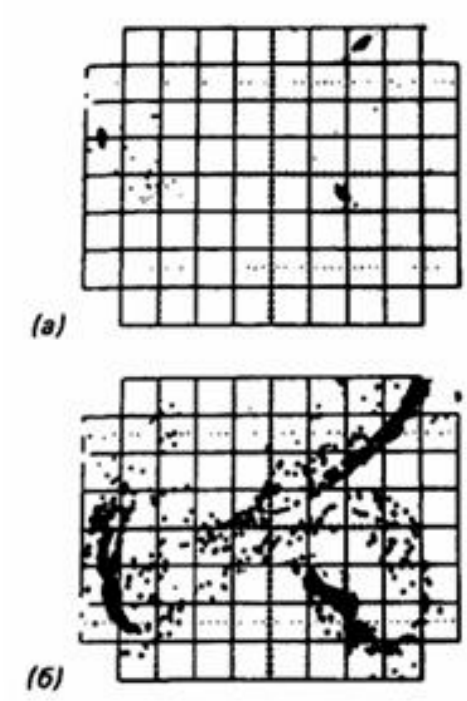
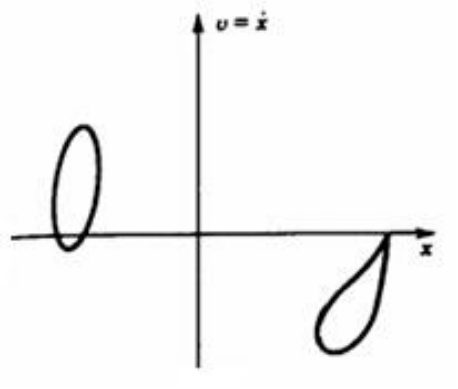


Рис. 32. а – Отображение Пуанкаре на фазовой плоскости, *соответствующее субгармоническому движению с периодом 3 произвольно изогнутого стрежня, возбуждаемого периодическим сигналом; б – хаотическое движение вблизи третьей субгармоники*.

Предельный цикл является либо отталкивающим, либо притягивающим. Если поведение с обеих сторон одинаково – цикл называется **отталкивающим** или **притягивающим**. Если же с одной стороны происходит притяжение, а с другой отталкивание – говорят о **полуустойчивом** цикле. Поведение траекторий, близких к предельному циклу, описывается отображением Пуанкаре на отрезке, трансверсальном к циклу, – для этого отображения точка, соответствующая циклу, является неподвижной. Так, цикл является притягивающим или отталкивающим тогда и только тогда, когда эта точка соответственно притягивающая или отталкивающая. Цикл называется **гиперболическим**, если соответствующая неподвижная точка гиперболична – то есть, имеет производную, отличную от ± 1. В этом случае, если производная по модулю больше 1, цикл неустойчив, если меньше – устойчив. Гиперболические предельные циклы не разрушаются малыми.

Наиболее простой бифуркацией, связанной с предельными циклами, является седлоузловая бифуркация: два гиперболических предельных цикла, отталкивающий и притягивающий, сближаются. В момент бифуркации они сливаются, образуя один полуустойчивый цикл, который при дальнейшем изменении параметра исчезает.

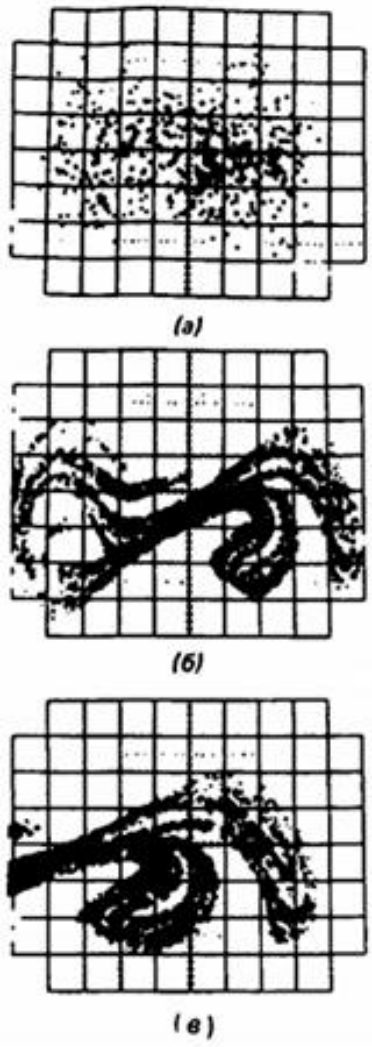


При непрерывной эволюции периодические движения соответствуют точкам покоя разностных уравнений, полученных с помощью сечения Пуанкаре. Объекты, наиболее часто используемые при изучении перехода от периодического движения к хаотическому, – это простые одномерные и двумерные отображения.

Рис. 33. Отображение Пуанкаре на фазовой плоскости, *соответствующее квазипериодическому движению возбуждаемого периодическим сигналом стержня с двумя степенями свободы, который колеблется в паре потенциальных ям, создаваемых магнитными силами.*

При математическом моделировании динамических систем отображение записывают в виде

$$x_{n+1}=f(x_n) \qquad (33)$$



Предположим, например, что мы анализируем движение частицы, отображенное на фазовой плоскости $\left[x(t),\dot{x}(t)\right]$. Если движение хаотично, то траектория стремится заполнить некоторую область фазового пространства. Если, однако, вместо того, чтобы непрерывно следить за движением, мы будем фиксировать динамические характеристики только в отдельные моменты, то движение будет представлено последовательностью точек фазовой плоскости (рис. 31). Если $x_n=x(t_n)$ и $y_n=\dot{x}(t)$, то эта последовательность точек фазового пространства представляет собой двумерное отображение

$$x_{n+1}=f(x_n,y_n),$$
$$y_{n+1}=g(x_n,y_n)$$

Рис. 34. а – Отображение Пуанкаре для хаотического движения продольно изогнутого стержня при слабом затухании; б, в – отображения Пуанкаре для хаотического движения продольно изогнутого стержня при более сильном затухании обнаруживают фрактальную структуру аттрактора.

Если моменты выборки t_n подчиняются определенному правилу, обсуждаемому ниже, это отображение называется отображением Пуанкаре.

Отображение Пуанкаре для систем с вынужденными колебаниями. Когда присутствует вынуждающее движение с периодом T, для получения отображения Пуанкаре естественно выделить выборку с $t_n=nT+\tau_0$. Это позволяет отличить периодические движения от непериодических.

Еще одно нехаотическое отображение Пуанкаре показано на рис. 33, где движение представляет собой колебания на двух несоизмеримых частотах:

$$x(t)=C_1\sin(\omega_1 t+d_1)+C_2\sin(\omega_2 t+d_2) \qquad (34)$$

где ω_1/ω_2 – иррациональное число. Если делать выборку с периодом, соответствующим одной из частот, то траектория станет непрерывной замкнутой фигурой или орбитой на фазовой плоскости. Такое движение иногда называют почти периодическим, или квазипериодическим, или «движением на торе»; оно не хаотично.

И наконец, если отображение Пуанкаре не состоит ни из конечного множества точек (рис. 32а), ни из замкнутой орбиты (рис. 33), то соответствующее движение может быть хаотичным (рис. 34). На этом этапе следует провести грань между системами с затуханием и без него. В системах без затухания или со слабым затуханием отображения Пуанкаре хаотических движений часто имеют вид неупорядоченного скопления точек на фазовой плоскости.

Такие движения иногда называют стохастическими. В системах с затуханием отображения Пуанкаре иногда представляют собой бесконечные строго упорядоченные множества точек, концентрирующихся на подобии параллельных линий (рис. 34б,в). При численном моделировании можно увеличить часть отображения Пуанкаре (рис.35) и обнаружить более тонкую структуру. Если такая структура множества точек сохраняется после нескольких увеличений, то говорят, что движение ведет себя как странный аттрактор. Множества с подобным вложением одной структуры в другую часто называют канторовскими множествами.

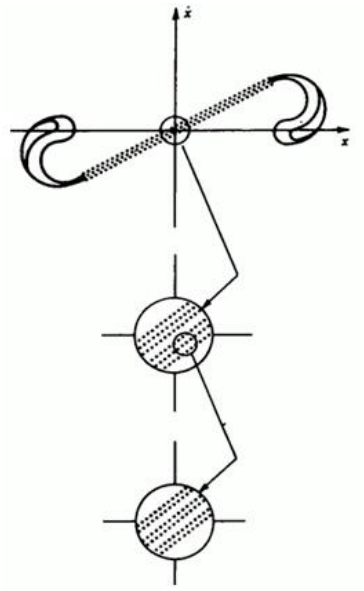


Рис. 35. Отображение Пуанкаре для хаотических колебаний возбуждаемого нелинейного осциллятора, сохраняющее автомодельную структуру все меньших и меньших масштабов.

Появление в отображении Пуанкаре, отображающем временную эволюцию колебаний, структур, которые подобны канторовскому множеству, является сильным индикатором хаотических движений.

Отображения Пуанкаре для автономных систем. Стационарные колебания могут возбуждаться без периодических или случайных воздействий также и в том случае, если движение порождается динамической неустойчивостью, как, например, индуцированные ветровым потоком колебания упругой структуры или создаваемое градиентом температуры конвективное движение жидкости или газа (например, конвекция Бенара). В электрических системах или системах управления с обратной связью самовозбуждающиеся колебания могут возникать благодаря элементам с отрицательным сопротивлением или отрицательной обратной связи. Тогда возникает вопрос о том, в какие моменты времени следует проводить измерения, чтобы получить отображение Пуанкаре. Обсуждение этого вопроса мы проведем на несколько более абстрактном языке.

Табл. 1. Классификация отображений Пуанкаре

Конечный набор точек: периодическое и субгармоническое колебание

Замкнутая кривая: квазипериодическое движение в присутствии несоизмеримых частот

Незамкнутая кривая: имеет смысл попытаться моделировать одномерным отображением, строить $x(t)$ как функцию $x(t+T)$

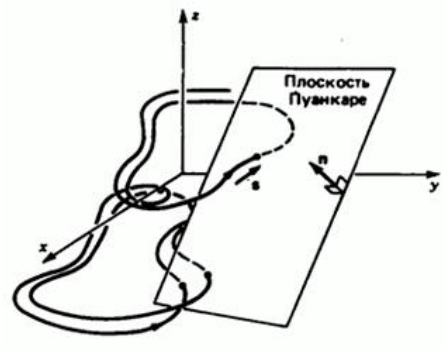
Фрактальный набор точек: странный аттрактор в трёхмерном фазовом пространстве

Бесформенный набор точек:

1) динамическая система со слишком сильным сигналом или шумом на входе;

2) странный аттрактор, но диссипация в системе очень слаба – для проверки используют показатель Ляпунова;

3) странный аттрактор в фазовом пространстве с более чем тремя измерениями – следует применить множественное отображение Пуанкаре;



4) квазипериодическое движение с тремя или большим числом доминирующих несоизмеримых частот.

Рис. 36. Схематическое изображение траекторий системы уравнений третьего порядка и типичная плоскость Пуанкаре.

Определение отображения Пуанкаре распространяется и на случай, когда на систему действует периодическая внешняя сила. В качестве примера рассмотрим вынужденные нелинейные колебания, описываемые уравнениями движения:

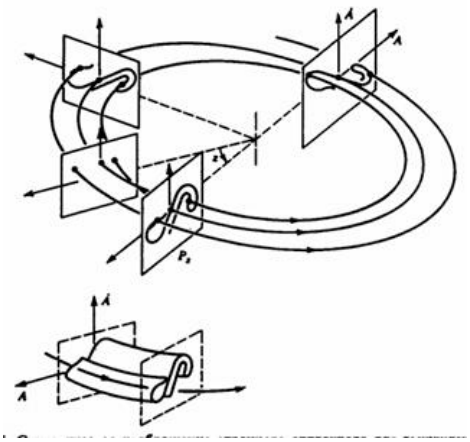
$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = F(x,y) + f_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (35)$$

Эту систему можно привести к автономному виду, вводя определение $z=\omega t+\varphi_0+2n\pi$, что даёт

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = F(x,y) + f_0 \cos z,$$
$$\dot{z} = \omega. \qquad (36)$$

Теперь можно естественным образом выбрать те моменты выборки, при которых $z = 0$. У этой системы фазовое пространство имеет цилиндрическую форму с ограниченными значениями z: $0 \le z \le 2\pi$. Построение отображения Пуанкаре показано на рис. 37.

Динамические модели можно свести к одномерным отображениям. Простые одномерные отображения или разностные уравнения вида x_{n+1} могут содержать бифуркации удвоения периода и хаос, если функция $f(x)$ имеет хотя бы один максимум (или минимум), пример – логистическое отображение (см. далее).



Явления удвоения периода наблюдались во многих разнообразных сложных физических системах (жидкостях, лазерах, электронных *p-n*–переходах); и часто динамика этих систем хорошо описывается одномерными отображениями (эффекты удвоения периода особенно важны в теории бифуркаций и будут в дальнейшем рассмотрены более подробно).

Рис. 37. Схема странного аттрактора для вынужденных колебаний нелинейного осциллятора — «произведение» плоскости Пуанкаре и фазы возбуждающего сигнала.

Возможность удвоения периода характерна для систем с существенным затуханием. Для проверки такой возможности проводят выборку какой-либо динамической переменной с помощью сечения Пуанкаре, например $x_n=x(t+t_n)$. Затем можно построить зависимость каждого x_n от последующего значения x_{n+1}. Чтобы можно было объявить систему хаотической, необходимо выполнение двух критериев. Во-первых, точки на графике с отложенными по осям величинами x_{n+1} и x_n должны группироваться, создавая некую функциональную зависимость; во-вторых, эта функция $f(x)$ должна быть немонотонной, т. е. иметь максимум или минимум. Если эти требования выполнены, то подбирают полиномиальную аппроксимацию полученных точек и используют найденное отображение для дальнейших численных экспериментов, подобного анализу квадратичного отображения (см. далее).

Как уже упоминалось, отображение Пуанкаре можно интерпретировать как дискретную динамическую систему. Устойчивость периодической орбиты исходной

системы тесно связана с устойчивостью неподвижной точки соответствующего отображения Пуанкаре. Можно показать, что периодическая орбита непрерывной динамической системы устойчива тогда и только тогда, когда неподвижная точка дискретной динамической системы устойчива. Периодическая орбита непрерывной динамической системы асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда неподвижная точка дискретной динамической системы асимптотически устойчива.

Квадратичное отображение - простое отображение, обладающее нетривиальной и богатой динамикой

$$x_{n+1}=f_c(x_n)=x_n^2+c, \qquad (37)$$

где параметр c – вещественное или комплексное число.

Замечание. В комплексной плоскости квадратичное отображение $f_c(z)=z^2+c$ имеет две критические точки 0 и ∞ (последняя - неподвижная и суперпритягивающая).

При изменения параметра c устойчивые периодические орбиты отображения испытывают подобные каскады бифуркаций (например, каскад бифуркаций удвоения периода, что проявляется, например, в самоподобии множества Мандельброта). Более того, и другие гладкие отображения могут испытывать подобные каскады бифуркаций. Точки в которых производная $f'(x_c)=0$ называются критическими точками. Для аналитического отображения известно, что каждый устойчивый цикл обязательно притягивает к себе критическую точку. Т.к. у квадратичного отображения есть единственная критическая точка $x_c=0$, то у него может существовать только один притягивающий цикл и начинать его поиски следует из точки $x_c=0$.

Применим к анализу фазовых траекторий, генерируемых уравнениями типа Ур.1, метод итераций. Напомним, что в процессе итераций выход функции становится входом в следующую итерацию. Итерации обычно записывают в виде F_n, где F – оцениваемая функция, а n – количество итераций. Например, в случае $F(x)=x^2-1$ итерация $F^{(2)}(x)=(x^2-1)-1$ и т.д. В качестве отправной точки при итерации функции F используется число (действительное или комплексное) x_0. Вычислив $F(x_0)$, получим новое число x_1, которое используется для следующей итерации. Этот выход задаёт новый вход, и действуя как и раньше, найдём $F(x_1)$ и x_2. В результате получим последовательность точек x_0, x_1, x_2,..., x_n. Последовательность чисел, являющаяся результатом итерации функции F, называется фазовой траекторией (орбитой) x_0 под F, где число x_0 задаёт начало орбиты.

Приведём пример орбиты точки 0,1 функции $F(x)=2x(1-x)$

x_0=0,1
x_1=0,1
x_3=0,18
x_4=0,2952
x_5=0,41611392
x_6=0,48592625116
x_7=0,49960385919
x_8=0,49999968614
и т.д.

Как следует из приведённого примера, орбита может обладать определенной характеристикой. Если точка x_0 удовлетворяет уравнению $F(x_0)=x_0$ или в общем виде $F^n(x_0)=x_0$, где F – функция, то x_0 представляет собой **неподвижную точку**.

Теорема с фиксированной точкой: Если F(x) – непрерывная функция и F(x)∈[a,b] для всех x ∈ [a, b], то F имеет по крайней мере одну неподвижную точку в [a, b].

Орбита неподвижной точки является постоянной последовательностью x_0, x_0, x_0,..., x_0. К сожалению, общего метода нахождения неподвижной точки. Приходится каждый раз находить конкретное решение уравнения $F(x)=x$. Например, $F(x)=2x(1-x)$ имеет неподвижные точки при x=0 и 0,5.

Фиксированная точка может быть аттрактором, репеллером или нейтральной.

Пусть x_0 – неподвижная точка функции F, то

1. x_0 – притягивающая неподвижная точка F, если $|F'(x_0)|<1$

2. x_0 – отталкивающая неподвижная точка F, если $|F'(x_0)|>1$
3. x_0 – нейтральная неподвижная точка F, если $|F(x_0)|=1$

Притягивающие и отталкивающие неподвижные точки иногда называют стоками и источниками, соответственно. Нейтральные неподвижные точки,
могут вести себя по-разному. Они могут слабо привлекать, слабо отталкивать или ни привлекать и ни отталкивать.

Теорема. Если x_0 – притягивающая неподвижная точка для дифференцируемой функции F, то существует $\varepsilon>0$ такое, что $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ удовлетворяет следующему условию

1. $f^n(x)\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ для всех $n>0$

2. Когда n приближается к бесконечности, $f^n(x)$ приближается к x_0 для всех $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

Теорема. Пусть x_0 – отталкивающая неподвижная точка дифференцируемой функции F. Тогда существует $\varepsilon>0$, такое что если $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ и $x_0\neq x$, то существует $n>0$, такое что $f^n(x)\notin(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Точка x_0 функции F периодична, если существует n так, что x_0 является фиксированной точкой $F^n(x)$ (выполняется $F^n(x_0)=x_0$). Цикл периода n является орбитой, которая повторяет себя каждые n итераций.

Например, 0 лежит на цикле периода 2 для x^2-1, так как его орбита равна 0, -1,0, -1, ... Кроме того, период-2 цикла имеет две точки, x_0 и x_1 такие, что $F(x_0)=x_1$ и $F(x_1)=x_0$. В общем случае n-цикл имеет форму $x_0, x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_0, x_1, ...$ Чтобы определить, является ли точка периода притягивающей, отталкивающей или нейтральной, используют производную $F^n(x_0)$. В случае двух дифференцируемых функций F и G

$$(F\circ G)'(x)=F'(G(x))\cdot G'(x)$$

$$(F^2)'(x_0)=F'(F(x_1))\cdot F'(x_0)=F'(x_1)\cdot F'(x_0)$$

$$(F^3)'(x_0)=F'(F^2(x_0))\cdot(F^2)'(x_0)=F'(x_2)\cdot F'(x_1)\cdot F'(x_0)$$

Итак, $(F^n)'=F'(x_{n-1})...F'(x_0)$, где $x_0, ..., x_{n-1}$ лежат на цикле периода n для F и $x_i=F^i(x)$. Производная F^n при x_0 – произведение производной для F во всех точках орбиты. Это означает, что не нужно знать уравнение для F^n, раз известны точки на орбите.

За динамикой одномерного вещественного отображения удобно следить по итерационной диаграмме (рис. 38).

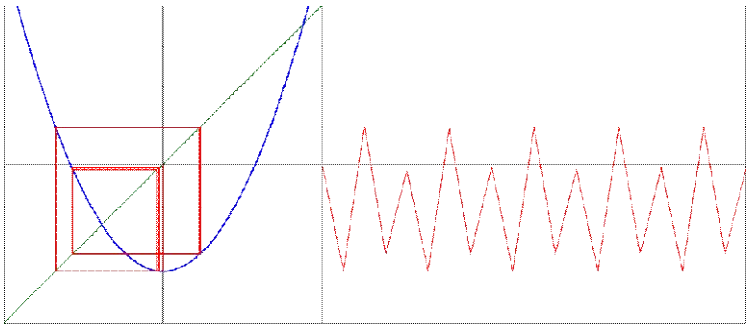


Рис. 38. Итерационная диаграмма квадратической функции. Синяя кривая это n-ая итерация отображение $f^n(x)=f(f(...f(x)))$. Зеленая линяя $y=x$. Координаты изменяются в пределах $-2\le x,y\le 2$. Т.к. $f(0)=C$, то при $n=1$ значение C совпадает с $y(0)$. Зависимость x_n от n строится в правом окне (итерации начинаются с x_o). Чтобы построить итерационную диаграмму, проведем красную вертикальную линию из начальной точки $x_o=0$ к синей линии $y=f(x)=x^2+c$, где $y_o=f(x_o)$. Чтобы получить следующую итерацию, строим горизонтальную линию к зеленой диагонали $y = x$, где $x_1=y_o=f(x_o)$. Далее снова строим вертикальную линию к синей кривой, чтобы получить $y_1=f(x_1)$ и т.д. Точки f_c: $x_o\to x_1\to x_2\to ...$ при некотором значении c образуют *орбиту* точки x_o.

Отметим, что рассмотренные здесь алгоритмы играют важную роль в теории динамических систем, поскольку лежит в основе использования квадратических отображений в моделировании универсальности Фейгенбауэра и логистических бифуркаций, приводящих к детерминированному хаосу (см. далее).

Тригонометрическое уравнение Кеплера $u=m+\varepsilon\sin u$ где ε, m – постоянные, возникает при изучении движения планет, причём $|\varepsilon|<1|$, задаёт эксцентриситет эллиптической планетарной орбиты, m – её среднее отклонение. Решение описывает

эллиптическое движение планеты. Неподвижные точки дискретной динамической системы основаны на функции $g(u)=m+\varepsilon\sin u$. Так как

$$|g'(u)|=|\varepsilon\cos u|=|\varepsilon|<1, \qquad (38)$$

то неподвижная точка остается неизменной. Условие (38) достаточно, чтобы доказать существование единственной устойчивой неподвижной точки. В частном случае $m=\varepsilon=0{,}5$ результат итерации $u^{(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u^{(k)}$, начиная с $u^{(0)}=0$, после 13 итераций решение достаточно близко сходится к неподвижной точке $u_0= 0.887862$.

12. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Каждая динамическая система имеет свой фазовый портрет. На фазовом портрете изображаются особые точки (точки положения равновесия, критические, неподвижные точки), которые позволяют без решения дифференциального уравнения или отображений предсказать поведение динамической системы.

Мы уже неоднократно упоминали особые точки. В этой главе мы рассмотрим способы их нахождения и их свойства несколько подробнее.

12.1 Дифференциальные уравнения и особые точки

Через каждую точку фазовой плоскости проходит только одна фазовая траектория: если эту точку выбрать в качестве начального состояния системы, дальнейшее движение системы будет определено однозначно. Это движение идёт вдоль фазовой траектории, проходящей через данную точку фазовой плоскости; фазовые траектории системы не пересекаются. Исключение составляют лишь отдельные, изолированные точки фазовой плоскости. Такие точки, через которые проходит более одной фазовой траектории или не проходит ни одной траектории, называются ***особыми.*** Фазовый портрет даёт наглядное графическое представление о возможных движениях изучаемой динамической системы.

Если фазовое пространство X представляет собой многомерное пространство или область в нем, а время непрерывно и если известна скорость движется каждой точки x фазового пространства (известна вектор-функция скорости $v(x)$), то траектория точки $x_0 \in X$ будет решением автономного дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = v(x)$ с начальным условием $x(0)$. Заданная таким образом динамическая система называется **фазовым потоком** для автономного дифференциального уравнения. В пространстве состояний создаётся модель динамической системы, включающая набор переменных входа, выхода и состояния, связанных между собой дифференциальными уравнениями 1-го порядка в матричной форме.

Особая точка векторного поля – определяет положение равновесия. Это точка, в которой векторное поле равно нулю; положение равновесия или точка покоя динамической системы, определяемая данным векторным полем: фазовая траектория с началом в особой точке состоит в точности из этой особой точки, а соответствующая ей интегральная кривая – прямая, параллельная оси времени.

Критическая (неподвижная) точка дифференцируемой функции действительной или комплексной переменной $f: D \to R$, где R – область в R^n, – любое её значение x_0, при котором все частные производные f равны нулю, $f(x_0)=0$. Это условие эквивалентно обращению в ноль дифференциала функции в данной точке, а также равносильно горизонтальности касательной гиперплоскости к графику функции. Это условие является необходимым (но не достаточным) для того, чтобы внутренняя точка области могла быть точкой локального минимума или максимума дифференцируемой функции. Значение функции в критической точке называется критическим значением. Для дифференцируемой функции нескольких переменных критическая точка там, где все частные производные равны нулю.

Точка равновесия – такая точка в *пространстве координат динамической системы*, генерируемой автономной системой ОДУ, которая характеризует ее состояние *равновесия* в данный момент. Это одна из *стационарных точек функции*, описывающей *поведение* системы; все частные *производные* функции обращаются в точке равновесия в нуль. Решение, которое со временем не меняется.

Сингулярная особая точка — точка, в которой математическая функция стремится к бесконечности или имеет какие-либо иные нерегулярности поведения.

Интерес к неподвижным точкам заключается в том, что точки, где функция имеет локальные экстремумы являются критическими точками.

В критической точке график $f(x)$ имеет горизонтальную касательную и производная от функции равна нулю. Если $g(x,y)$ – дифференцируемая функция двух переменных, то $g(x,y)=0$ – неявное уравнение кривой. **Критическая точка** такой кривой для проекции, параллельной оси y (отображение $(x,y)\to x$), является точкой кривой, где $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0$. Здесь касательная к кривой параллельна оси y и в этой точке g не определяет неявную функцию от x до y. Критическая точка (x_0,y_0) - одновременно точка бифуркации, так как, как правило, при изменении x есть две ветви кривой на стороне x_0 и ноль с другой стороны.

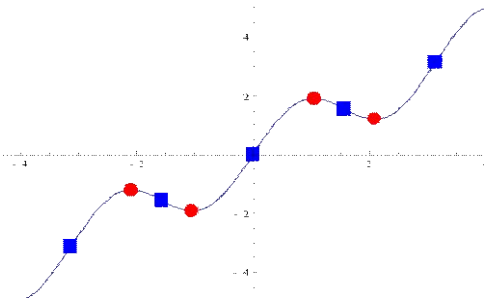


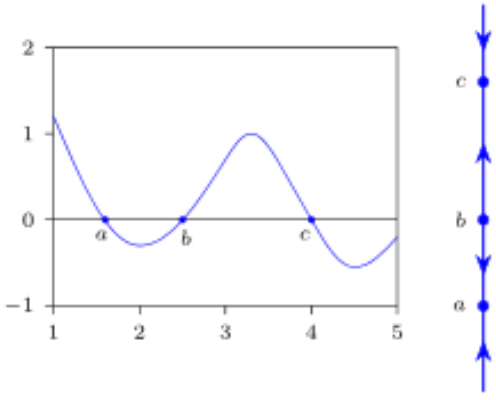
Рис. 1. Абсциссы (координаты x) красных кружков – стационарные точки, голубые квадраты – точки перегиба.

Функция $f(x)$ имеет критическую точку x_0 с критическим значением y_0, тогда и только тогда, когда (x_0,y_0) является критической точкой ее графа для проекции, параллельной x- оси с тем же критическим значением y_0.Например, критические точки единичной окружности уравнения $x^2+y^2-1=0$ равны (0, 1) и (0, -1) для проекции, параллельной оси y, и (1, 0) и (-1, 0) для направления, параллельного оси x. Если рассматривать верхнюю половину круга как график функции $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ то $x=0$ – единственная критическая точка с критическим значением 1. Критические точки окружности для проекции, параллельной оси y, точно соответствуют точкам, где производная от f не определена.

Пример 1. Функция $f(x)=x^2+2x+3$ всюду дифференцируема, производная $f'(x)=2x+2$. Функция имеет единственную критическую точку -1, т. к. именно это значение x_0 получается из $2x_0+2=0$. Точка x_0 – глобальный минимум f, критическое значение $f(-1)=2$. График f – вогнутая парабола, критической точкой является абсцисса экстремума, где касательная линия горизонтальна, а критическое значение – ордината экстремума: пересечение этой касательной с осью y.

Пример 2. Функция $f(x)=x^{2/3}$ определена для всех x и дифференцируема при $x\neq0$, производная $f'(x)=2x^{-1/3}/3$. Так как $f'(x)\neq0$ для $x\neq0$, то единственно возможной критической точкой f является $x=0$. Поскольку производная не существует в 0, то одни авторы считают её критической, а другие нет. График функции f имеет точку возврата в этой точке с вертикальной касательной. Соответствующим критическим значением $f(0)=0$.

Пример 3. Функция $f(x)=x^3-3x+1$ всюду дифференцируема, причём производная $f'(x)=3x^2-3$. Она имеет две критические точки при $x=-1$ и $x=1$ соответствующими критическими значениями: $f(-1)=3$ – локальное максимальное значение, и $f(1)=-1$ – локальное минимальное значение f. Эта функция не имеет глобального максимума или минимума. Так как $f(2)=3$, то критическое значение может быть достигнуто и в некритической точке. Геометрически это означает, что горизонтальная касательная линия к графу в одной точке ($x=-1$) пересекает график под острым углом в другой точке ($x=2$).



Пример 4. Функция $f(x)=1/x$ не имеет критических точек. Точка x=0 не рассматривается как критическая точка, потому что она не включена в область определения функции.

Рис. 2. График f(y) (слева) и его фазовая линия (справа). *Здесь a и c - стоки, a b - источник.*

В любой малой окрестности фазового пространства, не содержащей особых точек, векторное поле можно выпрямить подходящей заменой координат – тем самым, поведение системы вне особых точек устроено одинаково и очень просто. Напротив, в окрестности особой

точки система может обладать очень сложной динамикой. Говоря о свойствах особых точек векторных полей, обычно подразумевают свойства соответствующей системы в малой окрестности особой точки.

В простейшем случае однопараметрического автономного ОДУ $\frac{dy}{dx} = f(y)$ фазовая плоскость вырождается в прямую линию (её строят вертикально, рис.1 справа) или горизонтально. Это даёт простой метод анализа поведения динамической системы.

Фазовая линия, представляет собой интервал области производной. Критические точки (т.е. корни производной, точки y) такие, что , а интервалы между критическими точками обозначены стрелками: интервал, на котором производная положительна, имеет стрелку, указывающую в положительном направлении вдоль линии (вверх) и интервал, на котором производная отрицательно имеет стрелку, указывающую в отрицательном направлении вдоль линии (вниз).

Примеры - фазовые линии, соответствующие функциям, не меняющие знак: если , то каждая точка - устойчивое равновесие (не меняется); еслидля всех , то всегда увеличивается, и если тогда всегда уменьшается. Простейшими нетривиальными примерами являются экспоненциальная модель роста/радиоактивный распад (одно неустойчивое/устойчивое равновесие) и модель логистического (два равновесия, одно устойчиво, одно неустойчиво).

Приведём несколько примеров анализа простых ОДУ с использованием фазовой линии.

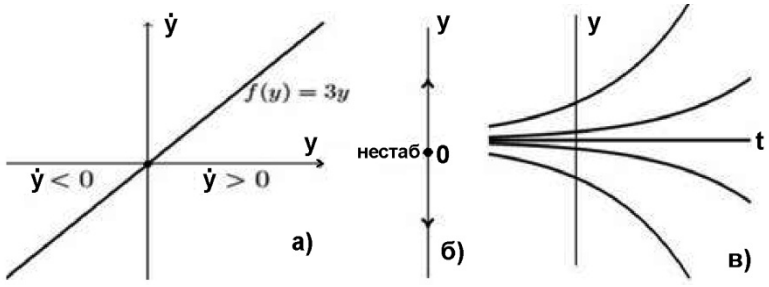


Рис. 3. К задаче 1: б - фазовая линия; в - типичные интегральные кривые.

Пример 5. Для ОДУ $y'=3y$: найти критические точки, нарисовать фазовую линию, классифицировать критические точки по стабильности и нанести на график некоторые решения.

Для $y'=3y$ единственная критическая точка $y=0$. График $f(y)$ – прямая линия, причём $y'>0$ при $y>0$ и $y'<0$ при $y<0$. Поместим большую точку в критической точке. Так как $y'>0$ в интервале $y>0$, то по вертикальной линии направляем стрелку вверх, аналогично для интервала $y<0$ откладываем стрелку вниз. Поскольку стрелки идут в разные стороны от критической точки, равновесие неустойчиво. Рядом с фазовой линией построим график кривых для самой функции $f(t)=t^3+c$ (для простоты считаем $c=0$). Равновесное решение соответствует критической точке: это горизонтальная линия $y(t)=0$. Решения расходятся от абсциссы в разные стороны при увеличении t. Положение равновесия неустойчиво, о чём и свидетельствовала фазовая линия.

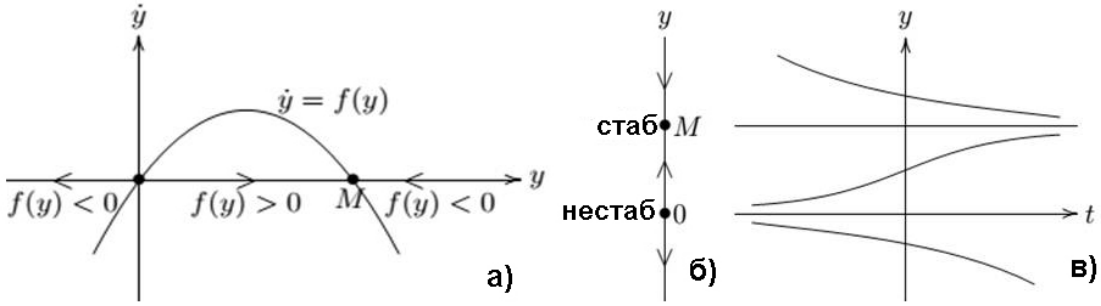


Рис. 4. К примеру 1: а - график f(y): б - фазовая линия; в - типичные интегральные кривые.

Пример 6. Фазовая линия для логистического уравнения $y'=k_0(1-y/M)y$. Критические точки: $y=0$ и $y=M$. Решения сдвинуты во времени. Точка равновесия $y=0$ неустойчива, точка $y=M$ – устойчива.
Пример 7. Полу-устойчивое и полу-неустойчивое положение равновесия. ОДУ $y'=y^2$ имеет одну полустабильную точку равновесия при $y=0$, y' - всегда положителен (за исключением $y=0$).

Критическая точка может быть устойчивой, неустойчивой или полуустойчивой, что демонстрируют исходящие (или входящие) в них стрелки. Если обе стрелки направлены на критическую точку, она устойчива (сток): близкие решения асимптотически сходятся к критической точке, а решение устойчиво при малых возмущениях, что означает, что если решение нарушено, оно снова вернется к устойчивой точке. Если обе стрелки указывают направление от критической точки, она неустойчива (источник): близкие решения будут расходиться от критической точки, а решение будет неустойчивым, при малых возмущениях решение обратно не вернётся. Если одна стрелка направлена на критическую точку и одна – от нее, то она полустабильна (узел): она устойчива в одном направлении (где стрелка направлена на точку) и неустойчива в другом направлении (где стрелка направлена от точки).

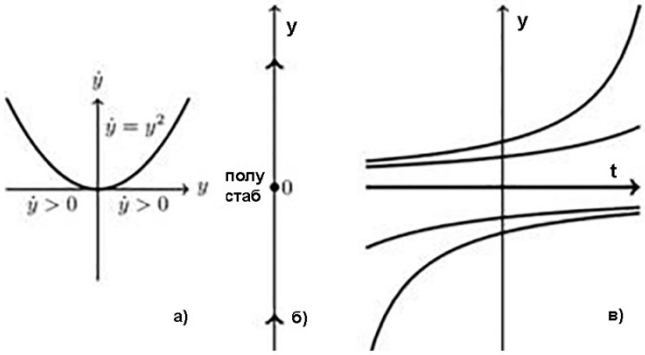


Рис. 5. К примеру 2: а – график f(y): б – фазовая линия; в – типичные интегральные кривые.

Поскольку нелинейные уравнения не имеют аналитического решения, то в теории динамики существенное внимание уделяется методам линеаризации, которые позволяют найти критические точки и дать им разумную интерпретацию. Переход от нелинейной к линейной системе упирается в проблему топологической эквивалентности.

Особая точка (неподвижная точка, положение равновесия, стационарная точка, точка покоя, критическая точка) динамической системы описываемое системой ОДУ – решение, которое не изменяется со временем. Геометрически равновесие – точка в фазовом пространстве.

Система ОДУ

$$\dot{x} = F(x) \qquad (1)$$

имеет равновесное решение $x(t)=x_0$, если $F(x_0)=0$.

Нахождение равновесия, т.е. решение уравнения $F(x)=0$ просто только в некоторых специальных случаях.

Если x_0 – особая точка дифференцируемого векторного поля $F(x)$, являющегося правой частью автономной системы Ур.1, а $\partial F/\partial x$ – производная отображения F, то система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Ay, \quad A = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0), \quad y = x - x_0 \qquad (1a)$$

называется линеаризацией системы (1) в особой точке x_0, поле Ay – линейной частью поля F в точке x_0, а A – оператор этой линейной части или оператор линеаризации.

Две системы дифференциальных уравнений (или, что то же самое – два векторных поля) топологически эквивалентны в окрестности особых точек, если существует **гомеоморфизм** (взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение), переводящий особую точку первой системы и траектории, лежащие в некоторой ее окрестности, в особую точку и траектории второй системы с сохранением ориентации траекторий.

Гомеоморфизм – взаимно однозначное соответствие между двумя топологическими пространствами, при котором оба взаимнообратных отображения, определяемые этим

соответствием, непрерывны. Эти отображения называются гомеоморфными, или топологическими, отображениями, а также гомеоморфизмами, а о пространствах говорят, что они принадлежат одному топологическому типу называемые гомеоморфными, или топологически эквивалентными. Они являются изоморфными объектами в категории топологических пространств и непрерывных отображений.

Топологическая эквивалентность – топологическое отношение между топологическими пространствами; топологические пространства *X* и *Y* называются топологически эквивалентными, если они гомеоморфны, т.е. если существует гомеоморфизм пространства *X* на пространство *У*. Топологическая эквивалентность является рефлексивным, симметричным и транзитивным бинарным отношением на классе всех топологических пространств. В соответствии с этим совокупность всех топологических пространств разбивается на попарно не пересекающиеся классы топологической эквивалентности.

Теорема Гробмана-Хартмана. Непрерывно дифференцируемое векторное поле с гиперболической особой точкой в некоторой окрестности этой точки топологически эквивалентно своей линейной части.

Локальный фазовый портрет гиперболической точки нелинейной системы эквивалентен таковому для линейной.

Из этой теоремы вытекает, что качественное поведение решений автономной системы дифференциальных Ур.(1) в окрестности гиперболической особой точки полностью определяется поведением решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянным оператором (матрицей) линейной части поля в этой точке.

Линейная система ОДУ называется **гиперболической**, если все её собственные значения якобиана (вообще говоря, комплексные) имеют отличные от нуля вещественные части. Особая точка (положение равновесия) системы дифференциальных уравнений (1) называется **гиперболической**, если ни одно собственное значение оператора линейной части поля в этой точке не лежит на мнимой оси, т.е. если её собственное значение отлично от нуля. Если собственное значение точки равно нулю, то точку называют негиперболической. В этом случае система неустойчива и возможны бифуркации.

Гиперболическая периодическая точка – периодическая точка, у которой все мультипликаторы (производная в неподвижной точке) по модулю отличны от единицы. Это периодическая точка, орбита которой является гиперболическим множеством. Важный частный случай – гиперболическая неподвижная точка.

Неподвижная точка гиперболична, если имеет производную, отличную от $\pm$, т.е. если среди всех мультипликаторов нет равных по модулю единице.

В одномерной (скалярной) динамической системе $x'=f(x)$ равновесие имеет место при $f(x)=0$ (рис. 6). Якобиан в каждом равновесии есть $J=f'(x)$. Равновесие асимптотически стабильно, когда $f'(x)<0$; это означает, что наклон f отрицателен. Оно нестабильно, когда $f'(x)>0$. Слева два равновесия на рис. 6 гиперболические ($f'(x)\neq 0$), другие негиперболические поскольку наклон (собственное значение) есть нуль. Тем не менее, негиперболическое равновесие системы устойчиво, если функция изменяет знак с положительного на отрицательный при равновесии.

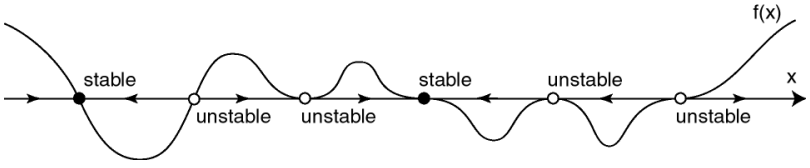


Рис. 6. Равновесие одномерной системы x'=f(x) в точках где f(x)=0.

Как уже упоминалось, двумерную систему линейных дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ f_2(x,y) = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \qquad (2)$$

комплексно сопряжённые.

При равновесии

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Система (2) в матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (4)$$

или $\dot{X} = \dfrac{dx}{dt} = AX$

где A – 2x2 матрица коэффициентов $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и (x,y) – вектор координат двух независимых переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Для определения особых точек используют собственные значения уравнения $Ax=\lambda x$ находят решением характеристического уравнения.

Обычно классификацию положений равновесия линейной системы, основанную на собственных значениях. Однако тип точки равновесия можно определить и без вычисления собственных значений λ_1,λ_2, а зная лишь только определитель матрицы *detA* и её след *trA*.

Напомним, что *следом матрицы* называется число, равное сумме диагональных элементов: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $trA=a+d$, $detA=ad-bc$. Действительно, характеристическое уравнение матрицы имеет следующий вид:

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0. \qquad (5а)$$

или

$$\lambda^2-trA\cdot\lambda+detA=0. \qquad (5б)$$

где $p=a+d=tr(A)$, $q=ad-bc$, $\Delta=detA=ad-bc$

Собственные значения λ_1 и λ_2 линейного оператора A находят по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4q}\right) = \frac{1}{2}\left(trA \pm \sqrt{D}\right), \qquad (6)$$

где дискриминант, $D=(trA)^2-4detA$.

Собственные вектора: V_1 и V_2 – корни уравнения $bV^2 + (d-a)V - c = 0$.

Таким образом, *бифуркационная кривая*, разграничивающая различные режимы устойчивости, представляет собой параболу на плоскости (trA, $detA$): $\det A = \left(\dfrac{trA}{2}\right)^2$.

Выше параболы находятся точки равновесия типа фокус и центр. Точки типа "центр" расположены на положительной полуоси $0y$, т.е. при условии $trA=0$. Ниже параболы находятся точки типа "узел" или "седло". Сама парабола содержит дикритические или вырожденные узлы. Устойчивые режимы движения существуют в левом верхнем квадранте бифуркационной диаграммы. Остальные три квадранта соответствуют неустойчивым положениям равновесия.

Условие *detA*=0 определяет линию вырожденных особых точек, среди которых можно выделить вырожденный плоский седло-узел, имеющий, как правило, один узловой и два седловых сектора. Невырожденные седло, узел и фокус являются гиперболическими особыми точками. Центр к гиперболическому положению равновесия не относится. Гиперболичны те положения равновесия, для которых собственные значения матрицы коэффициентов *detA* линейной системы ОДУ лежат вне мнимой оси.

Особая точка означает, что в стационарном состоянии значения переменных в системе не меняются со временем, т.е. в одномерном случае скорость изменения значений dx/dt =0 (и следовательно) $f(x)$=0. Корни этого алгебраического уравнения – стационарные состояния.

В двумерном случае особая точка кривой, заданная уравнением $F(x,y)$=0, – точка $P_0(x_0,y_0)$ такая, что $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} = 0$. Если при этом не все вторые частные производные функции $F(x, y)$ в точке P_0 равны нулю, то особая точка называется двойной. Если наряду с обращением в нуль первых производных в точке M_0 обращаются в нуль и все вторые производные, но не все третьи производные равны нулю, то особая точка называется тройной, и т.д.

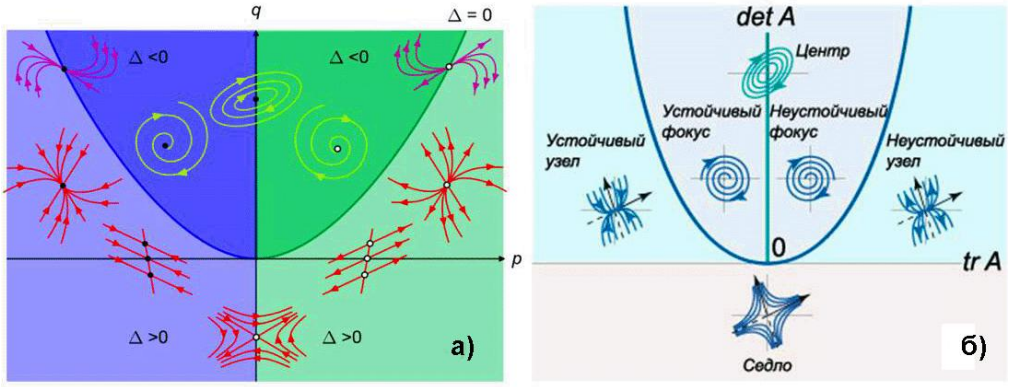


***Рис. 7. Точки равновесия линейной автономной системы и бифуркационные кривые**. Они же возникают и в нелинейных автономных системах при их линеаризации. а - виды фазовых портретов, б - демонстрация устойчивости особых точек. Здесь trA=a+d=p detA=ad-bc=q.*

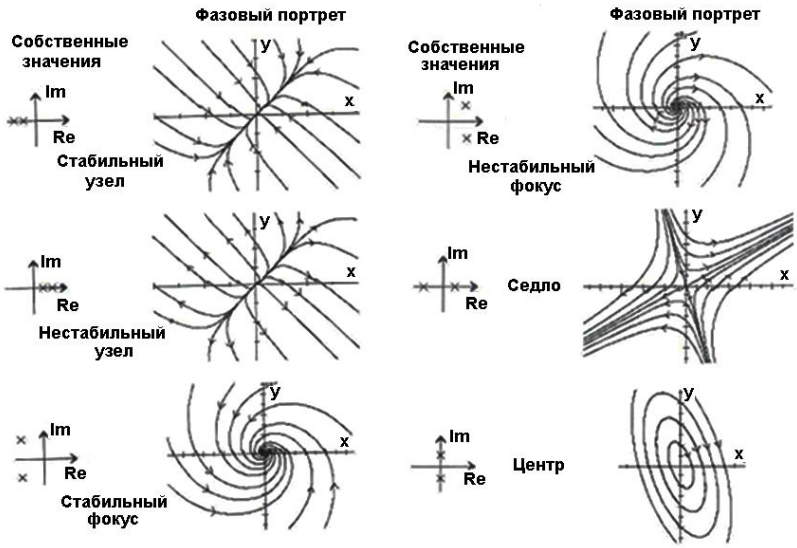


Рис. 8. Виды фазовой плоскости в зависимости от локализации собственных значений.

Из уравнения $F(x,y)$=0 ни одно из переменных x,y не может быть выражено как функция другого даже в как угодно малой окрестности точки P_0. Если вторые частные

производные не все одновременно обращаются в нуль в точке P_0 (двойная особая точка), то поведение кривой в окрестности P_0 во многом определяется знаком Δ:

$$\Delta = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{P_0} \cdot \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{P_0} - \left.\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2\right|_{P_0} \qquad (7)$$

Если $\Delta>0$, то особая точка называется изолированной; например, у кривой $y-x^4+4x^2=0$ начало координат есть изолированная особая точка (рис. 9.1). Если $\Delta<0$, то особая точка называется **узловой,** или точкой самопересечения; например, у кривой $(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2-a^4=0$ начало координат есть узловая особая точка (рис. 9.2); кривая $x^2-y^3=0$ имеет начало координат точкой самопересечения. Если $\Delta=0$, то особая точка кривой является либо изолированной, либо характеризуется тем, что различные ветви кривой имеют в этой точке общую касательную, например: а) точка возврата 1-го рода – различные ветви кривой расположены по разные стороны от общей касательной и образуют остриё, как у кривой $y^2-x^3=0$ (рис. 9.3а); б) точка возврата 2-го рода – различные ветви кривой расположены по одну сторону от общей касательной, как у кривой $(y-x^2)^2-x^5=0$ (рис. 9.3б); в) точка самоприкосновения (для кривой $y^2-x^4=0$ начало координат является точкой самоприкосновения (рис. 9.3в). Наряду с указанными особых точек имеется много других особых точек со специальными названиями; например, асимптотическая точка – вершина спирали с бесконечным числом витков (рис. 9.4), точка прекращения, угловая точка и т.д.

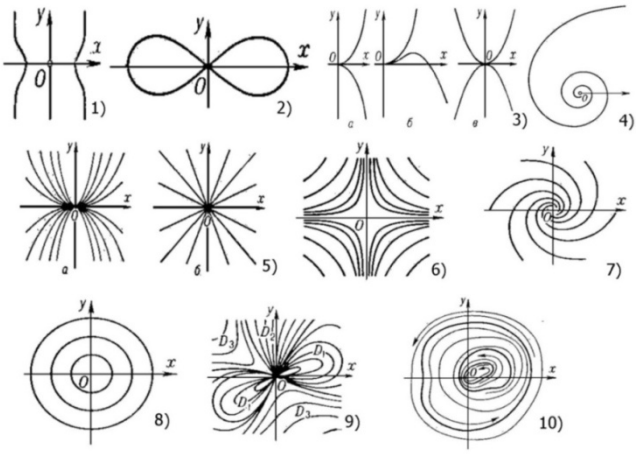
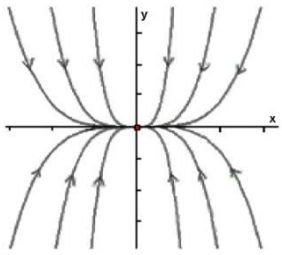


Рис. 9. Особые точки ОДУ.

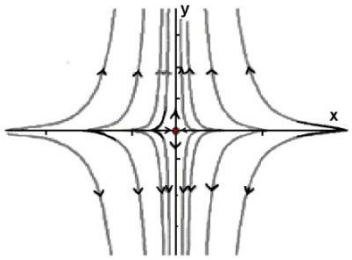


Точка (0, 0) является узлом для уравнений $y'=2y/x$ ($\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$; и $y'=y/x$ ($\lambda_1=\lambda_2=1$; седлом для уравнения $y'=-y/x$ ($\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$**;** фокусом для уравнения $y'=(x+y)/(x-y)$ ($\lambda_1=1-i$, $\lambda_2=1+i$; и центром для уравнения $y'=-x/y$ ($\lambda_1=-i$, $\lambda_2=i$.

Рис. 10. Пример 8: зависимость y(x) как функция времени при большом числе начальных условий.

Пример 8. Двумерная система ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}+x=0 \\ y+4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t)=x(0)e^{-t} \\ y(t)=y(0)e^{-4t} \end{array}$$

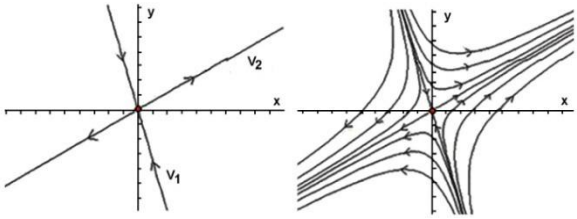


Фазовый портрет- стабильный седло, точка (0,0) - стабильная точка равновесия.

Рис. 11. К примеру 9.

Пример 9: Дана система ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}+x=0 \\ y-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t)=x(0)e^{-t} \\ y(t)=y(0)e^{4t} \end{array}$$



Фазовый портрет – седло. Фазовая траектория попадает в точку (0,0) только если начальное условие было задано в начале кооордитат. Остальные траектории никогда не попадают в точку (0,0).

Рис. 12. К примеру 10.

Пример 10. Устойчивость седловой точки. Имеем систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} - 2x - y = 0 \\ \dot{y} - 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = Ax \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Собственное значение $\lambda_1 = -1{,}5616 \qquad \lambda_2 = 2{,}5616$

Собственные вектора $V_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2703 \\ -0{,}9628 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8719 \\ 0{,}4896 \end{bmatrix}$

Стабильное седло *Нестабильное седло*

Пример 11. У системы $\begin{cases} \dot{x} + x + y = 0 \\ \dot{y} - 4x + y \end{cases} \Rightarrow \dot{x}Ax \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Собственные значения равны $\pm 1{,}7321i$. Так как реальные части собственных значений равны нулю, то реализуется фазовая плоскость, в которой точкой равновесия является центр.

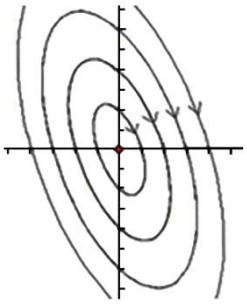


Рис. 13. К примеру 11.

В анализе поведения решений дифференциальных уравнений на плоскости удобно пользоваться методом изоклин.

Изоклина – линия на плоскости, в каждой точке которой, касательные к фазовым траекториям исследуемой системы уравнений имеют один угол наклона.

Г*лавные изоклины* – нуль-изоклины, фазовые траектории которых проходят под углом φ=0° (изоклина горизонтальных касательных) и φ=90° (изоклина вертикальных касательных). При уравнениях имеющих вид: $dx/dt=f_1(x, y)$, $dy/dt=f_2(x,y)$ уравнение изоклины записывается как: $dy/dx=f_2(x, y)/f_1(x,y)=A=const$. Для изоклины *горизонтальных касательных* уравнение принимает вид: $dy/dx=(f_2(x,y))/(f_1(x,y))=tg0^o=0$ или $f_2(x,y)=0;$ для изоклины *вертикальных касательных*: $dy/dx=(f_2(x,y))/(f_1(x,y))$ $tg90^o=\infty$ или $P(x,y)=0$.

Коротко остановимся на линейных системах уравнений высоких порядков. При их решении обычно исходное уравнение представляют в виде системы линейных уравнений, решения которых довольно хорошо отработаны.

Пример 12. Линейное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

с постоянными вещественными коэффициентами a, b, можно свести к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - ay.$$

Фазовые траектории этой системы задают фазовые траектории на плоскости $(x, \dot{x})$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$.

Можно показать, что практически всегда систему высокого порядка можно свести к большой системе ОДУ первого порядка.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, ..., t \\ F_2(x_1, x_2, ..., t \\ . \\ . \\ . \\ F_N(x_1, x_2, ..., t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}, t) \\ F_2(\vec{x}, t) \\ . \\ . \\ . \\ F_n(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Поведение системы уравнений первого порядка можно визуально интерпретировать строя фазовые траектории $\vec{x}(t)$ для различных начальных условий $\vec{x}(t=0)$.

Если местоположения всех неподвижных точек (точки, где $\frac{d\vec{x}}{dt}=0$) на фазовой плоскости установлены, то их можно использовать как реперные точки, вокруг которых исследуется фазовое поведение. В каждой неподвижной точке, линеаризацию проводят, разлагая Ур.(8) в ряд в виде $\eta=\vec{x}-\vec{x}_{fix}$

Если собственное значение вещественно, то любая точка, лежащая в направлении собственного вектора, будет развиваться по прямому пути, параллельному собственному вектору. Если действительное собственное значение отрицательно, то прямой путь будет асимптотически приближаться к началу координат; если собственное значение положительно, траектория будет расходиться по прямому пути к бесконечности. Если собственное значение является мнимым, то траектория будет циркулировать вокруг неподвижной точки с частотой, пропорциональной величине собственного значения. Если собственное значение λ комплексно, его траектория будет циркулировать с частотой, пропорциональной ее мнимой части, и расходиться от или сходиться к неподвижной точке. Если какая-либо из неподвижных точек имеет собственное значение с положительной вещественной частью, неподвижная точка не может быть устойчивой – это потому, что «типичные» точки в окрестности неподвижных точек будут обладать некоторой компонентой неустойчивого собственного вектора.

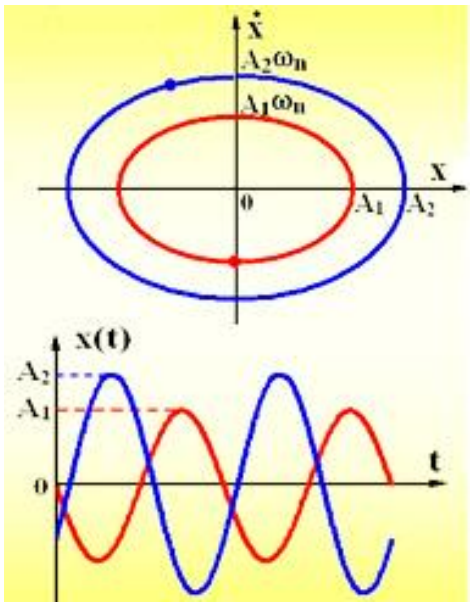


Рис. 14. К примеру 13.

Пример 13. Построить фазовые траектории системы $\ddot{x}+k^2x=0$, где $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$, k можно рассматривать, как частоту колебаний ω_n.

Решение $\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=-k^2x;\ \dot{x}d\dot{x}=-k^2xdx;\ \frac{1}{2}\dot{x}=-\frac{k^2}{2}x^2+C;\ x^2+\frac{\dot{x}}{k^2}=\frac{2C}{k^2}=A^2$

$\frac{x^2}{A^2}+\frac{\dot{x}}{A^2k^2}$ – эллиптическое уравнение.

Пример 14 . Определить фазовый портрет уравнения $\ddot{x}-kx=0$, где k -положительно (колебания маятника около верхнего положения неустойчивого равновесия).

Решение: $\begin{cases} x=C_1e^{\sqrt{k}t}+C_2e^{-\sqrt{k}t}, \\ y=C_1\sqrt{k}e^{\sqrt{k}t}-C_2\sqrt{k}e^{-\sqrt{k}t}. \end{cases}$

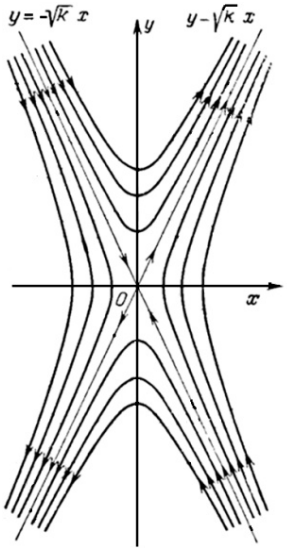


Рис. 15. К примеру 14.

Фазовые траектории задаются уравнением $\frac{x^2}{C}-\frac{y^2}{Ck}=1,$ представляющее собой уравнение семейства гипербол (рис. 14). При C=0 имеются две асимптоты этого семейства гипербол, проходящие через начало координат: $\begin{cases} y=\sqrt{k}x \\ x=-\sqrt{k}x \end{cases}$. Начало координат является единственной особой точкой, причём, за исключением асимптот, ни

одна интегральная кривая не проходит через начало координат. Такая особая точка называется седлом. Где бы ни находилась изображающая точка в начальный момент (за исключением начала координат и асимптоты $y = -\sqrt{k}x$, она всегда, в конце концов, будет удаляться от начала координат, причём движение будет носить апериодический характер, а не колебательный. Положение равновесия, соответствующее особой точке типа седла, всегда будет неустойчивым, ввиду того, что движение по асимптоте $y = -\sqrt{k}x$ не может быть никогда точно реализовано, так как вероятность начального состояния, соответствующего движению к особой точке, равна нулю.

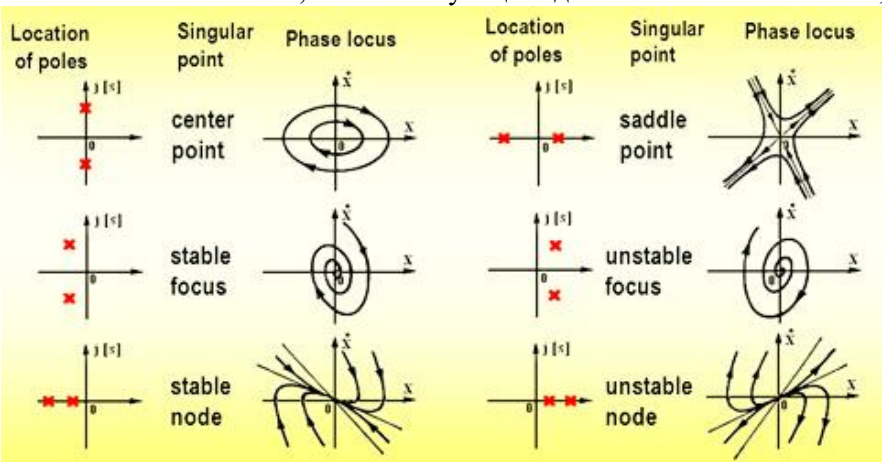


Рис. 16. Фазовые траектории линейной системы линейных уравнений ОДУ второго порядка.

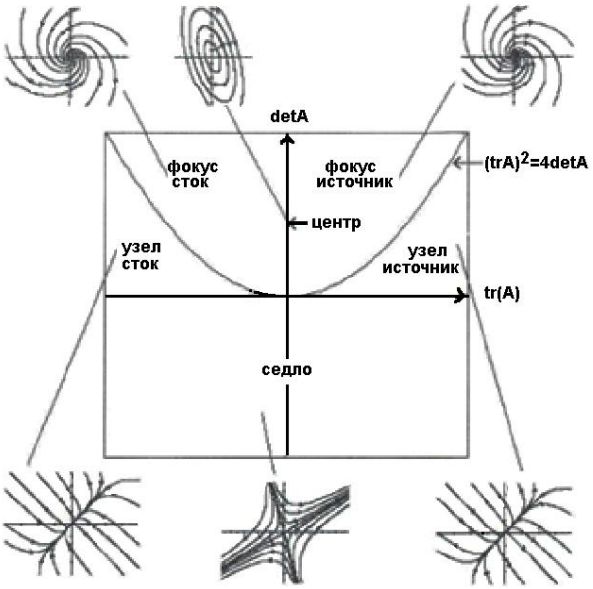


Рис. 17. Фазовые диаграммы для линейных систем уравнений второго порядка.

12.2 Классификация точек равновесия

Простейшими примерами особых точек являются особые точки линейных векторных полей на плоскости. С понятием векторного поля на плоскости можно связать линейную систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = Ax, \tag{9}$$

где $x=x(x_1, x_2)$ – точка на плоскости, – матрица. Очевидно, что точка в случае невырожденной матрицы является единственной особой точкой такого уравнения.

При классификации критических точек сначала находят собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Если собственные значения действительны и различны, то критическая точка является, либо узлом, либо седлом.
– Если оба собственных значения положительны, то критическая точка является неустойчивым узлом; траектории касаются собственного вектора, связанного с меньшим собственным значением.
– Если оба собственных значения отрицательны, критическая точка является устойчивым узлом; траектории касаются собственного вектора, связанного с численно меньшим собственным значением.
– Если собственные значения имеют противоположный знак, критическая точка является седлом; траектории асимптотически приближаются к собственному вектору, связанному с положительным собственным значением.
2. Если собственные значения не являются вещественными и имеют вид $\alpha+\beta i$, критическая точка является либо спиральной точкой, либо центром.
– Если $\alpha>0$, критическая точка является неустойчивой спиральной точкой.
– Если $\alpha<0$, критическая точка является устойчивой спиральной точкой.
– Если $\alpha=0$, критическая точка - это центр.
Во всех трех случаях движение по часовой стрелке, если b-c положительно и против часовой стрелки, если оно отрицательно.
3. Если собственные значения действительны и повторяются, то критическая точка является либо звездой, либо вырожденным узлом. Если матрица кратно единичной матрице, то она является звездой; если нет, это неправильный узел. Если собственное значение положительно, критическая точка неустойчива; если он отрицательно, оно стабилено. В случае неправильных узлов траектории касаются единственного собственного вектора. Если b-c положительно, движение идёт по часовой стрелке; если отрицательный, против часовой стрелки.

Знаки собственных значений определяет поведение фазовых траекторий:
– Если знаки противоположны, то пересечение собственных векторов является седлом.
– Если знаки оба положительные, то собственные векторы представляют собой стабильные ситуации, в которых система расходится, а пересечение траекторий – неустойчивый узел.
– Если знаки оба отрицательные, то собственные векторы представляют собой стабильные ситуации, в которых система сходится, а пересечение траекторий – устойчивый узел.

Различные фазовые траектории одной достаточно гладкой динамической системы не пересекаются в фазовом пространстве. Фазовые траектории могут представлять собой либо отдельные точки, либо замкнутые кривые, либо отрезки кривых конечной длины, заключённые между двумя точками (последние не принадлежат данной траектории), либо кривые, неограниченные в одну или обе стороны. Траектории, являющиеся точками, называются особыми точками и отвечают стационарным состояниям динамической системы.

Двумерные линейные системы классифицируются следующим образом:
1. Два действительных собственных значения. Неподвижная точка – узел. Случай совпадающих корней: жорданов узел (одна жорданова клетка) и дикритический узел (две жордановы клетки).
2. Два комплексно-сопряженных корня с ненулевой действительной частью. Фокус.
3. Два действительных собственных значения разных знаков. Седло. Сепаратрисы. Устойчивое и неустойчивое подпространства.
4. Два комплексно-сопряженных чисто мнимых корня. Центр.
5. Вырожденный случай: нулевое собственное значение.

Классификация трёхмерных систем:

1. Устойчивый (неустойчивый) узел – три действительных корня одного знака или один действительный и два комплексных с тем же знаком действительной части и с ведущим действительным корнем.
2. Устойчивый (неустойчивый) фокус – один действительный и два комплексных с ведущими комплексными.
3. Седло-фокус – устойчивое одномерное подпространство и неустойчивое двумерное типа фокус, также наоборот.

Многомерные системы. Жорданова нормальная форма. Инвариантные подпространства.

Табл.1. Классификация точек равновесия

Точка равновесия	Собственные значения λ_1,λ_2
1. Узел	λ_1,λ_2 – действительные числа одного знака ($\lambda_1\cdot\lambda_2>0$); $\lambda_1<\lambda_2<0$ - устойчивый узел, $\lambda_1>\lambda_2>0$ – неустойчивый узел.
2. Седло	λ_1,λ_2 – действительные числа разного знака ($\lambda_1\cdot\lambda_2<0$); $\lambda_2<0<\lambda_1$
3. Фокус	λ_1,λ_2 – комплексные числа; действительные части равны и отличны от нуля ($\mathrm{Re}\lambda_1=\mathrm{Re}\lambda_2\neq0$); $\alpha\pm i\beta$, $\alpha<0$ – стабильный фокус; $\alpha\pm i\beta$, $\alpha>0$ - нестабильный фокус; при $\alpha=0$ линеаризация невозможна
4. Центр	λ_1,λ_2 - чисто мнимые числа ($Re\lambda_1=Re\lambda_2=0$)

В зависимости от собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$, различают пять типов невырожденных особых точек линейных систем: узел (*node*), седло (*saddle*), фокус (*spiral*) - гиперболические равновесия и центр (*center*) - негиперболическое равновесие.

Устойчивость положений равновесия определяется общими теоремами об устойчивости. Так, если действительные собственные значения (или действительные части комплексных собственных значений) отрицательны, то точка равновесия является асимптотически устойчивой. Примерами таких положений равновесия являются устойчивый узел и устойчивый фокус. Если действительная часть хотя бы одного собственного числа положительна, то соответствующее положение равновесия является неустойчивым. Например, это может быть седло. Наконец, в случае чисто мнимых корней (точка равновесия является центром) имеет место классическая устойчивость в смысле Ляпунова.

Как уже упоминалось, общее решение системы Ур.1 имеет вид:

$X(t)=C_1e^{\lambda 1t}V_1+C_2e^{\lambda 2t}V_2$,

где V_1 и V_2 – собственные векторы, соответствующие числам λ_1 и λ_2, а C_1, C_2 – произвольные константы.

Рассмотрим подробнее каждый тип точки равновесия и соответствующие фазовые портреты.

Узел - положение равновесия при условии, что корни Ур.1 λ_1 и λ_2 – вещественны, различны ($\lambda_1\neq\lambda_2$) и имеют один и тот же знак; может быть устойчивым и неустойчивым.

Устойчивый узел – точка равновесия, в которую входят все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности узла. Корни Ур.1 отрицательны ($\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$), $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$. Через узел проходит бесконечное множество интегральных кривых. Фазовые траектории имеют вид парабол. Поскольку оба собственных значения λ_1 и λ_2, отрицательны, то решение $X=0$ является асимптотически устойчивым. При $t\to\infty$ фазовые траектории стремятся к особой точке (начало координат $X=0$) со своей касательной. Приняв x_0 за центр круга можно выбрать его радиус настолько малым, чтобы каждая характеристика входящая в этот круг извне приближалась к x_0 с определенной касательной. Если $C_1\neq0$, то при $t\to\infty$ фазовые траектории параллельны собственному вектору V_1, если $C_1=0$, то фазовая траектория лежит на прямой, направленной вдоль собственного вектора V_2. При $t\to-\infty$ и при $C_2\neq0$ фазовые кривые становятся

параллельными вектору V_2, а при $C_2=0$ фазовая траектория определяется направлением собственного вектора V_1. Для устойчивого узла собственное значение (λ) с минимальным абсолютным значением действительной части называется **принципом** или **ведущим**; когда собственные значения различны, все орбиты, кроме двух, стремятся к узлу вдоль ведущего собственного вектора (картина инвертируется для неустойчивого узла).

Неустойчивый узел – фазовые траектории выходят из точки x_0. Корни λ_1,λ_2 различны ($\lambda_1\neq\lambda_2$) и положительны ($\lambda_1>0,\lambda_2>0$).

Замечание. В случае как устойчивого, так и неустойчивого узла фазовые траектории касаются прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине собственному значению λ.

Дикритический узел Пусть характеристическое уравнение имеет один нулевой корень кратности 2, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\neq0$. При этом система имеет базис из двух собственных векторов, т.е. геометрическая кратность собственного значения λ равна 2. Такая ситуация реализуется в системах вида $dx/dt=\lambda x$, $dy/dt=\lambda y$. Направление фазовых траекторий зависит от знака λ. Здесь возможны следующие два случая:

Случай $\lambda_1=\lambda_2=\lambda<0$. Такое положение равновесия называется *устойчивым дикритическим узлом*.

Случай $\lambda_1=\lambda_2=\lambda>0$. Данная комбинация собственных значений соответствует *неустойчивому дикритическому узлу*.

Здесь все интегральные кривые проходят через начало координат с определённым направлением касательных; коэффициенты этих касательных могут иметь все возможные значения.

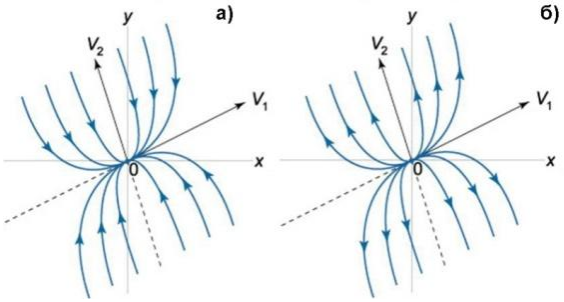


Рис. 18. Точка равновесия – узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

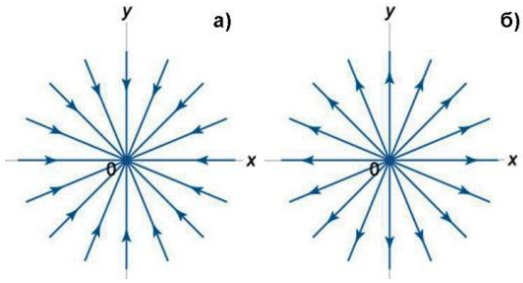


Рис. 19 . Докритический узел (звезда): а – устойчивый, б – неустойчивый.

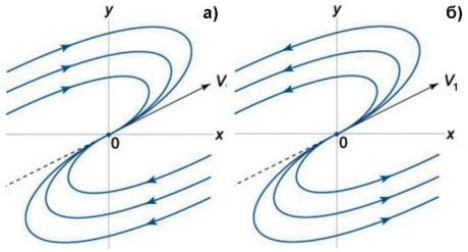


Рис. 20. Вырожденный узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

Вырожденный узел. Пусть собственные значения матрицы A снова являются совпадающими: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\neq0$. В отличие от предыдущего случая дикритического узла предположим, что геометрическая кратность собственного значения (или другими

словами размерность собственного подпространства) равна теперь 1. Это означает, что матрица A имеет лишь один собственный вектор V_1. Второй линейно независимый вектор, необходимый для составления базиса, определяется как вектор W_1, присоединенный к V_1. В случае $\lambda_1=\lambda_2=\lambda<0$ точка равновесия называется *устойчивым вырожденным узлом*. При $\lambda_1=\lambda_2=\lambda>0$ положение равновесия называется *неустойчивым вырожденным узлом*.

Особые точки могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Однако, даже в случае двух функций $x(t)$, $y(t)$, т.е. фазового портрета на плоскости, может наблюдаться чуть более сложное сочетание. Одна и та же особая точка может быть устойчива, например, по $x(t)$, и неустойчива по $y(t)$. Такую особую точку называют **седлом**.

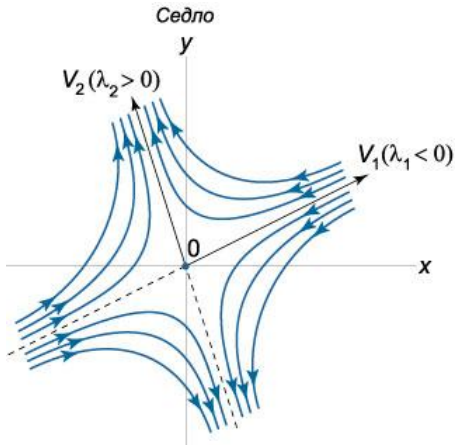


Рис. 21. Точка равновесия - седло.

Седло – положение равновесия при условиях $\lambda_1,\lambda_2\in R$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$; собственные значения действительны и имеют противоположные знаки. Это – негиперболическое равновесие. Седло всегда неустойчиво. В окрестности седла четыре интегральные кривые (сепаратрисы) входят в особые точки, а между ними располагаются интегральные кривые типа гипербол. Поскольку одно из собственных значений положительно, то седло является неустойчивой точкой равновесия. Если $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$, то собственные значения λ_1 и λ_2 ассоциируются с соответствующими собственными векторами V_1 и V_2. Прямые, направленные вдоль собственных векторов V_1, V_2, называются *сепаратрисами*. Они являются асимптотами для остальных фазовых траекторий, имеющих форму гипербол. Каждой из сепаратрис можно сопоставить определенное направление движения. Если сепаратриса связана с отрицательным собственным значением $\lambda_1<0$, т.е. направлена вдоль вектора V_1, то движение вдоль нее происходит к точке равновесия $X=0$. И наоборот, при $\lambda_2>0$, т.е. для сепаратрисы, связанной с вектором V_2, движение направлено от начала координат. Траектории имеют вид гипербол (асимптоты к ним – прямые линии). Число характеристик оканчивающихся в седле всегда конечное и чётное. Каждая из них имеет два продолжения. Область, ограниченная двумя соседними характеристиками, оканчивающимися в особой точке, есть область отталкивания. Если положение равновесия является седлом, то существуют фазовые траектории, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Движение по одной из его сепаратрис происходит в направлении начала координат, по другой – от начала координат. По всем другим фазовым траекториям движение происходит в соответствии с движением по сепаратрисам.

Сепаратриса – траектория динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаяся к седловому состоянию равновесия при времени $t\to\infty$ (устойчивая сепаратриса) или при $t\to-\infty$ (неустойчивая сепаратриса). Если сепаратриса стремится к седлу при $t\to\pm\infty$, то её (вместе с седлом) называют петлей сепаратрисы.

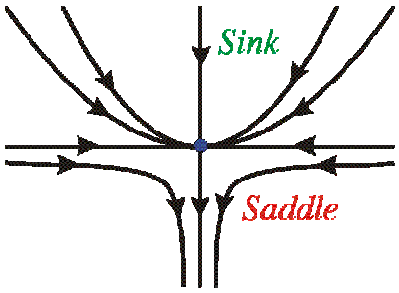


Рис. 22. Особая сингулярная точка

Если положение равновесия – седло, то достаточно установить направление движения по любой одной траектории, а дальше можно однозначно установить направление движения по всем остальным. Если $x(t)\to0$ при $t\to+\infty$, то движение по сепаратрисе $y=kx$ идёт в направлении точки равновесия. Если $x(t)\to0$ при $t\to\pm\infty$,то движение по сепаратрисе $y=kx$ идёт от точки равновесия.

Фокус (спиральная точка) – неподвижная точка имеет место, если собственные значения λ_1, λ_2 являются комплексными числами, действительные части которых не равны нулю (λ_1 и λ_2 – комплексные, но не чисто мнимые), т.е. когда собственные значения комплексно сопряжены. Если матрица A состоит из действительных чисел, то комплексные корни будут представлены в виде комплексно-сопряженных чисел: $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$. Все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности фокуса, представляют собой спирали с бесконечным числом витков в любой сколь угодно малой окрестности фокуса (всякая интегральная кривая бесконечное число раз закручивается вокруг фокуса). Это – семейство логарифмических спиралей с асимптотической точкой в начале, но без предельной касательной; они делают около точки (0,0) бесконечное число оборотов.

Комплексное решение $X_1(t)$ соответствующее собственному числу $\lambda_1=\alpha+i\beta$ имеет вид:

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t}V_1 = e^{(\alpha+i\beta)t}(U+iU), \qquad (11)$$

где $V_1=U+iW$ − комплекснозначный собственный вектор, ассоциированный с числом λ_1, U и W − действительные векторные функции.

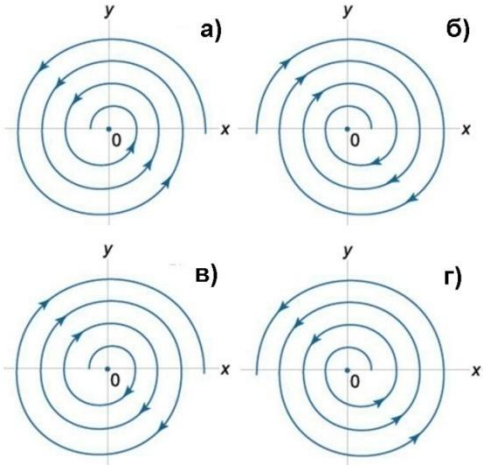


Рис. 23. Равновесная точка – фокус: а – устойчивый, c>0; б – устойчивый, c<0; в – неустойчивый, c<0; г – неустойчивый, c>0.

Представим постоянные C_1,C_2 в виде $C_1=C\sin\delta$, $C_2=C\cos\delta$, где δ − некоторый вспомогательный угол. Решение $X(t)$ раскладывается по базису, заданному векторами и W: $X(t)=\mu(t)U+\eta(t)W$, где коэффициенты разложения $\mu(t)$, $\eta(t)$ определяются формулами: $\mu(t)=Ce^{\alpha t}\sin(\beta t+\delta)$,$\eta(t)=Ce^{\alpha t}\cos(\beta t+\delta)$. Фазовые траектории представляют собой спирали. При $\alpha<0$ спирали будут закручиваться, приближаясь к началу координат. Такое положение равновесия называется *устойчивым фокусом*. Соответственно, при $\alpha>0$ будет *неустойчивый фокус*. Направление закручивания спиралей можно определить по знаку коэффициента c в исходной матрице A. Действительно, рассмотрим производную dy/dt, например, в точке (1,0): $dy/dt(1,0)=c\cdot 1+d\cdot 0=c$. Положительный коэффициент $c>0$ соответствует закручиванию спиралей против часовой стрелки. При $c<0$ спирали будут закручиваться по часовой стрелке. С учётом направления закручивания спиралей, всего существует 4 различных вида фокуса. При определённых условиях (например, при малом коэффициенте трения колебательной системы) фокус превращается в центр – колебания становятся периодическими.

Устойчивый фокус – все фазовые траектории при приближении к особой точке спиралеобразно закручиваются вокруг неё в одном и том же направлении (спиральный сток). Фокус стабилен, когда собственные значения имеют отрицательную действительную часть Спираль закручивается либо о часовой стрелке или против нее (направление закрутки определяется знаком производной y'(t) в точках оси x. Фазовые

траектории оканчиваются в неподвижной точке, но ни одна из них не оканчивается определённой касательной.

Неустойчивый фокус – фазовые траектории по спирали уходят от особой точки и уходят в бесконечность (спиральный источник). Фокус не устойчив, когда собственные значения положительную действительную часть.

Особые точки типа фокус и узел дают примеры аттракторов, к которым притягиваются все фазовые траектории.

Центр – положение равновесия, в случае, когда собственные значения матрицы A являются число мнимыми числами. Для матрицы с действительными элементами мнимые собственные значения будут комплексно-сопряженными. Фазовый портрет, соответствующий особой точке центр, представляет собой бесконечное семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых – эллипсов с центром в начале координат. Фазовый портрет для особой точки типа центр представляет собой простейший пример бесконечного семейства консервативных движений.

В случае центра фазовые траектории формально получаются из уравнения спиралей при α=0 и представляют собой *эллипсы*, т.е. описывают периодическое движение точки на фазовой плоскости. Фазовые траектории описывают замкнутые эллипсы или окружности вокруг неподвижной точки в начале координат, ни одна фазовая траектория не проходит через особую точку. Движение может идти. При определённых условиях центр может трансформироваться в фокус. Положения равновесия типа "центр" являются устойчивыми по Ляпунову.

Возможны два вида центра, различающиеся направлением движения точек (по часовой стрелке или против нее). Как и в случае спиралей, направление движения можно определить, например, по знаку производной dy/dt в какой-либо точке. Если взять точку (1,0), то dy/dt(1,0)=c, т.е. направление вращения определяется знаком коэффициента c.

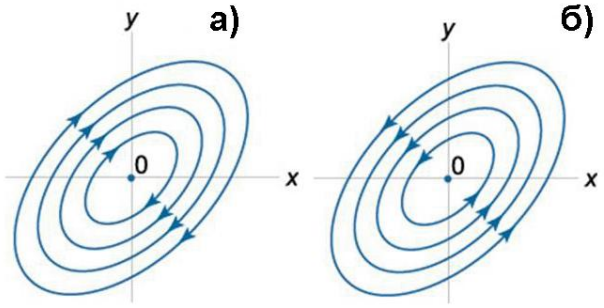


Рис. 24. Равновесная точка – центр: а – c<0; б – c>0.

Итак, мы рассмотрели различные типы точек равновесия в случае *невырожденной матрицы* $A(detA\neq 0)$.С учётом направления фазовых траекторий всего существует 13 различных фазовых портретов.

Теперь обратимся к случаю *вырожденной матрицы A*.

Случай $\lambda_1\lambda_2=0$ представляют предмет более глубокого исследования. Если λ_1 и λ_2 – чисто мнимые корни, $\lambda_{1,2}=\pm i\beta$, $\beta\neq 0$, то особая точка может быть фокусом или центром, а может иметь и более сложный характер.

Если матрица является вырожденной, то у неё одно или оба собственных значения равны нулю. При этом возможны следующие частные случаи:

Случай $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=0$. Здесь общее решение записывается в виде $X(t)=C_1e^{\lambda 1t}V_1+C_2V_2$, где V_1, V_2, − собственные векторы, соответствующие числам λ_1 и λ_2. Ванном случае вся прямая, проходящая через начало координат и направленная вдоль вектора V_2, состоит из точек равновесия (эти точки не имеют специального названия). Фазовые траектории представляют собой лучи, параллельные другому собственному вектору V_1. В зависимости от знака λ_1 движение при $t\to\infty$ происходит либо в направлении прямой V_2, либо от нее.

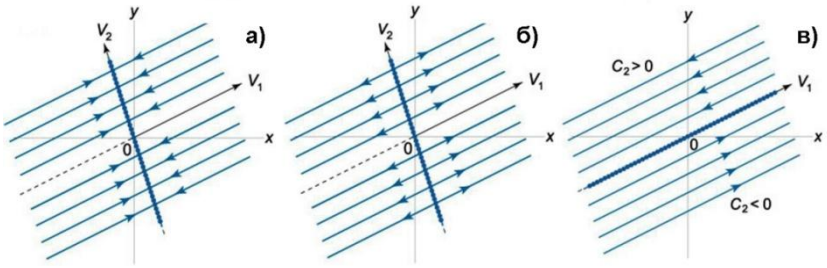


Рис. 25. Вырожденная матрица (сингулярность), $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2=0$: а - $\lambda_1<0$; б - $\lambda_1>0$; в – $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Случай $\lambda_1=\lambda_2=0$. В этом случае размерность собственного подпространства матрицы равна 2 и, следовательно, существуют два собственных вектора V_1 и V_2. Такая ситуация возможна при *нулевой матрице* A. Общее решение выражается формулой $X(t)=C_1V_1+C_2V_2$.Отсюда следует, что любая точка плоскости является положением равновесия системы.

Случай $\lambda_1=\lambda_2=0$. Данный случай вырожденной матрицы отличается от предыдущего тем, что существует лишь 1 собственный вектор (Матрица A при этом будет *ненулевой*). Для построения базиса в качестве второго линейно независимого вектора можно взять вектор W_1, присоединенный к V_1.

Общее решение системы записывается в виде $X(t)=(C_1+C_2t)V_1+C_2W_1$. Здесь все точки прямой, проходящей через начало координат и направленной вдоль собственного вектора V_1, являются неустойчивыми положениями равновесия. Фазовые траектории представляют собой прямые, параллельные V_1. Направление движения вдоль этих прямых при $t\to\infty$ зависит от постоянной C_2: при $C_2<0$ движение происходит слева направо, а при $C_2>0$ − в противоположную сторону. Как видно, в случае вырожденной матрицы существует 4 различных фазовых портрета, Таким образом, линейная автономная система второго порядка допускает всего 17 различных фазовых портретов.

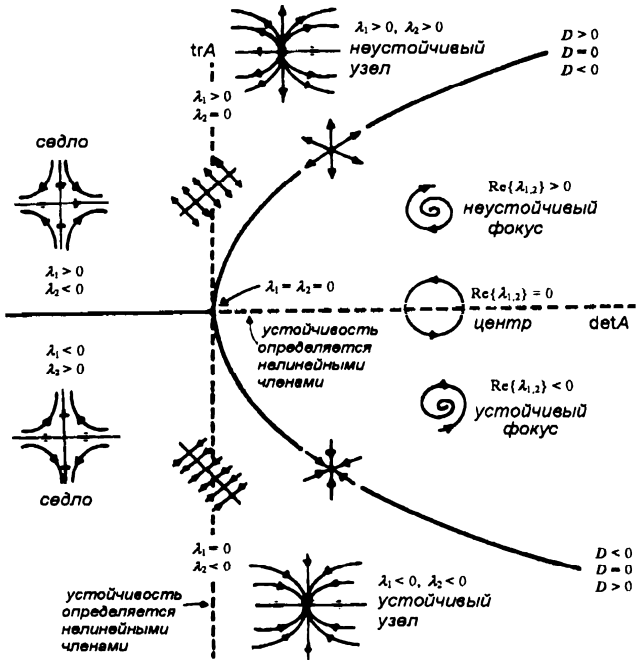


Рис. 26. Классификация особых точек линейных автономных систем.

В качестве примера, решим несколько задач на определение положения особых точек и построения фазовых портретов линейных двумерных систем ОДУ.

Пример 15. Исследовать положения равновесия линейной автономной системы и начертить ее фазовый портрет $dx/dt=-x$, $dx/dt=2x-2y$.

Запишем матрицу систему и вычислим её определитель: $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $\det A=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2\neq0.$

Поскольку $detA\neq0$, то данная система имеет единственное положение равновесия в точке $X=0$.

Найдем собственные значения матрицы

$$\det(A-\lambda E_n)=0,\quad \begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0,\Rightarrow(\lambda+1)(\lambda+2)=0,\Rightarrow\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2.$$

Оба собственных значения действительны и отрицательны, поэтому точка равновесия $X=0$ представляет собой *устойчивый узел*. Определим уравнения *главных изоклин*, т.е. прямых, которые являются касательными к фазовым траекториям. Уравнение вертикальной изоклины имеет вид:

$\frac{dx}{dt} = -x = 0 \quad или \quad x = 0.$ Уравнение горизонтальной изоклины записывается как $\frac{dy}{dt} = 2x - 2y = 0 \quad или \quad y = x.$ Найдём уравнения асимптот. Это можно сделать, вычислив собственные векторы V_1, V_2 матрицы A:

$$(A - \lambda_1 I)V_1 = 0, \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 2 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2V_{11} - V_{21} = 0, \Rightarrow V_{11} = 1, V_{21} = 2,$$

$$\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda 2I)V_2 = 0, \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+2 & 0 \\ 2 & -2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot V_{12} + 0 \cdot V_{22} = 0 \\ 2 \cdot V_{12} + 0 \cdot V_{22} = 0 \end{cases}, \Rightarrow V_{12} = 0, \quad V_{22} = 1, \quad V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Изобразим на плоскости собственные векторы V_1, V_2, горизонтальную изоклину **y**=x и построим схематический фазовый портрет системы (рис. 27). Фазовые траектории будут приближаться к нулю, касаясь прямой, направленной вдоль вектора V_1, поскольку этому собственному вектору соответствует наименьшее по модулю собственное значение $|\lambda_1|=1$.

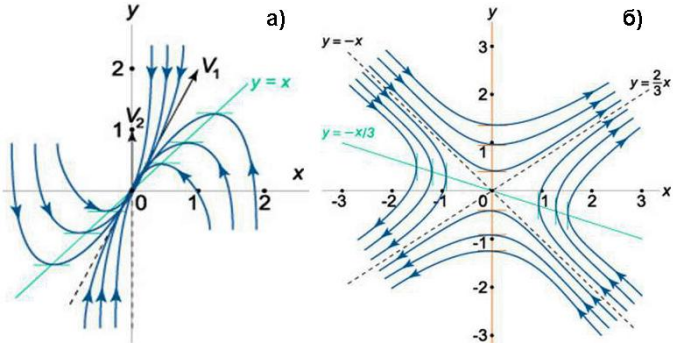
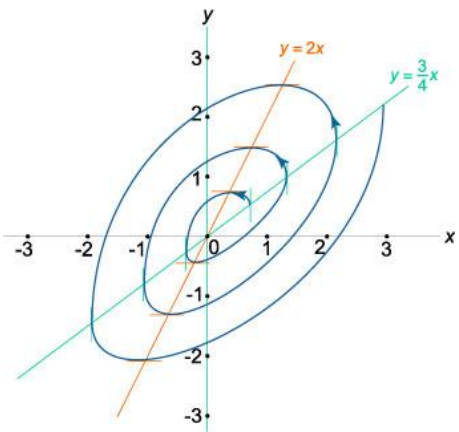


Рис. 27. К примерам 15(а) и 16 (б).

Пример 16. Исследовать положения равновесия динамической системы dx/dt=x+3y, dy/dt=2x и схематически изобразить ее фазовый портрет.

Убедимся сначала, что определитель матрицы не равен нулю: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$ Следовательно, система имеет единственную точку равновесия в начале координат. Решим данную задачу без вычисления собственных значений и собственных векторов. Поскольку определитель $detA$<0, то нулевое положение равновесия является с*едлом*. Определим уравнения изоклин. Вертикальная изоклина описывается следующей линейной функцией: dx/dt=x+3y=0,⇒y=−x/3. Уравнение горизонтальной изоклины имеет вид: dy/dt=2x=0,⇒x=0 (ось Oy). Найдём уравнение сепаратрис, которое имеет вид $y=kx$. Подставляя это в исходную систему, получаем квадратное уравнение для коэффициента k:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3kx \\ \frac{kdx}{dt} = 2x \end{cases}, \Rightarrow 2x = k(x + 3kx), \Rightarrow 3k^2x + kx - 2x = 0$$



$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{6} = -1, \frac{2}{3}.$$

Уравнения сепаратрис выглядят так: $y=-x$, $y=(2/3)x$. Определим направление движения вдоль фазовых траекторий. Возьмём, к примеру, точку (1,0) и вычислим производную dy/dt в этой точке: dy/dt(1,0)=2·1=2>0. Поскольку производная dy/dt>0, то при увеличении времени t

точка пересекает ось 0x в направлении снизу вверх. Отметим это на фазовой плоскости. Далее, исходя из симметрии, можно указать направления движения и по остальным траекториям.

Рис. 28. К примеру 17.

Пример 17. Исследовать точки равновесия и начертить фазовый портрет следующей системы: dx/dt=3x−4y, dy/dt=2x−y.

Определитель матрицы данной системы равен

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix},\quad \det A=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5\neq 0.$$

.Следовательно, система имеет единственное положение равновесия в точке (0,0). Вычислим собственные значения матрицы A:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -4\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,\Rightarrow(\lambda-3)(\lambda+1)+8=0,\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+5=0,\quad D=-16,\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i.$$

Собственные значения λ_1, λ_2 представляют собой комплексно-сопряженную пару чисел с положительной действительной частью. Поэтому положение равновесия в начале координат является *неустойчивым фокусом*. Найдём уравнения изоклин. Вертикальная изоклина описывается следующим уравнением: dx/dt=3x−4y=0⇒y=(3/4)x. Горизонтальная изоклина определяется уравнением: dy/dt=2x−y=0⇒y=2x. Выясним направление закручивания спиралей, вычислив производную dy/dt в точке (1,0): dy+dt(1,0)=2·1−0=2>0.Таким образом, спирали закручиваются против часовой стрелки. С учетом найденных данных построим схематический фазовый портрет системы (рис. 28).

12.3 Фазовые портреты и особые точки нелинейных ОДУ

При изменении параметров в нелинейных уравнениях могут происходить не только количественные изменения (смещения траекторий, изменения скоростей), но и качественные преобразования, при которых возникают новые структурные элементы фазового портрета или исчезают некоторые из имеющихся, т. е. происходит перестройка структуры фазового портрета. Закономерности такой перестройки устанавливаются методами теорий бифуркаций и катастроф.

В анализе поведения нелинейных динамических систем широкое применение нашли методы линеаризации, поскольку в окрестностях точки равновесия поведение фазовой диаграммы нелинейной модели аналогично поведению линейной. Остановимся на этой методике.

Предварительно напомним, что для фазовых траекторий автономной системы с непрерывно дифференцируемой правой частью справедливы следующие утверждения:

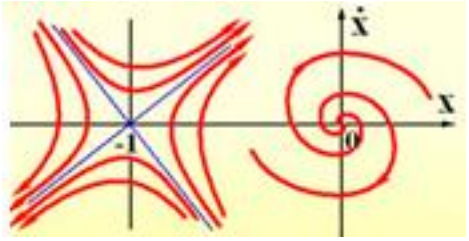
– две фазовые кривые либо не имеют общих точек, либо совпадают;

– фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая (в каждой её точке есть ненулевой касательный вектор);

– всякая фазовая кривая принадлежит к одному из трёх типов – гладкая кривая без самопересечений, замкнутая гладкая кривая (цикл), точка.

Пример 18. Имеем систему уравнений . Равновесная точка x=0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}-\mu\left(3x^2+y^2\right) & -\left(1+2\mu xy\right)\\ \left(1-2\mu xy\right) & -\mu\left(x^2+3y^2\right)\end{bmatrix}\quad A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$



x=$r$cosθ и y=$r$sinθ $\Rightarrow\dot r=-\mu r^3$ и $\dot\theta=1$. Стабильный фокус при μ>0 и нестабильный фокус при μ<0.

Рис. 29. К примеру 19.

Приведём примеры анализа систем линейных ОДУ второго порядка.

Пример 19. Найти точки равновесия и характеристические фазовые траектории вокруг этих точек для системы

$$\ddot x+(3\dot x-0{,}5)\dot x+x+x^2=0\,.$$

Решение. $\ddot{x}=\dot{x}=0;\quad x+x^2=x(1+x)=0;\quad \begin{cases} x_{01}=0 \\ x_{02}=0 \end{cases} \begin{cases} x=\Delta x+x_{01}=\Delta x \\ x=\Delta x+x_{02}=\Delta x-1 \end{cases}$. Проведём линеаризацию системы. $\begin{cases} \Delta\ddot{x}-0{,}5\Delta\dot{x}+\Delta x=0 \\ \Delta\ddot{x}-0{,}5\Delta\dot{x}+(\Delta x-1)+(\Delta x-1)^2=0 \end{cases}; \begin{cases} \Delta\ddot{x}-0{,}5\Delta\dot{x}+\Delta x=0 \\ \Delta\ddot{x}-0{,}5\Delta\dot{x}-\Delta x=0 \end{cases}$

Характеристическое уравнение $\begin{cases} \lambda^2-0{,}5\lambda+1=0 \\ \lambda^2-0{,}5\lambda-1=0 \end{cases} \begin{cases} \lambda=0{,}5\pm i0{,}97 \ \textit{неустойчивый фокус} \\ \lambda=\begin{cases} 0{,}78 \\ -1{,}28 \end{cases} \quad \textit{седло} \end{cases}$

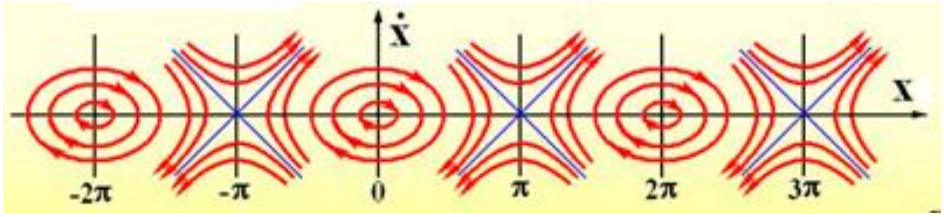


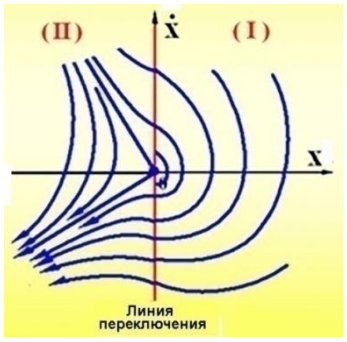
Рис. 30. К примеру 20.

Пример 20. Найти точки равновесия и характеристические фазовые траектории вокруг этих точек для системы $\ddot{x}+\sin x=0$.

Решение. $\ddot{x}=\dot{x}=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x_0=k\pi \quad x_0=\begin{cases} 2k\pi & \sin x=\sin(2k\pi+\Delta x)=\sin\Delta x\approx\Delta x \\ (2k+1)\pi & \sin x=-\sin\Delta x\approx-\Delta x \end{cases}$

После линеаризации

$$\begin{cases} \Delta\ddot{x}+\Delta x=0 \\ \Delta\ddot{x}-\Delta x=0 \end{cases} \textit{харктерстическое уравнерие} \begin{cases} \lambda^2+1=0 \\ \lambda^2-1=0 \end{cases} \begin{cases} \lambda=\pm i1 \\ \lambda=\pm1 \end{cases} \begin{cases} \textit{Центр} \\ \textit{Седло} \end{cases}$$



Пример 21. Найти точки равновесия и характеристические фазовые траектории вокруг этих точек для системы $\ddot{x}+\dot{x}+|x|=0$.

Решение. $\begin{cases} \ddot{x}+\dot{x}+x=0 & x\ge0 \quad I \\ \ddot{x}+\dot{x}-x=0 & x<0 \quad II \end{cases}$ Сингулярная точка $\begin{cases} I & x_0=0 \\ II & x_0=0 \end{cases}$

Рис. 31. К примеру 21.

Характеристическое уравнение $\begin{cases} I & \lambda^2+\lambda+1=0 \\ II & \lambda^2+\lambda+1=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2}=-0{,}5\pm i0{,}866 & \textit{Фокус} \\ \lambda_{1,2}=\begin{cases} 0{,}62 \\ -1{,}62 \end{cases} & \textit{Седло} \end{cases}$$

Сингулярная (равновесная) точка - точка на фазовых траекторий с неточным наклоном

$\alpha=\dfrac{d\dot{x}}{dx}=\dfrac{d\dot{x}/dt}{dx/dt}=\dfrac{f(x,\dot{x})}{\dot{x}}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \dot{x}=0\end{cases}$ **Для линейной время инвариантной системы начало есть единственной равновесной точки**.

Пример 22. Найти точки равновесия и характеристические фазовые траектории вокруг этих точек для системы $\ddot{x}+x+sign\dot{x}=0$

Решение. $\begin{cases} \ddot{x}+x+1=0 & \dot{x}\ge0 \quad I \\ \ddot{x}+x-1=0 & \dot{x}<0 \quad II \end{cases}$ Сингулярная точка $\begin{cases} I & x_{01}=-1 \\ II & x_{02}=1 \end{cases}$

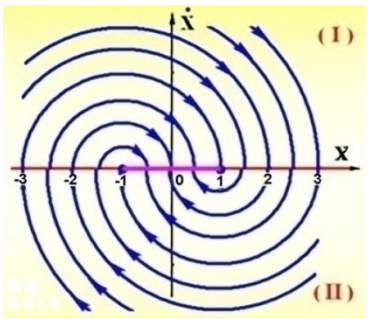


Рис. 32. К примеру 22.

Характеристическое уравнение $\begin{cases} I & \lambda^2+1=0 \\ II & \lambda^2+1=0 \end{cases}$

Полюса $\begin{cases} \lambda_{1,2}=\pm i1 & Центр \\ \lambda_{1,2}=\pm i1 & Центр \end{cases}$

Линия переключения – граница, разделяющая различные линейные плоскости.

Равновесная (сингулярная) линия генерируется взаимодействием между фазовыми траекториями в различных площадях.

Пример 23. Найти точки равновесия и характеристические фазовые траектории вокруг этих точек для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y(x+1) \\ \dfrac{dy}{dt}=x(y+1) \end{cases}$$

Система имеет два равновесных (стационарных) решения

Равновесие 1: тривиальное решение x_0=0; y_0=0

Равновесие 2: нетривиальное решение x_0=-1; y_0=-3

Линеаризованная модель $\dot{X}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}X$, где X=x-x_0. После линеаризации получим

$$A=\begin{bmatrix} y_0 & x_0+1 \\ y_0+3 & x_0 \end{bmatrix}$$

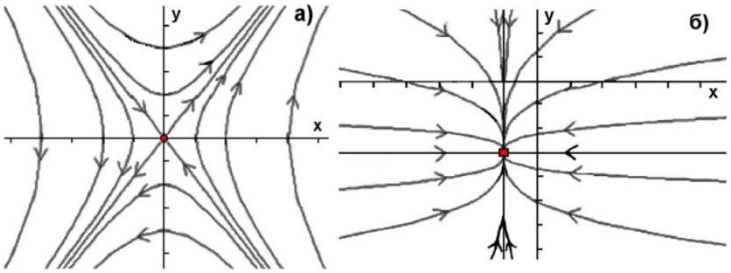


Рис. 33. Фазовые портреты линеаризованной модели примеру 23: *а – равновесная точка 1; б – равновесная точка 2.*

Равновесие 1 (тривиальное) (0,0) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1=-\sqrt{3};\quad \lambda_2=\sqrt{3}$

Равновесная точка - седло,

Стабильный собственный вектор $V_1=\begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}866 \end{bmatrix}$. Нестабильный собственный вектор $V_2=\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}866 \end{bmatrix}$.

Равновесие 2 (нетривиальное) (-1,-3) $A=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1=-3,\quad \lambda_2=-1$

Точка равновесия - стабильный узел.

"Быстрый" стабильный собственный вектор $V_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ "Медленный" стабильный собственный вектор $V_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

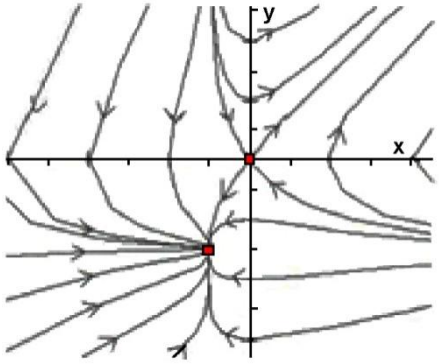


Рис. 34. К пределу 23. Фазовая диаграмма для нелинейной модели. *Линейная модель поглощает поведение нелинейной модели вблизи критической точки.*

12.4 Многомерные системы

Заметим, что термин седло в R^m относится ко всем случаям, в которых существуют некоторые собственные значения с положительными и некоторые с отрицательными вещественными частями. Термин седловой узел используется, когда собственные значения являются вещественными, седловой фокус, когда некоторые из собственных значений являются комплексными. Пример последнего представлен на рис. 35. Два вещественных вектора, связанные с комплексно сопряженной парой собственных значений с отрицательной вещественной частью, охватывают устойчивое собственное пространство. Орбиты асимптотически приближаются к неустойчивому собственному пространству, определяемому собственным вектором, связанным с положительным собственным значением, вдоль которого динамика взрывоопасна.

Якобиан трехмерной системы имеет 3 собственных значения, одно из которых вещественно, а две другие могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. В зависимости от типов и признаков собственных значений возможны различные ситуации (рис. 36).

Трёхмерные системы описываются с использованием понятий:

Устойчивый (неустойчивый) узел – три действительных корня одного знака или один действительный и два комплексных с тем же знаком действительной части и с ведущим действительным корнем.

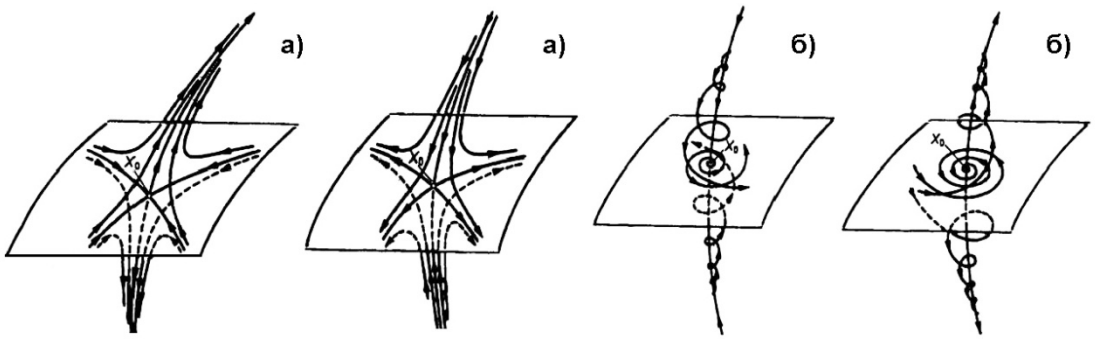


Рис. 35. Решения дифференциальных уравнений в трёхмерном представлении: а – особые точки x_0 типа седло-узел; б – особые точки x_0 типа седло-фокус.

Устойчивый (неустойчивый) фокус – один действительный и два комплексных с ведущими комплексными.

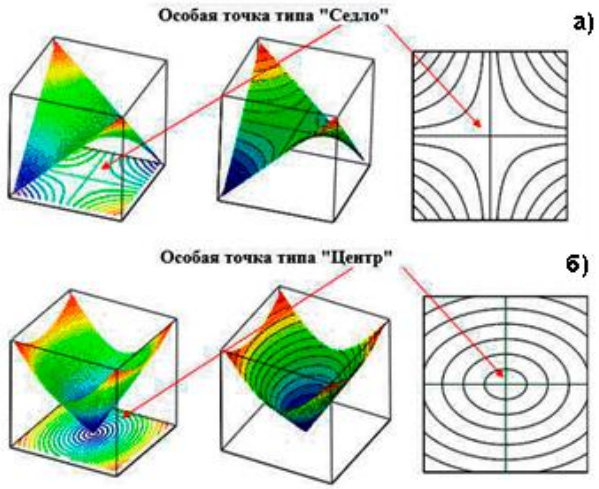


Рис. 36. Особые точки: а – центр; б – седло.

13. РЕГУЛЯРНЫЕ АТТРАКТОРЫ И РЕПЕЛЛЕРЫ

Несмотря на то, что в динамических системах переходные процессы могут длиться очень долго и их поведение важно для теории и практики, в случае динамических (как консервативных, так и диссипативных) систем обычно сосредотачиваются на долгосрочном поведении системы, игнорируя переходное поведение, связанное с запуском системы. В анализе динамического процесса ограничиваются рассмотрением особых точек и аттрактора, к которому притягиваются траектории, исходящие из начальных условий. Этого достаточно для понимания асимптотических свойств динамической системы. Аттракторы бывают разными: регулярными, случайными, странными, хаотическими, дикими, фрактальными и нефрактальными, скрытыми, самовозбуждающимися и др. Таким же разнообразием отличаются репеллеры – антагонисты аттракторов, отталкивающие фазовые траектории. Сложные динамические системы имеют несколько аттракторов и репеллеров.

В данной главе мы рассмотрим свойства простых (классических, регулярных) аттракторов и репеллеров.

13.1 Типы аттракторов

Наибольший интерес при изучении динамических систем представляют **инвариантные множества**, обладающие свойством устойчивости – **аттракторы**. Локализация таких множеств позволяет построить глобальный фазовый портрет системы.

Инвариантное множество – такое множество, что при начальных данных из него решения принадлежат ему всё время своего существования. Подмножество *G* фазового пространства называется инвариантным по отношению к фазовому потоку φ^t множеством или просто инвариантным множеством, если для всех допустимых *t* имеет место $\varphi^t(G)=G$. Инвариантное многообразие векторного поля и соответствующей системы дифференциальных уравнений – это такое подмногообразие фазового пространства, которое в каждой своей точке касается вектора поля.

Множество M в фазовом пространстве X, состоящее из целых траекторий (является объединением некоторой совокупности траекторий), называется инвариантным.

Пусть γ — фазовая траектория, соответствующая решению $x(t)$, определенному на интервале (p, q). При приближении к границам интервала (p или q), т.е. при $t \to p+0$ и при $t \to q-0$ ситуации могут быть существенно разными и нетривиальными.

Совокупность пределов последовательностей $x(t_n)$, для которых $t_n \to q-0$ называется ω-предельным множеством

Совокупность пределов последовательностей $x(t_n)$, для которых $t_n \to p+0$ называется α-предельным множеством.

Такие множества обозначаем $\omega(\gamma)$ и $\alpha(\gamma)$:

$$\omega(\gamma)=\bigcap_{t\to q}\overline{x((t,q))},\quad \alpha(\gamma)=\bigcap_{t\to p}\overline{x((p,t))}. \qquad (1)$$

Поскольку каждая фазовая траектория однозначно определяется одной своей точкой, уместны обозначения $\alpha(x_0)$ и $\omega(x_0)$ для α- и ω-предельных множеств траектории, проходящей через точку x_0. Множество $M \subset G$ называется инвариантным для системы $x'=f(x)$, если вместе с каждой своей точкой x_0 это множество содержит и всю фазовую траекторию системы, проходящую через эту точку.

Точка на фазовой траектории разделяет ее на две полутраектории, положительную и отрицательную. Множество $M \subset G$ положительно инвариантно, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и положительную полутраекторию, начинающуюся в этой точке. Аналогично понятие отрицательно инвариантного множества. Множество инвариантно, если он одновременно и положительно инвариантно, и отрицательно инвариантно. Фазовую траекторию будем называть ограниченной в области $G \subset \mathrm{R}^n$, если ее замыкание является компактным подмножеством G.

Теорема. ***Для любой траектории α- и ω-предельные множества являются замкнутыми и инвариантными. Если траектория ограниченная, то эти множества связны.***

Траектория $\gamma(t)$ периодическая, если существует такое T, что $\gamma(t+T)=\gamma(t)$, причём $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ при $|t_1-t_2|<T$.

Пусть в момент времени t_0 состояние системы определяется вектором x_0, а в момент t – вектором $x(t)=T_{\Delta t}x_0$, где T_{Dt} – *оператор эволюции* на интервале $\Delta t=t-t_0$. Если в фазовом пространстве существуют два множества V и $L\in V$, такие, что для любого начального состояния $x_0\in V$ при $t\to\infty$ или при $t\to-\infty$, начиная с определенного момента времени $x(t)$, то тогда L называют *предельным множеством динамической системы*.

Таким образом под действием оператора эволюции все точки системы в пределе переходят в точки предельного множества. Если все точки множества V будут принадлежать L при $t\to\infty$, то *L–притягивающее предельное множество, или аттрактор.* Тогда V – *бассейн притяжения аттрактора*. Если все точки множества V будут принадлежать L при $t\to-\infty$, то L – отталкивающее предельное множество, или *репеллер.*

Предельные множества играют важнейшую роль в нелинейной динамике. К ним относятся устойчивые стационарные состояния типа устойчивый узел и фокус, а также с устойчивые замкнутые фазовые траектории – предельные циклы. В динамических системах третьего порядка кроме этих двух типов возможны тороидальные предельные множества, соответствующие квазипериодическим фазовым траекториям, и еще более сложные хаотические предельные множества (см. далее). Если множество V состоит из двух подмножеств $V=W^s\cup W^u$, причем точки, принадлежащие W^s, стремятся к L в прямом времени, а точки, принадлежащие W^u, стремятся к L в обратном времени, тогда L называется *седловым предельным множеством* (седлом). Множества W^s и W^u - устойчивое и неустойчивое многообразия седла.

Инвариантные множества и предельные множества аналогичны понятию аттрактора. Инвариантное множество – эволюционирующее множество. Предельное множество – множество точек, таких что, если имеет место некоторое начальное состояние, то оно заканчивается сколь угодно близко к предельному множеству (т.е. к каждой точке множества) при стремлении времени к бесконечности. Аттракторы – предельные множества, но не все предельные множества являются аттракторами. Возможно, что некоторые точки системы сходятся к предельному множеству, но разные точки, слегка отклонившиеся от предельного множества, могут быть сбиты и никогда не смогут вернуться в окрестности предельного множества.

Пример 1. Маятник с торможением имеет две инвариантные точки: точку x_0 минимальная высота и точку x_1 максимальная высота. Точка x_0 также предельное множеством, так как траектории сходятся к ней; точка x_1 не является предельным множеством. Из-за диссипации из-за сопротивления воздуха точка x_0 также является аттрактором. Если бы не было торможения, точка x_0 не была бы аттрактором.

Пуанкаре, предложивший термин аттрактор, под аттрактором подразумевал предельный цикл, и устойчивый фокус. Позднее под аттракторами стали понимать также реальные структуры в пространстве и времени, на которые выходят процессы самоорганизации в открытых нелинейных средах.

Эволюцию динамических систем часто описывают системой дифференциальных уравнений или отображений. Представление решения этих уравнений как движения некоторой точки в пространстве с размерностью, равной числу переменных называют фазовыми траекториями системы. Поведение фазовой траектории в смысле устойчивости показывает, что существует несколько основных его типов, когда все решения системы в конечном счёте сосредотачиваются на некотором подмножестве. Такое подмножество называется **аттрактором**. Аттрактор имеет область притяжения (бассейн аттрактора), состоящую из множества начальных точек, таких, что при увеличении времени все фазовые траектории, начавшиеся в них, стремятся именно к этому аттрактору.

Аттрактивность – сила притяжения, с которой система или переменная стремится к аттрактору. Для замкнутой динамической системы притягивающим множеством является замкнутое подмножество *A* его фазового пространства, что большинство исходных состояний будет эволюционировать к *A*.

Аттрактор – неразложимое притягивающее множество, т.е. множество точек в фазовом пространстве динамическойсипативной системы, посещаемых в установившемся режиме.

Аттрактор (*attract* – привлекать, притягивать) – состояние, к которому стремится система или переменная при своей эволюции во времени при $t \to \infty$; компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности. Аттрактором может являться притягивающая неподвижная точка (к примеру, в задаче о маятнике с трением о воздух), периодическая траектория (пример – самовозбуждающиеся колебания в контуре с положительной обратной связью), или некоторая ограниченная область с неустойчивыми траекториями внутри (как у странного аттрактора). Формально называется узел или сток

Замечание. Аттракторы – это множества, к которым приближаются точки при последовательных итерациях отображения. Роль отображений важна, т.к. работать с ними намного легче, чем с дифференциальными уравнениями. Более того: для нахождения аттрактора, не нужно прибегать к трудоёмким итерациям и полному анализу отображения. Система сама найдёт свой аттрактор.

Аттракторы – это точки, которые действуют как виртуальные магниты – либо привлекают, либо отражают другие объекты.

Аттрактор – наименьшая единица (элементарная структура), которая не может быть разложена на два или более аттрактора с различными бассейнами притяжения. Динамическая система может иметь несколько аттракторов, каждый из которых обладает собственным бассейном притяжения. Консервативные системы не имеют аттракторов, так как их движение является периодическим. Аттракторы характерны для диссипативных динамических систем, объемы которых экспоненциально сокращаются, в результате чего аттрактор имеет объемное фазовое пространство с нулевым объёмом.

При описании динамической системы с дискретным временем отображениями, простейшими аттракторами являются неподвижные точки, а систем с непрерывным временем, описываемых дифференциальными уравнениями, аттракторы – точки равновесия. Однако известны и существенно более экзотические виды аттракторов.

Аттрактор – это состояние динамической системы (обычно равновесие, т.е. устойчивое состояние системы), к которому она стремится в процессе своего движения (развития во времени). Это замкнутое асимптотически устойчивое множество состояний динамической физической системы, к которому система стремится эволюционировать, независимо от состояний системы. В аттракторах плотность траекторий максимальна. Если система попадает в поле притяжения определенного аттрактора, то она неизбежно начинает эволюционировать к этому устойчивому состоянию, строиться по плану, заложенному в аттракторе, т.е. в текущий момент своего развития система определяется ее будущим конечным видом.

Аттрактор – математический образ установившихся режимов, представляемый в виде притягивающего множества в фазовом пространстве объекта или системы. Это асимптотически устойчивое решение замкнутой системы. К аттракторам относятся и нестационарные точки в фазовом пространстве внутренних (обобщенных) координат объекта, соответствующие программным движениям. В нелинейных динамических рядах аттрактор определяет уровень равновесия системы.



***Рис. 1. Движение к неподвижному точечному аттрактору (узел, сток) в фазовом пространстве и временном ряду*.**

Аттрактор характеризует относительно устойчивую структуру объекта, которая притягивает к себе всевозможные

траектории элементов системы, направляя их движение и эволюцию в определенном направлении. Аттракторы – реальные формирования объективного мира, которые обладают набором оптимальных характеристик и к обретению устройства которых стремятся структуры менее совершенные, не выдерживающие давления со стороны среды в конкуренции с другими, себе подобными.

Каждый аттрактор имеет свой **бассейн** – такую небольшую область в фазовом пространстве, что все попадающие в неё траектории в конечном итоге «притягиваются» к аттрактору: если развитие системы идёт по траектории, проходящей через бассейн аттрактора, то в конечном итоге система окажется на этом аттракторе. Если нет существенных внешних воздействий, то фазовые траектории устойчивой линейной системы, попав в область аттрактора, остаются в ней постоянно. Каким бы ни было начальное состояние, оно будет забыто. После поглощения системы аттрактором можно примерно полагать, что состояние системы находится где-то на аттракторе, но где точно сказать нельзя.

В нелинейных системах некоторые особые точки могут отображаться непосредственно или асимптотически на бесконечность, тогда как другие точки могут находиться в другом бассейне притяжения и асимптотически отображаться в другой аттрактор; другие начальные условия могут находиться или отображаться непосредственно в непритягивающую точку или цикл.

Бассейн аттрактора - B(A) -совокупность всех фазовых траекторий, сходящихся к A.

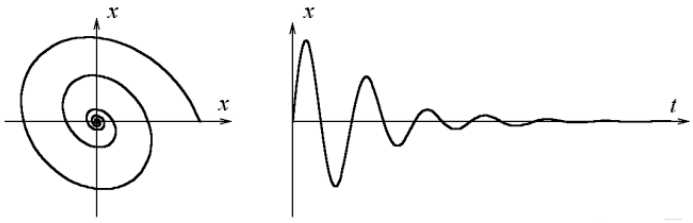


Рис. 2. Аттрактор затухающего маятника. *Аттрактор с притягивающей неподвижной точкой. В неподвижном точечном аттракторе система стабильна.*

Важно, что если система, находясь в аттракторе, испытывает внешнее воздействие, выводящее систему из этого состояния, то она спустя некоторое время вновь вернется в аттрактор. Такое свойство системы, находящейся в аттракторе, называется асимптотической устойчивостью.

Аттрактор - область в *n-мерном* пространстве. Если система определяется двумя или тремя переменными аттрактор динамического процесса может быть представлен геометрически в виде двух- или трёхмерного графика. Если переменная - скаляр, аттрактор представляет собой линий действительного числа. Аттрактор – замкнутое и (полностью) инвариантное множество.

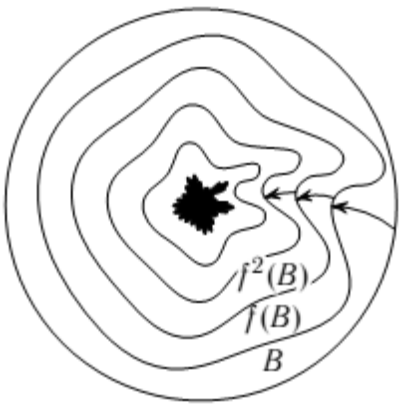


Рис. 3. Стягивание отображения к некоторому ядру - аттрактору динамической системы.

Пусть t – время, а $f(t,\bullet)$ – функция, определяющая динамику системы. Если a есть n – мерная точка в фазовом пространстве, представляющая начальное состояние системы, то $f(0,a)=a$ и для положительного значения t, $f(t,a)$ – результат эволюции этого состояния после t единиц времени.

Пример 2. Если система описывает эволюцию свободной частицы в одном измерении, то фазовое пространство представляет собой плоскость $\mathbf{R}^2$ с координатами (x,v), где x – положение частицы, v – её скорость, $a=(x,v)$, а эволюция дается выражением $f(t,(x,v))=(x+tv,v)$.

Притягивающее множество – множество K, обычно компактное, удовлетворяющее условию: существует такая окрестность $U \supset K$, что любая положительная полутраектория, начинающаяся в точке из U, имеет ω-предельное множество, целиком лежащее в K.

Объединение всех U с указанным свойством есть максимальная окрестность, которая называется областью притяжения или бассейном притягивающего множества.

Аттрактором – притягивающее множество, обладающее свойствами:

1) оно инвариантно;

2) оно компактно (замкнуто и ограничено);

3) оно неразложимо, т.е. у него нет таких подможеств, которые удовлетворяют предыдущим условиям (притягиваемость, инвариантность,

Нет никакого непустого подмножества имеющего первые два свойства.

Аттрактор A отображения f: $B \to B$ – пересечение образов фазового пространства при итерациях отображения:

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(B). \qquad (2)$$

Если множество A – аттрактор отображения f, то $f(A)=A$.

Аттрактор – притягивающее предельное множество. Пусть с течением времени произвольное начальное состояние из притягивающей области, включающей в себя аттрактор релаксирует к этому аттрактору. Движение, которому отвечает фазовая кривая в области притяжения, есть переходный процесс. Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий к некоторому инвариантному предельному множеству, т. е. аттрактору. Аттракторы типа состояний равновесия, предельных циклов или n-мерных торов называют простыми или регулярными.

Для конкретности, рассмотрим дискретную динамическую систему, состоящую из локально компактного метрического пространства X (фазового пространства), с функцией f от X, описывающей эволюцию системы на одной временной ступеньки. Пусть $T \subset X$ – такое компактное множество, что $f(T)$ содержится внутри T. Тогда пересечение A вложенной последовательности множеств $T \supset f(T) \supset f^{\circ 2}(T) \supset \ldots$ называется захватом аттрактора, а T – область (силового) захвата аттрактора. (Здесь $f^{\circ n}$ – означает повторение n-ой итерации f). Это пересечение всегда инвариантно $f(A)=A$ и его притягивающий бассейн $B(A)$ всегда открытое множество, содержащее T.

Пример захваченного множества притяжения показан на рис. 4. Здесь фазовое пространство X – плоскость в удалении от начала координат, отображение f задано в полярных координатах по формуле $(r,\theta) \mapsto (1.5+.025r+0.5\cos\theta, 2\theta)$, область захвата T – кольцом 1<3, а бассейн $B(A)$ – все X. Такие захваченные наборы множеств обладают свойством устойчивости.

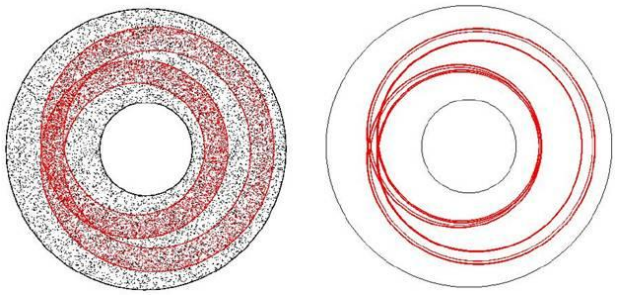


Рис. 4 . Серое кольцо представляет собой область захвата T, отображение f(T) покрашено красным; соответствующий аттрактор показан красным цветом.

Решения одномерного линейного разностного уравнения бесконечности, если $|a|>1$, поэтому нет аттрактора и нет бассейна притяжения. Но если $|a|<1$ все точки на фазовой траектории асимптотически (или непосредственно в случае 0) стремятся к точке 0 (аттрактор), а вся числовая линия - бассейн притяжения. Аналогично, в линейном матричном разностном уравнении в терминах квадратной матрицы A все элементы динамического вектора X расходятся до бесконечности, если наибольшее собственное значение A больше единицы по абсолютной величине, то нет аттрактора и нет бассейна притяжения. Но если наибольшее собственное значение меньше 1, все начальные векторы асимптотически сходятся к нулевой особой точке, которая является аттрактором; все n-мерное пространство начальных векторов является **бассейном притяжения**.

Уравнения или системы, которые являют нелинейными приводят к более богатому разнообразию поведения, чем линейные системы. Одним из примеров является метод Ньютона итерации к корням нелинейного уравнения. Если уравнение имеет более одного реального корня, некоторые исходные точки для итеративного алгоритма приведут к одному из корней асимптотически, а другие начальные точки – к другому. Бассейны притяжения могут быть как бесконечными по числу точек, так и сколь угодно малыми.

Для многих сложных функций границы бассейнов притяжения являются фракталами.

Важным свойством аттрактора является его инвариантность относительно оператора эволюции динамической системы: если динамическая система стартует с состояния, лежащего в аттракторе, то все её дальнейшие состояния также будут лежать в аттракторе.

Аттракторы классифицируют по:

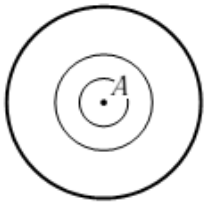
– Формализации понятия стремления: различают максимальный аттрактор, неблуждающее множество, аттрактор Милнора, центр Биркгофа, статистический аттрактор.

– Регулярности самого аттрактора: аттракторы делят на регулярные (притягивающая неподвижная точка, притягивающая периодическая траектория, многообразие) и странные (нерегулярные – зачастую фрактальные и/или в каком-либо сечении устроенные как канторово множество; динамика на них обычно хаотична).

– Локальности («притягивающее множество») и глобальности (здесь же – термин «минимальный» в значении «неделимый»).

Известны и "именные" примеры аттракторов: Лоренца. Плыкина, соленоид Смейла-Вильямса, гетероклинический аттрактор Боуэна, аттрактор Эно и др.

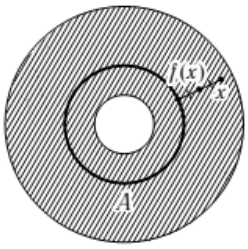
Замечание. В последнее время наметилась тенденция делить аттракторы на три группы: нестранные, странные нехаотические и странные хаотические.



Пример 3. Возьмём диск единичного радиуса с центром в начале координат. Каждую точку x отображаем в *x*/2. Первым образом будет диск радиуса 1/2, вторым образом – диск радиуса 1/4. Ясно, что аттрактором этого отображения будет одна точка – начало координат.

Рис. 5. К примеру 3.

Пример 4. Пусть фазовое пространство кольцо внешнего радиуса 2 и внутреннего радиуса 1/2. Будем в качестве координат использовать так называемые полярные координаты. Вместо абсциссы и ординаты будем указывать азимут точки, или, как говорят, полярный угол— тот угол, под которым она видна из центра, если за ноль взять положительное направление оси Ox, и расстояние от центра. В координатах отображение имеет вид:



$$f:(r,\varphi)\to\left(1+\frac{r-1}{2},\varphi\right)=\left(\frac{1+r}{2},\varphi\right)$$

Рис. 6. К примеру 4.

Из первой записи формулы видно, что при этом отображении окружность радиуса 1 остаётся на месте, а из второй записи легко увидеть, что все остальные точки кольца будут стягиваться к этой окружности; на каждом шаге расстояние между точкой *x* и ближайшей к ней точкой кольца сокращается вдвое. Теперь понятно, что аттрактором будет окружность радиуса 1.

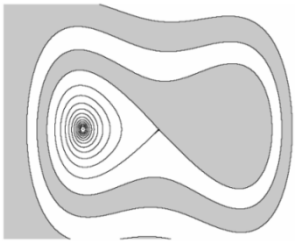


Рис. 7. К примеру 5: области притяжения для возмущенного уравнения Дуффинга.

Пример 5. Рассмотрим возмущенное уравнение Дуффинга $\ddot{x}-x+x^3+\varepsilon\dot{x}=0$ и соответствующую ему систему $\dot{x}=y,\quad \dot{y}=x-x^3-\varepsilon y$. У системы существуют три состояния равновесия (−1, 0), (0, 0), (1, 0). Точки (−1, 0) и (1, 0) являются аттракторами, устойчивые сепаратрисы точки (0,

0) разделяют области притяжения $W^s(-1, 0)$ и $W^s(1, 0)$. На рис. 7 показаны области притяжения состояний равновесия (−1, 0) и (1, 0) динамической системы для ε = 0.15.

Аттракторы бывают четырёх основных типов: неподвижная точка (равновесие), цикл (периодическое колебание), тор (квазипериодическое колебание) и странный (хаотический).

Все аттракторы нелинейных систем можно разбить на два класса: простые (регулярные) и сложные (нерегулярные, случайные, хаотические) аттракторы. К регулярным аттракторам относятся гладкие подмногообразия фазового пространства. Это – особые (устойчивые, неподвижные точки (узел, фокус, седло, центр), к которым стремится фазовая диаграмма; фазовая диаграмма стремится к одному значению; апериодические процессы; отображение стока), устойчивые предельные циклы (траектория стремится к некоторой замкнутой кривой; стремление к повторяющемуся набору значений; реализуется в случае периодических процессов) и инвариантные торы (траектория стремится к поверхности тора) произвольной размерности и произвольного конечного периода. Каждый более сложный регулярный аттрактор рождается в результате бифуркации (Андронова-Хопфа или удвоения периода) из более простого регулярного аттрактора.

Замечание. Неподвижная точка динамической системы не обязательно является аттрактором. Если пиалу перевернуть вверх дном, то вершина пиалы - неподвижная точка для шарика, но не аттрактор, а репеллер.

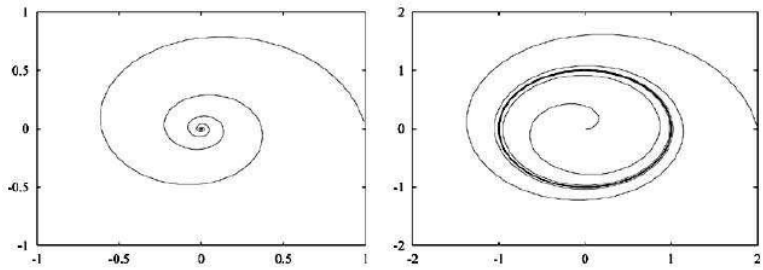


Рис. 8. Примеры регулярных аттракторов: устойчивая неподвижная точка (слева) и предельный цикл (справа).

Существуют также характерные только для диссипативных систем странные аттракторы (эволюция сложных систем во времени), которые, в отличие от обычных не являются подмногообразиями фазового пространства и движение точки на них неустойчиво; любые две траектории на нём всегда расходятся, малое изменение начальных данных приводит к различным путям развития. Эволюция странного аттрактора проходит через множество возможных физических состояний непериодична (хаотична), что приводит к эволюции через множество состояний, определяющих фрактальный набор. Большинство реальных физических систем (включая фактические орбиты планет) включают странные аттракторы. Странные аттракторы - это ограниченные области фазового пространства (положительные характеристики Ляпунова), имеющие нулевую меру в фазовом пространстве вложения и фрактальную размерность. Траектории внутри странного аттрактора неустойчивые и кажутся случайными.

Регулярным аттракторам соответствуют классические геометрические объекты в фазовом пространстве: равновесному состоянию – точка, периодическому движению или предельному циклу – замкнутая кривая, а квазипериодическому движению - поверхность в трёхмерном фазовом пространстве. Спектр возможных структур-аттракторов, на которые выходят эволюционные процессы в системе, не являются сплошным. В процессе эволюции система может перейти в то, или в это состояние, но не во что-то среднее между ними.

Для двупараметрических систем (т.е. систем из двух ОДУ с двумя неизвестными функциями $x(t)$, $y(t)$) регулярные аттракторы представляют собой неподвижные точки (узел, фокус, седло, центр), к которым стремятся решения системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \vec{\mu}) = 0 \\ \dot{y} = f_2(x, y, \vec{\mu}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Замечание. Как было обсуждено в Гл.10, неподвижные точки бывают устойчивыми и неустойчивыми. Если решения притягиваются к неподвижной точке, то она является устойчивой и называется аттрактором. Если решения, взятые скольугодно близко к неподвижной точке, отталкиваются от неё, то она неустойчива и называется репеллером.

Если динамическая система включает количество неизвестных функций больше двух, то могут появиться и аттракторы другого типа - хаотические колебания.

Регулярные аттракторы – устойчивые (асимптотически устойчивые) особые точки, устойчивые (орбитально асимптотически устойчивые) предельные циклы и устойчивые инвариантные торы. Все эти аттракторы являются гладкими подмногообразиями фазового пространства (например, предельный цикл и двумерный инвариантный тор – это, соответственно, одномерное и двумерное подмногообразия).

Динамика систем с регулярными аттракторами не является хаотической, а со временем выходит на стационарный, периодический или квазипериодический режимы. Главное - это то, что решения систем с простыми (регулярными) аттракторами глобально устойчивы по отношению к малым возмущениям, что означает их глобальную предсказуемость. Действительно, устойчивость решений системы с асимптотически устойчивой особой точкой следует из определения асимптотической устойчивости. Устойчивость решений системы с асимптотически орбитально устойчивым предельным циклом следует из устойчивости решений с начальными условиями, принадлежащими циклу. Устойчивость решений системы с устойчивым инвариантным тором произвольной размерности и конечного периода следует из устойчивости периодического или квазипериодического движения на таком торе.



Рис. 9. Типы аттракторов.

Простейшим видом асимптотического поведения является состояние равновесия, которому соответствует неподвижная точка в фазовом пространстве. Точечный аттрактор состоит из одного состояния. Это, например, точка равновесия маятника с трением о воздух, или металлический шарик в пиале, который всегда стабилизирующийся на её дне. Аттрактор – точка возникает в диссипативных динамических системах (грубо говоря, в системах, где присутствует трение). Точки фазового пространства, соответствующие нулевому значению скорости и локальному минимуму потенциальной энергии, являются устойчивыми точками притяжения траекторий.

Аттрактор неподвижная точка (сток) для f, если есть у x_0 соседство U в R, такое, что $y_0 \in U$, то $f^n(y_0) \in U$ *для всех n и, более того,* $f^n(y_0) \to x_0$ при $n \to \infty$.

Регулярные аттракторы могут представлять собой предельные циклы, в которых траектории обходят вокруг предельной траектории, к которой они асимптотически подходят, но никогда не достигают. В системе с дискретным временем аттрактор может принимать вид конечного числа точек, которые посещаются в последовательности. Каждая из этих точек называется периодической точкой.

Периодический аттрактор представляет собой аттрактор, состоящий из конечного или бесконечного множества состояний, где эволюция системы приводит к циклическому

перемещению через каждое состояние. Орбита планеты, вращающейся вокруг звезды, является периодическим аттрактором, биение сердца, колебания маятника, самовозбуждающиеся колебания в контуре с положительной обратной связью и др. В таких системах малое отклонение от траектории-цикла приводит к траектории, которая со временем сколь угодно мало отклоняется от траектории-цикла. Подобные циклы называются *предельными циклами* или *асимптотически устойчивыми циклами*. Важно, что дифференциальные уравнения на плоскости могут иметь только регулярные аттракторы первых двух типов (особые точки и предельные циклы).

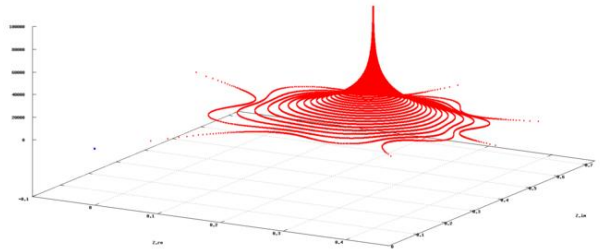


Рис. 10. Трёхмерная картина изменения фазовой траектории критической точки z_c для комплексного квадратичного полинома *$f_c(z)=x*z+c$, где константа $c=0,37496784+i*0,21687214$ (множество Мальдеброта). Оси трехмерной декартовой системы координат: ось x - вещественная часть комплексной переменной z, ось y – мнимая часть комплексной переменной z, ось z – число итераций (целое число, частота, с которой посещаются точки в комплексной плоскости). Видно, что орбита критической точки стремится к слабо притягивающей неподвижной точке. Точка в комплексной плоскости непосредственно под пиковой частотой есть аттрактор неподвижной точки.*

Замечание. Предельный цикл идеального маятника не является аттрактором предельного цикла, так как его орбиты не изолированы: в фазовом пространстве идеального маятника вблизи любой точки периодической орбиты существует еще одна точка, принадлежащая другой периодической орбите, поэтому первая не притягивает фазовую траекторию.

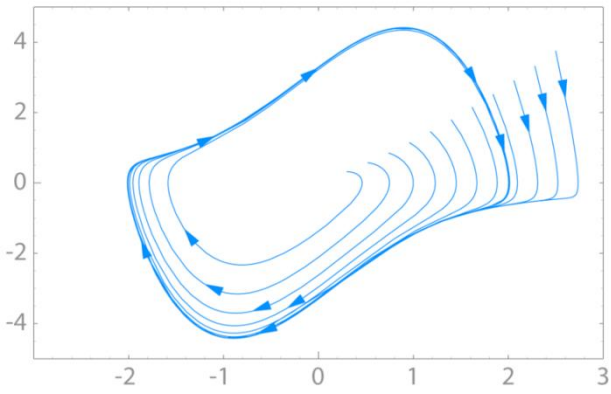
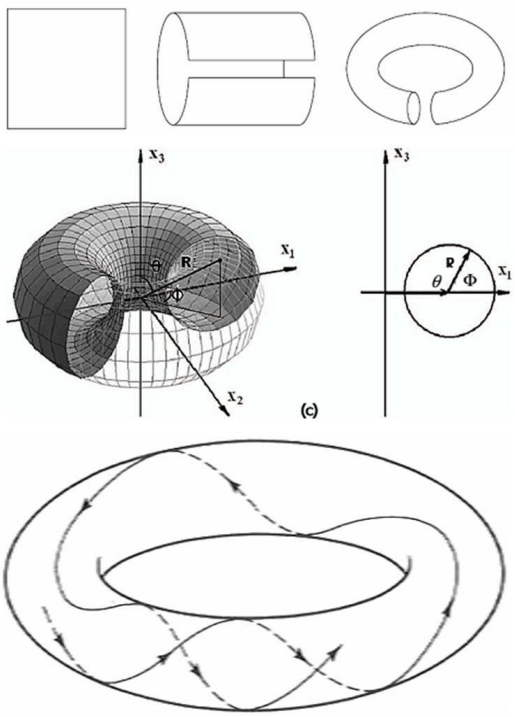


Рис. 11. Фазовый портрет Ван дер Поля: притягивающий предельный цикл *(изолированная закрытая орбита; соседние с ней траектории не закрыты – они имеют спиралевидную форму, закручивающуюся к предельному циклу, или удаляющиеся от него).*

Более сложным является периодическое поведение, которому соответствует круговой аттрактор. Ещё сложнее выглядит циклическое движение по поверхности тора. Спиралевидные круги после множества оборотов возвращаются в исходную точку и цикл повторяется. Гораздо более запутанными являются квазипериодические колебания, когда в системе наблюдаются две частоты, причём их отношение – иррациональное число. Эта ситуация реализуется только если размерность фазового пространства не меньше трёх. Асимптотическое поведение такой системы соответствует заполнению траекторией поверхности двумерного тора (поверхности бублика). Далее степень сложности может нарастать при увеличении числа независимых частот. Траектория при этом может заполнять трёхмерный, четырёхмерный и многомерный **тор**.

Пример аттрактора типа тора – вращение Земли вокруг Солнца с определённой частотой и колебание обиты (периодические отклонения от средней орбиты) с другой частотой. Если эти две частоты несоизмеримы, то предельный цикл переходит в предельный N_t-тор. Временной ряд, соответствующий этому аттрактору, является квазипериодическим: дискретно выбранная сумма периодических функций (не

обязательно синосоидальных волн) с несоизмеримыми частотами. У такого временного ряда нет строгой периодичности, но ее спектр власти все еще состоит только из отдельных линий.



Аттрактор типа тор – это система, которая с течением времени изменяется в деталях, но сохраняет свою форму. В ней траектории создают фигуру в виде пончика.

Рис. 12. Аттрактор 2-тор.

Инвариантный тор – обобщение (в определенном смысле) понятия цикла. Двумерный тор топологически представляет собой декартово произведение двух окружностей, в трехмерном пространстве его можно реализовать как поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, расположенной вне круга. В *n*-мерном пространстве можно построить (*n*-1)-мерный тор, представляющий собой декартово произведение *n*-1 окружностей. Движение по двумерному тору представляет собой в окружающем пространстве как сумма двух периодических движений: по одной угловой координате и по другой. Если движение по каждой координате равномерное, то общий характер этого движения определяется условием соизмеримости периодов. Если периоды соизмеримы, то есть общий период двух движений и в результате суммарное движение оказывается периодическим. Если же периоды несоизмеримы, то движение непериодическое, но при этом в процессе движения траектория подходит сколь угодно близко к заданной точке. Такое движение называется квазипериодическим. При этом движении траектория всюду плотно наматывается на тор. Отметим, что «плотно» не значит «всюду». Множество таких всюду плотных намоток по мощности континуум.

В системах дифференциальных уравнений *T*-периодическое движение по циклу является одним из наиболее простых движений и характеризуется наличием одной частоты $\omega=2\pi/T$. Значительно более сложным является многочастотный режим движения, характеризующийся наличием нескольких независимых частот $\omega_1,...,\omega_n$. Движение в таком режиме можно представить как движение по поверхности n-мериого инвариантного тора, задаваемого углами $\alpha_i = \alpha_{i0} + \omega_i t, \quad i = \overline{1,n}$. Размерность m фазового пространства при этом должна быть не меньше, чем $n+1$.

Поведение траекторий системы на поверхности тора существенно зависит от соотношения между частотами ω_i, $i=1,...,n$. В случае, например, n=2 движение по двумерному тору будет периодическим тогда и только тогда, когда отношение частот рационально, т.е. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{m}$, где $k,m \in N$. При этом $T = \pi\left(\frac{k}{\omega_1} + \frac{m}{\omega_2}\right)$ и, следовательно, $\alpha_1(T)=\alpha_{10}+\omega_1 T=\alpha_{10}+2\pi k$, а $\alpha_2(T)=\alpha_{20}+\omega_2 T=\alpha_{20}+2\pi m$, т.е. углы α_1 и α_2 задают одну и ту же точку на поверхности тора и поэтому, за время *T* траектория возвращается в исходную точку.

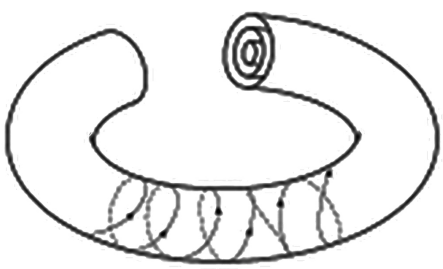


Рис.13. Фазовый портрет интегрируемой системы с двумя степенями свободы.

В случае когда частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, т.е. их отношение иррационально, фазовая траектория

никогда не замкнется, и с течением времени будет проходить сколь угодно близко к любой заданной точке на поверхности тора. В этом случае фазовая кривая образует всюду плотную обмотку тора, а такое движение называется квазипериодическим.
Периодическое и квазипериодическое движение по тору удобно наглядно представлять отображением Пуанкаре на секущей гиперповерхности *S*, проведенной трансверсально к поверхности тора. При этом периодическое движение будет представлено в *S* конечным числом точек, последовательно переходящих друг в друга под воздействием отображения Пуанкаре, а квазипериодическое – бесконечным множеством точек, плотно заполняющих некоторую замкнутую кривую.

Периодические и квазипериодические движения по многомерным инвариантным торам возникают естественным образом в консервативных и, в частности, гамильтоновых системах. При этом необходимо различать резонансные и нерезонансные торы.

Инвариантный тор размерности $n\geq 2$ называется резонансным, если существуют некоторые не все равные нулю целые числа k_i, такие что $\sum_{i=1}^{n} k_1\omega_i = 0$.

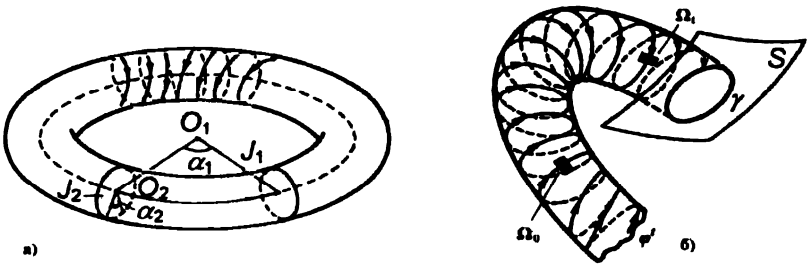


Рис. 14. Двумерный инвариантный тор (а) и квазтпериодический режим движения в нём.

В случае полностью интегрируемой гамильтоновой системы все фазовое пространство можно представить в виде совокупности вложенных друг в друга резонансных и нерезонансных торов, так что каждый тор не является ни изолированным, ни предельным. В случае же не полностью интегрируемой гамильтоновой системы движение происходит по сложным многомерным торам различного периода и по сингулярным тороидальным аттракторам, являясь отличным как от периодического, так и от квазипериодического. В любом случае торы в консервативных и гамильтоновых системах не являются предельными множествами и не могут быть устойчивыми.

Пример 6. Рассмотрим систему Ланфорда:

$$\begin{cases} \dot{x} = (v-1)x - y + xz, \\ \dot{y} = x + (v-1) + yz, \\ \dot{z} = vz - x^2 - y^2 - z^2. \end{cases}$$

Эта система интересна тем, что имеет цилиндрический характер. Действительно, преобразуем ее, перейдя в цилиндрические координаты $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=\zeta$, получим $\begin{cases} \dot{\rho} = (v-1)\rho + \rho\zeta, \\ \dot{\varphi} = 1, \\ \dot{\zeta} = v\zeta - \rho^2 - \zeta^2. \end{cases}$

Система распалась на две независимые подсистемы: $\begin{cases} \dot{\rho} = (v-1)\rho + \rho\zeta, \\ \dot{\zeta} = v\zeta - \rho^2 - \zeta^2. \end{cases}$ первая описывает перемещение точки в плоскости, проходящей через ось *Oz*, а вторая $\varphi'=1$ – независимое движение этой плоскости (ее равномерное вращение).
Первая система имеет положения равновесия $\rho=0$, $\zeta=0$ и $\rho=0$, $\zeta=v$. При $1/2<v<1$ появляется третье положение равновесия $\rho = \sqrt{(1-v)(2v-1)}$, $\zeta=1-v$. Оно представляет собой фокус. При $1/2<v<2/3$ этот фокус устойчивый, а при $2/3<v<1$ неустойчивый. При потере устойчивости, когда *v*,

возрастая, проходит значение 3/2, в системе возникает устойчивый цикл. Этому циклу в системе Ланфорда соответствует инвариантный тор.

Как следует из теоремы Пуанкаре-Бендиксона, в двумерном случае (на плоскости) автономная система нелинейных дифференциальных уравнений может иметь только простейшие регулярные аттракторы – устойчивые особые точки и простые предельные циклы. Следовательно, сложные регулярные аттракторы (торы и сложные предельные циклы удвоенного и более периодов) и сингулярные аттракторы автономная система нелинейных дифференциальных уравнений может иметь только в случае размерности фазового пространства $n>3$. Трёхмерные автономные системы уже могут иметь устойчивые предельные циклы любого периода, циклические сингулярные аттракторы любой сложности и простые устойчивые двумерные торы. А четырёхмерные автономные системы уже могут иметь устойчивые двумерные торы любого периода, тороидальные сингулярные двумерные аттракторы любой сложности и простые устойчивые трёхмерные торы и т.д.

13.2 Фазовый объём

К сожалению, в настоящее время невозможно точно предсказать существование аттрактора в динамической системе. Есть только некоторые примерные критерии. Один из них – наличие полупроницаемых поверхностей – замкнутых поверхностей, на которых векторное поле направлено внутрь ограничиваемой области. Тогда траектории с поверхности входят в область и уже не покидают ее. В указанной ситуации область, скорее всего, содержит аттрактор

Другой критерий – динамика объёма областей в фазовом пространстве. Сокращение фазового объёма указывает на возможность аттрактора. Например, этот критерий показывает, что в отличие от консервативной (гамильтоновой) диссипативная система имеет аттрактор.

Эволюцию динамической системы удобно описывать через изменение во времени фазового объёма конечной фазовой области.

Фазовый объём – объём в фазовом пространстве.

Для механической системы с N степенями свободы элементарный фазовый объём равен: $\mathrm{d}p\mathrm{d}q=\mathrm{d}p_1\mathrm{d}q_1...\mathrm{d}p_N\mathrm{d}q_N$, где $q_1,...,q_N$ – обобщённые координаты, а $p_1,...,p_N$ – обобщённые импульсы системы. Фазовый объём конечной фазовой области G равен $2N$-мерному интегралу $\int_G dpdq$. Если система описывается уравнениями Гамильтона, то при движении частиц фазовый объём остаётся неизменным (теорема Лиувилля). Это позволяет ввести нормированные функции распределения в фазовом пространстве. В негамильтоновой системе фазовый объём может, как увеличиваться, так и уменьшаться.

Теорема Лиувиллия: Пусть f(p, q, t) – плотность вероятности ансамбля траекторий, тогда использование уравнения Гамильтона даёт df/dt=0. Плотность вероятности вдоль траектории сохраняется (несжимаемость потока).

Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма – функция распределения гамильтоновой системы постоянна вдоль любой траектории в фазовом пространстве. Теорема утверждает сохранение во времени фазового объёма, или плотности вероятности в фазовом пространстве.

Система $\dot{x} = F(x)$ называется **консервативной**, если объём произвольной области фазового пространства не меняется со временем, и **диссипативной**, если объём некоторой области фазового пространства со временем уменьшается. Если всюду в фазовом пространстве $divF(x)=0$, то система сохраняет объем и является консервативной. Если же существует область фазового пространства, в которой $divF(x)<0$, то система $\dot{x} = F(x)$ – диссипативна в этой области.

Примером систем, сохраняющих фазовый объём, являются *гамильтоновы системы*

В *консервативной системе* элемент в фазовом пространстве только изменяет форму, но сохраняет объём (выполняется теорема Лиувилля), что предопределяет характер эволюции и тип хаотичности, возникающий в консервативных системах. Консервативные системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют гамильтоновыми. Механические колебательные системы в отсутствие трения относятся к консервативным системам. В консервативных системах хаотические орбиты стремятся однородно заполнить все части некоторого подпространства в фазовом пространстве, т.е. они характеризуются однородной плотностью вероятности в ограниченных областях фазового пространства.

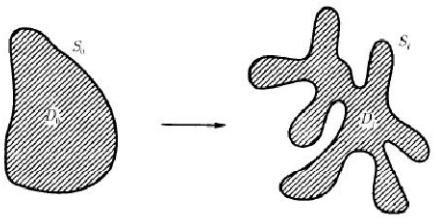


Рис. 15. Сохранение фазового объёма при эволюции гамильтоновой системы.

Для систем с двумя степенями свободы фазовое пространство четырёхмерно. Примером является система двух гармонических осцилляторов единичной массы. В случае полностью интегрируемых систем с n степенями свободы фазовое пространство $2n$-мерно и в переменных действие-угол имеет структуру множества n-мерных торов. Любая возможная траектория располагается на одном из них. При этом некоторые траектории могут оказаться замкнутыми, другие же будут всюду плотно покрывать поверхность соответствующего тора. В *диссипативной системе* из-за диссипации энергии объём элемента фазового пространства сокращается с течением времени (теорема Луивилля не соблюдается). Поэтому в фазовом пространстве диссипативных систем появляются притягивающие множества, которые не существуют в консервативных системах – аттракторы.

Для систем, сохраняющих фазовый объём, не могут существовать в фазовом пространстве такие структурные элементы, как аттракторы и репеллоры, поскольку наличие первых означало бы уменьшение, а вторых – увеличение фазового объёма. В таких системах нет структурных элементов, обладающих свойством асимптотической устойчивости при $t\to\infty$ (либо аналогичным свойством при $t\to\infty$).

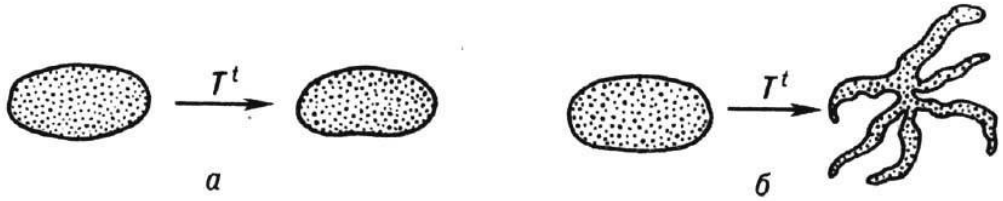


Рис. 16. Деформация "фазовой капли" в случае устойчивого (а) и неустойчивого (б) движения 1 гамильтоновой системы (объём капли сохраняется).

В условиях сохранения фазового объёма форма фазовой капли может меняться как незначительно (устойчивое движение), так и сильно (неустойчивое движение). Наличие неустойчивости может приводить к сложному (стохастическому) поведению системы.

Если физическая система составлена из большого числа частиц, то целесообразно использовать статистические методы описания. При уменьшении фазового объёма V траектории могут стремиться к некоторой поверхности в исходном фазовом пространстве, имеющей размерность $D=n-k$, где k-целое, $k\le n$. В частном случае $k=n$ это отвечает приближению к некоторому стационарному состоянию – особой точке в фазовом пространстве. Однако при $V\to 0$ может существовать предельное множество (аттрактор), мера которого имеет размерность $d>1$ (дробную фрактальную размерность). Такая ситуация реализуется, когда фазовое пространство содержит странный аттрактор.

Для систем с любой размерности, удовлетворяющих уравнениям Гамильтона, площадь фазового пространства, пронизываемого траекториями частиц, от времени не зависит. Однако это не соблюдается при наличии негамильтоновой силы, т. е. силы, не

имеющие потенциальной функции. Статистическими методами можно показать, для негамильтоновых систем плотность и соответственно объем фазового пространства в окрестности частицы в общем случае не являются сохраняющимися величинами. Так, действие излучения уменьшает фазовый объём, а процессы столкновения его увеличивают. Однако, плотность и объём в фазовом пространстве могут сохраняться для систем с негамильтоновыми силами при условии, что они не зависят от импульса.

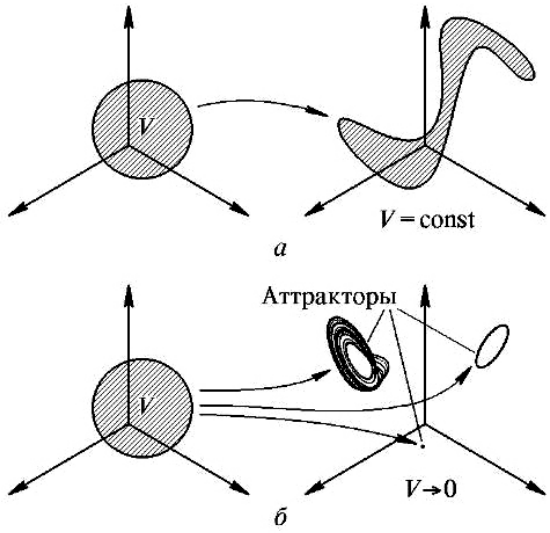


Рис. 17. К определению консервативных (а) и диссипативных (б) динамических систем.

Системы с конечномерным фазового пространства являются идеализированным образом реальных физических систем. Например, при описании теплового, электромагнитного и других полей, различного рода взаимодействий и т. д. приходится иметь дело с характеристиками, заданными в пространстве: температурой $T(r,t)$, напряжённостью поля $E(r,t)$ и др. Для этих характеристик также задаются некоторые эволюционные уравнения. Теперь, однако, фазовое пространство такой динамической системы является уже бесконечномерным. Иногда путём подходящего выбора базиса удаётся свести фазовое пространство к счётномерному. Наконец, в ряде случаев с достаточной точностью можно описать поведение распределённой системы с помощью некоторого конечного числа функций времени. Тем самым исходное (бесконечномерное) фазовое пространство редуцируется к фазовому пространству конечной размерности. Это отвечает выделению существенных переменных ("параметров порядка") и пренебрежению всеми прочими ("подчинёнными") переменными. По существу сходная процедура реализуется при численном интегрировании уравнений в частных производных.

Фазовая траектория гармонических колебаний (например, собственных колебаний линейного осциллятора в отсутствие трения) представляет собой эллипс (или окружность при соответствующем выборе масштаба). Точки, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс (в этих точках поворота скорость изменяет знак), соответствуют максимальным отклонениям ротора из положения равновесия.

Для диссипативных систем характерно, что с течением времени облако изображающих точек "съёживается" и концентрируется на одном или нескольких аттракторах – подмножествах фазового пространства, обладающих обычно нулевым фазовым объёмом (рис. 12б). С точки зрения динамики во времени это означает, что режим, возникающий в системе, предоставленной себе в течение длительного времени, становится независящим от начального состояния.

13.3 Репеллеры

Понятию «аттрактор» противостоит понятие «репеллер» – набор параметров и их значений, которые «отталкивают» систему от положения равновесия в том смысле, что он вводит ограничения различной природы на свободу стремления системы к цели, к равновесию. Если аттрактор обозначает то состояние равновесия системы, к которому она стремится как к своей цели, то репеллер выражает своим содержанием все ограничения и запреты для системы. Большинство реально существующих сложных систем нечётко определены, и их параметры находятся в сложных, противоречивых взаимосвязях. По этой причине в сложных системах часто наблюдаются острые противоречия между

требованиями к поведению системы со стороны аттракторов и со стороны репеллеров. Противоречивые требования к сложной системе со стороны аттракторов и репеллеров не приводят к её распаду благодаря тому, что она иерархична. Разные составляющие иерархии в процессе самоорганизации приобретают противоположные качества. Одни удовлетворяют требованиям аттракторов, другие – репеллеров. В целом, динамическая система, сохраняя свою структуру и цели, приобретает полярно противоположные свойства и возможность альтернативного поведения.

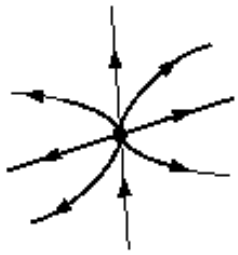


Рис. 18. Аттрактор репеллер – неустойчивое состояние, при котором система или переменная удаляется во времени.

Репеллер – область фазового пространства, отклоняющая фазовые траектории движения системы; математический образ какого-либо объекта, представляемого в виде отталкивающего множества в фазовом пространстве управляемого объекта или системы.

Репеллер (отталкиватель) – аттрактор, к которому стремится фазовая траектория при $t \to -\infty$. Это неустойчивое состояние, которое система или переменная удаляется во времени от исходного состояния. Реппелентность: степень, в которой система удаляется от исходного состояния. В теории динамических систем рассматривается как противоположность аттрактора (притяжение): аттрактор устойчив к возмущениям, а репеллер - нет.

Репельность – активность, с которой система удаляется от исходного состояния.

Как и аттракторы, репеллеры могут быть как регулярными, так и странными. Примерами странных репеллеров являются отображение пекаря и подкова Смейла, которые имеют сложную хаотическую динамику.

Если **аттрактор** – математический образ установившихся режимов, представляемый в виде притягивающего множества в фазовом пространстве объекта или системы, то **репеллер** – математический образ какого-либо объекта, представляемого в виде отталкивающего множества в фазовом пространстве управляемого объекта или системы. Аттрактор – асимптотически устойчивое решение замкнутой системы, а репеллер – область фазового пространства, отклоняющая фазовые траектории движения системы. Часто в сложной системе аттракторы и репеллеры пересекаются и даже образуют единое целое. Репеллер с фиксированной точкой: состояние, в котором система удаляется от исходного значения. Система нестабильна в местоположении репеллера с фиксированной точкой. На практике встречается редко. Пример: вертикально стоящий карандаш. Графически репеллеры с фиксированной точкой идентичны аттракторам с фиксированной точкой, но имеют другую направленность.

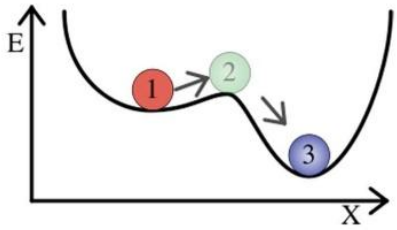
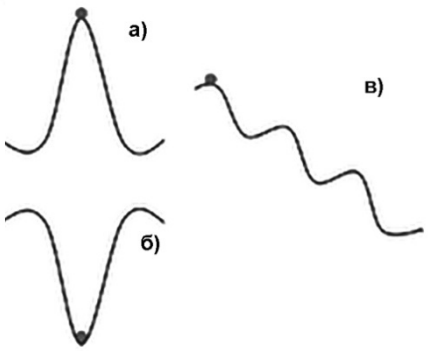


Рис. 19. Стабильные и нестабильные состояния.

Репеллер – область фазового пространства, отклоняющая фазовые траектории движения системы; математический образ какого-либо объекта, представляемого в виде отталкивающего множества в фазовом пространстве управляемого объекта или системы.

Возмущение: небольшие изменения в системе из-за частей системы, которые необходимы, но не моделируются. Они отличаются устойчивостью заданной точки тем, что аттрактор устойчив к возмущениям, а репеллер – нет. Это видно на рис. 19. Небольшое возмущение могло бы нарушить шар 1, но оно опустится обратно в нижнюю часть аттрактора, в котором он находится сейчас. Шар 2, напротив, был бы смещен вдали от своего текущего положения даже незначительным возмущением, поскольку часть системы, где она показана, является репеллером. Для шара 3



требуется большое возмущение, чтобы вытащить его из бассейна сильного аттрактора, где он находится в настоящее время.

Рис. 20. Графическое изображение состояний аттракторов и репеллеров, описываемых динамической теорией систем.

Из стабильного состояния система вряд ли выйдет. Состояния 1 и 3 на рис. 19 являются стабильными (3 более устойчиво, т. е. является более сильным аттрактором), а 2 неустойчиво. Такая система (имеющая несколько устойчивых состояний) является многостабильной. Возмущение способно вывести систему из равновесного состояния. При этом аттрактор устойчив к возмущениям, а репеллер нет. Так, сравнительно небольшое возмущение способно сместить шар 1, при этом он переместится в нижнюю часть аттрактора, напротив, шар 2 будет смещён со своего места пребывания самым небольшим воздействием, поскольку он находится в репеллере; для шара 3 требуется очень сильное воздействие, чтобы извлечь его из потенциальной ямы.

Состояния репеллеров (рис. 20а) неустойчивы и изображаются как холмы, потому что шар отходит от своей заданной точки в верхней части холма в ответ на даже очень небольшое возмущение, тогда как аттракторные состояния (рис. 20б) устойчивы и изображаются долинами, потому что шар возвращается к своей заданной точке в нижней части долины даже при большом количестве возмущений. Нестабильные состояния аттракторов (рис. 20в) изображаются «ступенчатой» конфигурацией, которые характеризуются устойчивыми состояниями только в том случае, если шар испытывает минимальное возмущение, но становятся неустойчивыми в ответ на большие возмущения. В этом последнем сценарии шар переходит в новую (более низкое) состояние и гораздо реже возвращается к предыдущему (более высокому) заданному значению, чем движется к нижней точке заданного значения.

Репеллеры характеризуют систему в своём развитии активно удаляющуюся от исходной точки. Такая система чрезвычайно нестабильна. Примером служит карандаш, вертикально установленный на грифеле: достаточно его отпустить, чтобы он немедленно свалился. Скорость приближения или удаления от заданного состояния определяется величиной показателя Ляпунова (см. далее).

Пейзаж аттрактора для закрепленных на чаше отдельных элементов внутри системы будет стремиться сходиться к бассейну чаши. В самой нижней части чаши отмечается местоположение аттрактора с фиксированной точкой. Пейзаж аттрактора для фиксированной точки репеллера подобен холму или горному пику имеет тенденцию быстро покидать пик репеллера.

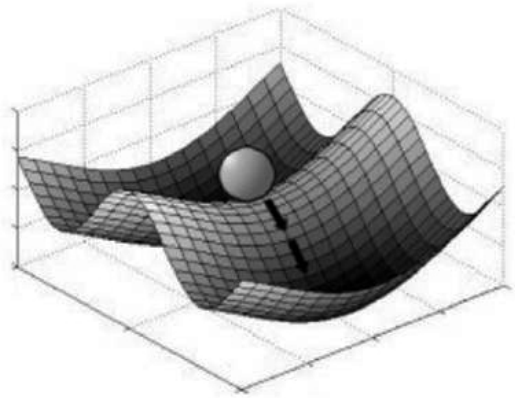


Рис. 21. Аттрактора ландшафт для седла (на котором находится шар) показывающий седло между двумя аттракторными бассейнами. Любой элемент на седле будет высоко нестабилен и будет стремиться свалиться в один из двух аттракторных бассейнов.

Спиральный аттрактор – топологическая особенность, объединяющая неподвижный точечный аттрактор с предельным циклом; состояние системы движется по спирали к заданной точке.

Спиральный репеллер – топологическая особенность, объединяющая неподвижный точечный аттрактор с предельным циклом, состояние системы удаляется по спирали от заданной точки.



Рис. 22. Аттрактор (слева) и репеллер (справа). Спиральный аттрактор (как и репеллер) обладает топологической особенностью, объединяющей неподвижный точечный аттрактор с предельным

циклом (график имеет вид спирали вокруг исходной точки).

Аттракторы и репеллеры появляются в предельных циклах. Подобно неподвижным точкам, предельные циклы являются или **аттракторами** или **репеллерами**.

Для систем с одной степенью свободы (их фазовое пространство – плоскость) устойчивыми предельными циклами и устойчивыми состояниями равновесия исчерпываются все возможные объекты, которые притягивают соседние траектории на фазовой плоскости. В многомерных динамических системах с размерностью фазового пространства $n \geq 3$ возможны более сложные притягивающие объекты – аттракторы.

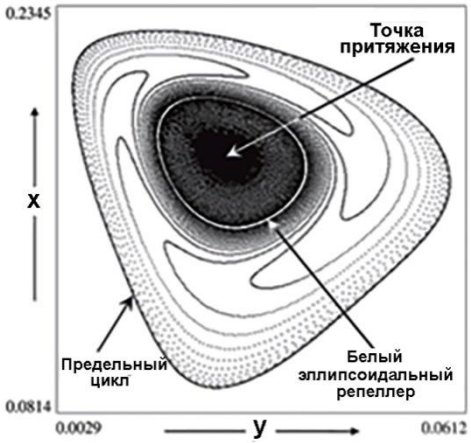


Рис. 23. Предельный цикл, аттрактор и репеллер.

Всякая достаточно близкая к предельному циклу траектория стремится к нему либо в прямом, либо в обратном времени. Типичная система с непрерывным временем на плоскости (состояние которой задаётся двумя вещественными параметрами, например, напряжением и током, или положением и скоростью точки на прямой) может стремиться только к положению равновесия или к предельному циклу.

В сложной системе обычно присутствуют и аттракторы и репеллеры. Примером может служить рельеф холмистой местности, по которому катятся шары (рис. 24).

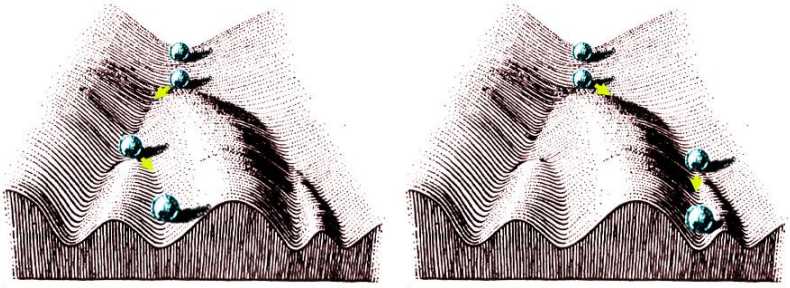


Рис. 24. Пейзаж Ваддингтона (1957). В этой версии фазового портрета возвышенности – репеллеры, а долины – аттракторы. Положение мяча представляет текущее состояние системы. Подобно тому, как рельеф поверхности ограничивает поток шаров, в динамической системе аттракторы и репеллеры ограничивают динамику системы. Положение шара в зоне аттрактора устойчива, а в зоне репеллера – нет.

Если имеются несколько аттракторов в фазовом пространстве, то их область притяжения разделяется нестабильными множествами точек – репеллерами, так что все соседние фазовые траектории отталкиваются от этих множеств. Простейший репеллер: нестабильная сингулярная точка (рис. 25а); нестабильный предельный цикл (рис. 25б); нестабильный тор. И ещё репеллеры, как и аттракторы, могут быть сложно сформированными.

Аттракторы и репеллеры могут существовать только в диссипативных системах. Фазовый объём, занимаемый траекториями, формируемый аттракторами и репеллерами равен нулю. Следовательно, размерности аттракторов и репеллерами должны быть меньше размерности оригинального фазового пространства. Это важно для систем со многими степенями свободы и в частности непрерывных систем, поскольку последние имеют бесконечного размера фазовое пространство, но их размерность аттрактора имеет конечное значение. Факт, что размерность аттрактора непрерывной системы конечна позволяет использовать, конечно, мерное фазовое пространство для исследования стационарных движений в такой системе.

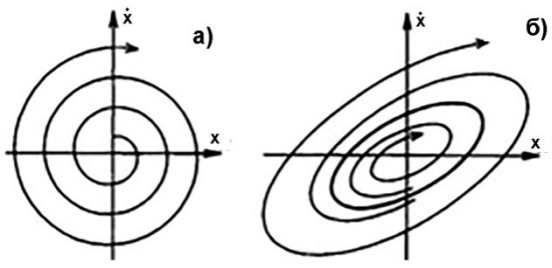


Рис. 25 Простые репеллеры: *(а) – нестабильная сингулярная точка; (б) – нестабильный предельный цикл.*

Как правило, динамическая система

имеет много аттракторов и репеллеров. Динамика пары аттрактор-репеллер устроена достаточно просто: траектории, расположенные вне данных аттрактора и репеллера, начинаются вблизи репеллера и заканчиваются вблизи аттрактора. Если система имеет много аттракторов, то возникает сложная динамика между аттракторами и репеллерами. Для её описания используется такой объект как фильтрация – упорядоченная по включению последовательность аттракторов. Фильтрация помогает избавиться от аппаратного шума или малых флуктуаций, не связанных с поведением динамических систем. Шум влияет на притягивающее множество. Если аттрактор обладает канторовой структурой (например, аттрактор Фейгенбауэра), то при отсутствии шума, увеличение уровня разрешения, количество островов, в которых лежат точки изучаемого множества, будут непрерывно увеличиваться, тогда как в системе с шумом число этих островов будет расти до определённого предела.

13.4 Осциллятор и осцилляции

Примером динамической системы, описываемой решением нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, является колебания маятника с затуханием.

Идеальный маятник служит примером структурной неустойчивости: в отсутствие трения аттрактор не существует, но введение даже самого незначительного трения изменяет движение маятника и вводит аттрактор.

Сначала обсудим некоторые основные свойства осцилляторов, поскольку физика колебаний – важное направление использования аттракторов репеллеров и фазовых портретов.

Осцилляция – повторение состояния системы с течением времени. Маятник, качающийся назад и вперед, является классическим примером колебаний.

При анализе осцилляций на оси абсцисс фазовой плоскости откладывается значения параметра ***x***, а на оси ординат – первая производная *x* по времени (скорость), что связывает ось ординат с импульсом. Каждая точка фазовой плоскости отражает одно состояние системы и называется фазовой, изображающей или представляющей точкой. Изменение состояния системы отображается на фазовой плоскости движением этой точки. След от движения изображающей точки называется фазовой траекторией. Через каждую точку фазовой плоскости проходит лишь одна фазовая траектория, за исключением особых точек. Стрелками на фазовых траекториях показывается перемещение изображающей точки с течением времени. Полная совокупность различных фазовых траекторий – это **фазовый портрет**. Он даёт представление о совокупности всех возможных состояний системы и типах возможных движений в ней. Фазовый портрет удобен для рассмотрения движений макроскопических и квантовых частиц.

Равновесие физической системы устойчиво, если при любом отклонении системы из положения равновесия возникает возрастающая или восстанавливающая сила, которая стремится вернуть систему в равновесие. Если систему вывести из устойчивого равновесия каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, в системе будут происходить колебания около устойчивого положения равновесия. Такие колебания, происходящие в отсутствие периодического внешнего воздействия на систему, называют собственными колебаниями. Любая система, способная совершать собственные колебания, называется осциллятором.

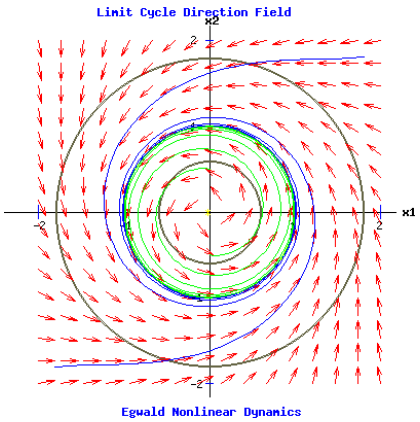


Рис. 26. Границы кольцевой области, образованные двумя концентрическими кругами. Все стрелки направления поля, пересекающие эти границы, указывают на кольцевую область.

Если поле направления ориентировано внутрь вдоль границы кольцевой области, и если область не содержит неподвижных точек, то в кольцевой области присутствует предельный цикл – кольцевая область фазовой плоскости.

Если поле направления системы ориентировано внутрь вдоль границы кольцевой области, область называется областью захвата. Если в область захвата нет неподвижные точки, то она содержит предельный цикл.

В отсутствие трения энергия, сообщённая системе при начальном возбуждении, остаётся неизменной в процессе последующих собственных колебаний. Поэтому в идеализированных консервативных системах собственные колебания продолжаются неограниченно долго. В консервативных системах с одной степенью колебания продолжаются неограниченно долго. В консервативной системе с одной степенью свободы собственные колебания будут строго периодическими, так как начальное состояние системы воспроизводится через равные промежутки времени. При наличии трения, собственные колебания постепенно затухают из-за диссипации энергии и система приходит в состояние покоя в положении равновесия. Если восстанавливающая сила пропорциональна отклонению от положения равновесия, то такая система в отсутствие трения, а также при наличии вязкого трения (когда сила трения пропорциональна скорости) описывается линейным дифференциальным уравнением. В отсутствие трения собственные колебания в линейной системе будут гармоническими (синусоидальными), а при слабом вязком трении – почти гармоническими (с экспоненциально убывающей амплитудой).

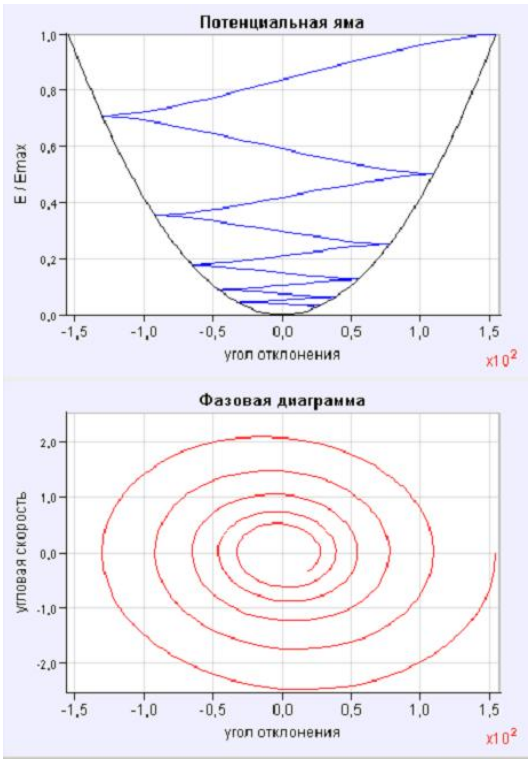


Рис. 27. Взаимное расположение фазовой плоскости и графиков потенциальной и полной энергии осциллятора на экране

Механическое состояние динамической системы в любой момент времени можно наглядно изобразить с помощью точки (*изображающей точки*) в фазовом пространстве. Для системы с одной степенью свободы, положение которой определяется единственной координатой, фазовое пространство динамических переменных двумерно, т. е. представляет собой плоскость. На такой *фазовой плоскости* по оси абсцисс отложена обобщенная координата (угол отклонения) φ, а по оси ординат – угловая скорость $\dot{\varphi}$. Очень наглядное графическое представление всему процессу эволюции механического состояния системы дает *фазовая диаграмма*, т. е. линия, которую изображающая точка вычерчивает на фазовой плоскости. Если система совершает *периодическое движение*, изображающая точка на фазовой плоскости описывает *замкнутую кривую*, двигаясь по ней в направлении по часовой стрелке. Фазовая траектория периодического движения замкнута, потому что система возвращается в исходное механическое состояние после каждого цикла колебаний.

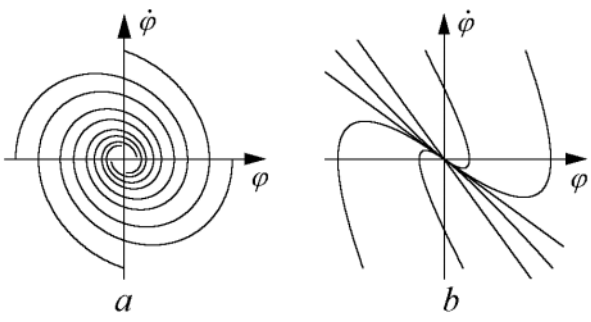


Рис. 28. Фазовый портрет затухающего линейного осциллятора (a) и системы со сверхкритическим затуханием $\gamma>\omega_0$ (b).

Обычно выбрано такое взаимное расположение фазовой плоскости и графика

зависимости потенциальной энергии от угла отклонения, чтобы было удобно в каждый момент времени сопоставлять движущуюся по фазовой плоскости изображающую точку с выводимыми одновременно на график значениями полной энергии осциллятора. Для этого масштабы на фазовой диаграмме и на графике потенциальной энергии выбирают одинаковыми. Совокупность фазовых траекторий, соответствующих разным способам возбуждения (разным начальным условиям) при неизменных параметрах системы образует ее *фазовый портрет*.

Фазовый портрет консервативного линейного осциллятора образован набором геометрически подобных эллипсов с общим центром в начале координат фазовой плоскости. Этот центр изображает состояние покоя осциллятора в положении равновесия. Так как через начало координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (все траектории окружают эту точку), такая точка фазовой плоскости называется особой точкой типа ***центр***. Период гармонических колебаний целиком определяется параметрами физической системы. В отличие от амплитуды и начальной фазы, период не зависит от начальных условий, т. е. от способа возбуждения колебаний. Это свойство линейного осциллятора называется ***изохронностью.*** Благодаря свойству изохронности изображающие точки обходят эллипсы разных размеров на фазовом портрете осциллятора (соответствующие разным амплитудам колебаний осциллятора с данными параметрами) в течение одного и того же времени T_0.

В присутствии сравнительно слабого вязкого трения ($\gamma<\omega_0$) максимальные отклонения, как и максимальные значения угловой скорости, постепенно уменьшаются с каждым последующим циклом колебаний. Поэтому фазовая траектория собственных колебаний благодаря трению трансформируется из замкнутой кривой (эллипса или окружности) для консервативного осциллятора в постепенно скручивающуюся спираль, сжимающиеся витки которой наматываются вокруг фокальной точки, расположенной в начале координат фазовой плоскости. В этом случае начало координат из особой точки типа центр превращается в особую точку типа ***фокус***. Для семейства фазовых траекторий фокус представляет собой аттрактор: все фазовые траектории, независимо от того, где они начинаются, асимптотически приближаются к фокусу, совершая вокруг него бесконечное число оборотов по все более сжимающимся виткам (рис. 28а).

В случае сравнительно сильного вязкого трения ($\gamma>\omega_0$) аттрактор фазовых траекторий из фокуса превращается в особую точку типа **узел:** все фазовые траектории неколебательных движений приближаются к этому узлу напрямую без наматывания, не совершив и одного оборота. Фазовый портрет передемпфированной системы показан на рис. 28б. Все фазовые траектории асимптотически приближаются к началу координат, где у них общая касательная $\dot{\varphi}=\alpha_1\varphi$ с наклоном $\alpha_1=-\gamma^2+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ (за исключением одной прямолинейной фазовой траектории $\dot{\varphi}=\alpha_1\varphi$. При специфических начальных условиях вида $\dot{\varphi}(0)=\alpha_1\varphi(0)$ изображающая точка движется к узлу непосредственно вдоль этой прямолинейной фазовой траектории (общей касательной всех траекторий). Другая прямолинейная фазовая траектория $\dot{\varphi}=\alpha_2\varphi$ соответствует движению при начальных условиях типа $\dot{\varphi}(0)=\alpha_1\varphi(0)$.

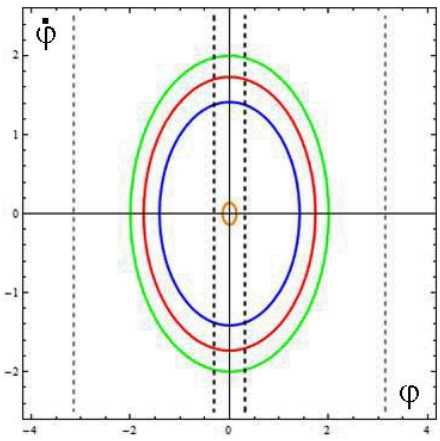


Рис. 29. Фазовая диаграмма маятника в линейном режиме без трения. *Зависимость скорости от угла.*

Таким образом, на фазовом портрете линейного осциллятора имеется только одна особая точка: начало координат фазовой плоскости, где обе динамические переменные φ и $\dot{\varphi}$ равны нулю. Этой точке

соответствует состояние покоя в положении равновесия. При γ=0 это точка типа центр, через которую не проходит ни одна траектория. При $\gamma<\omega_0$ это фокус, а при γ ω_0 это узел фазовых траекторий.

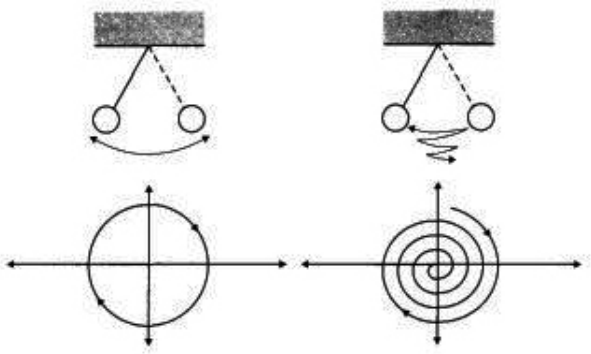


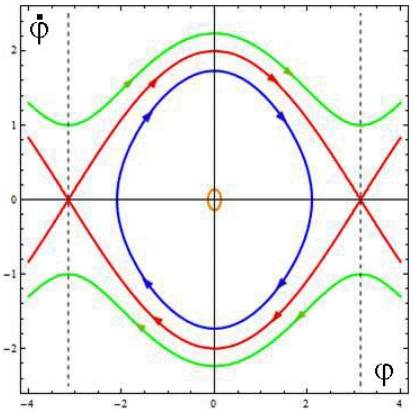
Рис. 30. Движение маятника, как пример фазового пространства.

Способы введения понятия "аттрактор" в описание динамических систем проиллюстрируем на примере простейшего (гармонического) осциллятора - маятника.

Гармонический осциллятор (в классической механике) – система, которая при смещении из положение равновесия испытывает действие возвращающей силы *F*, пропорциональной смещению *x* (согласно закону Гука): *F=-kx*, где *k* – коэффициент жёсткости системы.

Если F – единственная сила, действующая на систему, то систему называют простым или консервативным гармоническим осциллятором. Свободные колебания такой системы представляют собой периодическое движение около положения равновесия (гармонические колебания). Частота и амплитуда при этом постоянны, причём частота не зависит от амплитуды.

Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения (вязкое трение), то такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором. Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение – синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой. Частота свободных колебаний затухающего осциллятора оказывается несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения.



Если осциллятор предоставлен сам себе, то говорят, что он совершает свободные колебания. Если же присутствует внешняя сила (зависящая от времени), то говорят, что осциллятор испытывает вынужденные колебания.

Рис. 31. Фазовая диаграмма маятника в нелинейном режиме без трения.

Сначала займёмся свободными колебаниями.

Примером простой консервативной системой с одной степенью свободы является маятник.

Начнём с простого примера – малых колебаний (так же называемых гармоническими). Малые колебания встречаются почти в каждой сфере естественных наук. Для определённости, будем рассматривать колебания металлического стержня, подвешенного за один из концов (частный случай так называемого физического маятника). Можно показать, что его колебания описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin\varphi = 0 \quad , \qquad (4)$$

где φ – угол отклонения стержня от вертикали, коэффициент перед синусом зависит от размера и массы стержня.

Если амплитуда (размах) колебаний достаточно мала, синус можно приближенно заменить его аргументом. В таком случае, уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \qquad (5)$$

Это уравнение можно решить методом фазовых портретов. Для этого, домножим уравнение на производную и проинтегрируем его один раз по времени:

$$\frac{\dot{\varphi}}{2} + \frac{\omega^2}{2} = E \qquad (6)$$

Это – закон сохранения энергии, постоянная $E=E_K+E_U$ – полная энергия системы на единицу массы – может принимать различные значения, которые соответствуют разным начальным состояниям системы.

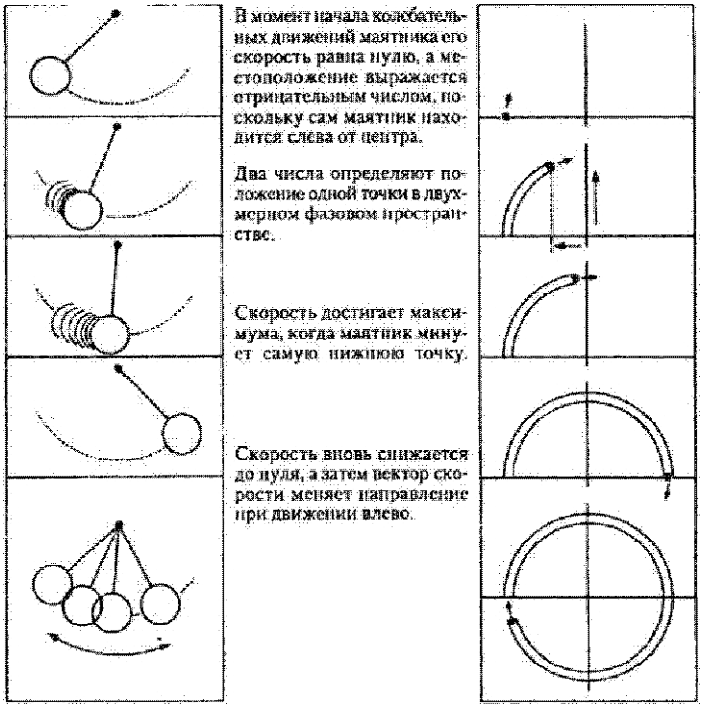
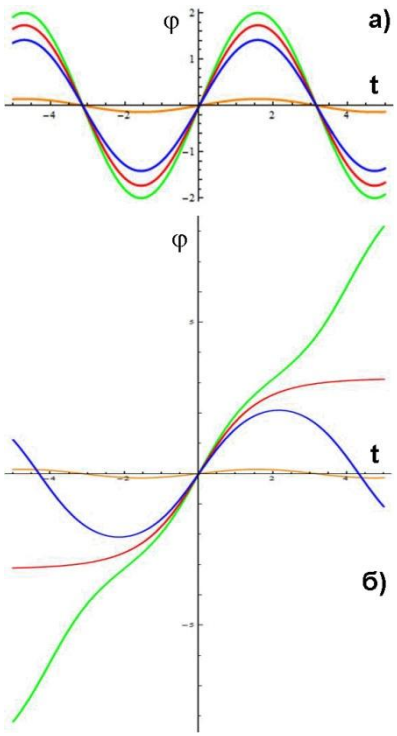


Рис. 32. Способ изучения маятника. *Одна лишь точка в фазовом пространстве (справа) передаёт всю информацию о состоянии динамической системы в конкретный момент времени (слева). Для простого маятника достаточно двух чисел, представляющих его скорость и местопребывания.*

Тогда закон сохранения энергии превратился в уравнение кривой на плоскости (φ, $\dot{\varphi}$). На рис. 31 разные значения E представлены разными кривыми.

Каждая из полученных линий называется фазовой траекторией. Когда меняется состояние системы, изображающая её точка движется по одной из этих траекторий. По графику видно, что значения скорости и координаты меняются циклическим образом, то есть периодически повторяются. Отсюда можно сделать вывод, что описываемая рассмотренным уравнением система будет совершать колебания. Именно так ведёт себя маятник, и если решить уравнение, решение будет иметь вид периодических функций (а именно – комбинации синуса и косинуса).



Однако замена синуса его аргументом оправдана лишь для малых углов отклонения (от 10 градусов и меньше), поэтому нельзя доверять тем траекториям, которые выходят за границы области, ограниченной жирными пунктирными линиями, то есть из четырёх приведённых траекторий лишь оранжевая достоверно отображает реальность. Кроме того, поскольку φ это угол, то его значения, соответствующие 180 и -180 градусам описывают одно и то же положение маятника, т.е. правая и левая пунктирные линии (тонкие) на графике это на самом деле одна и та же линия.

Рис. 33. Колебание маятника в линейном (а) и нелинейном (б) режимах.

Учтём теперь нелинейность системы. Вернёмся к самому первому уравнению – с синусом проделаем с ним те же операции, что и с линейным уравнением. Тогда

$$\frac{\dot{\varphi}}{2} - \omega^2 \cos\varphi = E \qquad (7)$$

Рис. 31 демонстрирует, при малых энергиях (оранжевая и синяя траектории) существует колебательный режим, но колебания уже не являются гармоническими – фазовые траектории уже не имеют форму эллипсов. При больших энергиях (зелёная траектория) колебаний уже нет, вместо этого мы получаем вращательное движение с переменной скоростью. И действительно, если достаточно сильно «толкнуть» стержень, он будет вращаться вокруг некоторой точки, замедляясь при подъёме и ускоряясь при спуске. При определенном промежуточном значении энергии получается особый набор траекторий, которые отделяют друг от друга области соответствующие разным типам движения и поэтому называются **сепаратрисами.** Каждая ветвь сепаратрисы это траектория, соответствующая особому типу движения. Движение начинается с очень маленькой скоростью от одного крайнего положения стержня, при приближении к положению равновесия скорость растёт, а после изображающая точка все более замедляясь, уходит к крайнему положению, где и останавливается. Это соответствует тому, что мы поднимаем стержень вертикально вверх и отпускаем его, проносясь через положение равновесия, он поднимается к верхней точке с другой стороны и останавливается.

Колебания в линейном случае происходят синхронно – с одной и той же частотой. В нелинейном же случае, частота колебания с большей амплитудой (синяя линия) оказывается меньше, чем у колебания с малой амплитудой (оранжевая линия). Это служит еще одним подтверждением того, что нелинейные колебания не являются гармоническими.

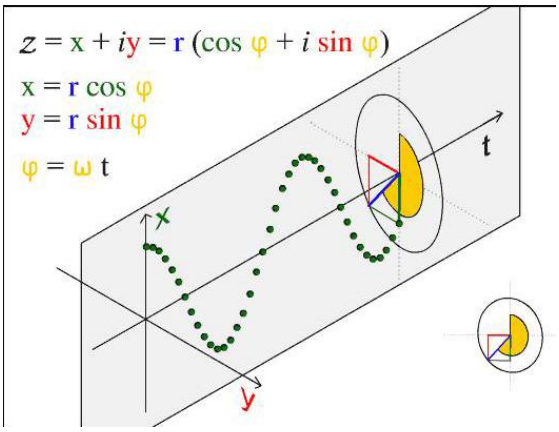


Рис. 34. Движение по кругу и движение гармоническое.

Эллиптические кривые на рис. 31 соответствуют устойчивым процессам (нижнее положение равновесия маятника), а гиперболические точки, соответствующие верхнему положению равновесия маятника, являются неустойчивыми. Фазовая кривая, начавшаяся в окрестности гиперболической точки, удаляется от неё, в то время как траектория вблизи эллиптической точки всегда остаётся в её окрестности.

Замечание. Маятник в случае малых отклонений описывается линейными уравнениями: частота колебаний не зависит от амплитуды. Маятник в случае больших отклонений относится к нелинейной системе: частота колебаний зависит от амплитуды.

В качестве другой модели консервативного гармонического осциллятора возьмём груз массы m, закреплённый на пружине жёсткостью k.

Пусть x – смещение груза относительно положения равновесия. Тогда, согласно закону Гука, на него будет действовать возвращающая сила:

$$F=-kx. \qquad (8)$$

Используя второй закон Ньютона, запишем

$$a = -\frac{k}{m}. \qquad (9)$$

Обозначая $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и заменяя ускорение а на вторую производную от координаты по времени $\ddot{x}$ напишем:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (10)$$

Это дифференциальное уравнение описывает поведение консервативного гармонического осциллятора. Коэффициент ω_0 называют циклической частотой осциллятора. (Здесь имеется в виду круговая частота, измеряющаяся в радианах за секунду. Чтобы перевести её в частоту, выражающуюся в герцах, надо разделить круговую частоту на 2π)

Будем искать решение этого уравнения в виде:

$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)$ (11)

Здесь A – амплитуда, ω – частота колебаний (пока не обязательно равная собственной частоте), φ_0 – начальная фаза.

Подставляем в дифференциальное уравнение.

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t+\varphi), \quad -A\omega^2 \sin(\omega t+\varphi)+\omega_0^2 A\sin(\omega t+\varphi)=0 \qquad (12)$$

Амплитуда сокращается. Значит, она может иметь любое значение (в том числе и нулевое – это означает, что груз покоится в положении равновесия). На синус также можно сократить, так как равенство должно выполняться в любой момент времени t. Таким образом, остаётся условие для частоты колебаний: $-\omega^2+\omega_0^2=0$, $\omega=\pm\omega_0$.

Отрицательную частоту можно отбросить, так как произвол в выборе этого знака покрывается произволом выбора начальной фазы.

$x(t)=A\sin(\omega_0+\varphi_0)$ (13)

где амплитуда A и начальная фаза φ_0 – произвольные постоянные.

Эта запись исчерпывает все решения дифференциального уравнения, т.к. позволяет удовлетворить любым начальным условиям (начальному положению груза и его начальной скорости).

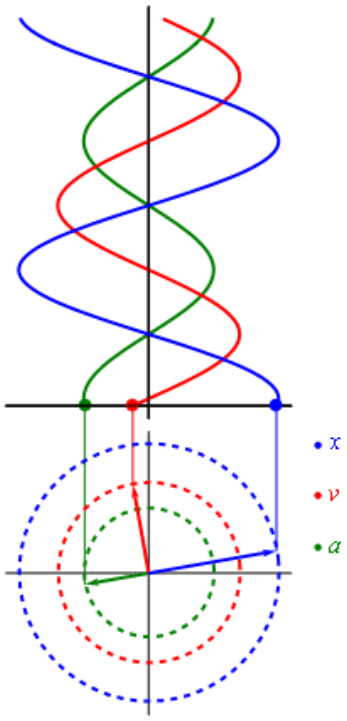


Рис. 35. Положение, скорость и ускорение простого гармонического движения на фазовой плоскости.

Как уже упоминалось, точечный аттрактор - аттрактор, для которого все траектории в фазовом пространстве сходятся к одной точке или величине. Важно, что любая система, которая стремится к одному устойчивому состоянию равновесия, будет иметь точечный аттрактор. Маятник с трением всегда остановится. Его фазовое пространство "стягивается" в точку, где скорость и координаты равны нулю.

Таким образом, консервативный гармонический осциллятор может совершать чисто гармонические колебания с частотой, равной его собственной частоте, с амплитудой любой величины и с произвольной начальной фазой.

Кинетическая энергия записывается в виде

$$E_K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\delta_0), \qquad (14)$$

и потенциальная энергия есть

$$E_U = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\delta_o), \qquad (15)$$

тогда полная энергия имеет постоянное значение

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \qquad (16)$$

Простое гармоническое движение – это движение простого гармонического осциллятора, периодическое движение, которое не является ни вынужденным, ни затухающим. Тело в простом гармоническом движении подвергается воздействию единственной переменной силы, которая по модулю прямо пропорциональна смещению x от положения равновесия и направлена в обратную сторону. Это движение является

периодическим: тело колеблется около положения равновесия по синусоидальному закону. Каждое последующее колебание такое же, как и предыдущее, и период, частота и амплитуда колебаний остаются постоянными. Если принять, что положение равновесия находится в точке с координатой, равной нулю, то смещение x тела от положения равновесия в любой момент времени даётся формулой:

$$x(t)=A\cos(2\pi ft+\delta_0), \qquad (17)$$

где A – амплитуда колебаний, f – частота, φ – начальная фаза, $\omega=2\pi f$ – круговая частота

Частота движения определяется характерными свойствами системы (например, массой движущегося тела), в то время как амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями – перемещением и скоростью тела в момент начала колебаний. Кинетическая и потенциальная энергии системы также зависят от этих свойств и условий.

Рассмотрим теперь гармонический осциллятор с затуханием.

Затухающие колебания – колебания, энергия которых уменьшается с течением времени.

Маятник является простым примером динамической системы с двумя факторами, которые определяют его движение: скорость и положение. Вычерчивание кривой скорости или положения против времени привело бы к простой синусоидальной волне, или гармоническому осциллятору, поскольку положение и скорость поднимаются и падают по мере того, как маятник движется вперед и назад, поднимаясь и падая. Однако при создания графика скорости от положения, удаляется время как измерение. Если нет трения, маятник будет качаться назад и вперед вечно, и его фазовая диаграмма будет представлять собой замкнутый круг. Однако если имеет место трение или затухание, то при каждом колебании маятника назад и вперед, он движется немного медленнее, и его амплитуда уменьшается, пока он, в конце концов, не останавливается. Соответствующая фазовая диаграмма будет постепенно снижаться до начала координат, где скорость и положение приходят к нулевому значению.

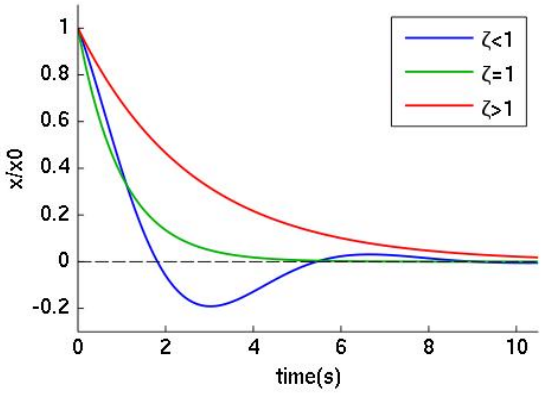


Рис. 36. Зависимость графиков колебаний от значения коэффициента затухания.

Бесконечно длящийся процесс вида $u(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ в природе невозможен. Свободные колебания любого осциллятора рано или поздно затухают и прекращаются. Поэтому на практике обычно имеют дело с затухающими колебаниями. Они характеризуются тем, что амплитуда колебаний A является убывающей функцией. Обычно затухание происходит под действием сил сопротивления среды, наиболее часто выражаемых линейной зависимостью от скорости колебаний или её квадрата. Свободные колебания реальных систем всегда затухают. Затухание обусловлено трением (механические системы) и сопротивлением (в электромагнитных колебательных контурах).

Примером осциллятора с затуханием служить маятник, колебания которого затухают из-за вязкого трения. Сила вязкого трения направлена против скорости движения груза относительно среды и прямо пропорциональна этой скорости. Тогда полная сила, действующая на груз, записывается так:

$$F=-kx-\alpha v. \qquad (18)$$

Проводя аналогичные действия, получаем дифференциальное уравнение, описывающее затухающий осциллятор:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (19)$$

Здесь введено обозначение: $2\gamma = \frac{\alpha}{m}$. Коэффициент γ носит название постоянной затухания. Он тоже имеет размерность частоты.

Решение же распадается на три случая.

При малом трении $\gamma<\omega_0$ общее решение записывается в виде:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin\left(\omega_f t + \varphi\right), \qquad (20)$$

где $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – частота свободных колебаний.

Затухание $\gamma=\omega_0$ называют критическим. Начиная с такого значения показателя затухания, осциллятор будет совершать так называемое неколебательное движение. В граничном случае движение происходит по закону:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}. \qquad (21)$$

При сильном же трении $\gamma=\omega_0$ решение выглядит следующим образом:

$$x(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t} \qquad (22)$$

где $\beta_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$.

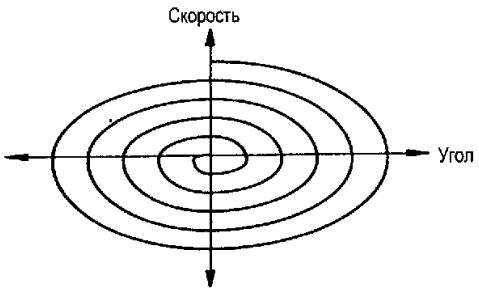


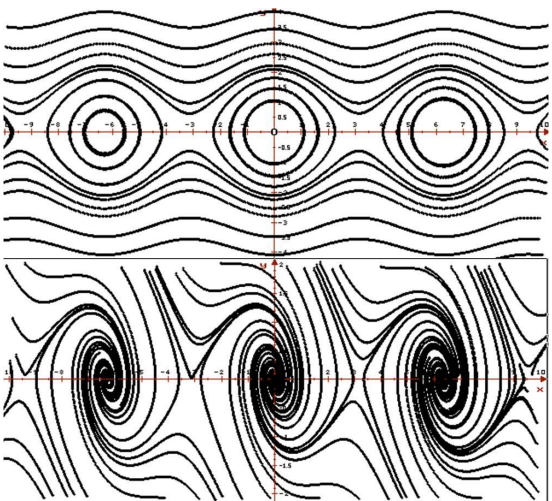
Рис. 37. Траектория маятника с трением в фазовом пространстве (точечный аттрактор). В случае маятника, непрерывно теряющего энергию на трение, все траектории имеют форму спирали, закручивающейся внутрь, по направлению к точке, в которой система устойчива, – в таком случае движение не наблюдается вообще.

Критическое затухание примечательно тем, что именно при критическом затухании осциллятор быстрее всего стремится в положение равновесия. Если трение меньше критического, он дойдёт до положения равновесия быстрее, однако «проскочит» его по инерции, и будет совершать колебания. Если трение больше критического, то осциллятор будет экспоненциально стремиться к положению равновесия, но тем медленнее, чем больше трение. Поэтому в стрелочных индикаторах (например, в амперметрах) обычно стараются ввести именно критическое затухание, чтобы стрелка успокаивалась максимально быстро для считывания его показаний. Затухание осциллятора также часто характеризуют безразмерным параметром, называемым добротностью. Добротность равна:

$$\zeta = \frac{\omega_0}{2\gamma} \qquad (23)$$

Чем больше добротность, тем медленнее затухают колебания осциллятора.

Добротность указывает характер поведения осциллятора. У осциллятора с критическим затуханием добротность равна 0,5. Если $\zeta > 0{,}5$, то свободное движение осциллятора представляет собой колебания; теоретически со временем он пересечёт положение равновесия неограниченное количество раз. Добротность $\zeta \le 0{,}5$, соответствует неколебательному движению осциллятора; в свободном движении он пересечёт положение равновесия не более одного раза.



Замечание. При анализе работы осциллятора строят зависимости *x*(*t*) или *v*(*t*), но нагляднее строить график *x*(*v*) (или *x*[*p*(*v*)], где *p* – импульс при фиксированных *t*. Такой график определяет фазовое пространство (в двумерном случае – фазовую плоскость. Поведение графика определяет аттрактор.

Рис. 38. Изображение фазовых портретов двух автономных систем. *На верхнем рисунке*

приведен фазовый портрет системы, описывающей колебания математического маятника без трения ("кошачий глаз", на нижнем – колебания математического маятника "с трением".

Под автоколебаниями понимают колебательный процесс в диссипативных системах (т.е. в системах с потерями задействованной в процессе энергии – на трение, выделение тепла), характеристики которого – амплитуда колебаний, их форма, период и частота (в более общем случае – спектр) определяются самой системой и не зависят от изменения начальных условий. Образ автоколебаний в фазовом пространстве – аттрактор – фазовая траектория или множество траекторий, к которому притягиваются все близлежащие траектории. Аттрактор, отвечающий периодическим автоколебаниям, есть замкнутая фазовая траектория – предельный цикл.

Самая древняя автоколебательная система – маятниковые часы. Гиря на цепочке стремится вращать зубчатое колесо (храповик). При колебаниях маятника анкер цепляет за зубец, и вращение приостанавливается, но в результате маятник получает толчок, компенсирующий потери энергии из-за трения. Потенциальная энергия гири, которая постепенно опускается, расходуется на поддержание незатухающих колебаний.

14. УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предсказания направлений эволюции динамической системы осуществляются анализом их устойчивости (и неустойчивости), на основе склонности системы к флуктуациям и способности борьбы с ними.

В данной главе рассмотрена устойчивость решений линейных и нелинейных систем обыкновенных уравнений, устойчивость особых точек и режимов перехода к бифуркациям, динамическому хаосу и катастрофам.

14.1 Устойчивые и неустойчивые равновесия

При изучении реальных систем обнаруживается, что начальные условия точно не известны, они оцениваются приблизительно. При прогнозе поведения такой системы прежде всего надо убедиться, что небольшие ошибки в измерениях не приведут к большим изменениям в решении уравнений. Важно, чтобы небольшой разброс в значениях начальных параметров не оказывал существенного влияния на результаты расчётов. Для этого требуется, что бы имела место непрерывная зависимость решений от исходных данных и параметров.

Состояние устойчивой системы может быть только стационарным, т. е. устойчивая система может находиться либо в состоянии покоя, либо в состоянии периодического движения. Устойчивой является та система, которая, будучи выведена из стационарного состояния кратковременным внешним воздействием (возмущением), вновь возвращается в прежнее стационарное (равновесное) состояние.

Равновесие – общее понятие, относимое к различным ситуациям, характеризующимся взаимодействием разнонаправленных сил, воздействие которых взаимно погашается таким образом, что наблюдаемые свойства системы остаются неизменными.

В технике положение равновесия – состояние покоя – постоянная величина, все его производные равны нулю. Систему выводят из положения равновесия и убирают все возмущения. Если при этом с течением времени (при $t \to \infty$) система возвращается в положение равновесия, она называется *устойчивой*. Если выходная координата остается ограниченной (не уходит в бесконечность), система называется *нейтрально устойчивой*, а если выход становится бесконечным – *неустойчивой*. Говоря о внутренней устойчивости, рассматривают не только выход, но и все переменные, описывающие состояние системы

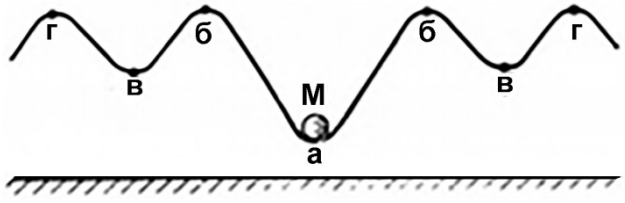


Рис. 1. Схематическое представление системы, имеющей несколько состояний.

Внешнее воздействие может иметь любую величину, но выделяют два случая, соответствующие устойчивости «в малом» и устойчивости «в большом». В фигурном рельефе (рис. 1 и 3) шарик может находиться в точках *а* и *в* , которые соответствуют условиям устойчивости «в малом», но не удовлетворяют условиям устойчивости «в большом» (например, при слабом возмущении шарик в *в* будет возвращаться в свою яму, но при сильном возбуждении он может оказаться в яме *а*); точки на вершинах гор *б* и *г*, не удовлетворяют условиям устойчивости, шарик на горе долго не засидится. Система шарик-горка нелинейна. Устойчивость – свойство не системы, а положения равновесия; может быть несколько положений равновесия, одни – устойчивые, другие некоторые – нет; положение равновесия может быть устойчиво при малых отклонениях и неустойчиво при больших.

Важнейшие понятия теории динамических систем – ***устойчивость состояний равновесия и грубость.***

Устойчивость системы – способность динамической системы сохранять движение по намеченной траектории (поддерживать намеченный режим функционирования) несмотря на воздействующие на нее возмущения. Основными видами устойчивости являются

равновесие, гомеостазис, стационарный режим (циклическое повторение одной и той же последовательности состояний).

Если малые погрешности в начальных условиях способны резко изменить намеченную траекторию, система называется неустойчивой по начальным данным. Если же, наоборот, погрешности начальных условий автоматически гасятся системой, она называется асимптотически устойчивой. При этом различается глобальная устойчивость – когда свойство устойчивости выполняется для любой траектории системы (из числа тех, которые рассматриваются в данном исследовании), и локальная устойчивость, если это свойство относится только к траекториям, лежащим «вблизи» равновесной траектории. Впрочем, некоторые авторы определяют локальную устойчивость иначе: как такую, которая относится лишь к малым изменениям начальных условий.

Устойчивость состояния равновесия – способность системы сохранять текущее состояние под влиянием внешних воздействий; способность системы сколь угодно долго оставаться около положения равновесия или на заданном многообразии. Если текущее состояние при этом не сохраняется, то такое состояние называется неустойчивым.

Абсолютная неустойчивость – вид неустойчивости, при котором малое начальное возмущение в любой точке пространства неограниченно нарастает с течением времени.

Грубость динамической системы – сохранение свойств при малых изменениях структуры динамической системы; грубая система – система, качественный характер движений которой не меняется при достаточно малом изменении параметров.

Грубая динамическая система – структурно устойчивая гладкая динамическая система, обладающая свойством: для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что при любом её возмущении, отстоящем от нее в C_1- метрике не более чем на δ, существует гомеоморфизм фазового пространства, который сдвигает точки траектории не более чем на ε и переводит траектории невозмущённой системы в траектории возмущённой. При малом возмущении правой части грубой системы дифференциальных уравнений получается система, эквивалентная исходной по своим топологическим свойствам. Динамическая система называется грубой или структурно-устойчивой, если малые гладкие возмущения оператора эволюции приводят к топологически эквивалентным решениям.

Устойчивость положения равновесия характеризуется следующими вариантами: неустойчивое равновесие; устойчивое равновесие; безразличное равновесие. В случае системы с одной степенью свободы достаточным условием положения равновесия является наличие локального экстремума в исследуемой точке. Как известно, условием локального экстремума дифференцируемой функции является равенство нулю её первой производной. Чтобы определить, когда эта точка является минимумом или максимумом, необходимо проанализировать её вторую производную. В случае, когда вторая производная отрицательна, потенциальная энергия системы находится в состоянии локального максимума. Это означает, что положение равновесия *неустойчиво*. Если система будет смещена на небольшое расстояние, то она продолжит своё движение за счёт сил, действующих на систему: при выведении тела из равновесия оно не возвращается на исходную позицию. Если вторая производная > 0: потенциальная энергия в состоянии локального минимума, положение равновесия *устойчиво*). Если систему сместить на небольшое расстояние, она вернётся назад в состояние равновесия. Равновесие устойчиво, если центр тяжести тела занимает наинизшее положение по сравнению со всеми возможными соседними положениями. При таком равновесии выведенное из равновесия тело возвращается на первоначальное место. Вторая производная =0: в этой области энергия не варьируется, а положение равновесия является *безразличным*. Если система будет смещена на небольшое расстояние, она останется в новом положении. Если отклонить или сдвинуть тело оно останется в равновесии.

Если равновесие достигается лишь в определенных пределах колебания измеряемой функции, то говорят о локальной устойчивости. Однако при этом (рис. 2а) устойчивость достигается лишь в интервале от P_2 до P_1. Если же равновесие

устанавливается при любых отклонениях параметра цен от равновесной цены (рис. 2б), то устойчивость носит глобальный характер.

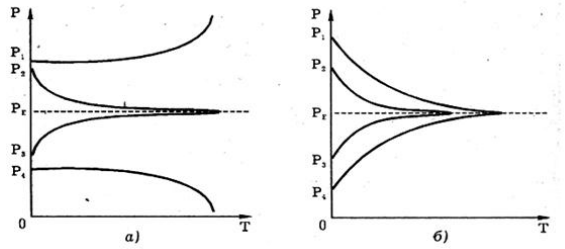


Рис. 2. Локальная (а) и глобальная (б) устойчивость равновесия.

О грубой системе говорят либо когда фазовое многообразие замкнуто, либо когда траектории входят в некоторую компактную область G с гладкой границей, не касаясь последней, причем возмущение и гомеоморфизм рассматривают только на G. Ввиду компактности выбор метрики не играет роли. При малом (в смысле C_1) возмущении грубой системы получается система, эквивалентная исходной по всем своим топологическим свойствам (эта эквивалентность должна осуществляться посредством гомеоморфизма, близкого к тождественному). Иногда термины «грубость» и «(структурная) устойчивость» употребляют в более широком смысле, например, имея в виду только сохранение при малых возмущениях того или иного свойства системы (в этом случае лучше говорить о грубости данного свойства).

Часто грубость и структурная устойчивость интерпретируется в более узком смысле, когда утверждается сохранение при малых возмущениях некоторых линейных локальных свойств системы. Локальная грубость - свойство системы, рассматриваемой в окрестности компактного инвариантного множества E гладкой динамической системы. Пусть E - положение равновесия потока или неподвижная точка каскада (отображения, динамической системы с дискретным временем). Тогда локальная грубость E означает: расположение собственных значений линеаризованной системы вне мнимой оси. Грубое положение равновесия (особая точка векторного поля грубая) имеет место, если существует такая окрестность этой системы, все элементы которой локально топологически эквивалентны исходной системе.

Замечание. Перенесение понятия грубости на многомерные системы встречает серьёзные затруднения. Грубые системы бывают весьма сложными и в пространстве параметров многомерной динамической системы могут существовать целые области негрубых систем.

Флуктуация – любое случайное отклонение какой-либо величины.

Теория устойчивости – дисциплина, изучающая закономерности поведения систем под действием внешних воздействий. В аналитическом аспекте является разделом теории дифференциальных уравнений. В наиболее общем виде теория устойчивости была разработана А.М. Ляпуновым, сформулировавшим и доказавшим основные теоремы теории устойчивости движения. Важной частью теории устойчивости является проблема аналитического и практического определения запасов устойчивости сложных (многокомпонентных, динамических, разнофакторных) систем и процессов.

В аналитическом аспекте теория устойчивости – раздел теории дифференциальных уравнений. В прикладном аспекте наибольшее развитие получила теория устойчивости механических систем, поскольку именно механика впервые столкнулась с проблемами устойчивости. Эйлер поставил и решил задачу устойчивости состояния равновесия механический системы — стержня, сжатого сжимающей силой. В наиболее общем виде теория устойчивости была разработана А.М. Ляпуновым, сформулировавшим и доказавшим основные теоремы теории устойчивости движения. Важной частью теории устойчивости является проблема аналитического и практического определения запасов устойчивости сложных (многокомпонентных, динамических, разнофакторных) систем и процессов. В этой части теории устойчивости особую актуальность с развитием сложной техники приобрели задачи диагностирования и прогнозирования запасов устойчивости процессов, связанных с эксплуатацией больших технических систем.

Устойчивость определяется способностью системы противостоять внешним или внутренним воздействиям. Система устойчива, если:

1) после снятия воздействия по окончании переходного процесса система возвращается в исходное равновесное состояние (малые возмущения затухают во времени);
2) после изменения воздействия на постоянную величину по окончании переходного процесса система приходит в новое равновесное состояние (малые возмущения нарастают со временем).

Особые точки положения равновесия на фазовом портрете могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Если динамическая система находится в окрестности устойчивой точки равновесия, то малые возмущения не нарушат устойчивой работы системы. Если точка положения равновесия не устойчива, то возмущения будут прогрессировать, что может привести к разрушению системы.

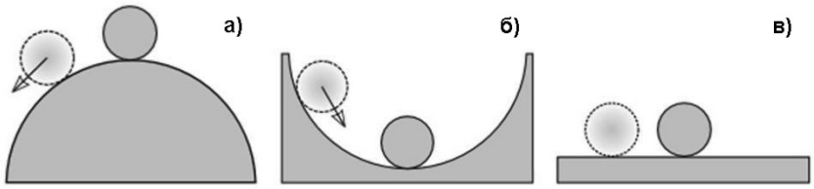


Рис. 3. Системы разной устойчивости: а – неустойчивое равновесие; б – неустойчивое равновесие, безразличное равновесие.

Полагают, что только грубые системы могут описывать реальные процессы. Нельзя доверять математической модели, резко меняющей свое поведение при малом изменении входящих в нее параметров (которые в реальности никогда не могут определяться точно).

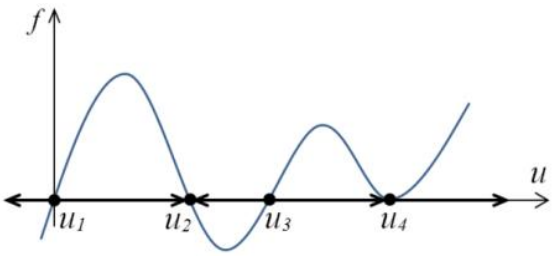
Понятие грубой системы предполагает, что при достаточном малом изменении система не меняет своего качественного поведения. Далее нас будет интересовать устойчивость автономной системы, т.е. системы, на которую не действуют внешние сигналы (все входы нулевые).

Автономная система дифференциальных уравнений (стационарная система) — частный случай системы дифференциальных уравнений, когда аргумент t системы не входит явным образом в функции, задающие систему. Автономная система в нормальном виде имеет вид: $\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1,...,x_n), \quad k = 1,..,n$ **или в векторной записи** $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x})$ **.**

Будем полагать, что автономному систему вывели из положения равновесия (задали *ненулевые начальные условия*) и «отпустили». Система, которая сама возвращается в исходное положение равновесия, называется устойчивой. Если при этом рассматривается только выход системы (а не ее внутренние сигналы), говорят о *«технической устойчивости»* (или *устойчивости по выходу*). Напротив, *внутренняя* или *математическая устойчивость* означает, что не только выход, но и все внутренние переменные (переменные состояния) приближаются к своим значениям в положении равновесия. В некоторых задачах основной рабочий режим – это периодические колебания, поэтому можно рассматривать *устойчивость процессов*, а не только положения равновесия. Почти все такие системы – нелинейные, и их адекватное описание представляет серьёзную проблему.

Замечание. Для автономных уравнений типа Ур.1, невозможно существование периодических решений. Дело в том, что Ур.1 соответствует поток на прямой. Если поток монотонен, то фазовая точка не может возвратиться на начальное место, поэтому периодические движения в данном случае невозможны (у фазовой точки нет обратного пути). По той же причине невозможны также и более общие колебательные движения.

Гиперболическое положение равновесия (равновесие, в котором линейное приближение не имеет собственных значений на мнимой оси) является грубым, поскольку для близких систем знаки собственных значений сохраняются. Поведение системы в окрестности гиперболического положения равновесия аналогично поведению линейной системы в нуле. В случае аналитической динамической системы (функция аналитическая, если в окрестности точки она представляется степенным рядом) для каждого положения



равновесия характерна секторная структура: эллиптический сектор; гиперболический сектор (седло); параболический сектор (типа аттрактор или репеллер).

Рис. 4. Фазовый портрет. Положения равновесия u_1 и u_2 – неустойчивы, u_3 – асимптотически устойчиво, u_4 – полуустойчиво

Обычно рассматривается задача об устойчивости тривиального решения в особой точке, поскольку задача об устойчивости произвольной траектории сводится к данной путём замены неизвестной функции.

Как уже упоминалось, все линейные однородные системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} (\det A \neq 0) \qquad (1)$$

можно разбить на группы, положив в основу классификации поведение их траекторий. При этом в центре внимания оказывается нулевое решение (положение равновесия (0;0)). Возможны три случая:

1. Существует траектории, двигаясь по которым точка при $t \to \infty$ уходит от положения равновесия (неустойчивые узлы, седло, неустойчивые фокусы).
2. Двигаясь по любой траектории, точка остаётся в некоторой окрестности (может быть достаточно большой) точки равновесия, не стремясь к ней при $t \to \infty$ (центр).
3. Двигаясь по любой траектории, точка $t \to \infty$ стремится к положению равновесия (устойчивые узлы и фокусы).

В первом случае нулевое решение неустойчиво, во втором - устойчиво, и в третьем - асимптотически устойчиво.

14.2 Устойчивость по Ляпунову (метод первого приближения)

В понятии устойчивость по Ляпунову реализуется идея малых отклонений решения дифференциального уравнения на промежутке времени [0,+∞] при небольших вариациях начальных данных этого решения.

Ляпунов разделил методы теории устойчивости на два класса. К первому он отнёс те методы, которые при своём применении требуют определённую информацию о решениях исследуемой системы. Такой подход называется первым методом Ляпунова.

Выделяют два типа устойчивости.

1) Устойчивость относительно возмущения начальных данных. К ним относятся: устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Пуанкаре (орбитальная устойчивость, устойчивость по Жуковскому, практическая устойчивость и неустойчивость, устойчивость относительно части переменных и условная устойчивость).
2) Устойчивость относительно постоянно действующих внешних возмущений.

В математической теории систем вектор состояния обозначают через $x(t)$, а уравнение движения системы записывают в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = f(x,t) \qquad (2)$$

Фактически это система дифференциальных уравнений первого порядка, в нём правая часть зависит только от значений t и $x(t)$, но не от производных. Если вектор состояния $x(t)$ состоит из двух компонентов, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, то $\dot{x}_1 = f_1(x)$, $\dot{x}_2 = f_2(x)$, где функции $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$ зависят от вектора состояния и времени.

Устойчивость определяется для некоторого положения равновесия. Для нелинейной системы может быть несколько положений равновесия, причем некоторые из них могут быть устойчивы, а некоторые – нет. В положении равновесия все производные равны нулю. Предположим, что систему вывели в некоторое начальное состояние $x=x(0)$ (задали

начальные условия), а потом внешнее воздействие прекратили. Дальнейшее изменение координат системы $x(t)$) можно найти как решение ОДУ при заданных начальных условиях. Устойчивость означает, что все движения $x(t)$, которые начинаются близко от положения равновесия x_0, при всех t остаются в некоторой окрестности x_0. Если система не просто устойчива, а еще и возвращается в положение равновесия, т. е. $x(t)$ стремится к x_0 при $t\to\infty$, то говорят об *асимптотической устойчивости*.

Известны различные определения устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость экспоненциальная устойчивость и др. Критериев устойчивости тоже много: Ляпунова, Рауса-Гурвица, Найквиста, Михайлова и др.

Ограничимся рассмотрением устойчивости по Ляпунову.

Для исследования устойчивости систем существует два варианта метода Ляпунова. Первый основан на определении корней характеристического уравнения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей физико-химическую систему, а второй метод – на исследовании физико-химической системы с помощью скалярной функции Ляпунова. Основным преимуществом метода функций Ляпунова перед всеми остальными подходами к решению разнообразных задач устойчивости является его универсальность. Это единственный метод анализа устойчивости динамических систем любого нелинейного вида и любой размерности.

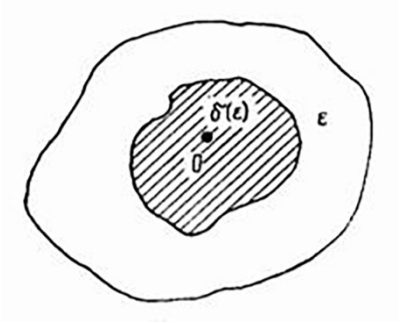


Рис. 5. Иллюстрация к определению устойчивости области ε и δ на плоскости (x,y).

Проиллюстрируем особенности первого метода на примере простой линейной системе первого порядка, с одной переменной состояния $x(t)$: $x'=f(x)$. Предположим, что это уравнение имеет положение равновесия, причём оно находится в начале координат. Тогда устойчивость положения равновесия – это равномерная на интервале $t>0$ сходимость (к постоянному значению) решений, начальные значения которых стремятся к рассматриваемому положению равновесия. В двумерном случае состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области (ε) допустимых отклонений от состояния равновесия (например, область ε вокруг точки равновесия на рис. 5) можно указать область δ(ε), окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε.

Устойчивое состояние равновесия характеризуется тем, что отклонение от этого состояния не превысит сколь угодно малой величины, если начальное возмущение достаточно мало. Если возникающее малое отклонение с течением времени затухает, то такое равновесие называется асимптотически устойчивым. Следовательно, если малые начальные отклонения приводят к возникновению достаточно малых периодических колебаний в системе, состояние равновесия устойчиво, но не асимптотически. Или более строго: система устойчива по Ляпунову в положении равновесия x_0, если при начальном отклонении от положения равновесия $x(0)$ не более, чем на δ, траектория движения отклоняется от x_0 не более, чем на ε, причём для каждого ε можно найти соответствующее ему $\delta(\varepsilon)$: $|x(0)-x_0|<\delta$ и $|x(t)-x_0|<\varepsilon$ при всех $t>0$. Это означает, что чем меньше начальное отклонение, тем меньше траектория движения отклоняется от положения равновесия.

Если, кроме того, вектор состояния стремится к положению равновесия, т. е. $|x(t)-x_0|\to 0$ при $t\to\infty$, система называется *асимптотически устойчивой* в положении равновесия x_0.

Положение равновесия x_0 называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и предел $x(t)$ при $t\to\infty$ равен нулю для всякого решения x с начальным условием $x(0)$, лежащим в достаточно малой окрестности нуля.

Заметим, что выполнение условия сходимости не гарантирует устойчивость по Ляпунову. Существуют примеры достаточно сложных нелинейных систем, в которых даже при очень малых отклонениях от положения равновесия сначала наблюдается большой «выброс», а затем траектория сходится к точке равновесия. Асимптотическая устойчивость – более сильное требование. Положения равновесия, которые устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически устойчивы, называются *нейтрально устойчивыми* (маятник без трения, бассейн с водой).

Абсолютная устойчивость - устойчивость, при которой начальные отклонения не только не нарастают, но затухают, стремясь к нулю.

Положение равновесия *неустойчиво*, если для него не выполняется условие устойчивости Ляпунова. Это значит, что существует такое $\varepsilon>0$, что траектория $x(t)$ выходит за границы области $|x(t)-x_0|<\varepsilon$ при сколь угодно малом отклонении начального состояния $x(0)$ от положения равновесия x_0. Например, система переходит в *другое* положение равновесия, или $x(t)$ неограниченно возрастает.

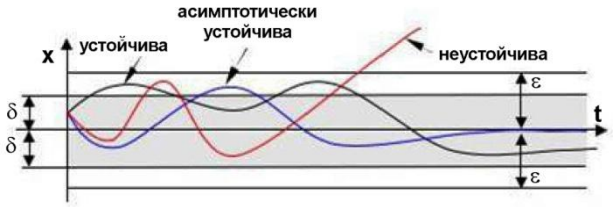


Рис. 6. Движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем первого порядка (с одной координатой x(t)).

Траекторию движения систем второго порядка обычно изображают на *фазовой плоскости*. На рис. 7 показаны движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем. Для простоты предполагается, что положение равновесия – это начало координат, где $x_1=x_2=0$.



Рис.7. Фазовые траектории систем различной устойчивости.

Линейные системы обладают рядом особенностей, которые во многих случаях упрощают анализ устойчивости:

- автономная линейная система (на которую не действуют внешние силы) может иметь единственное положение равновесия (в котором все сигналы равны нулю) или бесконечно много положений равновесия (шарик на плоской поверхности);
- устойчивость – это свойство линейной системы, а не отдельного положения равновесия: или все ее движения устойчивы (асимптотически устойчивы), или все неустойчивы;
- асимптотическая устойчивость линейной системы «в малом» сразу означает ее устойчивость «в целом», то есть, при любых отклонениях от положения равновесия;
- асимптотически устойчивая система также обладает устойчивостью «вход-выход»,а просто устойчивая (нейтрально устойчивая, не асимптотически устойчивая) – нет.

Для проверки устойчивости системы в уравнение стационарного состояния системы вводят возмущение и затем исследуют решение нового уравнения. Если оно стремится к решению, соответствующему стационарному состоянию, – система устойчива, в противном случае – неустойчива. Стационарное состояние линейной системы описывается ОДУ вида $a_m \frac{d^m x_0}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x_0}{dt^{m-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx_0}{dt} + a_0 x_0 = f(t)$, в котором x_0 – значения функции, соответствующие стационарному состоянию, а $f(t)$ – либо постоянная величина, либо периодическая функция. При изучении устойчивости «в малом» системе нужно сообщить некоторое возмущение x, которое может быть сколь

угодно малым по величине. Это возмущение вызовет изменение зависимой переменной.

Уравнение примет вид

$$a_m \frac{d^m(x_0+x)}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}(x_0+x)}{dt^{m-1}} + ... + a_1\frac{d(x_0+x)}{dt} + a_0(x_0+x) = f(t) \qquad (3)$$

Поскольку система линейная, Ур.3 можно записать в виде двух уравнений:

$$\begin{cases} a_m \frac{d^m x_0}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}x_0}{dt^{m-1}} + ...a_1\frac{dx_0}{dt} + a_1\frac{dx_0}{dt} + a_0 x_0 = f(t) \\ a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + ...a_1\frac{dx}{dt} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Решение первого уравнения соответствует стационарному режиму, в котором система находилась до возмущения. Второе уравнение соответствует системе, находящейся в свободном режиме, и его решение однозначно отвечает на вопрос об устойчивости системы. Если свободный процесс имеет характер затухающего колебания, система устойчива, если нарастающего – неустойчива. Таким образом, задача сводится к рассмотрению однородного Ур.4. В этом уравнении и далее будем считать, что a_m>0. Решение Ур.4 имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{m} A_i e^{\lambda_i t}, \qquad (5)$$

где A_i – постоянные, определяемые из начальных условий, а λ_i – корни характеристического уравнения:

$$D(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (6)$$

Характеристическое Ур.6 в общем случае может обладать как вещественными корнями $\lambda_i=\beta_i$, так и парами комплексно сопряжённых корней: $\lambda_i=\alpha_i+i\omega_i$. Если среди общего числа m корней действительными окажутся n корней и к пар комплексно сопряжённых, то решение можно представить в виде суммы n экспоненциальных и к=(m-n)/2 осциллирующих членов:

$$x = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\beta_i t} + \sum_{i=1}^{\kappa} C_j e^{\alpha_j t}\cos(\omega_j t + \varphi_j), \qquad (7)$$

где $\sum_{i=1}^{\kappa} C_j e^{\alpha_j t}\cos(\omega_j t + \varphi_j)$ представляет собой сумму двух слагаемых Ур.5 с комплексно-сопряжёнными корнями.

Характер процессов может оказаться весьма сложным. В общем случае изменение x происходит по апериодическому закону, на который накладываются процессы колебательного характера с нарастающими, затухающими или неизменными амплитудами различных частот. Отклонение, вызванное апериодическим слагаемым с β_i>0, монотонно возрастают, а с β_l<0 – монотонно уменьшаются. Аналогично амплитуда $C_j e^{\alpha_j t}$ каждого колебательного процесса с течением времени неограниченно возрастает, если α_j>0, и затухает, если α_j<0.

Система является устойчивой, если все слагаемые с течением времени затухают, т.е. показатели экспонент имеют отрицательные знаки: $e^{-|\beta_i|t}, e^{-|\alpha_j|t}$. Система является устойчивой, если все вещественные корни и вещественные части всех комплексно сопряженных корней характеристического уравнения отрицательны. Если хотя бы один корень (или его вещественная часть) будет положительным, т. е. появится слагаемое вида $e^{|\beta_\kappa|t}$ *или* $e^{-|\alpha_\kappa|t}\cos(\omega_\kappa t + \varphi_\kappa)$, система окажется неустойчивой.

При некоторых комбинациях коэффициентов a_i все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Полезно установить соотношения, при которых это имеет место, ибо тогда можно будет судить об устойчивости состояния

равновесия, не решая соответствующих дифференциальных уравнений. С этой целью используются критерии Рауса-Гурвица, Найквиста и Михайлова. Мы этими вопросами заниматься не будем.

Исследуем для примера устойчивость системы второго порядка. Дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \qquad (8)$$

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ и найдём его корни:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha_i^2}{4} - a_0}. \qquad (9)$$

Рассмотрим случаи, соответствующие вещественным и комплексным корням.

1. Корни вещественные, т.е. $0{,}25a_1{}^2-a_0>0$. Корни будут отрицательны при условии:

$\frac{a_1}{2} > \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} - a_0}$; $\frac{\alpha_1^2}{4} > \frac{\alpha_1^2}{4} - a_0$. Система устойчива, если $a_1>0$ и $a_0>0$.

2. Корни комплексные, т.е. $0{,}25a_1{}^2<a_0$. $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$. Система устойчива при тех же условиях: $a_1>0$ и $a_0>0$.

Если все корни имеют отрицательные вещественные части (находятся в левой полуплоскости, слева от мнимой оси), такой полином называется *устойчивым*, потому что соответствующая линейная система устойчива. Характеристические уравнния, имеющие хотя бы один корень с положительной вещественной частью (в правой полуплоскости) называются *неустойчивыми.* Если все корни α_i (i=1,...,N) имеют *отрицательные вещественные части,* то система *асимптотически устойчива*.



Рис. 8. Области устойчивости и неустойчивости на комплексной плоскости.

Если корни характеристического полинома (в общем случае – комплексные числа) поместить на комплексной плоскости, то слева от мнимой оси будут *устойчивые корни* (с отрицательной вещественной частью), а справа неустойчивые. Таким образом, область устойчивости – это левая полуплоскость.

Замечание. Так как все коэффициенты полинома $\Delta(s)$ – вещественные, комплексные корни всегда будут парными, т. е., вместе с корнем $\alpha+i\beta$ всегда будет присутствовать $\alpha-i\beta$. На комплексной плоскости эти точки расположены симметрично относительно оси абсцисс ($i=\sqrt{-1}$, число $\alpha+i\beta$ отображается прямой, выходящей из начала координат и до действительной точки α, отложенной на оси абсцисс (*Re*), и комплексной точки β - отложенной на оси ординат (*Im*)).

14.3 Показатель Ляпунова

Свойства линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и устойчивость положения равновесия (одна траектория) описывают путём использования характеристических показателей Ляпунова, которые были введены для описания свойств линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и характеризовали устойчивость положения равновесия, т. е. одной траектории. Показатели Ляпунова динамической системы с непрерывным временем определяют степень отдаления (или сближения) различных, но близких траекторий динамической системы на бесконечности.

Замечание. Максимальное число линейно-независимых (базисных) решений линейной системы дифференциальных уравнений равно размерности фазового пространства.

Поскольку любое решение такой системы можно представить как линейную комбинацию базисных, то из описанных свойств следует, что число различных характеристических показателей не превосходит размерности фазового пространства. Так как любое решение определяется начальными данными, то характеристический показатель зависит от выбора начальных данных.

Показатель Ляпунова – мера динамики аттрактора. Каждая размерность имеет показатель Ляпунова. Положительный показатель измеряет чувствительность зависимости от начальных условий, или то, насколько наши предсказания могут отклоняться исходя из различных оценок начальных условий. Показатели Ляпунова характеризуют потерю предсказательной способности при попытке заглянуть в будущее. Странные аттракторы характеризуются, по меньшей мере, одним положительным показателем. Отрицательный показатель измеряет схождение точек. Точечные аттракторы характеризуются всеми отрицательными переменными.

Для различных начальных значений числа λ могут быть различными. Если соответствующий показатель Ляпунова положителен, расстояние между изначально близкими траекториями системы с течением времени увеличивается, если показатель отрицателен – близкие траектории ещё более сближаются, если показатель равен нулю – близкие траектории остаются на примерно одинаковом расстоянии друг от друга. Для N-мерной динамической системы существует ровно N показателей Ляпунова $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N$, в общем случае различных. Набор показателей Ляпунова (спектр) характеризует общие закономерности поведения системы для всевозможных начальных условий. Критерием хаоса служит лишь наибольший показатель Ляпунова, показывающий расходятся ($\lambda>0$) или сходятся ($\lambda<0$) в среднем соседние траектории.

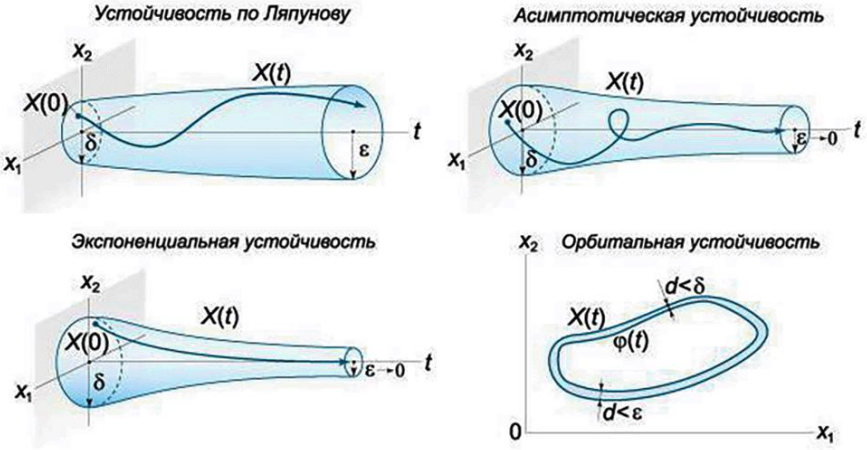


Рис. 9. Фазовые диаграммы систем различной устойчивости.

Показатели Ляпунова используются в качественной теории динамических систем. Знание показателей Ляпунова позволяет сделать заключение о том, как система развивается с течением времени. Довольно часто достаточно знать **знак** старшего, т.е. наибольшего показателя, а также **сумму** показателей. В трёхмерном случае, для систем вида: $\dot{x} = F(x)$ возможны следующие варианты различного поведения: 1) система стремится к неподвижной точке, т.е к стационарному состоянию, не зависящему от времени; 2) поведение системы становится периодическим, ее траектория приближается к замкнутой кривой («предельный цикл»; 3) квазипериодическое поведение (траектории системы находятся на поверхности двумерного тора, т.е. "бублика"); с течением времени система приближается к "странному аттрактору" поведение системы хаотично. Для систем более высокой размерности набор вариантов становится более обширным, однако по-прежнему наличие **положительного** показателя Ляпунова (при условии отрицательности их суммы) влечет за собой хаотическое поведение.

Показатель Ляпунова – инструмент, используемый для характеристики поведения динамики, как отдельной траектории, так и всей системы в целом. Показатели Ляпунова

могут быть рассчитаны локально (например, в заданной точке) или глобально для всей системы. Глобальные показатели Ляпунова полезны для описания определенного сложного поведения (например, детерминированного хаоса). Показатель Ляпунова определяет устойчивость топологического признака (например, аттрактора или репеллера), определяет скорость, с которой система изменяется в сторону базового состояния или от него. Это аналог крутизны склона, по которому катится камень.

Показатель измеряет (бесконечно малую) экспоненциальную скорость, при которой близлежащие орбиты раздвигаются. Положительным показателем Ляпунова является оперативное определение хаотического поведения. Знак показателей Ляпунова особенно важен для классификации различных типов динамического поведения. В частности, наличие положительного показателя Ляпунова свидетельствует о том, что близкие орбиты экспоненциально расходятся в соответствующем направлении. Характеристический показатель Ляпунова – количественная мера неустойчивости каждой траектории, принадлежащей хаотическому аттрактору. Он позволяет оценить фрактальную размерность аттрактора и энтропию динамической системы.

14.4 Устойчивость нелинейной системы

Устойчивость нелинейной системы часто можно оценивать с помощью линеаризованной системы. Для этого применяют аналитический метод исследования устойчивости стационарного состояния (метод Ляпунова), основанный на линеаризации системы в окрестности стационарного состояния. Аналитический метод Ляпунова приложим к широкому классу систем различной размерности, точечным системам, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, и распределенным системам, описываемым уравнениями в частных производных, непрерывным и дискретным. Метод использует теоремы Ляпунова, связывающие корни характеристического полинома $\Delta(s)$ линейной модели и устойчивость нелинейной системы в окрестности точки линеаризации:

– если все корни имеют отрицательные вещественные части, то нелинейная система также устойчива;

– если есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то нелинейная система неустойчива;

– если нет корней с положительной вещественной частью, но есть хотя бы один корень с нулевой вещественной частью, то об устойчивости нелинейной системы ничего нельзя сказать без дополнительного исследования.

Таким образом, для исследования устойчивости положения равновесия нелинейной системы нужно линеаризовать модель в окрестности этой точки и найти корни характеристического полинома.

Как уже упоминалось, в описании динамических систем существенное внимание уделяют сравнению нескольких ОДУ с целью возможности замены одних (например, нелинейных) на другие (например, линейные) без серьёзной потери информативности. Это можно осуществить, если уравнения топологически эквивалентны.

Два автономных уравнения

$$\dot{u}(t) = f(u)$$
$$\dot{v}(t) = g(v) \qquad (10)$$

топологически (качественно) эквивалентны, если они имеют равное количество положений равновесия одинакового типа, расположенные в одинаковом порядке на фазовой прямой. Фазовые портреты топологически эквивалентных уравнений также топологически эквивалентны.

Качественное поведение решений уравнения $\dot{u} = F(u)$ полностью определяется его типом точек покоя (неподвижных точек). Условие $F(u_o)<0$ достаточно для асимптотической устойчивости точки u_0: если функция $F(u)$ непрерывно

дифференцируема в точке u_0, то характер устойчивости точки покоя можно выяснить, построив в ее окрестности соответствующее *линеаризованное уравнение*. Для этого функцию $f(u)$ в окрестности точки u_0 разлагают в ряд Тейлора и оставляют только линейные слагаемые. Линеаризованное уравнение при этом имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = F'(u_0)\xi, \qquad (11)$$

где $\xi(t)$-$u(t)$-u_0 – отклонение от положения равновесия в момент времени t.

В основе метода линеаризации лежит теорема Гробмана-Хартмана:

Теорема 1. ***Непрерывно дифференцируемое векторное поле с гиперболической особой точкой в некоторой окрестности этой точки топологически эквивалентно своей линейной части.***

Устойчивость стационарного состояния u_0 определяется по знаку производной правой части уравнения в неподвижной точке. Устойчивость точки покоя можно оценить по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Теорем 2*. Пусть* u_0 *– положение равновесия* $\dot{u} = F(u)$*. Функция F(u) и её производная F'(u) определены и непрерывны для любых u. Тогда*

1) если $F'(u_0)>0$***, то*** u_0 *– асимптотически устойчиво;*

2) если $F'(u_0)<0$***, то*** u_0 *– неустойчиво*

Если $F'(u_0)=0$, то анализ решения линеаризованного уравнения не даёт определённого ответа о характере устойчивости точки u_0 и необходимы дополнительные исследования.

Теорема 3*. Пусть* u_0 *– положение равновесия* $\dot{u} = F(u)$*. Функция F(u) и её производные F'(u), F''(u), F'''(u) определены в области исследования, причём* $F'(u_0)= F''(u_0)=0$*. Тогда*

1) если $F'''(u_0)<0$***, то*** u_0 ***асимптотически устойчиво;***

2) если $F'''(u_0)>0$***, то*** u_0 ***неустойчиво***.

Анализируя поведение малых отклонений от положения равновесия, делают вывод о его *локальной устойчивости.* О глобальной устойчивости точки покоя можно говорить лишь в том случае, когда $\dot{u} = F(u)$ имеет только одну точку покоя и любое его решение через конечный промежуток времени окажется в окрестности точки покоя.

Метод Ляпунова аналитического исследования устойчивости состояния равновесия нелинейных систем заключается в замене характеристики нелинейного элемента касательной к ней, взятой вблизи исследуемого состояния.

Рассмотрим метод линеаризации Ляпунова для одного нелинейного автономного дифференциального уравнения первого порядка. Пусть $\bar{x}$ – стационарное решение уравнения:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (12)$$

Пусть система, первоначально находившаяся в стационарном состоянии, отклонилась от него и перешла в близкую точку с координатой: $x = \bar{x} + \xi$, причём $\frac{\xi}{\bar{x}} << 1$.

Перейдем в Ур.30 от переменной x к переменной ξ, т.е. новой переменной будет *отклонение системы от стационарного состояния.*

Получим: $\frac{d(\bar{x}+\xi)}{dt} = \frac{dx}{dt}(\bar{x}+\xi)$. Учтём, что $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\bar{x}} = 0$ по определению стационарного состояния. Правую часть разложим в ряд Тейлора в точке $\bar{x}$:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots, \qquad (10)$$

где $a_1 = f'(\bar{x})$; $a_2 = f''(\bar{x})$,...

Отбросим члены порядка 2 и выше. Останется линейное уравнение:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi \qquad (14)$$

которое носит название *линеаризованного уравнения* или уравнения первого приближения.

Интеграл этого уравнения для $\xi(t)$ находится сразу:

$$\xi(t) = ce^{\lambda t}, \qquad (15)$$

где $\lambda = a_1 = f'(\bar{x})$, c – произвольная постоянная.

Здесь λ – показатель Ляпунова (характеристический показатель решения ОДУ). Если $\lambda<0$, то при $t\to\infty$, $\xi\to-\infty$ и, следовательно, первоначальное отклонение от состояния равновесия со временем затухает. Это означает, что состояние равновесия устойчиво. Если же $\lambda>0$, то при $t\to\infty$, $\xi\to\infty$, и исходное состояние равновесия неустойчиво. Если $\lambda=0$, то уравнение первого приближения не может дать ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия системы. В этом случае необходимо рассматривать члены более высокого порядка в разложении в ряд Тейлора.

Устойчивость стационарного состояния $\bar{x}$ уравнения dx/dt=f(x) определяется знаком производной правой части в стационарной точке.

В случае одного уравнения вопрос об устойчивости состояния равновесия нетрудно решить, рассматривая график функции *f(x)*. По определению в стационарной точке правая часть Ур.30 - функция *f(x)* обращается в нуль.

Здесь возможны три случая.

1. Вблизи состояния равновесия функция f(x) меняет знак с плюса на минус при возрастании x. Отклоним изображающую точку системы в сторону $x<\bar{x}$. В этой области скорость изменения *xdx/dt=f(x)* положительна, *x* увеличивается, возвращаясь к $\bar{x}$. При $x>\bar{x}$ скорость изменения величины *x* уменьшается, т.к. функция *f(x)<0.* Следовательно, здесь *x* уменьшается и опять стремится к $\bar{x}$. Таким образом, отклонения от стационарного состояния в обе стороны затухают. Стационарное состояние устойчиво.

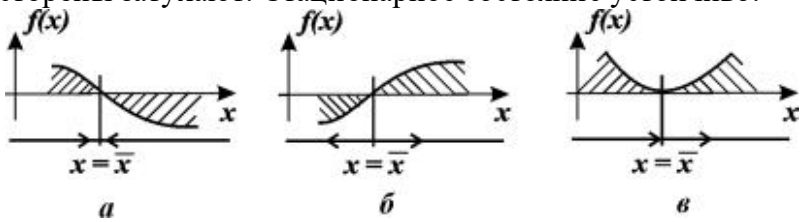


Рис. 10. Определение устойчивости стационарного состояния по графику функции f(x): а – стационарное состояние $\bar{x}$ устойчиво; б, в - стационарное состояние $\bar{x}$ неустойчиво

2. Вблизи состояния равновесия функция f(x) меняет знак с минуса на плюс при возрастании x). В обоих случаях изображающая точка удаляется от состояния равновесия. Стационарное состояние неустойчиво.

3. Вблизи состояния равновесия функции f(x) не меняет знак. Поскольку $f(\bar{x})=0$, это означает, что изображающая точка, помещенная достаточно близко к состоянию равновесия с одной стороны, будет приближаться к нему, помещенная с другой стороны – удаляться. Состояние равновесия в случае 3 неустойчиво.

Важно установить в каких случаях результат исследования устойчивости с помощью линеаризованных уравнений совпадает с результатами такого же исследования исходной нелинейной системы. Это возможно, если решение линеаризованных уравнений асимптотически устойчиво или неустойчиво. Если же решение линеаризованных уравнений приводит к устойчивости неасимптотической (например, к малым незатухающим колебаниям около состояния равновесия), для нелинейной системы такое решение может оказаться неверным, поскольку отбрасываемые при линеаризации нелинейные члены высшего порядка малости приобретают теперь решающее значение.

Рассмотрим методы изучения устойчивости нулевого решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами $\vec{y} = A\vec{y}$. Эта методика тесно связана с расположением на комплексной плоскости корней характеристического многочлена $P_n(\lambda)=\det|A-\lambda E|$ Нулевое решение асимптотически устойчиво, если все корни лежат строго в левой полуплоскости (матрица A устойчивая). Нулевое решение не устойчиво, если есть корень, лежащий в правой полупоскости. Если характеристический многочлен имеет чисто мнимые корни, то асимптотический устойчивости нет.

Для систем уравнений есть одна тонкость: если характеристический многочлен имеет кратные чисто мнимые корни, то нельзя сразу сделать вывод о неустойчивости нулевого решения (в отличие от уравнения). Может случиться, что и в случае кратных корней фундаментальная матрица состоит только из ограниченных функций, и нулевое решение будет устойчивым. Это произойдёт, если алгебраическая кратность соответствующего корня совпадёт с его геометрической кратностью. В противном случае возникнут неограниченные решения, и нулевое решение будет неустойчивым. Может оказаться, что незначительное изменение начального условия оказывает незначительное краткосрочное влияние на решение, однако при больших временах различия между этими двумя решениями могут стать драматическими. Чувствительная зависимость решений от начальных условий способна проявляться уже в весьма простых линейных уравнениях. Более того, непрерывная зависимость не мешает решениям проявлять хаотическое поведение.

14.5 Метод функций Ляпунова

Второй метод Ляпунова – совокупность приемов и средств исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений при помощи специальных функций Ляпунова.

А.М. Ляпунов установил ряд общих достаточных условий устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения, описываемого системой ОДУ. Сводя вопрос устойчивости невозмущенного движения к вопросу устойчивости положения равновесия, Ляпунов связал факт устойчивости или неустойчивости с наличием функции $V(x_1,...,x_n)$, производная которой взятая согласно системе дифференциальных уравнений, обладает определёнными свойствами.

С помощью функций Ляпунова можно оценить область притяжения, т.е. многообразие всех начальных возмущений, исчезающих во времени, можно оценить влияние постоянно действующих возмущений. Зная функции Ляпунова можно решать задачи устойчивости "в большом", т.е. оценивать область начальных возмущений, не выходящих с течением времени за пределы заданной заранее области. В некоторых случаях вид функции Ляпунова позволяет также решить вопрос о наличии периодического решения.

Исследование устойчивости по первому приближению Ляпунова является простым и эффективным методом, который, однако, работает только в случае, когда точка покоя является невырожденной (определитель матрицы не равен нулю) и не является центром. В сложных ситуациях более эффективным оказывается второй метод Ляпунова, основанный на построении функции Ляпунова, позволяющих получить достаточные условия в большом. Этот метод основан на формировании и рассмотрении специальных функций $V(x,y)$, где x и y – небольшие отклонения (вариации) переменных от состояния равновесия, соответствующего $x=0$ и $y=0$.

Функция Ляпунова – **скалярная функция, заданная на фазовом пространстве системы, с помощью которой можно доказать устойчивость положения равновесия. Метод функций Ляпунова применяется для исследования устойчивости различных дифференциальных уравнений и систем.**

Сначала рассмотрим функцию Ляпунова $V(x)$ для автономной системы первого порядка $\dot{x} = F(x)$. В этом случае $V(x)$ - непрерывная функция $V(x)$, которая не возрастает на всех решениях x(t). Это означает, что

$$V\big(x(t)\big) \le V\big(x(t_0)\big), t > t_0, \qquad (16)$$

строгая функция Ляпунова удовлетворяет строгому неравенству

$$V\big(x(t)\big) < V\big(x(t_0)\big), t > t_0 \qquad (17)$$

всякий раз, когда $x(t)$ является неравновесным решением системы. (Очевидно, что функция Ляпунова должна быть постоянной на равновесном решении.)

Непрерывно дифференцируемой функции Ляпунова не возрастает тогда и только тогда, когда её производная неотрицательна и строго убывает, если её производная строго меньше 0. Вычислив производную $V(x(t))$, установим основные критерии для функций Ляпунова.

Критерий устойчивости и неустойчивости равновесий системы, обладающей функцией Ляпунова, определяется теоремой.

Теорема. Пусть $V(x)$ – функция Ляпунова для автономной системы $\dot{x} = F(x)$. Если x_0 – строгий локальный минимум V, то x_0 – устойчивая точка равновесия. Если $V(x)$ – строгая функция Ляпунова, то x_0 – асимптотически устойчивое равновесие. С другой стороны, любая критическая точка строгой функции Ляпунова $V(x)$, которая не является локальным минимумом, является неустойчивой точкой равновесия.

Локальные максимумы строгих функций Ляпунова являются нестабильными равновесиями. Если функция Ляпунова не возрастает, то любое решение, которое начинается достаточно близко к минимальному значению, не может уйти далеко, т.е. система устойчива. (Если вы топчитесь на дне долины и в гору высоко не поднимаетесь, то на дне и останетесь). В строгом случае функция Ляпунова убывает на неравновесных решениях, поэтому она должна перейти к минимальному значению V при $t \to \infty$. (Если, гуляя по ущелью постоянно терять высоту, то, в конце концов, достигнешь дна). Если же неравновесное решение начинается вблизи точки равновесия, не являющейся локальным минимумом, то неуклонное уменьшение функции Ляпунова, означает, что решение все дальше и дальше отходит от равновесия, демонстрируя нестабильность.

Перейдём теперь к двумерной функции $V(x,y)$. Она должна обладать следующими свойствами:

– в некоторой области, окружающей начало координат, $V(x,y)$ непрерывна вместе со всеми частными производными первого порядка;

– в начале координат $V(0,0)=0$;

– во всех остальных точках этой области $V(x,y)$ отличается от нуля и принимает значение одного знака.

Более строго функция Ляпунова определяется следующим образом.

Непрерывно дифференцируемая функция $V(\vec{y})$ называется функцией Ляпунова для системы $\vec{y} = \vec{f}(\vec{y})$ если

1) $V(\vec{y})$ положительно определена, т.е. $V(\vec{y}) > 0$ при $\vec{y} \neq 0$, $V(\vec{y}) = 0$ при $\vec{y} = 0$

2) Производная отрицательно полуопределена $\dfrac{d}{dt}V(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i}\dfrac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i} f_i(\vec{y}) \le 0$

Если система $\vec{y} = \vec{f}(\vec{y})$ имеют точку покоя в начале координат и в некоторой окрестности начала координат обладает функцией Ляпунова, то начало координат является устойчивым положением равновесия. Если же выполняется более сильное условие $\dfrac{d}{dt}V(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_i} f_i(\vec{y}) < 0$, то начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия.

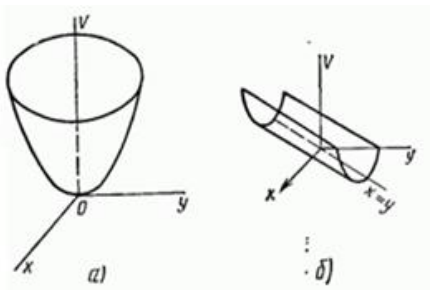


Рис. 11. График функции $V=x^2+y^2$.

Функция $V(x,y)$, обладающая такими свойствами, называется знакопеременной: определённо-положительной или определённо отрицательной. Функцию называют знакопостоянной (положительной или отрицательной), если она также сохраняет в области постоянства знака, однако нулевые значения имеет не только в начале координат. Эти функции называют функциями Ляпунова.

Рассмотрим некоторые функции $V(x,y)$. Функция

$$V=x^2+y^2 \qquad (18)$$

построенная на рис. 11а является знакопеременной (определённо-положительной): в точке равновесия $V(0;0)$, а в любых других точках $V>0$. Функция $V=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$, построенная на рис. 11б, знакопостоянна (положительная), но не знакоопределенна, так как $V=0$ не только в начале координат, но и в точках, где $x=y$; при иных значениях x и y $V>0$.

Обращаясь к знакопеременным функциям, например, к Ур.18, можно заметить, что кривые $V(x,y)=C$, где C - фиксированный параметр, являются замкнутыми кривыми, охватывающими начало, координат, причем кривые с меньшим C располагаются ближе к началу координат. Используя эту особенность V-функций, Ляпунов доказал теоремы.

<u>Теорема 1</u>. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что можно найти знакоопределяющую функцию $V(x,y)$, производная которой dV/dx знакопостоянная функцияй противоположного с V знака или тождественно равна нулю, то равновесие системы в начале координат устойчиво в смысле Ляпунова (невозмущенное движение устойчиво).

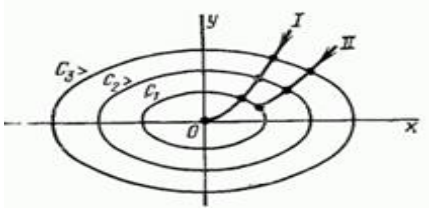


Рис. 12. К теореме 2.

<u>Теорема 2.</u> Если для системы дифференциальных уравнений $\dot{x}=F(x)$, существует знакоопределенная функция V, полная производная которой по времени dV/dt также знакоопределена (знак противоположен V), то равновесие системы в начале координат асимптотически устойчиво.

Для иллюстрации этих теорем на рис. 12 построено несколько замкнутых кривых определённо положительной функции $V(x,y)=C$ для значений $C_1<C_2<C_3$. Аргументами функции $V(x,y)$ являются отклонения x и y от состояния равновесия, которые изменяются во времени в соответствии с характером возмущённого движения. Поэтому и значения функции $V[x(t),y(t)]$ и её производной dV/dt также изменяются во времени.

Пусть производная dV/dt знакоопределенна и имеет противоположный с V знак, для рис.12 она определенно-отрицательна ($dV/dt<0$). Если в начальный момент t_0 V-функция имела значение $V_0=C_3$, то за время $t-t_0$ она изменится на величину

$$V-V_0=\int_{t_0}^{t}\frac{dV}{dt}dt<0. \qquad (19)$$

Очевидно, $V<V_0=C_3$. В рассматриваемых условиях с течением времени функция V последовательно проходит через значения C_3, C_2, C_1 и вместе со своими компонентами x и y приближается к началу координат (линия t на рис. 12), что означает асимптотическую устойчивость состояния равновесия.

Если же функция dV/dt в рассматриваемом случае знакопостоянна (отрицательна), то в процессе уменьшения V, происходящем согласно (19), она может достичь значения $V=V_1$, при котором $dV/dt=0$ при $x_1\neq 0$. Тогда дальнейшее уменьшение V функции, т.е. приближение к состоянию равновесия приостановится. Этому соответствует неасимптотическая устойчивость состояние равновесия и линии II на рис. 12.

Уяснить смысл функций Ляпунова и сформулированных в приведенных выше теоремах условий устойчивости легко с помощью понятий фазового пространства. Если $V(x,y)$ – знакоопределенная функция, то уравнение $V(x,y)=C$ обычно определяет в фазовом

пространстве $\{x,y\}$ замкнутую поверхность, охватывающую точку x=0 (начало координат). Поверхность V=C_1 находится внутри поверхности V=C_2 если C_1<C_2. При приближении к нулю поверхность стягивается в точку x=0. Если в силу уравнений движения определенно-положительная функция V с течением времени только убывает, т. е. dV/dt отрицательна, то с течением времени изображающая точка переходит с внешних поверхностей на внутренние, все время приближаясь к началу координат, которое в этом случае является точкой асимптотически устойчивого равновесия.

Прямой метод Ляпунова – эффективный метод исследования устойчивости состояния равновесия нелинейных систем. Основной трудностью на пути его использования является отсутствие общего метода построения функции Ляпунова.

В зависимости от конфигурации фазовых траекторий уравнение замкнутой поверхности V=C, которая при всех C пронизывалась бы траекториями только снаружи внутрь или наоборот, найти весьма трудно. Поэтому при отыскании функции Ляпунова им обычно заранее приписывают некоторую форму, параметры которой сравнительно несложно вычисляются по исходным уравнениям движения. Если функцию заданной формы при этом найти удалось, можно быть уверенным, что равновесие устойчиво. Если же это не удалось, это еще не означает, что равновесие неустойчиво, может просто оказаться, что функции Ляпунова данной формы не существует, но существует функция другого вида.

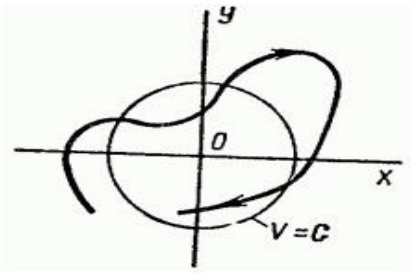


Рис. 13. Трудности, возникающие при оценке сходимости фазовых траекторий.

Так, если фазовые траектории имеют вид, показанный на рис. 13, и будем искать функцию Ляпунова в виде сферы $V=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, то это вряд ли удастся, так как траекторий всегда будут в некоторых точках входить в сферу, а в некоторых – выходить из нее, хотя равновесие устойчиво.

Для линейных систем функции Ляпунова представляют собой квадратичные формы координат, координаты которых находятся сравнительно несложно. Задаемся квадратичной формой с неопределенными коэффициентами

$$V=\sum_{k,l=1}^{n}\alpha_{kl}x_k x_l \qquad (20)$$

и находим коэффициенты $\alpha_{k,l}$ из условия $\frac{dV}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{dV}{dx_j}\frac{dx_j}{dt}=-A\sum_{r=1}^{n}x_r^2$, где A – любая постоянная. Затем записываем алгебраическое уравнение для нахождения коэффициентов α_{kl}.

Иногда функцию Ляпунова в виде квадратичной формы удаётся отыскать и для нелинейных систем, близких к линейным, однако такое ограничение формы резко сужает возможности исследования.

14.6 Функция Ляпунова и энтропия

В качестве примера, рассмотрим использование показателя Ляпунова в неравновесной термодинамике и связь между функцией Ляпунова и энтропией.

Согласно второму началу термодинамики состояние равновесия изолированной системы устойчиво, если оно соответствует максимуму энтропии. Энтропию системы, находящейся вблизи равновесного состояния, можно представить в виде:

$$S=S_{равн}+\delta S+\frac{1}{2}\delta^2 S. \qquad (21)$$

Здесь $S_{равн}$ – значение энтропии в состоянии равновесия; δS и $\delta^2 S$ – первая и вторая вариации энтропии системы. Под вариацией какого-либо параметра Y понимают отклонение величины этого параметра от его стационарного или равновесного значения $\bar{Y}$ под воздействием внешних возмущений:

$$\delta Y = Y - \bar{Y} \qquad (22)$$

Поскольку $S_{равн}$ – максимальное значение энтропии, член первого порядка δS обращается в нуль, и следовательно, устойчивость состояния системы, находящейся вблизи равновесия, определяется знаком члена второго порядка $\delta^2 S$. Таким образом, в области, близкой к равновесию, $\delta^2 S$ играет роль функции Ляпунова.

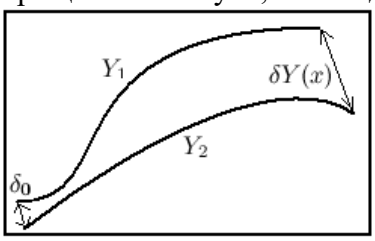
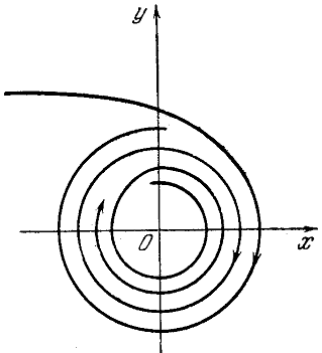


Рис. 14. Расходимость фазовых траекторий.

Вторая вариация энтропии нелинейной системы (например, многофазной гетерогенной среды), в окрестности состояния равновесия отрицательна: $\rho\delta^2 S<0$.

Для справедливости этого неравенства требуется выполнение следующих условий: условие тепловой устойчивости в фазах; условие механической устойчивости; условие устойчивости по отношению к диффузии в фазах; условие устойчивости равновесия при фазовом переходе. Все эти условия важны. Так, если бы нарушилось условие тепловой устойчивости, то закон Фурье приводил бы не к затуханию, а к усилению небольших флуктуаций температуры в фазах. Диффузионное условие означает, что при небольших флуктуациях по концентрациям система стремится восстановить однородность в фазах (т.е., действует закон Фика). Если система устойчива по отношению к диффузии, то все химические равновесия (для случая, когда в системе протекают химические реакции) также устойчивы. Условие устойчивости равновесия при фазовом превращении является следствием условия стабильности по отношению к диффузии. При выполнении этих условий вторая вариация энтропии системы является отрицательно определённой квадратичной формой. Следовательно, эти условия – необходимые и достаточные условия устойчивости равновесия и стационарных состояний системы вблизи равновесия. Но как только система удаляется от равновесия, эти условия перестают быть достаточными для устойчивости стационарных состояний системы.

Вторая вариация энтропии термодинамической системы – функция Ляпунова для стационарных состояний системы вдали от равновесия, т.к. в стационарном состоянии она равна нулю $(\delta Y = 0)$, а в его окрестности – отрицательно определённая квадратичная форма. Следовательно, для устойчивости стационарного состояния вдали от равновесия необходимо, чтобы производная термодинамической функции Ляпунова $\rho\delta^2 S$ имела положительный знак в окрестности этого состояния. В случае совпадения знаков термодинамической функции Ляпунова и её производной исходное стационарное состояние системы становится неустойчивым, и возможно возникновение качественно иного состояния системы. Если $\frac{\partial}{\partial t}\rho\delta^2 S \geq 0$ то стационарное состояние системы, находящейся вдали от равновесия, устойчиво, а если $\frac{\partial}{\partial t}\rho\delta^2 S < 0$ – неустойчиво. Анализ устойчивости систем, осуществляемый с помощью производной термодинамической функции Ляпунова, называется термодинамическим анализом.



14.7 Асимптотическая устойчивость

Анализ асимптотической устойчивости имеет свои особенности, особенно, если речь идет о предельных циклах.

Как уже упоминалось, траектории могут обладать некоторыми предельными свойствами.

Рис. 15. Устойчивость предельного цикла.

Точка q фазового пространства называется ω-предельной точкой точки p, если существует последовательность моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая, что $q = \lim_{n\to\infty} f(p,t_n)$. Если же $t_n \to \infty$, то точка $q = \lim_{n\to\infty} f(p,t_n)$. называется α-предельной точкой точки p. Так, например, асимптотически устойчивое положение равновесия является ω-предельной точкой для всех точек, лежащих в достаточно малой окрестности этого положения. Точки предельного цикла, на который навиваются спиралевидные кривые (рис.2), так же являются ω-предельными для точек, принадлежащих этим кривым. В обоих примерах ω-предельные точки составляют целые траектории (в первом случае - особая точка, во втором - предельный цикл).

Теорема. Множество ω-предельных (α-предельных) точек данной точки есть замкнутое множество, состоящее из целых траекторий.

Можно доказать, что предельная точка для предельных точек множества снова является предельной точкой этого множества. Допустим, что точка q является ω-предельной точкой для точки p, и покажем, что точка $f(q,\tau)$ (число τ может иметь как положительный, так и отрицательный знак) также является ω-предельной для точки p. В самом деле, если $q = \lim_{n\to\infty} f(p,t_n)$, то из группового свойства динамических систем и свойства непрерывности f(p,t) как функции p, получим $f(q,\tau) = \lim_{n\to\infty} f(p,t_n+\tau)$, а это и означает, что точка $f(q,p)$ является ω-предельной точкой точки p, т.е. все точки траектории, выходящей из q, являются ω-предельными точками для p.

Множество, состоящее из целых траекторий, называется инвариантным множеством. Инвариантное множество A обладает тем свойством, что $f(A,t)=A$ при любом t. Если же $f(A,t)\subset A$ при $t>0$, то множество A называется положительным инвариантом.

Замечание. Если траектория $f(p,t)$ не выходит при $t>t_0$ из ограниченной части пространства, то множество её ω-предельных точек не пусто.

Если существует функция Ляпунова V, ограниченная снизу (сверху) в положительной инвариантной области D, и если производная во времени $\dot{V}$ этой функции знакоотрицательна (знакоположительна) в этой области, то все ω-предельные точки p лежат на одной и той же поверхности уровня функции V.

Теорема. Если существует определённо положительная функция V такая, что $\dot{V} < 0$ вне M и $\dot{V} << 0$ на M, где M – множество, не содержащее целых траекторий, кроме точки O, то положение равновесия O асимптотически устойчиво.

Эта теорема позволяет решить вопрос об асимптотической устойчивости с помощью функции Ляпунова, имеющей знакопостоянную производную. В конкретных примерах именно такие функции Ляпунова удается построить для нелинейных систем.

14.8 Устойчивость особых точек

Рассмотрение проблемы устойчивости динамической системы обычно сводят к задаче исследования устойчивости особой точки. Устойчивость особой точки, определяется тем, уйдет или нет изображающая точка при малом отклонении от стационарного состояния.

Как уже упоминалось, устойчивость неподвижных точек двумерной:

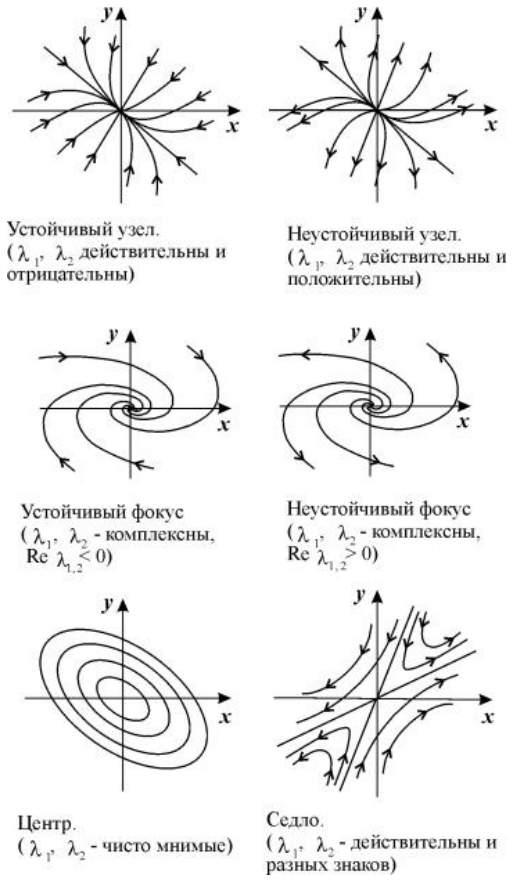
$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{23}$$

определяется корнями характеристического уравнения:

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \tag{24}$$

Его решение этого:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}} \qquad (25)$$



Если подкоренное выражение отрицательно, то $\lambda_{1,2}$ комплексно сопряженные числа. Предположим, что оба корня Ур.26 имеют отличные от нуля действительные части и что нет кратных корней.

В данном случае возможны шесть типов состояния равновесия в зависимости от характера корней характеристического Ур.26. Вид фазовых траекторий на плоскости *x, y* для этих шести случаев изображен на рис. 16.

Рис. 16. Типы фазовых портретов в окрестности стационарного состояния для системы линейных уравнений.

Пять типов состояния равновесия грубые, их характер не изменяется при достаточно малых изменениях правых частей Ур.23. При этом малыми должны быть изменения не только правых частей, но и их производных первого порядка. Шестое состояние равновесия – центр – негрубое. При малых изменениях параметров правой части уравнений он переходит в устойчивый или неустойчивый фокус.

Замечание. Важно понимать, что математика не позволяет решению достигать положения равновесия за конечный промежуток времени; при $t \to \infty$; решение асимптотически стремится к равновесию, но не достигает его. Даже в очень большие времена всегда есть очень небольшое остаточное движение. Это противоречит реальным физическим системам, которые достигают равновесия

Рассмотрим автономные системы $\dot{u} = F(u)$, правые части которых непрерывно дифференцируемы, что обеспечивает единственность решений исходной задачи. Если любое решение, начинающееся вблизи данного равновесного решения, стремится к нему, то равновесие называется асимптотически устойчивым. Если решения, которые стартуют вблизи точки равновесия и постоянно находятся вблизи этой точки, то равновесие стабильно.

Устойчивость скалярного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка определить легко, поскольку все неравновесные решения $u(t)$ – строго монотонные функции: они либо всегда увеличиваются, либо всегда уменьшаются. Действительно, если $F(u)>0$, то производная $u>0$ и, следовательно, $u(t)$ возрастает в такой точке, и, наоборот, решения убывают в любой точке, если $F(u)<0$.

Теорема. Точка равновесия $u^\star$ автономного скалярного дифференциального уравнения асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $F(u)>0$ для $u^\star - \delta < u < u^\star$ и $F(u)<0$ для $u^\star < u < u^\star + \delta$, для некоторого $\delta>0$.

Знак функции $F(u)$ вблизи равновесия определяет её устойчивость. В большинстве случаев это можно проверить, посмотрев на производную функции при равновесии. Если $F'(u^\star)<0$, то система устойчива ($F(u)$ переходит с положительного в отрицательный с ростом u), но если $F'(u^\star)>0$, то равновесие $u^\star$ неустойчиво по обе стороны от точки равновесия.

Теорема. Пусть $u^\star$ – точка равновесия для скалярного обыкновенного дифференциального уравнения $u=F(u)$. Если $F'(u^\star)<0$, то $u^\star$ асимптотически устойчиво. Если $F'(u^\star)>0$, то $u^\star$ неустойчиво.

Устойчивость (и асимптотическая устойчивость) стационарных решений (особых точек) – локальное свойство векторного поля, задающего систему дифференциальных уравнений. Просто стремление решений к положению равновесия при $t\to\infty$ не является локальным свойством и недостаточно для асимптотической устойчивости.

Устойчивая гиперболическая особая точка всегда экспоненциально асимптотически устойчива.

Теорема. Особая точка дифференцируемого векторного поля, для которой существует функция Ляпунова $\frac{d}{dt}V(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial x_k}F_k(x)\le 0$ устойчива.

Устойчивость особой точки определяется корнями характеристического уравнения. От корней характеристического уравнения системы зависит форма фазовых траекторий. Особой точке в зависимости от корней характеристического уравнения присваивается имя собственное:

1. два действительных отрицательных корня – **устойчивый узел**.
2. два действительных положительных корня – **неустойчивый узел**.
3. два комплексных корня в левой полуплоскости – **устойчивый фокус**.
4. два комплексных корня в правой полуплоскости – **неустойчивый фокус**.
5. два мнимых корня **– центр**.
6. два действительных корня. Один – положительный, другой – отрицательный – **седло (**как следует из теоремы Гробмана-Хартмана, седло всегда неустойчиво).

Если нет интегральных кривых, входящих в особую точку, то особая точка называется точкой устойчивого типа. Окрестность устойчивой особой точки состоит из замкнутых интегральных кривых, содержащих особую точку внутри себя, между которыми расположены спирали.

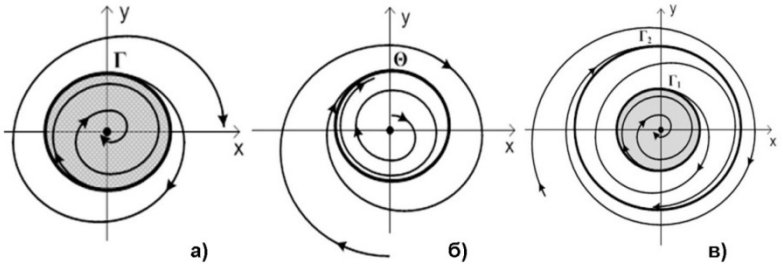


Рис. 17. Особые точки: а – устойчивый фокус – неустойчивый предельный цикл; б – неустойчивый фокус – устойчивый предельный цикл; в – неустойчивый предельный цикл – устойчивый предельный цикл.

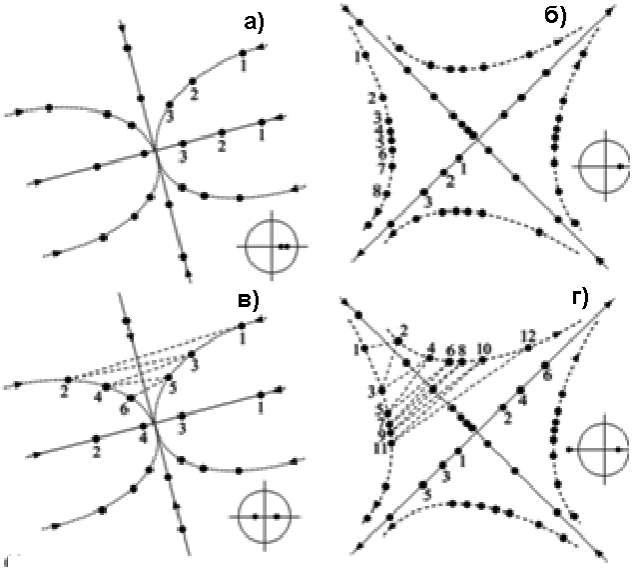


Рис. 18. Фазовые диаграммы с вещественными собственными значениями: (а) и (в) устойчивые узлы; (б) и (г) седловые точки.

Область притяжения точки покоя ограничена неустойчивым предельным циклом Γ (рис. 17а) – чисто математическая абстракция. Рис. 17б – в системе при любых начальных условиях имеют место автоколебания, соответствующие устойчивому предельному циклу θ. Система, фазовый портрет которой

представлен на рис. 17в, обладает следующими динамическими свойствами. Положение равновесия устойчиво и область устойчивости его ограничена предельным циклом Γ_1. Если в начальные условия находятся вне заштрихованной области, ограниченной предельным циклом Γ_1, то в системе возникают автоколебания, обусловленные предельным циклом Γ_2. Областью притяжения предельного цикла Γ_2 является вся фазовая плоскость за исключением области устойчивости положения равновесия (x=0, y=0). Отметим, что неустойчивый предельный цикл Γ_1 – это замкнутая кривая, являющаяся границей между двумя областями.

Если известны все состояния равновесия, предельные циклы и их характер, а также расположение сепаратрис, то можно считать установленной топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на траектории.

14.9 Устойчивость особых точек

Для более полного освоения изложенного в данной главе материала, приведём несколько примеров задач с решениями.

Пример 1. Кинетика радиоактивного распада $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, дифференциальное уравнение которой имеет вид $\dot{x} = -ax$, где $\alpha<0$ определяет динамику распада ядра. Фазовый портрет представляет собой одну неподвижную точку $\bar{x} = 0$. Функция $f(x)>0$ слева от неподвижной точки и $f(x)<0$ справа от неё. Траектории стремятся к неподвижной точке. В этом примере неподвижная точка $\bar{x} = 0$ – устойчивая. Такой тип неподвижной точки на прямой, когда траектории стремятся к ней с обеих сторон, есть **аттрактор**.

Пример 2. Общее решение этого уравнения $dx/dt=-x$, $x(t_0)=x(0)$ есть $x=C\exp(-t)$. Решение, удовлетворяющее начальному условию, имеет вид $x=x(0)\exp(t_0-t)$. Если теперь мы зададим другое начальное условие $\bar{x}(t_0) = \bar{x}(0)$, то решение будет $\bar{x} = \bar{x}(0)\exp(t_0 - t)$. Отсюда $|x - \bar{x}| = |x(0) - \bar{x}(0)|\exp(t_0 - \bar{t}_0) = 0$ при $t\geq t_0$. Поэтому, если $|x(0) - \bar{x}(0)| < \delta = \varepsilon$, то решение $x=x(0)\exp(t_0-t)$ устойчиво по Ляпунову при $t\geq t_0$. Это решение также и асимптотически устойчиво, так как $\lim\limits_{t\to+\infty}|x - \bar{x}| = \lim\limits_{t\to\infty}|x(0) - \bar{x}|\exp(t_0 - t) = 0.$

Пример 3. Для уравнения $\dot{x} = x$ $|x - \bar{x}| = |x_0 - \bar{x}|\exp(t_0 - t)$ для $t\geq t_0$ при любом t_0. Каково бы ни было t_0 при $t\geq t_0$, решение x неустойчиво, так как сомножитель $\exp(t-t_0)\to\infty$ при $t\to\infty$. Так как $f(x_0)=0$, то здесь могут быть три существенно различных случая:

1) $f(x)$ меняет знак вблизи состояния равновесия $x=x_0$ с плюса на минус при возрастании x. Отсюда следует, что точка, находящаяся в достаточной близости к состоянию равновесия $x=x_0$, будут асимптотически к нему приближаться при возрастании t. В этом случае состояние равновесия устойчиво по Ляпунову.

2) $f(x)$ меняет знак вблизи состояния равновесия $x=x_0$ с минуса на плюс при возрастании x. Это значит, что изображающая точка, помещённая в достаточной близости к состоянию равновесия, будет удаляться от состояния равновесия; отсюда следует, что состояние равновесия неустойчиво в смысле Ляпунова.

3) $f(x)$ не меняет знака вблизи состояния равновесия $x=x_0$ при возрастании x. Это значит, что изображающая точка, помещенная с другой – удаляться. Состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову.

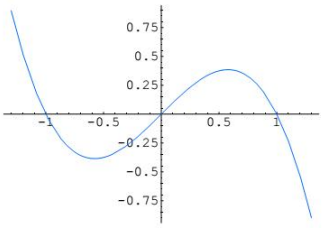
Пример 4. Решение уравнения $\dot{u} = \alpha u^2$, $u(0) = u_0 + \varepsilon$, где α некий переменный параметр, а ε – некоторое возмущение начального условия, имеет вид $u(t) = \frac{u_0 + \varepsilon}{1 - \beta(u_0 + \varepsilon)t}$. Это непрерывная функция как от α, так и от ε, поэтому небольшое изменение в исходных данных или в уравнении приводит к небольшому изменению решения – по крайней мере, в моменты времени, близкие к началу процесса.

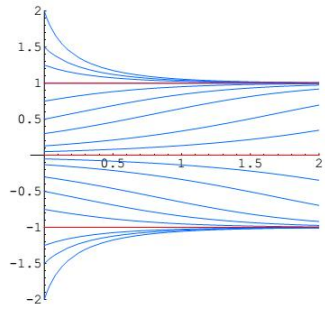
Однако непрерывная зависимость не исключает того, что решения, первоначально находившиеся близко друг к дугу, со временем не отойдут далеко друг от друга. Действительно, в

этом примере критическое время $t^* = \frac{1}{\alpha(u_0+\varepsilon)}$ зависит, как от начального состояния, так и от параметра уравнения. Таким образом, при приближении к сингулярности, решения, которые вначале были очень близки друг к другу, при развитии процесса оказываются произвольно удаленными друг от друга.

Пример 5. Исследовать на асимптотическую устойчивость нулевое решение уравнения $y^{(5)}+3y^{(4)}+6y''+7y''+4y'+4y=0$. Характеристический многочлен $P_5(\lambda)=\lambda^5+3\lambda^4+6\lambda^3+7\lambda^2+4\lambda+4$ и $a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=6$, $a_3=7$, $a_4=4$, $a_5=4$. Матрица Гурвица имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. $\Delta_1=3$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 11$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 53$, $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -20$, $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4(-20) = -80$. Поскольку $\Delta_4<0$, то есть корни, лежащие в левой полуплоскости или на мнимой оси и нет асимптотической устойчивости нулевого решения. Для многочлена третьей степени $P_3(\lambda)=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$ необходимые и достаточные условия того, что корни лежат строго в левой полуплоскости следующие: $a_1>0$, $a_1a_2>a_3$, $a_3>0$, $a_1>0$, $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$. Если $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$, но $a_1a_2=a_3$, то $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_1a_2=\lambda^2(\lambda+a_1)+a_2(\lambda+a_1)=(\lambda+a_1)(\lambda^2+a_2)$. Здесь есть один отрицательный вещественный корень и два чисто мнимых. Решения соответствующего уравнения будет устойчивым, но чисто асимптотически.

Пример 6. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{u} = u - u^3$. Решив алгебраическое уравнение $F(u)=u-u^3=0$, находим, что уравнение имеет три равновесия: $u^*_1=-1$, $u^*_2=0$, $u^*_3=+1$. Если u увеличивается, график функции $F(u)=u-u^3$ переходит от положительного к отрицательному решению в первой точке равновесия $u^*_1=-1$, что доказывает её устойчивость. Аналогично, график возвращается от положительных к отрицательным значениям при $u^*_2=0$, демонстрируя неустойчивость второго равновесия. Окончательное равновесие $u^*_3=+1$ устойчиво, так как $F(u)$ снова меняется от отрицательного к положительному.





Любое решение с отрицательным начальным условием, $u_0<0$, будет асимптотически заканчиваться при первом равновесии $u(t)\to-1$ при $t\to\infty$. Действительно, если $u_0<-1$, то $u(t)$ монотонно возрастает до -1, а если $-1<u_0<0$, то решение уменьшается в сторону -1. С другой стороны, если $u_0> 0$, то соответствующее решение заканчивается в другом устойчивом равновесии $u(t)\to+1$; те, у которых $0<u_0<1$, монотонно возрастают, а единицы с $u_0>1$ убывают. Единственное решение, которое не заканчивается ни на -1, ни на +1 при $t\to\infty$, является неустойчивым равновесным решением $u(t)\equiv0$. Любое его возмущение, независимо от того, насколько оно крошечно, заставит решения выбрать один из устойчивые равновесия. Заметим, что все кривые, за исключением горизонтальной оси, сходятся к одному из устойчивых решений ±1 и расходятся от неустойчивого решения 0 при $t\to\infty$.

Рис. 19. Стабильность уравнения $\dot{u} = u - u^3$.

Например, в предыдущем примере, $F(u)=1-3u^2$ при равновесии $F(-1)=-2<0$, $F(0)=1>0$, $F(1)=-2<0$. Знаки подтверждают вывод о том, что ± 1 – стабильные равновесия, а 0 – равновесие

неустойчиво. В пограничном случае, когда $F(u^*)=0$, производный тест неубедителен и необходим дополнительный анализ для определения состояния точки равновесия. Например, уравнения $\dot{u}=u^3$ и $\dot{u}=-u^3$ удовлетворяют $F(0)=0$ в точке равновесия $u^*=0$. Но первое имеет неустойчивое равновесие, а последнее стабильно.

Пример 7. Пусть возмущенное движение описывается уравнениями $dx/dy=y-2x^3$, $dy/dt=-x-5y^3$ с состоянием равновесия $x=y=0$. Линеаризация уравнений ($dx/dy=y$ и $dy/dt=-x$) приводит к общему уравнению возмущенно движения $\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$ с мнимыми корнями характеристического движения, что означает неасимптотическую устойчивость состояния равновесия линеаризованной системы и, как следствие, необходимость анализа устойчивости нелинеаризованной системы. Выберем знакопеременную (определённо-положительную) функцию Ляпунова вида $V(x,y)=x^2+y^2$. Производную по времени функции Ляпунова вычисляем как производную сложной функции $\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. Тогда $dV/dt=2x(y-2x^3)-2y(x+5y^3)=-2(2x^4+5y^4)$. Производная dV/dt оказалась знакопеременной функцией противоположного с V знака – определенно-отрицательной. Следовательно, в силу упомянутой выше второй теоремы Ляпунова состояние равновесия нелинейной системы асимптотически устойчивое.

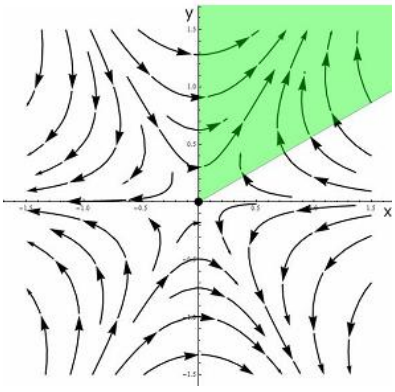
Пример 8. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases}\dot{x}=-x^3\\ \dot{y}=-y^3\end{cases}$. Посмотрим, как изменяется расстояние от точки $(x;y)$ до начала координат, когда точка движется по траектории. Для этого рассмотрим функцию $H(x;y)=x^2+y^2$ Её производная вдоль решения

$$\frac{d}{dt}H(x(t);y(t))=\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial H}{\partial y}y=2x(-x^3\dot{)}+2y(-y^3)=-2(x^4+y^4)$$

Значение производной отрицательно во всех точках плоскости xOy за исключением начала координат. Следовательно, расстояние до начала координат уменьшается: оно стремится к нулю при $t\to+\infty$, т.е. нулевое решение является асимптотически устойчивым.

Пример 9. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases}\dot{x}=2y^3-x^5\\ \dot{y}=-x-y^5\end{cases}$. Поскольку функция Ляпунова должна быть положительно определена, самое простое, что можно предложить – искать ее в виде суммы чётных степеней x и y. Например, в данном случае можно взять функцию $H(x;y)=x^2+y^4$ Её производная в силу системы строго отрицательно определена: $\frac{d}{dt}H(x(t);y(t))=2x(2y^3-x^5)+4y^3(-x-y^5)=-(2x^6+4y^8)<0$ Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Пример 10. Провести анализ нулевого решения системы $\begin{cases}\dot{x}=y^2-x^2\\ \dot{y}=2xy\end{cases}$.



Рассмотрим функцию $V(x;y)=3xy^2-x^3=x(3y^2-x^2)$ В качестве области D можно взять сектор $0<x<\sqrt{3y}$ (рис.6). Производная от $V(x,y)$ строго положительно определена:

$$\dot{V}(x;y)=9x^4+3y^4>0$$

Следовательно, нулевое решение неустойчиво.

Рис. 20. Траектории и область D в примере 10.

Замечание. Требуется строгая положительная определенность производной, иначе вывод о неустойчивости будет неверен.

Пример 11. Рассмотрим линейную систему:

$$\begin{cases}\dot{x}=-x+y.\\ \dot{y}=2y^3-x\end{cases}$$

Выберем функцию Ляпунова: $V=x^2+y^2$. Тогда $\frac{dV}{dx}=2x(-x+y)+2y(-2y^3-x)=-2(x^2+2y^4)$

Это выражение всегда отрицательно при $x\neq0$, т.к. в скобках стоят чётные степени x. Следовательно, точка (0,0) устойчива.

Пример 12. Рассмотрим систему уравнений, описывающую конкуренцию видов, численности которых x и y. Каждый из видов размножается в соответствии с логистическим законом, а при

встрече (произведения в правых частях уравнений), численность как одного, так и другого вида уменьшается. $\dot{x} = x - x^2 - axy; \quad \dot{y} = \varepsilon\left(y - y^2 - bxy\right)$. Исследуем стационарное состояние, соответствующее сосуществованию видов $(\bar{x}, \bar{y})$ – ненулевое для x и y. Его координаты:

$\bar{x} = \frac{1-a}{1-ab}; \quad \bar{y} = \frac{1-b}{1-ab}$. Это стационарное состояние устойчиво для параметров системы $a>0$, $b\le 1$. Функция Ляпунова: $V(x,y) = x + y - (\bar{x} + \bar{y}) - \bar{x}\ln\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) - \bar{y}\ln\left(\frac{y}{\bar{y}}\right)$. Её производная равна $\frac{dV}{dt} = -\left(\bar{x}^2(x-1)^2 + \varepsilon\bar{y}^2(y-1)^2\right) - \left(a\bar{x}^2 y(x-1) + \varepsilon b\bar{y}x(y-1)\right)$ и отрицательна при малых значениях коэффициентов a, b и x, $y>0$.

Пример 13. Планарная система $\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\alpha\sin u - \beta v$ описывает затухающие колебания маятника. Затухание вызывает постоянное уменьшение полной энергии в системе

$$E(u,v) = \frac{1}{2}mv^2 + \kappa(1-\cos u) \qquad (45)$$

Докажем, что E действительно является функцией Ляпунова. Вычислим его производную по времени, при $u(t)$, $v(t)$ - решения демпфированной системы. Так как $\alpha=\kappa/m$, $\beta=\mu/m$, то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{dv}{dt} = (\kappa\sin u)v + (mv)(-\alpha\sin u - \beta v) = -\mu v^2 \le 0 \qquad (46)$$

поскольку коэффициент трения $\mu>0$. Следовательно, энергия удовлетворяет критерию устойчивости Ляпунова (45). Устойчивость минимумов энергии $u^0_{2k}=2k\pi$, $v^0_{2k}=0$, если затухающий маятник находится на дне дуги. Действительно, поскольку $dE/dt<0$, за исключением случаев, когда $v=0$, с немного большей работой, критерий Ляпунова может быть использован для установления их асимптотической устойчивости.

Пример 14. Движение маятника с затуханием, в виде жёсткого отвеса, вращающегося в вертикальной плоскости вокруг стержня, описывается ОДУ второго порядка $m\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu\frac{d\theta}{dt} + \kappa\sin\theta = 0$, где $m>0$ – масса отвеса маятника, $\mu>0$ – коэффициент трения, предполагаемый здесь строго положительным, а $\kappa>0$ представляет собой гравитационную силу. Неизвестная функция $\theta(t)$ измеряет угол маятника по вертикали.

Для получения равновесных решений и изучения их устойчивости, преобразуем уравнение в систему первого порядка. Полагая $u(t) = \theta(t), \quad v(t) = \frac{d\theta}{dt}$ находим $\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\alpha\sin u - \beta v,$ где $\alpha = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\mu}{m}$ – положительные константы. Равновесие происходит там, где правые части этой системы первого порядка одновременно исчезают, т. е. $v=0$, $-\alpha\sin u - \beta v = 0$, и, следовательно, $u=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ Эта система имеет бесконечное множество точек равновесия: $u_k^* = (k\pi, 0)$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Точка равновесия $u^*_0=(0, 0)$ соответствует $u = \theta = 0, \quad v = \dot{\theta} = 0$ – маятник покоится на нижней точке своей дуги. Это описывает стабильную конфигурацию, поскольку фрикционные эффекты в конечном итоге будут заглушать небольшие близлежащие движения.

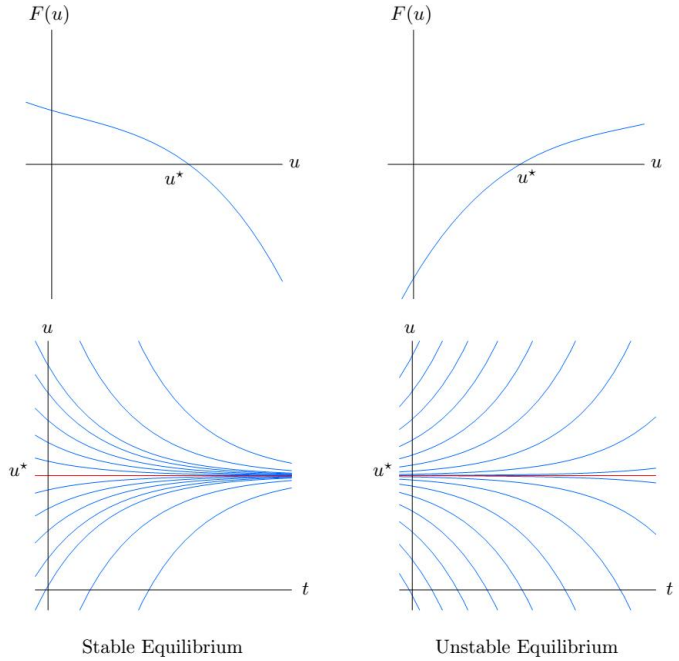


Рис. 21. Равновесия скалярных обыкновенных равновесий.

Другое равновесие $u^*_1=(\pi, 0)$ соответствует $u=\theta=\pi$, $v=\theta=0$, что означает, что маятник неподвижно сидит в верхней части своей дуги. Теоретически такая равновесная конфигурация возможна, но вряд ли она будет наблюдаться на практике, поскольку весьма неустойчива. Все остальные равновесия соответствуют одной

или другой из этих двух возможностей: когда $k=2j$ чётно, маятник находится внизу, а когда $k=2j+1$ нечетно, маятник – на вершине. Подтвердим этот вывод методом линеаризации. Если оба собственных значения имеют отрицательную действительную часть что $\alpha, \beta > 0$ и, следовательно, начало координат – устойчивое равновесие, но если $\beta^2<4\alpha$ – собственные значения являются сложными, и, следовательно, начало является устойчивым фокусом. В фазовой плоскости, решения спиральны к фокусу, что соответствует маятнику с затухающими колебаниями уменьшающейся величины. С другой стороны, если $\beta^2>4\ \alpha$, то оба собственных значения отрицательны, а начало координат – устойчивый узел. В этом случае решения экспоненциально быстро убывают до 0. Физически это будет похоже на маятник, движущийся в бочке с мёдом. В верхнем равновесии $u^*_1=(\pi,\ 0)$ якобиан $F'(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}$ имеет собственное значение $\lambda=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\alpha}}{2}$. В этом случае одно из собственных значений является вещественным и положительным, а другое отрицательным. Линеаризованная система имеет неустойчивую седловую точку, и, следовательно, нелинейная система также неустойчива в этой точке равновесия. Самое незначительное возмущение вертикального маятника вытеснит его, заставив его качаться вниз и, в конце концов, опуститься в затухающее колебательное движение, сходящееся на одном из стабильных нижних равновесий.

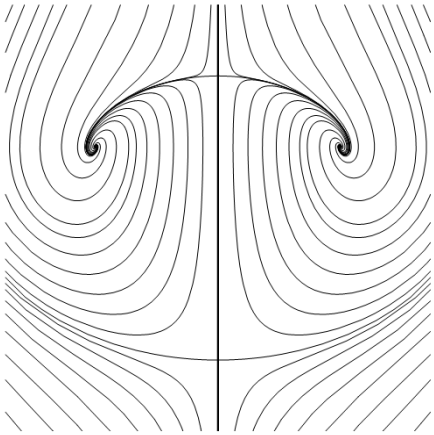


Рис. 22. Фазовый портрет уравнения $\dot{u}=u(v-1),\quad \dot{v}=4-u^2-v^2.$

Важно, что почти все решения для слабозатухающего маятника стремятся к стабильным равновесиям. Маятник с большой начальной скоростью будет вращаться несколько раз вокруг центра, но кумулятивный эффект сил трения победит и маятник перейдёт в затухающий колебательный режим. Каждое из неустойчивых равновесий имеет ту же седловую форму, что и при линеаризации, с двумя решениями, соответствующими устойчивой собственной линеаризации, в которой маятник вращается несколько раз и в пределе $t\to\infty$ заканчивает движение, стоя в вертикальном положении в неустойчивом положении равновесия, а затем колеблется и затихает.

Табл. 1. Определения собственных значений в точках равновесия и их устойчивости:

Equilibrium Point	Jacobian matrix	Eigenvalues	Stability
$(0,2)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$1,\ -4$	unstable saddle
$(0,-2)$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$-3,6$	unstable saddle
$(\sqrt{3},1)$	$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$	$-1\pm i\sqrt{5}$	stable focus
$(-\sqrt{3},1)$	$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$	$-1\pm i\sqrt{5}$	stable focus

Пример 15. Нелинейная система $\frac{du}{dt}=u(v-1), \frac{dv}{dt}=4-u^2-v^2$ имеет четыре равновесия: $(0, \pm 2)$ и $(\pm\sqrt{3}, 1)$. Его якобиан $F'(u,v)=\begin{matrix} v-1 & u \\ -2u & -2v \end{matrix}$.

Замечание. При моделировании физической системы, включающей в себя некоторую форму демпфирования - из-за трения, вязкости или диссипации, линеаризации обычно достаточно, чтобы решить стабильность или нестабильность равновесий. Однако, когда речь идет о консервативных системах, в которых затухание отсутствует и энергия сохраняется, метод линеаризации не эффективен, и приходится полагаться на более сложные критерии устойчивости. В таких ситуациях часто можно использовать сохранение энергии, считая, что

минимизаторы энергетической функции должны быть устойчивыми (но не обязательно асимптотически устойчивыми) равновесиями.

Простейшим фазовым портретом является неподвижная точка на прямой.

В понятии устойчивость по Ляпунову реализуется идея малых отклонений решения дифференциального уравнения на промежутке времени [0,+∞] при небольших вариациях начальных данных этого решения.

Пример 16. Система $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2 \end{cases}$ имеет критические точки (1,1) и (-1;-1). Якобиан $J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$. При (1;1) линеаризованная система имеет матрицу коэффициентов $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$. Собственное значение $r = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Критическая точка - нестабильное седло.

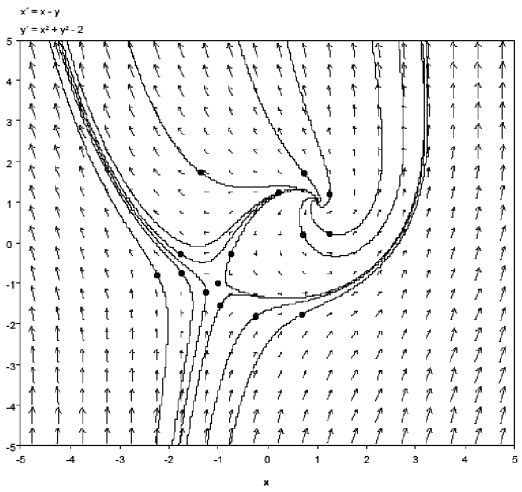


Рис. 23. К примеру 16: (1;1) - нестабильный фокус; (-1,-1) нестабильное седло.

Пример 17. Критические точки системы $\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = y + 2xy \end{cases}$ (0;0) и (-0,5;1) Якобиан $J = \begin{bmatrix} 1-y & -x \\ 2y & 1+2x \end{bmatrix}$ При (0;0) матрица коэффициентов линеаризованной системы $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Она имеет повторяющееся собственное значение r=1. У линейной системы нет нестабильного истинного узла (звезды). Но как нелинейная система имеет нестабильный узел. При (-1/2;1) линеаризованная система имеет матрицу коэффициентов $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Собственное значение r=1 и -1. Критическая точка – нестабильное седло.

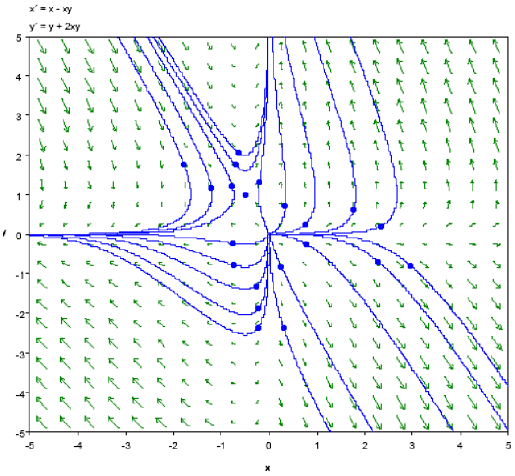


Рис. 24. К примеру 17: (0;0) – нестабильный узел; (-1/2;1) – нестабильное седло.

14.10 Устойчивость решений дискретных уравнений

В дискретных динамических системах могут существовать частные решения, представляющие собой стационарные, периодические, квазипериодические и хаотические последовательности, которые мы будем обозначать $\boldsymbol{x}_n$*. Рассмотрим первое частное решение дискретной системы – *стационарное*, или решение в виде ***неподвижной точки.***

Точка $\boldsymbol{x}$* называется неподвижной точкой отображения $F(x^*)$, если выполняется условие:

$$x^* = F(x^*). \qquad (26)$$

Это условие означает, что при графической итерации отображения движение при попадании в $\boldsymbol{x}$* прекращается. Итерации вновь и вновь помещают очередное $\boldsymbol{x}_n$ в $\boldsymbol{x}$*.

Решение в виде неподвижной точки еще называется *состоянием покоя* или *состоянием равновесия*. Помимо самого факта существования в дискретных системах решений в виде неподвижных точек (состояний покоя или равновесия системы), важную роль играет информация об их *устойчивости* или *неустойчивости.* Устойчивость какого-либо состояния (движения) динамической системы определяется просто: введём небольшое отклонение (возмущение) динамической системы от исследуемого состояния и проанализируем, каким будет её дальнейшее поведение. Если со временем система вернется в исходное состояние (возмущение затухает), то такое состояние называется *устойчивым.* Если начальное отклонение нарастает со временем – состояние *неустойчиво.*

Найдем **условия устойчивости неподвижной точки x^*.** В связи с тем, что проблема устойчивости связана с анализом реакции системы на малое возмущение ее состояния, на первом этапе она может быть исследована в рамках линейного приближения.

Пусть $x = x^* + \xi$, ξ – отклонение от состояния равновесия, малая по сравнению с x^* величина. Тогда отображение примет вид:

$$x^*+\xi_{n+1}=F(x^*+\xi_n). \qquad (27)$$

Применяя для правой части (27) разложение в степенной ряд в окрестности неподвижной точки и отбрасывая члены порядка малости выше первого, находим:

$$x^* + \xi_{n+1} = F(x^*) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x^*} \xi_n. \qquad (28)$$

Производные берутся в точках частного решения, в данном случае в неподвижной точке x^*. Тогда

$$\xi_{n+1} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x^*} \xi_n. \qquad (29)$$

Введём обозначение $a_{ik} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x^k}\right|_{x^*}$. Здесь индексы $i,k = 1,\ldots, N$ – размерность отображения. Тогда Ур. 29 можно переписать в координатной форме:

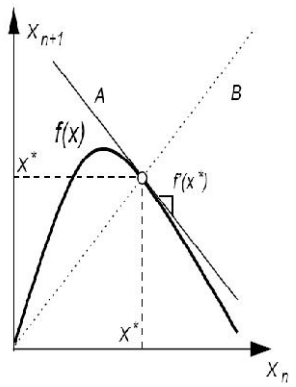
$$\xi^i_{n+1} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\xi^k_n. \qquad (30)$$

Данное линейное точечное отображение есть *линейное дискретное уравнение в вариациях.* В матричной форме (30) можно записать в следующем виде:

$$\xi_{n+1} = A\xi_n. \qquad (31)$$

Матрица A с элементами a_{ik} является квадратичной и называется *матрицей линеаризации* или **матрицей Якоби.** Устойчивость неподвижной точки отображения определяется ***мультипликаторами*** λ_k , которые являются собственными значениями матрицы A, или корнями характеристического уравнения:

$$\det[A - \rho E] = 0. \qquad (32)$$



E – единичная матрица. Неподвижная точка x^* исходного отображения (4) является устойчивой, если все мультипликаторы ρ_k удовлетворяют условию $|\rho_k| < 1$. Если среди мультипликаторов имеются такие, для которых $|\rho_k| > 1$, то неподвижная точка отображения (4) будет неустойчивой.

Рис. 25. Линеаризация в особой точке.

Прежде всего, рассмотрим устойчивость неподвижных точек одномерного отображения

Одномерное отображение:

$$x_{n+1} = f(x_n). \qquad (33)$$

Пусть x^* – неподвижная точка отображения. Введем малое возмущение ξ:

Тогда отображение (33) примет вид:

$$x_{n+1} = x^* + \xi_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \xi_n). \qquad (34)$$

Используя выражения (28), (29), приходим к новому одномерному *линейному* отображению, описывающему эволюцию малого возмущения неподвижной точки, которое имеет вид:

$$\xi_{n+1} = f'(x^*)\xi_n. \qquad (35)$$

Собственное значение матрицы линеаризации ***A*** или мультипликатор неподвижной точки одномерного отображения есть $\lambda = f'(x^*)$. Следовательно, условие устойчивости неподвижной точки x^* сводится к выполнению неравенства $|f'(x^*)|<1$. Если $|f'(x^*)|>1$, неподвижная точка неустойчива. Поведение неподвижной точки зависит от величины и знака производной $f'(x^*)$. С геометрической точки зрения значения $f'(x^*)$ – это тангенс угла наклона графика функции $f(x)$ в точке x^*. Эволюции малого возмущения ξ_n соответствует сжатие либо растяжение отрезка, соответствующее отклонению от x^*. В малой окрестности неподвижной точки нелинейную функцию можно заменить прямой A, касательной к $f(x)$ в точке x^*.



Рис. 26. Типы неподвижных точек в одномерном отображении.

1) $f'(x^*)>1$: отклонение ξ_n растёт по модулю, не меняя своего знака, неподвижная точка неустойчива;

2) $0<f'(x^*)<1$: отклонение ξ_n монотонно убывает, неподвижная точка x^* устойчива.

3) $f'(x^*)<-1$: отклонение ξ_n нарастает по модулю, меняя знак при каждой итерации, неподвижная точка x^* неустойчива;

4) $-1<f'(x^*)<0$: отклонение ξ_n убывает по модулю, меняя свой знак при каждой итерации, неподвижная точка x^* устойчива;

5) $f'(x^*)=1$: отклонение ξ_n не меняется, исходное состояние x^* нейтрально по отношению к возмущению ξ;

6) $f'(x^*)=-1$: ξ_n меняет знак на каждом шаге интегрирования, не нарастая и не убывая по модулю, x^* нейтрально.

Переходные значения параметра называются критическими. Им соответствуют **точки бифуркации** $f'(x^*) > 1;\ f'(x^*) < -1$. Если возмущение меняет знак при каждой итерации, то к названию неподвижных точек добавляют слово «обратный».

Рассмотрим теперь устойчивость неподвижных точек двумерного отображения.

$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n). \end{cases}$ Неподвижная точка (x^*,y^*) задаётся условием $\begin{cases} x^* = f(x^*, y^*), \\ y^* = g(x^*, y^*). \end{cases}$ Введём малые отклонения ξ и η: $\begin{cases} x_n = x^* + \xi_n, \\ y_n = y^* + \eta_n. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x_{n+1} = x^* + \xi_{n+1} = f\left(x^* + \xi_n,\ y^* + \eta_n\right) \\ y_{n+1} = y^* + \eta_{n+1} = g\left(x^* + \xi_n,\ y^* + \eta_n\right) \end{cases}$

Разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = f_x\xi_n + f_y\eta_n + \frac{1}{2}\left(f_{xx}\xi_n^2 + 2f_{xy}\xi_n\eta_n + f_{yy}\eta_n^2\right) + \ldots \\ \eta_{n+1} = g_x\xi_n + g_y\eta_n + \frac{1}{2}\left(g_{xx}\xi_n^2 + 2g_{xy}\xi_n\eta_n + g_{yy}\eta_n^2\right) + \ldots \end{cases}$$

, где нижние индексы у f и g означают производные, взятые в неподвижной точке (x^*,y^*). Для достаточно малых ξ и η можно

ограничиться линейной частью этого уравнения. Тогда, обозначая $a=fx$, $b=fy$, $c=gx$, $d=g$ получим уравнения в вариациях $\begin{cases}\xi_{n+1}=a\xi_n+b\eta_n,\\ \eta_{n+1}=c\xi_n+d\eta_n\end{cases}$ или в матричной форме $\begin{bmatrix}\xi_{n+1}\\ \eta_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_n\\ \eta_n\end{bmatrix}$

Чтобы найти мультипликаторы неподвижных точек отображения или собственные значения матрицы линеаризации, необходимо найти корни характеристического уравнения. Для двумерного отображения оно имеет вид: $\det\begin{bmatrix}a-\rho & b\\ c & d-\rho\end{bmatrix}=0.$

Характеристическое уравнение

$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0.$

Его корни

$$\lambda_{1,2}=\frac{(a+d)}{2}\pm\sqrt{\frac{(a+d)^2}{4}-(ad-bc)} \qquad (36)$$

определяют поведение фазовых траекторий в окрестности неподвижной точки отображения.

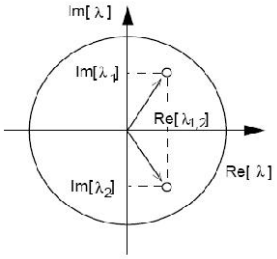


Рис. 27. Корни характеристического уравнения на комплексной плоскости.

Перейдём теперь к анализу неподвижных точек в двумерном отображении.

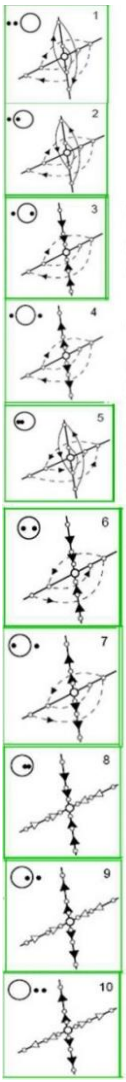
Из Ур.36 следует, что собственные значения $\lambda_{1,2}$ могут быть действительными числами или комплексно сопряженными. Характер устойчивости неподвижной точки меняется при $|\lambda_{1,2}|=1$. Поэтому удобно характеризовать неподвижную точку, изображая расположение собственных чисел λ_1 и λ_2 на комплексной плоскости относительно единичной окружности. Пара комплексно сопряженных значений $|\lambda_{1,2}|<1$, имеющие равные действительные части, а их мнимые части различаются только знаком. Положение точек внутри окружности означает, что $\sqrt{\mathrm{Re}^2\lambda_{1,2}+\mathrm{Im}^2\lambda_{1,2}}<1.$

Случай комплексно сопряженных λ_1 и λ_2.

В данном случае неподвижная точка является **фокусом.**

Если $r=\sqrt{\mathrm{Re}^2\lambda_{1,2}+\mathrm{Im}^2\lambda_{1,2}}<1,$ то неподвижная точка называется **устойчивым фокусом.** В этом случае точки итерации исходного отображения лежат на скручивающейся спирали с центром в неподвижной точке, которая в этом случае устойчива. Если $r>1$, то спираль раскручивается, удаляясь от неустойчивой неподвижной точки, которая в данном случае является **неустойчивым фокусом.** Характер сходимости возмущенной траектории к неподвижной точке меняется в зависимости от знака $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}$. Случай $r=1$ соответствует пограничной ситуации, когда возмущенная траектория не удаляется и не приближается к неподвижной точке, вращаясь вокруг нее с некоторой угловой скоростью.

Случай действительных λ_1 и λ_2.



1. $\lambda_1 < -1$ и $\lambda_2 < -1$ – **неустойчивый обратный узел.** Траектория расходится от неподвижной точки по обоим собственным векторам, причем отклонение каждый раз меняет свой знак.

2. $-1 < \lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < -1$ – **обратное седло.** Траектория сходится по одному из собственных векторов, но расходится по другому. Отклонение меняет знак при каждой итерации.

3. $0 < \lambda_1 < +1$ и $\lambda_2 < -1$ – **неориентируемое седло 1.** По одному из направлений траектория расходится, причем отклонение меняет знак на каждой итерации. По другому направлению отклонение монотонно убывает.

4. $\lambda_1 > +1$ и $\lambda_2 < -1$ – **неустойчивый неориентируемый узел.** Траектория расходится от неподвижной точки по обоим направлениям, причем по одному из них отклонение меняет знак на каждой итерации.

5. $-1 < \lambda_1 < 0$ и $-1 < \lambda_2 < 0$ – **устойчивый обратный узел.** Меняя знак отклонения на каждой итерации, возмущенная траектория сходится к неподвижной точке по любому направлению.

6. $0 < \lambda_1 < +1$ и $-1 < \lambda_2 < 0$ – **устойчивый неориентируемый Узел.** То же, что и 5-й случай, но по одному из собственных направлений отклонение монотонно убывает, не изменяя своего знака.

7. $\lambda_1 > +1$ и $-1 < \lambda_2 < 0$ – **неориентируемое седло 2.** То же, что и 3-й случай, но отклонение меняет знак на каждой итерации для устойчивого направления.

8. $0 < \lambda_1 > +1$ и $0 < \lambda_2 < +1$ – **устойчивый узел.** Траектория монотонно сходится к неподвижной точке по любому направлению.

9. $\lambda_1 > +1$ и $0 < \lambda_2 < +1$ – **седло.** Траектория монотонно сходится к неподвижной точке по одному направлению, но разбегается по другому.

10. $\lambda_1 > +1$ и $\lambda_2 > +1$ – **неустойчивый узел.** Траектория монотонно удаляется от неподвижной точки по любому направлению. Отклонение не меняет знака.

Рис. 28. Особые точки отображений.

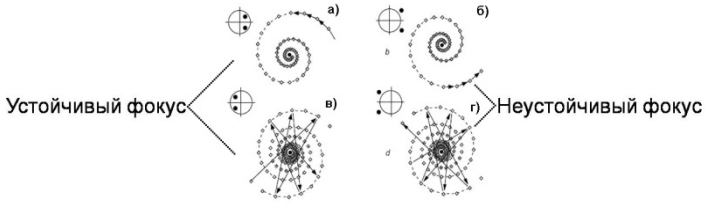


Рис. 29. Фокусы в случае комплексно сопряженных корней.

15. БИФУРКАЦИИ

Быть или не быть, вот в чём вопрос.
Достойно ль смиряться под ударами судьбы,
Иль надо оказать сопротивленье...

Как уже упоминалось, под бифуркацией понимают возникновение нового качества эволюции динамической системы при малом изменении её параметров.



Выбор действий: витязь на распутье и буриданов осёл.

Моменты качественного изменения исходной системы называются бифуркациями состояния и описываются соответствующими разделами математики – теория катастроф, нелинейные дифференциальные уравнения и т.д. Круг систем, подверженных такого рода явлениям, оказался настолько широк, что позволил говорить о катастрофах и бифуркациях, как об универсальных свойствах материи. Математический аппарат бифуркаций обычно строится на теории нелинейных динамических систем с непрерывным или дискретным временем.

Данная глава - введение в бифуркационный анализ. Более подробно некоторые важные случаи (включая теорию катастроф, странные аттракторы, переходы к детерминированному хаосу) будут обсуждены в последующих текстах.

15.1 Бифуркации: основные понятия и классификация

Теория бифуркаций систем дифференциальных уравнений берёт своё начало с работ А.Пуакаре.

Бифуркация – изменение характера движения динамической системы и особенностей решений, систем дифференциальных уравнений, описывающих это движение (например, скачкообразное изменение фазовых портретов) на большом временном интервале при изменении одного или нескольких параметров, описывающих её уравнений. Это смена топологической структуры разбиения фазового пространства динамической системы на траектории при плавном изменении её параметров. При математическом анализе процессов бифуркации обычно ориентируются на гладкие семейства нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Значения параметров, при которых происходят эти качественные изменения фазовых портретов, называются бифуркационными значениями или точками бифуркации.

Бифуркация (*bis* – дважды, и *furca* – вилы) – всевозможные качественные перестройки или метаморфозы различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят. Это раздвоение, разделение, разветвление чего-либо. Состояние процесса в динамической системе, при котором резко возрастают флюктуации и выход, из которого возможен по двум существенно различным трудно предсказуемым направлениям – хаотическому или упорядоченному. Бифуркации происходят как в непрерывных системах (описываемых

ОДУ), так и в дискретных системах (описываемых отображениями). Термин «бифуркация» предложен Анри Пуанкаре в 1885 г.

Локальная бифуркация – бифуркация, происходящая в маленькой области фазового пространства.

Критический (бифуркационный) параметр – параметр, при котором изменяются качественные или топологические свойства движения.

Критическое значение параметра – значение критического параметра, при котором происходит бифуркация.

Бифуркационная диаграмма – представление любого характеристического свойства решения как функции критического параметра; график, показывающий критические точки, где происходят бифуркации, и возможные решения, которые существуют в каждой точке; изображение на рисунке смены возможных динамических режимов системы (равновесных состояний, стационарных точек, периодических орбит и пр.) при изменении значения бифуркационного параметра.

Точка бифуркации – точка в параметрическом пространстве (пространстве, в котором каждой точке соответствует определенное состояние системы, а положение этой точки определяется значениями параметров и переменных состояния), в которой происходит бифуркация.

Прежде всего, напомним, что монотонное изменение параметра модели системы обычно не приводит к каким-либо качественным изменением её структуры. Например, деформация сетки, приводящая к существенному внешнему изменению картинки, не приводит к ее качественному изменению: старая и новая картинка математически неразличимы. Однако, монотонное изменение параметра модели может привести и к скачкообразному изменению структуры модели. Тогда динамическая система считается структурно неустойчивой. Качественное изменение фазового портрета называется бифуркацией. Даже небольшое изменение параметра μ, входящего в исходное уравнение $\dot{x} = f(x, \mu)$ обуславливает изменение характера его решений. Значение параметра, при котором происходит структурное изменение, называется точкой бифуркации. При бифуркации могут появляться новые (и исчезать) особые точки, особые устойчивые точки, устойчивые особые точки становятся неустойчивыми и наоборот и т.д.

В точке бифуркации структура может изменить свою устойчивость, разбить старую структуру на несколько новых или объединить её с другими структурами. Из точки бифуркации могут исходить несколько решений (устойчивых и неустойчивых). При качании (колебании) критического параметра вокруг критической точки возникает гистерезис (неоднозначность) свойств решения. Точка бифуркации – состояние системы, при котором даже незначительное возмущение может привести к глобальным изменениям. Точка бифуркации – смена установившегося режима работы системы, т.е. критическое состояние системы, при котором система становится неустойчивой относительно флуктуаций и возникает неопределенность: станет ли состояние системы хаотическим или она перейдёт на новый, более дифференцированный и высокий уровень упорядоченности. Основным свойством точки бифуркации является непредсказуемость: обычно точка бифуркации имеет несколько веток аттрактора (устойчивых режимов работы), по одной из которых пойдёт система. Однако заранее невозможно предсказать, какой новый аттрактор займёт система. Точка бифуркации носит кратковременный характер и разделяет более длительные устойчивые режимы системы.

Точка притяжения (аттрактор) – точка бифуркации, из которой все исходящие решения устойчивы).

Коразмерность бифуркации – наименьшее число параметров, управляющих бифуркацией; вводится для оценки «сложности» бифуркации.

Коразмерность k совпадает с числом параметров, при независимой вариации которых эта бифуркация происходит. В системе происходит бифуркация коразмерности k,

если в ней выполняются k условий типа равенств. Значение k=0 соответствует отсутствию бифуркации в данной точке. Бифуркации седло-узел и бифуркация Хопфа единственно чисто локальные бифуркации с коразмерностью единица (остальные имеют более высокую коразмерность). Однако транскритические и вихревые бифуркации часто также рассматриваются как коразмерность 1, потому что их нормальные формы записываются. Примером бифуркации коразмерности 2 является бифуркация Богданова -Такенса.

Суперкритическая (нормальная, надкритическая) бифуркация – бифуркация, при которой изменение системы происходит без скачка.

Субкритическая (обратная) бифуркация – бифуркация, при которой изменение системы происходит скачком.

Сценарий – последовательность бифуркаций, качественно меняющих свойства системы, называется сценарием.

Теория бифуркаций динамических систем – математическое описание изменений качественной или топологической структуры исследуемой системы. Рассчитываются интегральные кривые семейства векторных поле и решаются системы дифференциальных уравнений. Изучает изменения качественной картины разбиения фазового пространства в зависимости от изменения параметра (или нескольких параметров). Основные методы теории бифуркаций – это методы теории возмущений.

Теория бифуркации рассматривает структуру в фазовом пространстве (как правило, неподвижную точку, периодическую орбиту или инвариантный тор) и изучает её поведение как функцию управляющего параметра μ.

Качественная теория бифуркаций направлена на изучение поведения системы при фиксированных значениях параметров и на описание характера режимов, устанавливаемых в системе. Её интересуют вопросы, касающиеся событий, происходящих в системе при изменении значений параметров, поскольку медленное изменение параметра может привести к тому, что при пересечении некоторого критического значения режим, установившийся в системе, приобретает качественные изменения. При таких перестройках фазовый портрет изучаемой системы, изменяется. Качественные перестройки фазового портрета и называются **бифуркацией**.

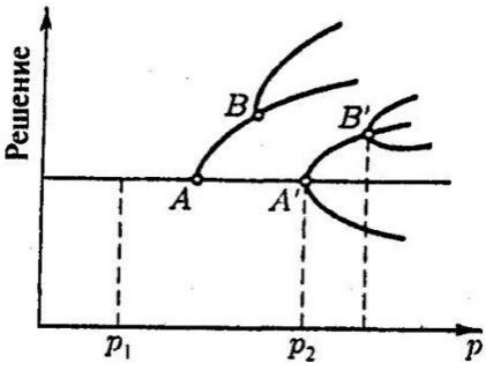


Рис. 1. Схема бифуркаций.

Теория нелинейной динамики занимается исследованием точек бифуркации, является их классификацией и анализом поведения семейств функций вблизи структурно неустойчивых особых точек.

Задачами теории бифуркаций являются:

1. описание всех возможных бифуркации исследуемой системы;
2. разбиение множества бифуркационных значений параметров на области с разными типами грубых фазовых портретов;
3. построение для каждой области соответствующего фазового портрета.

В механических системах установившиеся движения (положения равновесия) зависят от параметров. Значения параметров, при которых наблюдается изменение количества равновесий, называются их *бифуркационными значениями*. Кривые или поверхности, изображающие множества равновесий в пространстве состояний и параметров, называются *бифуркационными кривыми* или *бифуркационными поверхностями*. Прохождение параметра через бифуркационное значение сопровождается изменением свойств устойчивости равновесий. Бифуркации равновесий могут сопровождаться рождением периодических и других, более сложных движений.

Для динамических систем, зависящих от некоторого параметра, характерно, как правило, плавное изменение характера поведения при изменении параметра. Однако для

параметра может иметься некоторое критическое (бифуркационное) значение, при переходе через которое аттрактор претерпевает качественную перестройку и, соответственно, резко меняется динамика системы, например, теряется устойчивость. Потеря устойчивости происходит, либо переходом от точки устойчивости к устойчивому циклу (мягкая потеря устойчивости; появление двух новых стационарных состояний вблизи старого), либо выходом траектории с устойчивого положения (жесткая потеря устойчивости; катастрофа), либо путём рождения циклов с удвоенным периодом. При дальнейшем изменении параметра возможно возникновение торов, а затем странных аттракторов (хаотических процессов).

Теория бифуркаций направлена на изучение изменения числа точек равновесия и их устойчивости при изменении параметров динамической системы. В нелинейной динамике под бифуркацией обычно понимают ветвление и сливание положений равновесия решений при изменении управляющих параметров динамической системы.

Особенность точки бифуркации заключается в том, что вблизи неё даже очень слабое возмущение способно радикальным образом изменить траекторию движения.

Как уже упоминалось, устойчивость динамической системы к возмущениям связана с её структурной устойчивостью, т.е. с грубостью системы, а эта структурная устойчивость связана с бифуркацией. Эту связь можно представить как переход системы от одного структурно-устойчивого состояния к другому через структурно-неустойчивое состояние в точке бифуркации. Бифуркации и катастрофы определяются мягкими и жёсткими границами критических состояний. В первом случае преодоление границ стабильности и выход в критическую область не обусловливают необратимые структурные изменения.

Сложные системы содержат подсистемы, которые непрестанно флуктуируют. Иногда отдельная **флуктуация** или комбинация флуктуации может стать (в результате положительной обратной связи) настолько сильной, что существовавшая прежде организация не выдерживает и разрушается. В этот переломный момент (точка бифуркации) принципиально невозможно предсказать, в каком направлении будет происходить дальнейшее развитие: станет ли состояние системы хаотическим или она перейдёт на новый, более дифференцированный и более высокий уровень упорядоченности или организации (диссипативную структуру). Процесс самоорганизации носит пороговый характер – внезапность явлений самоорганизации.

Флуктуации – случайные отклонения характеристик системы от средних значений.

Случайность подталкивает то, что остаётся от системы, на новый путь развития, а после того как путь (один из многих возможных) выбран, вновь вступает в силу детерминизм – и так до следующей точки бифуркации. Флуктуации, будущие альтернативы, конкурируют, и побеждает наиболее быстрорастущая из них – порядок через флуктуации.

Основным принципом прохождения системой точек бифуркаций, её становления, рождения и гибели иерархических уровней является эмерджентность – динамическая иерархичность. Эмерджентность заключается в том, что свойства системы в целом (свойства целостности системы) не являются простой суммой её составных частей. Система может обладать такими свойствами, какими не обладает ни одна её часть. Этот принцип описывает возникновение нового качества системы на одном уровне, когда изменение управляющих параметров вышестоящего уровня (мегауровня) приводит к перестройке ее структуры.

Точка бифуркации воспринимается как момент кризиса, как потеря устойчивости: по мере приближения к точке бифуркации флуктуации возрастают. За точкой бифуркации обычно имеет место стабилизация флуктуаций (порядок из хаоса) В процессе самоорганизации происходит синхронизация частей системы, идёт понижение энтропии системы самоорганизации и повышение энтропии окружающей среды при

самоорганизации. Из-за нелинейности, наличия более одного устойчивого состояния в динамических системах, в них не выполняется ни второе начало термодинамики, ни теорема Пригожина о минимуме скорости производства энтропии.

Бифуркации разделяют на локальные и нелокальные.

Локальная бифуркация связана с изменением векторного поля вблизи вынужденного (бифурцирующего) положения равновесия или замкнутой орбиты. Бифуркационные решения ищутся вблизи этих предельных множеств. Бифуркация возникает, когда изменение параметра приводит к изменению стабильности равновесия (или фиксированной точки). В непрерывных системах это соответствует вещественной части собственного значения равновесия, проходящего через нуль. В дискретных системах (описанных отображениями, а не ОДУ) это соответствует неподвижной точке, имеющей **множитель Флоке** (см. далее) с модулем, равным единице. В обоих случаях равновесие не гиперболично в точке бифуркации.

Топологические изменения фазового портрета системы могут быть ограничены сколь угодно малыми окрестностями бифуркационных неподвижных точек, перемещая параметр бифуркации близко к точке бифуркации (т.е. к локальной). Примеры локальных бифуркаций: седло-узловая (складчатая) бифуркация, транскритическая бифуркация, бифуркация вил, бифуркация удвоения периода (флип), бифуркация Хопфа, бифуркация Неймарк-Сакера и др. Локальные бифуркации диагностируются с помощью линейного анализа ляпуновских показателей (собственных чисел). Они могут быть полностью проанализированы с помощью изменений локальных свойств устойчивости равновесий, периодических орбит или других инвариантных множеств в качестве параметров, пересекающих критические пороги.

Нелокальные (глобальные) бифуркации нельзя определить на основе линейного анализа окрестности стационарного состояния, здесь требуется нелинейный анализ системы. К нелокальным бифуркациям относятся образование сепаратрисных петель, касание аттрактором сепаратрисных кривых или поверхностей. Глобальные бифуркации возникают, когда большие инвариантные множества системы «сталкиваются» друг с другом или с равновесиями системы. Они не могут быть обнаружены исключительно путем анализа устойчивости равновесий (неподвижных точек, т.е. точек в которых нет потоков).

Глобальные бифуркации возникают, когда «большие» инвариантные множества, такие как периодические орбиты, сталкиваются с равновесиями. Это приводит к изменениям топологии траекторий в фазовом пространстве, которые не могут быть ограничены малой окрестностью, как в случае локальных бифуркаций. Фактически, изменения в топологии распространяются на сколь угодно большое расстояние (следовательно, «глобальное»). Примеры глобальных бифуркаций: гомоклиническая бифуркация (предельный цикл сталкивается с седловой точкой), гетероклиническая бифуркация (предельный цикл сталкивается с двумя или более седловыми точками), бесконечная бифуркация (устойчивый узел и точка седла одновременно происходят в предельном цикле), катастрофа голубого неба (предельный цикл сталкивается с негиперболическим циклом) и др. Глобальные бифуркации могут включать более сложные наборы, такие как хаотические аттракторы (например, кризисы).

Бифуркации аттракторов принято подразделять на *мягкие (внутренние) бифуркации* и *кризисы* (*жесткие бифуркации*). Внутренние бифуркации приводят к топологическим изменениям самих притягивающих множеств, не затрагивая их бассейнов притяжения – областей, из которых фазовые траектории сходятся к данному аттрактору.

Кризисы – бифуркации аттракторов, сопровождающиеся качественной перестройкой границ областей притяжения (бассейнов) аттракторов.

Пример кризиса – бифуркация слияния устойчивого узла с седлом, в результате чего аттрактор исчезает

Катастрофы – резкие значительные изменения переменных состояния динамической системы, вызванные малыми возмущениями в правых частях уравнений, в частности, малыми изменениями параметров.

Иногда классификацию типов бифуркаций ведут по теореме Купки-Смейла на основе трёх общих свойств векторных полей: гиперболические точки равновесия, гиперболические периодические орбиты, трансверсальные пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий точек равновесия и периодических орбит.

Бифуркации можно классифицировать по характеру изменения стабильности равновесных решений. Такие изменения могут происходить двумя путями: собственное значение системы, линеаризованной относительно равновесного решения, может проходить через нуль, или пара ненулевых собственных значений может пересекать мнимую ось. Первый случай соответствует седло-узловой (касательной) бифуркации и описывает рождение или коллапс двух равновесий (например, стабильный узел, взаимодействующий с седлом и аннулирующий его). Это происходит, когда многообразие, связанное с заданным равновесием, пересекает себя. С другой стороны, когда пересекаются многообразия, связанные с различными равновесиями, происходит обмен стабильности – это соответствует транскритической бифуркации или бифуркации вил. Второй случай соответствует бифуркации Хопфа и описывает рождение семейства периодических орбит (предельный цикл) после изменения устойчивости фокуса.

Цель теории бифуркаций – определение существования и устойчивости различных ветвей решений, таких как неподвижные точки и периодические орбиты. Различные равновесия возникают друг за другом непрерывным образом, по мере изменения бифуркационного параметра μ в точке бифуркации $\mu=\mu_0$.

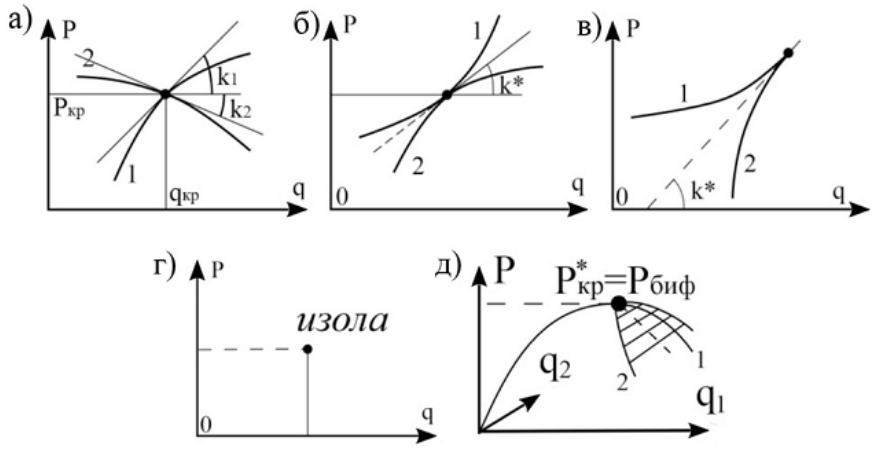


Рис. 2. Типы бифуркационных особенностей (на примере зависимости нагрузки упругую систему, P, от обобщённой координаты, q): а) бифуркация в результате пересечения двух траекторий равновесий; б, в) касательные бифуркации; г) изолированная точка бифуркации; д) двукратная критическая точка «ветвление в вершине холма»

15.2 Элементы теории бифуркаций

Рассмотрим виды бифуркаций, возникающих в ОДУ с непрерывным временем. Бифуркациям в отображениях посвящена следующая глава. Прежде, чем начать рассмотрение сложных задач нелинейной динамики, напомним некоторые положения теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Теоретическая динамика основывается на решении гладкого семейства нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x,\mu), \quad x \in M \subset R^m, \quad \mu \in L \subset R^k, \quad F \in C^\infty, \qquad (1)$$

заданных в фазовом пространстве M гладкими векторными полями F, зависящими от координат векторов системных параметров μ, лежащих в области L пространства R^k.

В простом варианте автономное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = F(u) \qquad (2)$$

Для Ур.2 с начальным условием $u(t_0)=u(0)$ удаётся провести детальное качественное исследование – определить все аттракторы, доказать, что именно к ним траектории сходятся при $t\to+\infty$ и указать, при каких именно начальных данных на какой аттрактор происходит выход.

Интересные, с физической точки зрения, системы обычно включают некоторые параметры, появляющиеся при составлении систем уравнений. Когда эти параметры изменяются, при определенных их значениях могут произойти изменения в качественной структуре решений (бифуркации).

Рассмотрим теперь роль параметров (например, μ) в склонности ОДУ проявлять эффекты бифуркации.

Пример 1. **Уравнение экспоненциального роста**. Найти бифуркационное значение параметра (нулевое значение собственной константы скорости роста) в уравнении: $\frac{dx}{dt} = \mu x$ При μ>0 стационарное значение $x_0=0$ – неустойчиво, при μ<0 – устойчиво; $\mu_0=0$ – бифуркационное значение параметра. Напомним, что биологический смысл величины μ – разница коэффициентов рождаемости и смертности. Если рождаемость преобладает – популяция растёт, если преобладает смертность – вымирает. Переход от выживания к вымиранию – качественная перестройка системы.

Пример 2. Найти точку бифуркации системы $\begin{cases} \dot{x} = \mu x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ Точка бифуркации μ=0.

Рассмотрим более подробно гладкое семейство нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x,\mu) = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x},\ x\in M\subset R^n,\ \mu\in R^m,\ F\in C^\infty \qquad (3)$$

заданных в фазовом пространстве M гладкими векторными полями F, зависящими от координат векторов системных параметров μ, лежащих в области L пространства R^k.

Здесь $x=(x_1,\ldots, x_n)^T$ – фазовые переменные (вектор переменных, несколько решений этого уравнения); $\mu=(\mu_1,\ldots, \mu_m)^T$ – вектор параметров, F – заданная аналитическая гладкая функция x и μ с непрерывными частными производными всего порядка по x и μ.

Автономная система ОДУ 1-го порядка с параметрами заданными на прямой описывает поток в фазовом пространстве. Наиболее простая ситуация реализуется в одномерном случае, когда x, μ, $F(\mu, \mu)$ – скаляры.

Величина

$$U(x,\mu) = -\int_{x_0}^{x} F(z,\mu)dz \qquad (4)$$

в теории динамических систем называется потенциалом. Максимумы и минимумы потенциала соответствуют стационарным состояниям x. Причём максимум потенциала соответствует неустойчивому состоянию, а минимум – устойчивому.

Возможность бифуркации в системе связана с грубостью системы.

Векторное поле $F(x,\mu_0)$ системы (3) (или дифференциальное уравнение (3)), является грубым, если существует окрестность $U\subset L$ вектора μ_0, такая что для всех $\mu\in U$ векторные поля $F(x, \mu)$ топологически эквивалентны векторному полю $F(x, \mu_0)$.

Точками бифуркации являются те, и только те совокупности значений параметров, при которых система является **негрубой**, т.е. при которых отсутствует непрерывная зависимость фазового портрета системы от её параметров. Предположим, что в пространстве параметров нет областей, заполненных исключительно негрубыми

системами вида (3). Тогда полное качественное исследование семейства систем (3) сводится к установлению разбиения пространства параметров на области с одинаковой (грубой) качественной структурой и к установлению этой качественной структуры. Разбиение пространства параметров на грубые области и разделяющие их (k-1)-мерные пленки, соответствующие негрубым системам, называется **бифуркационной диаграммой**.

Коразмерность бифуркации показывает, от скольких параметров должна зависеть система дифференциальных уравнений, чтобы бифуркация была для неё типичной. Чем выше коразмерность, тем более нетипичной будет бифуркация. В трёхмерном пространстве параметров бифуркация коразмерности 1 происходит на некоторой гладкой двумерной поверхности, коразмерности 2 – на линии, а коразмерности 3 – в точке.

Зафиксируем некоторое $\mu=\mu_0$, и рассмотрим фазовые портреты системы при данном значении параметра, а также при $\mu>\mu_0$ и $\mu<\mu_0$. Фазовые портреты топологически эквивалентны, если существует невырожденное непрерывное преобразование координат, которое переводит все элементы одного фазового портрета в элементы другого. Если фазовые портреты при значениях $\mu>\mu_0$ и $\mu<\mu_0$ топологически не эквивалентны, это означает, что при $\mu=\mu_0$ происходит качественная перестройка системы. Значение μ_0, для которого поток Ур.2 структурно неустойчив, называется *бифуркационным значением параметра* μ.

В положении равновесия (x_0,μ_0) могут сходиться несколько ветвей равновесий, такая точка (x_0,μ_0) называется точкой бифуркации.

Пусть $x_0(\mu)$ – равновесное решение – особая точка системы, координаты которой представляют собой решение системы алгебраических уравнений:

$$F(x_0,\mu)=0. \qquad (5)$$

Если $\partial F/\partial x=0$ в ближайшей окрестности $\mu=\mu_0$, то при одном значении μ, может существовать несколько равновесных решений x_0. Если система имеет множество решений, то важность решения определяется соображениями устойчивости. Теория бифуркации выясняет, как множественность решений изменяется с параметром μ и свойствами устойчивости бифуркационных решений. Локальная бифуркация затрагивает явления вблизи одной точки. Устойчивость равновесных решений меняется при изменении μ. Часто равновесное решение $x_0(\mu)$ будет устойчиво при $\mu<\mu_o$ и неустойчиво при $\mu\geq\mu_0$. Таким образом, при медленном увеличении μ равновесное решение $x_0(\mu)$ становится неустойчивым при μ_0, и система способна перейти в другое устойчивое решение, если оно доступно. Бифуркации теория пытается выяснить, как изменяется стабильность различных равновесий, когда μ изменяется вблизи μ_0. Этот процесс существенно зависит от типа нелинейности уравнения.

Ур.5 определяет положение равновесия и задаёт на плоскости параметров (x, μ) кривую в параметрическом виде, называемую кривой равновесий.

В общем случае кривая равновесий может иметь несколько ветвей. Например, для системы $\dot{x}=x^2-\mu^2$ она состоит их двух ветвей $x=\pm\mu$. Для функции $y=x^4-\mu^2$ значение параметра $\mu=0$ соответствует точке бифуркации, так как при переходе μ от отрицательных значений к положительным стационарное состояние $x=0$ стало неустойчивым и дополнилось парой устойчивых состояний – $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}$. У функции $y=x^3-\mu$ при отрицательных значениях μ стационарные состояния вообще отсутствуют, а в точке $\mu=0$ происходит рождение таких состояний, один из которых устойчив, а другой – неустойчивый. В двух последних случаях значения $\mu=0$ соответствуют точкам бифуркации, хотя и разных типов.

Кривая равновесия делит плоскость на области, в которых функция F сохраняет знак. В наиболее простой и наиболее распространённой ситуации в соседних областях,

граничащих по кривой равновесия, знаки функции F различаются. Характер устойчивости определяется знаком производной F в точке равновесия x_0. Если при увеличении x при переходе через кривую равновесия знак функции F меняется с "+" на "−", то $F_0<0$ и положение равновесия x_0 асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Наоборот, при переходе от "−" к "+" производная $F_0>0$ и по той же теореме положение равновесия неустойчиво. Таким образом, у кривой равновесий имеются ветви, состоящие из устойчивых и неустойчивых положений равновесия.

Рассмотрим зависимость решений Ур. 5 от параметра μ. Пусть нам известно некоторое решение Ур.5 (x_0,μ_0). Найдём решение Ур.5 при малом изменении параметра $\mu=\mu_0+\Delta\mu$. Можно показать, что при изменении μ на Δμ, решение изменится на Δx. Если

$$\frac{\partial F(x_0,\mu_0)}{\partial x}\Delta x \neq 0\text{, то } \Delta x = \left(\frac{\partial F(x_0,\mu_0)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(x_0,\mu_0)}{\partial \mu}\Delta\mu \text{.} \qquad (6)$$

При малом изменении параметра μ на величину Δμ новое состояние равновесия будет находиться в точке $x_0+\Delta x$ и это состояние равновесия будет *единственным*, **бифуркация не возникает**. В этом случае точку x_0 называют *регулярной особой точкой*.

Если $\frac{\partial F(x_0,\mu_0)}{\partial x}\Delta x = 0$, то

$$\Delta x = \pm\sqrt{-2\Delta\mu\frac{F_\lambda}{F_{xx}}} = \pm\sqrt{C\Delta\mu}\text{,} \qquad (7)$$

где $\frac{\partial F_i}{\partial i} = F_i, \frac{\partial^2 F}{\partial i\partial j} = F_{ij}$.

Если $C>0$, то при $\mu>\mu_0$ $(\Delta\mu>0)$ появляются два решения, а при $\mu<\mu_0$ $(\Delta\mu<0)$ решений нет. Точки (x_0,μ_0), в которых $F_\mu\neq0$ и производная меняет знак, называют *регулярными экстремальными точками*. Если $F_{xx}\neq0$ и $Det = F_{x\mu}^2 - F_{xx}F_{\mu\mu} > 0$, то из точки (x_0, μ_0) выходят две ветви решения с различными касательными.

$$\Delta x = \Delta\lambda\left(\frac{-F_{\lambda x} \pm \sqrt{F_{\lambda x}^2 - F_{xx}F_{\lambda\lambda}}}{F_{xx}}\right) \qquad (8)$$

Такая точка называется *двойной*.

Если $Det<0$, то не существует касательных, проходящих через точку $(x_0,\ \mu_0)$, следовательно, мы имеем изолированное особое точечное решение – *сопряженную точку*.

Если $F_{xx} = 0$, то $\Delta x = -\frac{F_{\lambda\lambda}}{2F_{x\lambda}}\Delta\mu$ или Δμ=0, что соответствует кривой, касательная к которой в точке $(x_0,\ \mu_0)$ вертикальна. Можно показать, что на одной из ветвей меняет знак производная x_λ. Такая особая точка называется *особой экстремальной.*

Напомним, что неподвижной точкой может быть седло, узел, вырожденный узел, дикритический узел, фокус и центр, а характеристиками бифуркаций – ***коразмерность*** – количество параметров, необходимых для реализации бифуркации (в точке бифуркации коразмерности k выполняется k бифуркационных условий (условий типа равенств) и ряд условий невырожденности – условий типа неравенств); ***бифуркационное многообразие*** – гиперповерхность размерности k в пространстве параметров, заданная бифуркационными условиями. При значении параметра $x_0(\mu)$ имеет место стационарное решение Ур. $\dot{x} = F(x,\mu)$: $F(x_0(\mu),\mu)$.

Поведение производной $\rho(\mu)=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_0(\mu)} \neq 0$ определяет будет ли система устойчивой или нет. В "грубом" случае при ρ<0 имеет место устойчивость, а при ρ>0 - неустойчивость.

В пространстве параметров возникают области грубых систем, которые разделяются поверхностями, состоящими из негрубых систем. Теория бифуркаций изучает зависимость качественной картины при непрерывном изменении параметра вдоль некоторой кривой. Схема, по которой происходит изменение качественной картины, называется бифуркационной диаграммой.

Известны такие виды бифуркаций, как **смена устойчивости** (при переходе параметра через некоторое значение μ ветви кривой равновесий пересекаются, и устойчивая ветвь теряет устойчивость, а неустойчивая наоборот становится устойчивой), **складка** (при варьировании параметра вблизи некоторого μ положение равновесия исчезает, либо появляются два близких положения равновесия, одно из которых устойчиво, а второе – неустойчиво), **вилка** (при переходе через бифуркационное значение параметра дополнительно появляются две ветви кривой равновесия при этом ветвь $x = 0$ остается, однако изменяется характер ее устойчивости).

В системах, зависящих от двух параметров, или в системах с определенным типом симметрии встречается бифуркация, при которой рождается сразу два устойчивых предельных цикла.

В момент времени, когда система находится вблизи точки бифуркации, существенную роль начинают играть малые возмущения значений ее параметров. Эти возмущения могут носить как чисто случайный характер, так и быть целенаправленными. Именно от них зависит, по какой эволюционной ветви пойдет система, пройдя через точку бифуркации. Если до прохождения точки бифуркации, поведение системы детерминировано, то в самой точке бифуркации решающую роль играет случай.

Динамическая система

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x,y),\\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y)\end{aligned} \qquad (9)$$

называется *грубой*, если существует такое малое δ, что все динамические системы, описываемые уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= P(x,y)+p(x,y),\\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y)+q(x,y)\end{aligned} \qquad (10)$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ – любые функции, удовлетворяющие неравенству

$$|p(x,y)|+|q(x,y)|+\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}\right|<\delta \qquad (11)$$

имеют топологически одинаковую структуру разбиения фазовой плоскости на траектории. На фазовой плоскости грубых систем могут быть только простые состояния равновесия: фокус, узел, седло, устойчивый и неустойчивый предельные циклы.

Рассмотрим возможные бифуркации динамической системы (9) при изменении параметра μ. Стационарным состояниям системы (9) ($\dot{x}=0, \dot{y}=0$) на фазовой плоскости соответствуют точки пересечения линий $P(x, y; \mu)=0$ и $Q(x, y; \mu)=0$. При изменении параметра μ число таких точек пересечения может измениться, произойдет бифуркация (рис. 6). Примером такой бифуркации может служить слияние узла и седла в сложную

особую точку и ее исчезновение (рис. 7). Еще одним примером может служить бифуркация в системе $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 0$.

При $\gamma>0$ на фазовом портрете системы имеется устойчивый фокус или узел, при $\gamma=0$ – центр, при $\gamma<0$ – неустойчивый фокус или узел. В данном случае число особых точек не меняется, а меняется их характер. Кроме того, возможны бифуркации, связанные с изменением расположения сепаратрис седла.

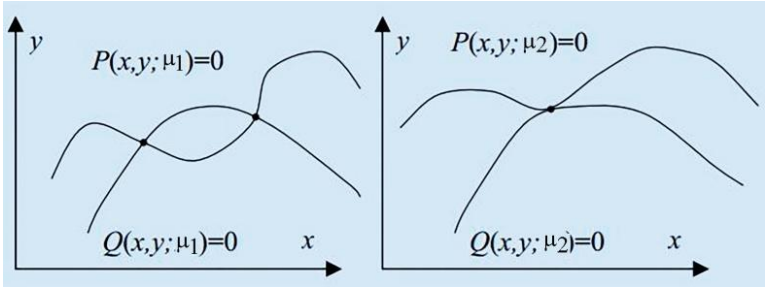


Рис. 3. Изменение числа стационарных точек Ур.13 при изменении параметра μ.

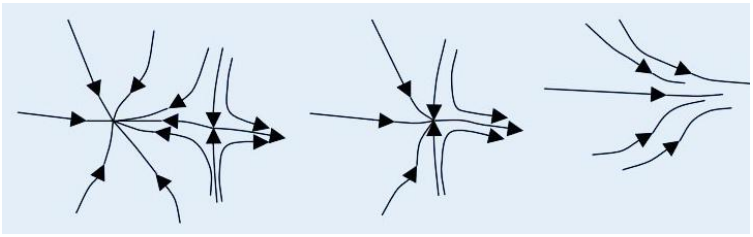


Рис. 4 Слияние узла и седла в сложную особую точку и её исчезновение при дальнейшем увеличении параметра

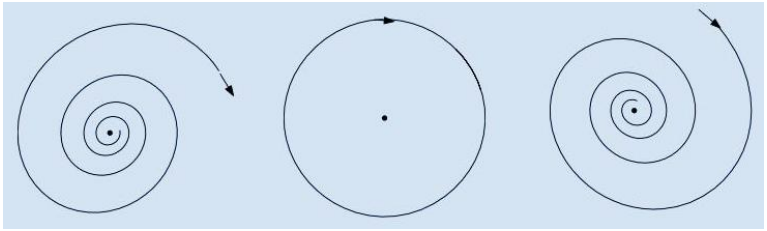
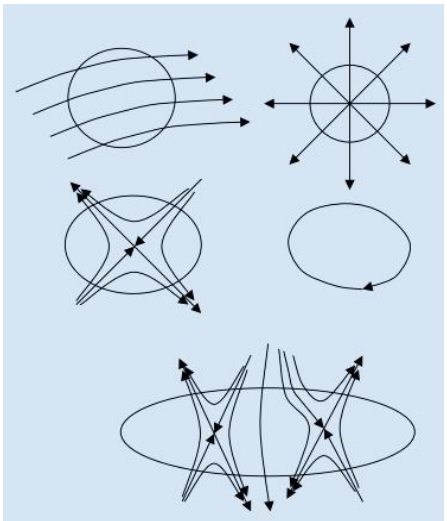


Рис. 5 Изменение характера особой точки: неустойчивый фокус-центр-устойчивый фокус.

Индексы особых точек и замкнутых траекторий – индексы Пуанкаре. Рассмотрим на фазовой плоскости системы (10) замкнутую кривую C, не проходящую через состояния равновесия. Возьмем на этой кривой произвольную точку S и проведём через неё вектор, направление которого совпадает с направлением фазовой траектории в точке S. Будем перемещать точку S по контуру C против часовой стрелки. Направление вектора будет при этом меняться. Когда точка S сделает один полный оборот, вектор займет прежнее положение. Полное приращение угла поворота вектора при движении по контуру составит $2\pi j$, где j – целое число. Число j называется *индексом замкнутой кривой по отношению к векторному полю.* Поскольку векторное поле задается Ур.8, то направление вектора поля в точке (x, y) определяется выражением



$$\varphi = arctg\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad (12)$$

Индекс кривой равен

$$j = \frac{1}{2\pi}\oint\frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} \qquad (13)$$

Рис. 6. К вычислению индекса Пуанкаре.

Интеграл (13) – интеграл от полного дифференциала. Он отличен от нуля только в том случае, когда внутри контура интегрирования лежит особая точка, то есть, аналитичность подынтегрального выражения нарушается. *Индексом особой точки* называют индекс простой замкнутой кривой, охватывающей эту и только эту особую точку. Индекс седловой точки j=-1, индекс фокуса, узла и центра j=+1 (рис. 6). Индекс фокуса и узла не зависит от того, является ли особая точка устойчивой или неустойчивой. Индекс замкнутой кривой, являющейся замкнутой фазовой траекторией системы (8), j=1. Индекс замкнутой кривой, охватывающей несколько особых точек, равен сумме индексов этих особых точек. Следствия:

– Внутри замкнутой фазовой траектории находится, по крайней мере, одна особая точка.

– Если внутри замкнутой фазовой траектории находится только одна особая точка, то это не седло и не особая точка с индексом, отличающимся от j=+1.

– Если внутри замкнутой фазовой траектории находится несколько простых особых точек, то их число всегда нечетное, причем число седел на единицу меньше числа остальных особых точек

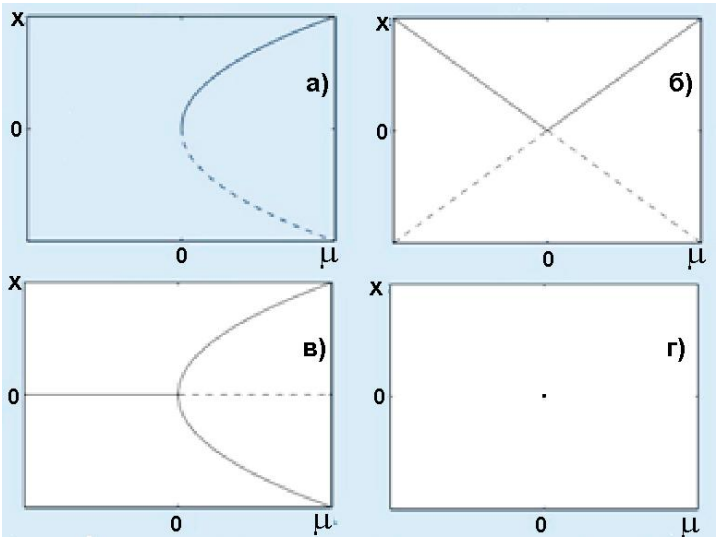


Рис. 7. Типичные бифуркации: *а* – $\dot{x} = \mu - x^2$, *б* – $\dot{x} = \mu^2 - x^2$, *в* – $\dot{x} = x(\mu - x^2)$, $\dot{x} = \mu^2 + x^2$

Поскольку структурно устойчивые поля являются грубыми, то кандидатами в точки бифуркации являются в первую очередь те значения параметров μ_0, при которых векторное поле $F(x, \mu_0)$ имеет негиперболические особые точки, негиперболические циклы или сепаратрисные контуры. Грубость как частный случай структурной устойчивости может быть как локальной, так и нелокальной (глобальной), поэтому бифуркации также могут быть локальными и нелокальными.

Локальные бифуркации – бифуркации положений равновесия.

К локальным бифуркациям относятся бифуркации негиперболических особых точек, циклов и торов, которые приводят к локальному качественному изменению фазового портрета системы. К нелокальным бифуркациям, нелокально меняющим фазовый портрет системы, относятся бифуркации сепаратрисных контуров и нерегулярных аттракторов.

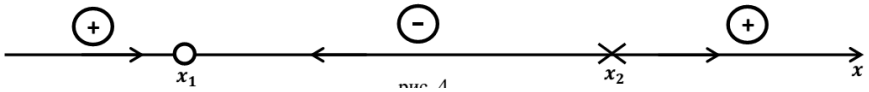
Среди локальных бифуркаций наиболее интересными с точки зрения различных приложений являются бифуркации устойчивых предельных множеств (регулярных аттракторов), так как они приводят к изменениям наблюдаемых в реальных экспериментах установившихся режимов. Бифуркации аттракторов принято разделять на мягкие (внутренние) и жесткие (кризисы аттракторов). Мягкие бифуркации приводят к

топологическим изменениям самих аттракторов, но не приводят к их исчезновению. Жесткие бифуркации приводят к исчезновению аттракторов.

Основная задача исследования динамической системы, описываемой эволюционными уравнениями, заключается в анализе структуры разбиения пространства состояний на фазовые траектории и влияния параметров динамической системы на изменения фазового портрета. Картина расположения фазовых траекторий и составляет фазовый портрет системы. В случае автономных динамических систем первого порядка $\dot{x} = f(x)$ фазовый портрет полностью определяется состояниями равновесия и их устойчивостью, а также бифуркационными значениями параметра или бифуркационными границами при наличии нескольких параметров.

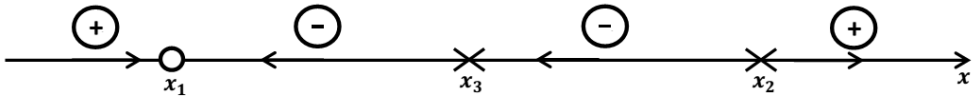
Пример 3. Построить фазовый портрет системы и определить бифуркационные значения параметра, если таковые существуют. $\dot{x} = (x^2 - 2x)^2 - (a+2)(x^2 - 2x) + 3a + 3$ Построить фазовый портрет исходной системы и определить бифуркационные значения параметра, если таковые существуют. Фазовым пространством является вся ось x. Определим состояния равновесия. Для этого введем замену: x^2-2x=y и приравняем нулю правую часть: y^2-(a+2)y+3a-3=0. Найдем корни этого уравнения: y_1=3, y_2=a-1. Тогда с чётом замены получим четыре корня: x_1=-1, x_2=3, $x_3 = 1 - \sqrt{a}$; $x_4 = 1 + \sqrt{a}$. Корни x_3, x_4 зависят от параметра, и поэтому возможны следующие случаи.

1) При a<0 система имеет два состояния равновесия x_1=-1, x_2=3 и фазовый портрет будет следующий:



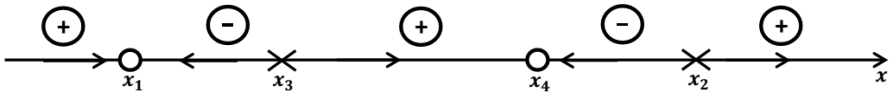
Из фазового портрета видно, что состояние равновесия x_1=-1устойчиво, а x_2=3 неустойчиво.

2) При a=0, $x_{3,4}$ и система имеет три состояния равновесия: x_1=-1, x_2=3, x_3=1**.** Фазовый портрет будет следующий:

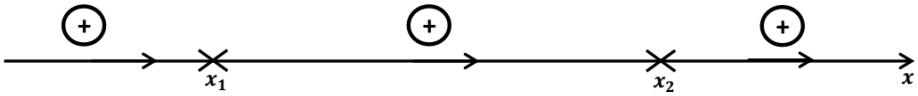


То есть x_1=1 устойчивое состояние равновесия, x_2=3, x_3=1 - неустойчивые состояния равновесия, значение является бифуркационным. Динамическая система негрубая.

3) При 0<a<4 система имеет четыре различных состояния равновесия: x_1=-1, x_2=3, $x_3 = 1 - \sqrt{a}$ $x_4 = 1 + \sqrt{a}$ и фазовый портрет будет такой:



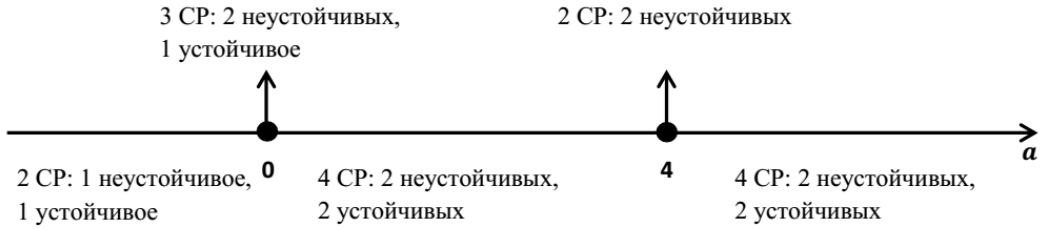
4) При a=4 корни попарно сливаются: x_1=x_3=-1, x_2=x_4=3, то есть система (15) имеет два состояния равновесия. Фазовый портрет будет в этом случае иметь вид:



Оба состояния равновесия неустойчивы. Динамическая система негрубая.

5) При a>4 система имеет четыре различных состояния равновесия: x_1=-1, x_2=3, $x_3 = 1 - \sqrt{a}$, $x_4 = 1 + \sqrt{a}$ и фазовый портрет будет таков:

Как видно из фазового портрета, состояния равновесия x_2, x_3 – устойчивые, а x_1, x_4 – неустойчивые. Значение параметра a=4 не является бифуркационным, так как при 0<a<4 и при a>4 фазовые портреты системы одинаковы. Можно считать, что при значении a=4 динамическая система имеет **бифуркацию в точке** (всего два неустойчивых состояния равновесия). Таким образом, на оси параметра возможны следующие ситуации, связанные количеством и устойчивостью состояния равновесия исследуемого уравнения:



Пример 4. Построить фазовый портрет системы и определить бифуркационные значения параметра а: $\dot{x} = -x^4 + 2x^2 - 1 + a, \quad a \in R.$ Возможны два способа решения задачи: графический и аналитический.

Графический способ заключается в построении кривой f(x,a). Анализируя точки пересечения прямой $a = const$ с данной кривой, можно получить ответ о количестве состояний равновесия и их устойчивости при конкретном значении параметра a. Устойчивость в данном случае определяется, как и в случае динамической системы без параметра. Приравнивая правую часть изучаемого уравнения нулю, получим: $a=x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$. Необходимо построить график этой функции. Для этого найдем точки пересечения (касания) еѐ с осями координат. Точки касания с осью $0X$ ($a=0$) находятся из уравнения: $(x^2-1)^2=0$, решением которого являются два значения $x_{1,2}=\pm 1$, при которых производная $\frac{da}{dx} = 0$ Пересечение оси $0a$ ($x=0$) происходит при $a=1$. Имея кривую состояния равновесия $a=(x^2-1)^2$, определяем знаки в образовавшихся областях, устойчивость состояния равновесия и строим фазовые портреты исследуемой динамической системы. Значения и являются бифуркационными. На рис. 8а приведены фазовые портреты при $a<1$, $a=0$, $0<a<1$, $a=1$, $a>1$. Используя предыдущие результаты, на плоскости ax_0, где x_0 – координаты состояния равновесия, построим бифуркационную диаграмму, на которой расположены устойчивые и неустойчивые стационарные равновесия (рис. 8б).

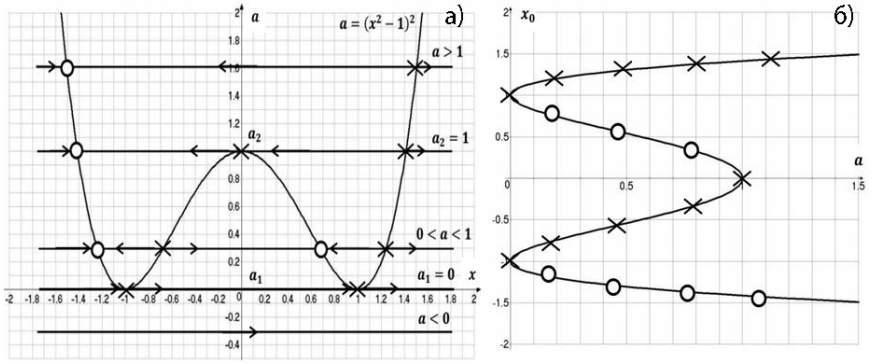
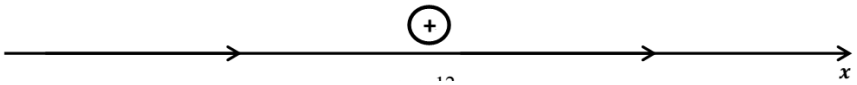


Рис. 8 Фазовые портреты при a<1, a=0, 0<a<1, a=1, a>1.

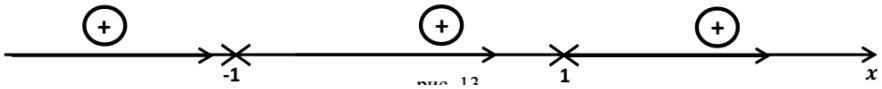
Аналитический способ Данный способ заключается в непосредственном нахождении корней уравнения $f(x,a)=0$ и бифуркационных значений. Далее строятся фазовые портреты при различных значениях параметров. В рассматриваемой задаче фазовым пространством системы является вся ось x. Для определения состояний равновесия решим исходное уравнение относительно x, введя замену $y=x^2\geq 0$: $y^2-2y+1-a=0$. Решая это уравнение, получаем два корня, зависящие от параметра a: $y_1 = 1 - \sqrt{a}, \quad y_2 = 1 + \sqrt{a}.$ Совершая обратную замену, получаем четыре состояния равновесия, зависящие от параметра a:

$$x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{1-\sqrt{a}}, \quad x_4 = \sqrt{1+\sqrt{a}}, \quad a \geq 0.$$

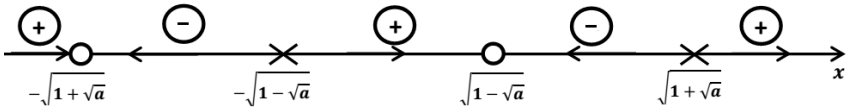
Следовательно, в зависимости от значения параметра система будет иметь различные фазовые портреты. При $a<0$ нет состояний равновесия. Фазовый портрет:



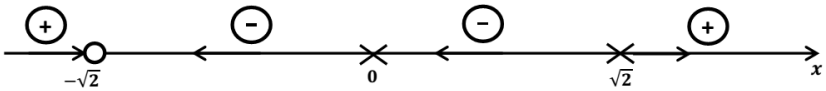
При $a=0$, корни попарно сливаются: $x_1=x_2=-1$, а $x_3=x_4=1$: система имеет два состояния равновесия: $x_1=-1$, $x_2=3$ и фазовый портрет имеет вид:



Следовательно, состояния равновесия x_1 и x_2 – неустойчивы, при a=0 идёт бифуркация. Система негрубая. При 0<a<1 система имеет четыре различных состояния равновесия: $x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{a}}$, $x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{a}}$ $x_3 = \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x_4 = \sqrt{1+\sqrt{a}}$. Фазовый портрет таков:



Состояния равновесия x_1 и x_3 – устойчивы, а x_2 и x_4 – неустойчивы. При a=1 корни x_2=x_3=0, система (18) имеет три состояния равновесия: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}$. Фазовый портрет в этом случае имеет вид:



Следовательно, состояния равновесия x_2 и x_3– неустойчивы, x_1 – устойчиво, а значение a=1 является бифуркационным. Система негрубая. При a>1 система имеет два состояния равновесия: $x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{a}}$, $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{a}}$. Фазовый портрет таков:

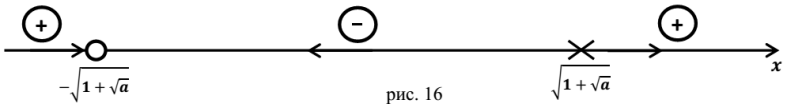
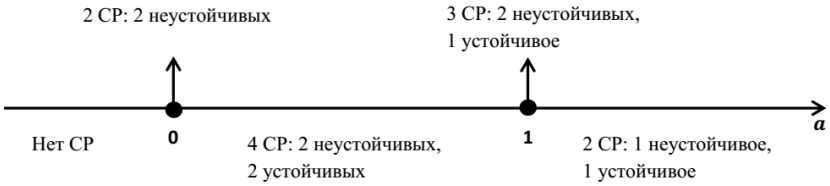


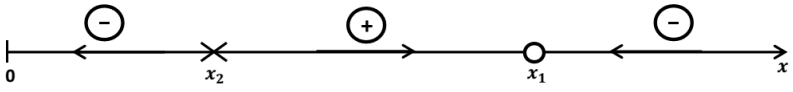
рис. 16

Состояние равновесия (СР) x_1 – устойчиво, а x_2 – неустойчиво.

Таким образом, на оси параметра а возможны следующие ситуации, связанные с количеством и устойчивостью состояний равновесия исследуемого уравнения:



<u>Пример 5.</u> Динамическая система, описывающая количество рыбы в озере, подчиняется уравнению: $\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 - c, \quad \alpha, \beta, c > 0$, где x – количество рыбы в водоеме в момент времени t; α– скорость размножения рыбы, пропорциональная еѐ текущей численности; слагаемое -βx^2 – отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции рыбы; c – квота вылова, отпущенная рыболовецкой бригаде. Найти бифуркационное значение c*, при котором рыбы в водоеме не останется, и вылов прекратится. Очевидно, что при некоторых значениях параметра равновесие количества рыбы в водоеме будет конечным числом, зависящим от размножения и гибели, или, другими словами, количество рыбы будет стремиться к некоторому числу в результате совокупного действия вылова, гибели и рождаемости рыбы. Найдем состояния равновесия исходного уравнения, приравняв правую часть к нулю: βx^2-αx+c=0. Корни этого уравнения имеют вид: $x_{1,2} = \dfrac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4c\beta}}{2\beta}$. Из смысла задачи следует, что фазовым пространством является полупрямая x>0. При α^2>4cβ фазовый портрет будет следующим:



Таким образом, состояние равновесия $-x_1 = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4c\beta}}{2\beta}$ устойчиво. Построим график зависимости $c(x)$, соответствующий состояниям равновесия: c=αx-βx^2.

ршина построенной части параболы (рис. 9) имеет координаты: $x=\frac{\alpha}{2\beta}$, $c=c^*=\frac{\alpha^2}{4\beta}$, где c^* – бифуркационное значение параметра. Левая ветвь параболы соответствует неустойчивым состояниям равновесия x_2, правая – устойчивым x_1.

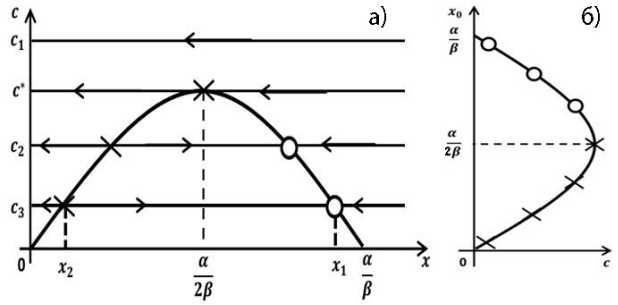


Рис. 9. К примеру 5.

Из рис. 9 видно, что при любом значении параметра c от 0 до c^*, количество рыбы будет стремиться к $x_1=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4c\beta}}{2\beta}$ (или к нулю, в зависимости от начального состояния системы). С ростом параметра наблюдается сближение двух состояний равновесия, и при $c=c^*$ они сливаются в одно сложное неустойчивое состояние равновесия $x=\alpha/2\beta$. Это означает, что количество рыбы стремится к нулю (так же, как и при $c>c^*$), и вылов прекратится. Можно построить бифуркационную диаграмму в плоскости cx_0 (рис. 9).

Бифуркационные границы при наличии нескольких параметров. Если у динамической системы первого порядка имеется несколько параметров, то полное исследование её предполагает также изучение изменений фазового портрета от входящих параметров. Т.е. в пространстве параметров должны быть выделены бифуркационные границы, которые разделяют фазовую прямую на области с качественно различным поведением фазовых траекторий.

Пример 6. Построить фазовый портрет системы и определить бифуркационные соотношения между параметрами, если таковые существуют: $\dot{x}=ax^2+bx+1$ Состояния равновесия системы (25) находятся из уравнения $f(x)=ax^2+bx+1=0$ Дискриминант этого квадратного уравнения $D=b^2-4a$. В зависимости от знака D возможны следующие ситуации на фазовой прямой.

1) $b^2-4a>0$. Уравнение имеет два действительных корня $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2a}$, и фазовые портреты в зависимости от знака a имеют вид:

a) При $a>0$:

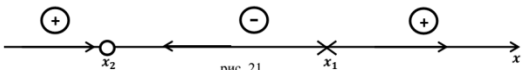


рис. 21

b) При $a<0$:

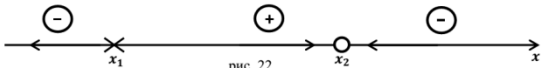


рис. 22

2) $b^2-4a<0$. Уравнение (26) действительных корней не имеет.

a) При $a>0$:

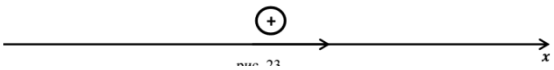
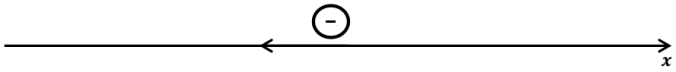


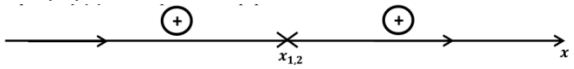
рис. 23

b) При $a<0$:

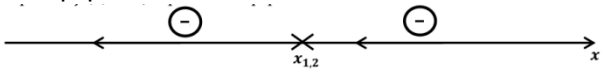


3) $b^2-4a=0$ негрубый случай. Состояния равновесия x_1 и x_2 сливаются в одно $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$.

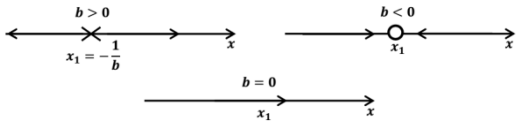
a) При $b>0$ и $f(x)\geq 0$ фазовый портрет имеет вид:

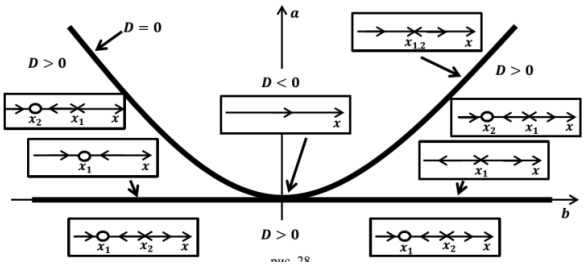


b) При $b<0$ и $f(x)\geq 0$ фазовый портрет таков:



4) Для случая $_a=0$ в зависимости от знака параметра b фазовые портреты таковы:

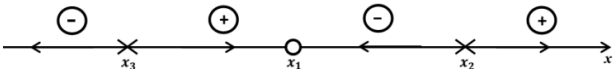




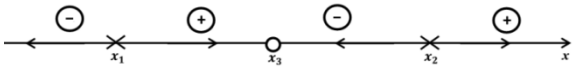
Из приведенных портретов следует, что зависимости $a=b^2/4$ и $a=0$ являются бифуркационными, они разбивают плоскость параметров *(a, b)* на три области с качественно различными фазовыми портретами. На рис. 10 жирными линиями отмечены бифуркационные границы, и в образовавшихся областях приведены фазовые портреты.

Рис. 10. К примеру 10.

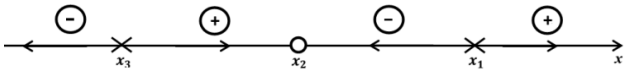
Пример 7. Построить бифуркационные кривые и фазовые портреты динамической системы: $\dot{x} = x^3 - x^2(a+b) + abx$. Состояния равновесия находятся из уравнения $x^3-x^2(a+b)+abx=0$. Путем разложения на множители левой части приходим к уравнению: $x(x-a)(x-b)$. В зависимости от значений a и b возможен ряд различных фазовых портретов. При фазовый портрет имеет вид: $x_1=0$, $x_2=a$, $x_3=b$. При $a>0$, $b<0$ фазовый портрет имеет вид:



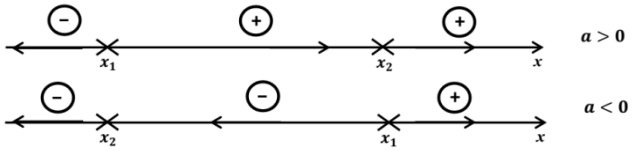
При $_a>0$, $b>0$, $a>b$ фазовый портрет имеет вид:



При $a<0$, $b<0$, $|b|>|a|$ фазовый портрет имеет вид:



Можно привести еще несколько фазовых портретов с другими неравенствами относительно a и b, но качественных изменений не будет, будет меняться только нумерация состояний равновесия ($a \neq 0, b \neq 0$). При , имеем два неустойчивых состояния равновесия.



При $a=0$, $x_1=x_2=0$, $x_3=b$, имеем два неустойчивых состояния равновесия

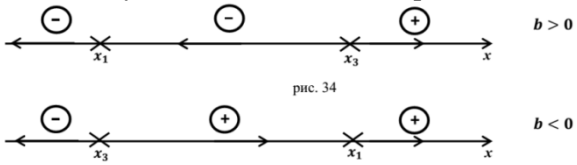


рис. 34

При , имеем два неустойчивых состояния равновесия.

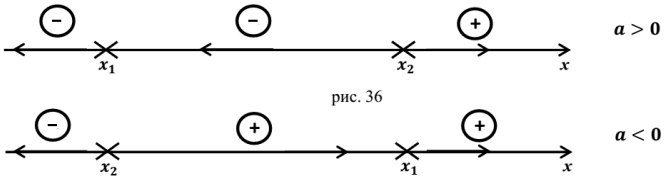
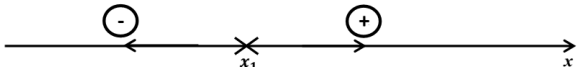


рис. 36

При $a=0$, $b=0$, $x_1=x_2=x_3=0$ имеем одно неустойчивое состояния равновесия.



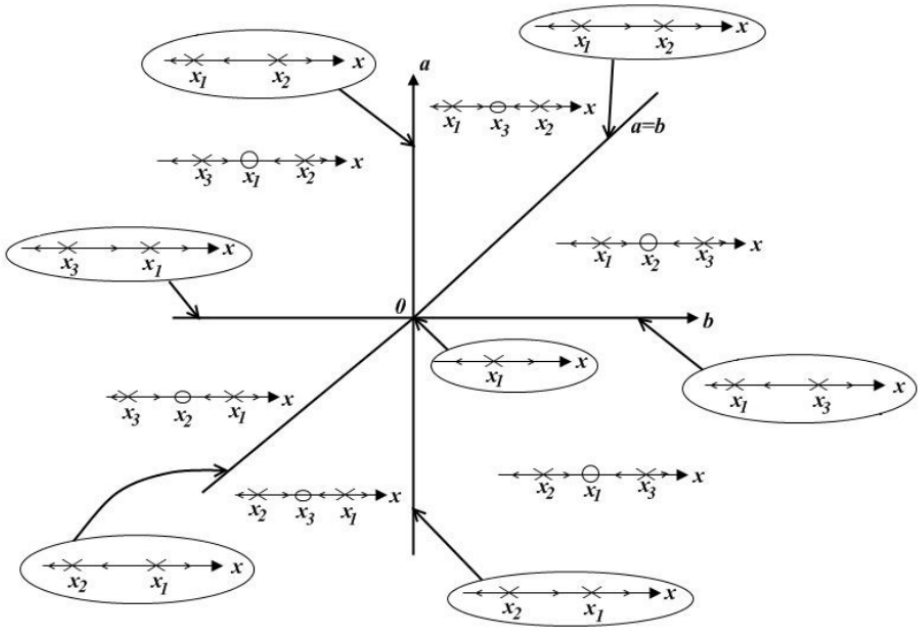


Рис. 11. К примеру 7.

Проанализируем построенные фазовые портреты. На трёх прямых a=0, b=0 и a=b, наблюдаются бифуркации в виде исчезновения одного из состояний равновесия. При a=b=0 имеем одно неустойчивое состояние равновесия. Но прямые a=0, b=0 и a=b не являются бифуркационными, так как области, на которые они разбивают фазовое пространство, имеют одинаковую качественную структуру. В данном случае можно говорить о бифуркациях на прямых, а при $a^2+b^2=0$ – о бифуркации в точке.

Пример 8. ***Бифуркации одномерного отображения.*** Найти неподвижные точки и их бифуркации для отображения $x_{n+1}=\dfrac{\lambda x_n}{1+x_n^2}$. Построить соответствующую бифуркационную диаграмму.

Неподвижные точки этого отображения находятся из условия $x^*=f(x^*)$, где $f(x)=\dfrac{\lambda x}{1+x^2}$. Тогда, подставляя в исходное отображение x, получим $x^*=\dfrac{\lambda x^*}{1+(x^*)^2}$. Это уравнение имеет три решения x_0=0 и $x_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda-1}$. Последнее решение существует при λ≥1. Исходное одномерное отображение имеет три неподвижные точки. Поэтому можно сделать вывод, что в нём имеет место бифуркация «вилки», которая состоит в том, что устойчивая неподвижная точка теряет устойчивость, а вместо неё рождаются две устойчивые неподвижные точки. Эта бифуркация отвечает условию, что мультипликатор отображения μ, вычисленный в неподвижной точке, равен +1. Помимо бифуркации вилки, для неподвижных точек рассматриваемого отображения, может иметь место еще одна бифуркация – бифуркация удвоения периода, отвечающая тому, что мультипликатор μ=-1. Мультипликатор одномерного отображения вычисляется по формуле: $\mu=\dfrac{dx_{n+1}}{dx_n}$. Тогда для исходного отображения получаем: $\mu=\dfrac{\lambda\left(1-(x^*)^2\right)}{\left(1+(x^*)^2\right)^2}$, где x^* – неподвижная точка отображения. Требуется и найти условия на параметр λ, при которых мультипликатор равен либо +1, либо –1. В неподвижной точке x=0 μ(x=0)=λ. Отсюда следует, что неподвижная точка x=0 испытывает бифуркацию «вилки» при λ=1 и бифуркацию удвоения периода при λ=-1. Теперь рассмотрим неподвижные точки $x_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda-1}$. Их можно исследовать одновременно, так как в выражение для μ x^* входит в квадрате. Здесь $\mu=\dfrac{2-\lambda}{\lambda}$. Мультипликатор неподвижных точек $x_{1,2}$ так же равен +1 при 1. А вот бифуркация удвоения периода для неподвижных точек $x_{1,2}$ не наблюдается, так как нет таких значений λ, при которых бы выполнялось условие μ=-1.

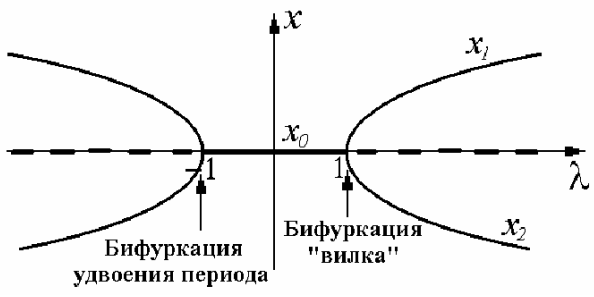


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма одномерного отображения примера 8. Сплошная кривая отвечает устойчивым неподвижным точкам отображения, пунктирная – неустойчивым.

При наличии трёх и более параметров в динамических системах нужно строить уже бифуркационные поверхности и гиперповерхности, что значительно усложняет исследование. Можно также фиксировать один из параметров, а другие менять.

15.3 Простейшие бифуркации

Рассмотрим сначала наиболее простые локальные бифуркации регулярных аттракторов, имеющие коразмерность 1. Для анализа таких бифуркаций достаточно рассмотреть семейство систем дифференциальных Ур.1, имеющее одномерное пространство параметров, в котором эти бифуркации являются точечными. Итак, пусть значение μ=0 является бифуркационным значением параметра μ, т. е. именно при этом значении параметра качественно меняется фазовый портрет семейства систем Ур.1.

Пусть системы из семейства (1) при всех значениях параметра μ, лежащих в некоторой окрестности U бифуркационного значения параметра μ=0, имеют своими решениями либо особые точки (положения равновесия или стационарные точки) $x_0(\mu)$, либо предельные циклы $x_0(t, \mu)$, либо инвариантные двумерные торы, устойчивые при всех μ<0. Опишем основные бифуркации, которые могут происходить в этих случаях в семействе систем (1) при переходе параметра через значение μ= 0.

Рассмотрим бифуркации **устойчивых особых точек**.

Особая (стационарная) точка или положение равновесия однопараметрического семейства систем (1) удовлетворяет условию $F(x_0(\mu),\mu)=0$. Поэтому, линеаризуя семейство (1) в окрестности особой точки, получим зависящую от параметра систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = A(\mu)y + O(|y|^2), \quad A(\mu) = D_x F(x_0(\mu),\mu) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(\mu),\mu), \qquad (14)$$

где $y(t)=x(t)-x_0(\mu)$. Вектор y=0 является решением системы (14) для всех $\mu \in U$.

Бифуркации, связанные с потерей устойчивости особой точки семейства (1), могут произойти при переходе параметра через значение, при котором точка является негиперболической. Рассмотрим два основных, наиболее часто встречающихся в приложениях случая: одно собственное значение матрицы $A(0)$ равно нулю или два комплексно сопряженных собственных значения матрицы $A(0)$ лежат на мнимой оси, а все остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Бифуркации, приводящие к потере устойчивости особой точки семейства (1), определяются исключительно теми координатами системы (1), которые соответствуют собственным значениям матрицы $A(0)$ лежащим на мнимой оси. Система уравнений, записанная в этих координатах, называется нормальной формой семейства (14) в окрестности особой точки.

Приведём примеры нескольких наиболее распространеных бифуркаций. В первую очередь это бифуркации положений равновесия: "вилка", "обмен устойчивостью", "седло-узел" и "рождение цикла".

1) **Касательная бифуркация (бифуркация седло-узел).**

Это *бифуркация коразмерности* 1 – слияние (рождение) пары равновесий.

Дано одномерное нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu \ , \qquad (15)$$

где μ – варьируемый параметр

В стационарном состоянии

$$x^2=\mu \qquad (16)$$

Бифуркационные условия

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x=x_0(\mu)} \neq 0 \qquad (17)$$

Ур. 17 имеет точные решения

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{1+\left(\dfrac{\mu}{x(0)}-1\right)e^{-\mu t}}, & \mu \neq 0 \\ \dfrac{x(0)}{1+x(0)t}, & \mu = 0 \end{cases}, \qquad (18)$$

где $x(0)=x(t=0)$.

Тогда при $t\to\infty$

$$x(t) \to \begin{cases} \mu, & \mu > 0 \\ 0, & \mu \le 0 \end{cases} \qquad (19)$$

Очевидно, при μ<0 неподвижных точек не существует. При μ>0 Ур.15 имеет два стационарных состояния (две неподвижные точки) $x_{0(1;2)} = \pm\sqrt{\mu}$ Кривая равновесия состоит из двух ветвей, т.е. если Ур.15 имеет положительную правую часть, то у него два решения: $x_{f+} = x_{0(1)} = +\sqrt{\mu}, \quad x_{f-} = x_{0(2)} = -\sqrt{\mu}$

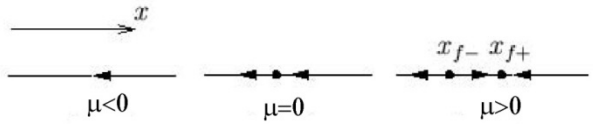
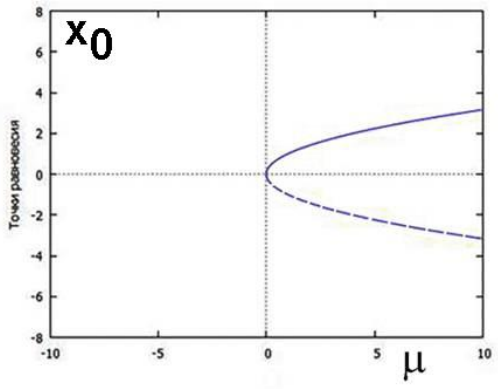


Рис. 13. Фазовое пространство седло-узловой бифуркации: неподвижные точки и потоки для Ур. 20.

Линеаризация Ур.(15) в окрестности стационарного состояния демонстрирует, что неподвижная точка $x_{0(1)} = +\sqrt{\mu}$ – устойчивое состояние (аттрактор), а $x_{0(2)} = -\sqrt{\mu}$ – неустойчивое состояние (репеллер), для μ<0 не существует неподвижных точек. При μ=0 Ур.(16) имеет одну неподвижную точку x_0 (шунт – полуустойчивое положение равновесия).



Значение μ=0 является бифуркационным (изменение поведения системы в этой точке называется **седло-узловой бифуркацией**).. Положения равновесия $x_{0(1;2)}$ определены только для μ≥0; при μ<0 равновесные состояния отсутствуют.

Рис. 14. Фазопараметрическая диаграмма системы (15). *Бифуркация пары равновесий: положительные значения и отрицательные точки равновесия* касательная (седло-узловая) бифуркация. Сплошная линия показывают устойчивые решения, а пунктирная – неустойчивые.

На рис. 14 изображена соответствующая бифуркационная диаграмма. Как видно из рисунка, из точки бифуркации выходят две ветви равновесных состояний, одна из которых устойчивая, а вторая – неустойчивая. При варьировании параметра μ в сторону увеличения значений из «ничего» рождаются два состояния равновесия, одно из которых устойчиво. Бифуркации такого рода относят к типу «седло-узел».

Система уравнений для бифуркации седло-узел в более полной форме записывается как

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mu - x^2 \\ \dot{y}(t) = -y \end{cases} \quad x, y, \mu \in R \qquad (20)$$

Система не имеет положений равновесия, если μ<0. Система имеет **одно** положение равновесия $P(0; 0)$, которое является седло-узлом, если μ=0. Система имеет два положения равновесия $(-\sqrt{\mu},0)$, $(\sqrt{\mu},0)$ если μ>0. Первое является седлом, второе – устойчивым узлом.

Нормальная форма седло-узловой бифуркации имеет вид

$\dot{y} = \mu + y^2$.

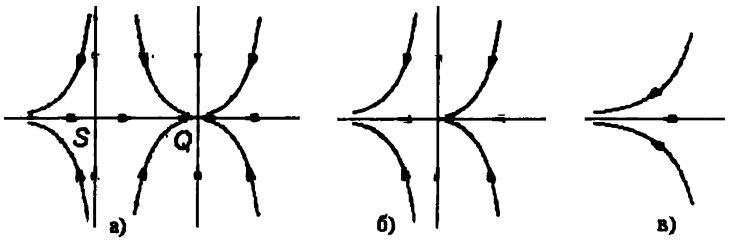


Рис. 15. Седло-узловая бифуркация на плоскости.

Последнее уравнение при μ<0 имеет два стационарных решения $y_{12} = \pm\sqrt{-\mu}$, одно из которых является асимптотически устойчивым, а другое — нет. При μ = 0 оба решения сливаются в одно стационарное решение y=0, являющееся асимптотически устойчивым (неустойчивым) для траекторий, начинающихся слева (справа) от нуля. При μ > 0 уравнение не имеет особых точек, и, следовательно, аттрактор исчезает, т.е. рассмотренная бифуркация является кризисом.

Аналогом этой бифуркации для двумерных систем дифференциальных уравнений является бифуркация, при которой имеющиеся в системе при μ<0 устойчивые узел и седло (рис. 16а) сливаются при μ=0 в вырожденную особую точку – вырожденный седло-узел (рис. 16б), разрушающийся при μ>0 (рис. 16в). В случае размерности пространства больше двух в результате бифуркации устойчивый узел и седло-узел (невырожденный) сливаются при μ=0 в вырожденную особую точку, исчезающую при μ> 0.

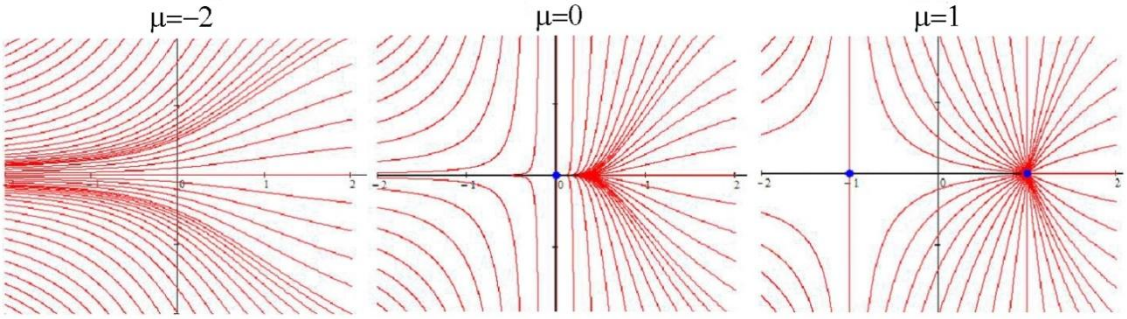


Рис. 16. Бифуркация седло-узел.

При обратной седло-узловая бифуркация с нормальной формой $\dot{y} = \mu - y^2$, происходит одновременное рождение устойчивой и неустойчивой особых точек или устойчивого узла и седла (рис. 15в и 16).

Можно показать, что в системе $\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ при μ>0 одна из устойчивых точек обязательно узел, а вторая – седло (которые при μ=0 сливаются в особую точку, называемую седло-узлом.

Бифуркации трёхмерной системы $\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = z \end{cases}$ представлены на рис.3.

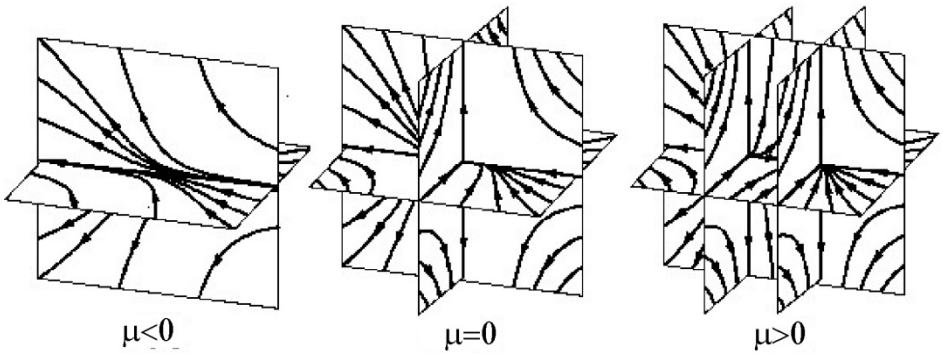


Рис. 17. К примеру 8.

Пример 9. ***Бифуркация седло-узел***. Нелинейному осциллятору $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+a-x^2=0$ сопоставить соответствующую потенциальную функцию, и с её помощью дать физическую интерпретацию возможности неподвижных точек, их устойчивости и бифуркаций. Представить уравнения осциллятора в стандартном для динамической системы второго порядка виде, и дать анализ неподвижных точек и их бифуркаций на основе исследования следа и якобиана линеаризованной матрицы. Вводя потенциал *U(x)*, уравнение исследуемого осциллятора можно записать в виде $\ddot{x}+y\dot{x}+\frac{\partial U(x)}{\partial x}=0$ где потенциал отвечает кубическому полиному $U(x)=ax-\frac{x^3}{3}$. Эта потенциальная функция характеризуется наличием максимума и минимума при 0 (рис.4в). Соответственно, в системе возможны устойчивая и неустойчивая неподвижные точки. Их легко находим из условия экстремума потенциала: $\frac{\partial U(x)}{\partial x}=a-x_0^2=0.$ Тогда получаем, что неподвижные точки исходного отображения имеют следующие координаты: $x_0=\pm\sqrt{a}.$

Из вида потенциала (рис.4) легко понять, что точка $x_0=\sqrt{a}$ соответствует потенциальному максимуму и поэтому неустойчива, а точка $x_0=-\sqrt{a}$ соответствует минимуму, и поэтому устойчива. При *a*=0 неподвижные точки сливаются (рис.4б) и исчезают (рис.4а).

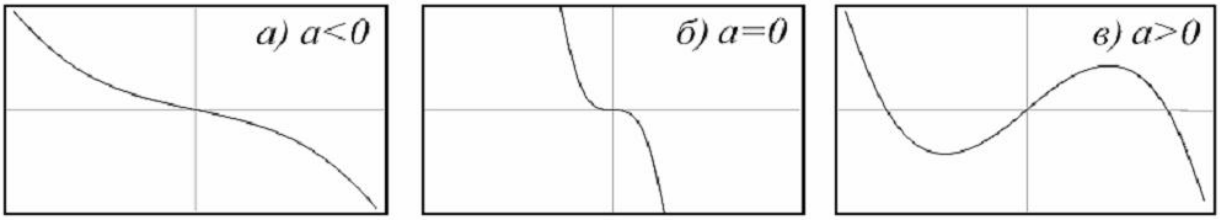


Рис. 18. Вид потенциальной функции (16) до порога бифуркации (а), в точке бифуркации (б) и за ней (в)

Проведём теперь формальное исследование устойчивости неподвижных точек и их бифуркаций, которое подтвердит наши соображения. Представим уравнение осциллятора в стандартном для динамической системе виде: $\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\gamma y-a+x^2$. Приравнивая нулю производные по времени, получаем выражение для нахождения координат неподвижных точек: $y=0$, $\gamma y+a-x^2=0$. Откуда получаем: $x_0=\pm\sqrt{a}$. Для анализа устойчивости полученных неподвижных точек запишем для рассматриваемого осциллятора d*U*/d*x* матрицу линеаризации: $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2x_0 & -\gamma\end{pmatrix}$. Теперь находим след и якобиан этой матрицы: $S=-\gamma$ и $J=-2x_0$. Анализ типа неподвижной точки можно провести, используя плоскость след-якобиан матрицы *M* (рис. 19). Тип неподвижной точки будет определятся тем, в какую область этой плоскости попадает точка, заданная координатами *S* =–γ и $J=-2x_0$. Для первой неподвижной точки ($x_0=+\sqrt{a}$ и $y=0$) имеем $J=-2\sqrt{a}$ и S=-γ. Якобиан для этой точки всегда отрицателен, и в соответствии с рис.5, это седло. Для второй неподвижной точки ($x_0=-\sqrt{a}$ и y=0) имеем $J=2\sqrt{a}$ и $S=-\gamma<0$. Эта точка является устойчивой. Причем при

$J<S^2/4$ это узел, а при противоположном условии – фокус. В нашем случае точка будет устойчивым узлом при выполнении условия $\sqrt{a} < \frac{\gamma^2}{8}$. При этом при a=0 этот устойчивый узел сливается с седлом (неустойчивая неподвижная точка), и происходит бифуркаций седло-узел. Её формальным критерием является равенство нулю якобиана матрицы M. Тогда приравняв нулю значение якобиана для неподвижной точки (в данном случае, неважно какой), получим a=0. Это и есть условие седло-узловой бифуркации.

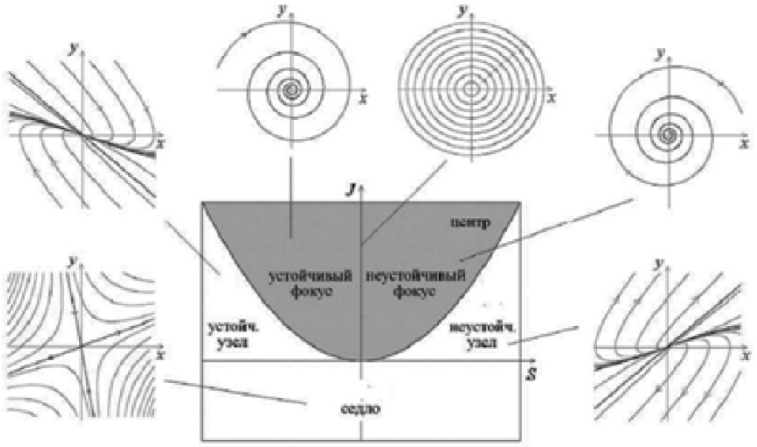


Рис. 19. Различные типы неподвижных точек на плоскости след S - якобиан, J - матрицы линеаризации. *Граница между узами и фокусами дается уравнением $J= S^2/4$.*

2) Касательная бифуркация в отображениях (седло-узловая бифуркация; катастрофа складки).

Рассмотрим нелинейное отображение

$$x_{n+1}=\mu+x_n+x_n^2. \qquad (21)$$

При отрицательном μ оно имеет две неподвижные точки: $x_{10}=-\sqrt{-\mu}$, $x_{20}=+\sqrt{-\mu}$.

Если провести анализ на устойчивость, то получим, что 1-ая устойчива, 2-ая неустойчива. Будем теперь увеличивать параметр μ, следя за положением неподвижных точек, а также за их мультипликаторами, которые определяются как $\rho_{1,2}=f'(x_{0,1,2})$/ При увеличении μ обе неподвижные точки сближаются, вплоть до слияния при μ=0. В то же самое время соответствующие им мультипликаторы стремятся к 1, одно – справа, а другое – слева. В момент достижения равенства $\rho_{1,2}$=+1,0 обе неподвижные точки сливаются и исчезают. При μ>0 неподвижных точек у отображения (21) нет.

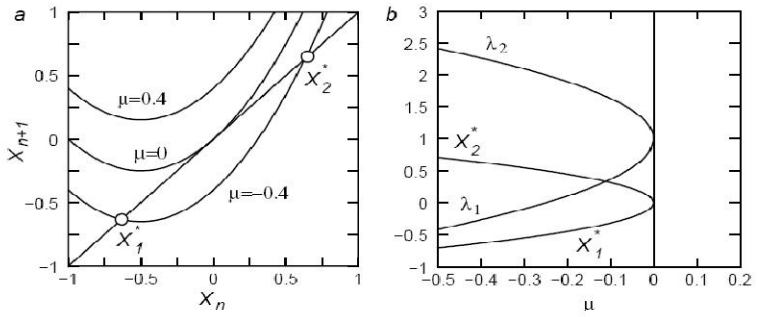


Рис. 20. Седло-узловая бифуркация в отображениях.

Другое название касательной бифуркации – складка. Это становится понятным, если посмотреть на график для неподвижных точек, который напоминает складку с вершиной в точке μ=0. Если рассмотреть двупараметрическую систему, то в фазометрическом пространстве этой бифуркации соответствует поверхность, имеющая особенность типа складки вдоль линии l0 на плоскости параметров. Ещё одно название такой бифуркации – седло-узловая пришло из рассмотрения двумерных динамических систем, в связи с тем, что бифуркация соответствует слиянию устойчивого узла с седлом.

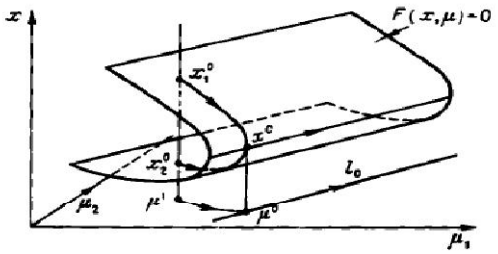


Рис. 21. Бифуркация типа складки.

В касательной бифуркации участвуют две неподвижные точки: устойчивая и неустойчивая. Одновременное достижение их мультипликаторами граничной величины ρ=+1 соответствует их слиянию и исчезновению.

3) **Транскритическая бифуркация** (бифуркация типа обмен устойчивостью).

В некоторых моделях неподвижная точка существует при всех значениях параметра, однако может менять тип устойчивости. Изменение типа устойчивости неподвижной точки даёт транскритическая бифуркация. В ней бифуркация седло-узел невозможна.

В общем виде система уравнений для бифуркаций обмен устойчивостью

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mu x - x^2 \\ \dot{y}(t) = -y \end{cases} \quad x,\ y,\ \mu \in R \qquad (22)$$

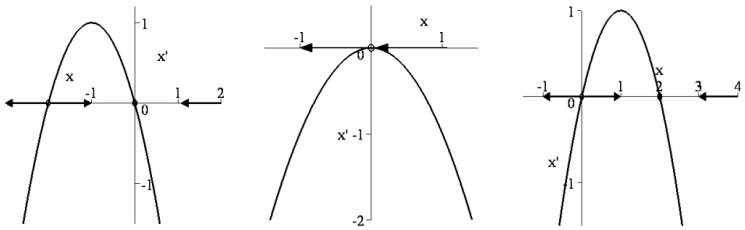
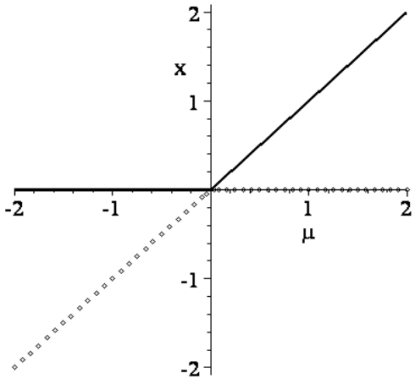


Рис. 22. Векторное поле Ур.(22) при варьировании параметра μ.

Система имеет:

1) одно положение равновесия P(0; 0), которое является седло-узлом, если μ = 0;



2) два положения равновесия (0; 0) и (μ, 0), если μ≠0. Первое является седлом, второе – устойчивым узлом.

Рис. 23. Транскритическая бифуркация (смена устойчивости).

Возможны два варианта:

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \text{ или } \dot{x} = \mu x + x^2. \qquad (23)$$

Неподвижная точка x_0=0 существует при всех значениях μ. Для μ<0 имеется неустойчивая точка x_0=μ и устойчивая x_0=0. При μ=0 неустойчивая точка сливается с устойчивой в начале координат (шунт), равновесная (негиперболическая) точка x_0=0 (седло, при μ=0 – нестабильная точка). Наконец, при μ>0 в нуле остаётся неустойчивая точка, а x_0=μ, убегающая от нуля, устойчивая. Если μ=0, то система подвергается транскритической бифуркации: неподвижные точки меняют тип устойчивости при переходе параметра μ через значение μ=0.

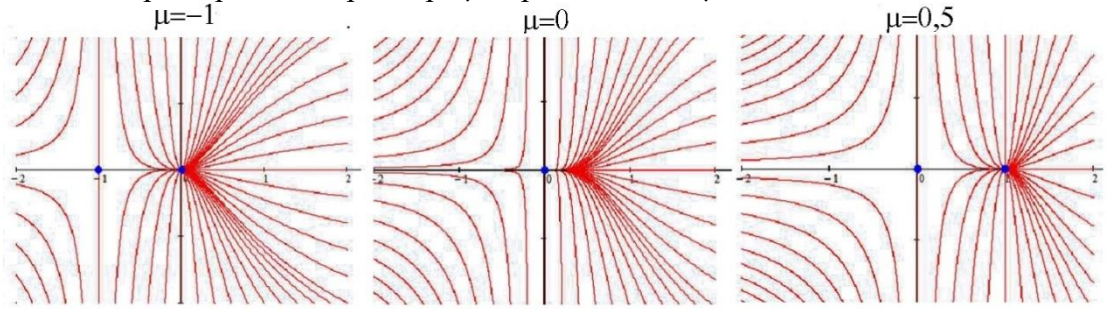


Рис. 24. Бифуркация обмен устойчивостью.

Таким образом, два стационарных решения x=0 и x=-μ (y=μ) сосуществуют вместе и обмениваются устойчивостью при переходе параметра через бифуркационное значение μ=0. Бифуркация является мягкой.

Аналогом транскритической бифуркации для двумерных систем дифференциальных уравнений является бифуркация, при которой устойчивый узел становится седлом, а седло становится устойчивым узлом. В случае размерности пространства больше двух в результате рассмотренной бифуркации устойчивый узел или устойчивый фокус становятся седло-узлом или седло-фокусом, а седло-узел или седло-фокус – устойчивыми узлом или фокусом. Принципиальная разница между транскритической бифуркацией и бифуркацией «седло-узел» заключается в том, что в транскритическом случае неподвижные точки не исчезают после бифуркации, они лишь «меняются устойчивостями».

4) Транскритическая бифуркация в отображениях

Рассмотрим отображение

$$x_{n+1}=(1-\mu)x_n+x_n^2. \qquad (24)$$

При всех μ, кроме μ=0, оно имеет две неподвижные точки $x_{10}=0$ и $x_{20}=\mu$. Из графика видно, что по мере увеличения параметра точка x_{20} сближается с x_{10}, проходит сквозь неё и затем удаляется. При этом в точке μ=0 неподвижные точки обмениваются устойчивостью: если при μ≤0 точка x_{20} – устойчива, а x_{10} – нет, то при μ≥0 - наоборот!

Именно эта характерная особенность и определила название бифуркации.

График для собственных значений неподвижных точек можно построить из (24), вычислив производную и подставив туда значения неподвижных точек.

Получаем: $f'(x_n)=1-\mu+2x$, $x_{10}=0$: $\rho_1=1-\mu$, $x_{20}=\mu$: $\rho_2=1+\mu$.

Рис. . Обе прямые пересекаются в точке транскритической бифуркации μ = 0 и $\rho_{1,2}$ = + 1.

5) Бифуркация типа вилки (бифуркация потери симметрии).

Бифуркация типа вилка - особый тип локальной бифуркации, где система переходит из одной неподвижной точки в три неподвижные точки.

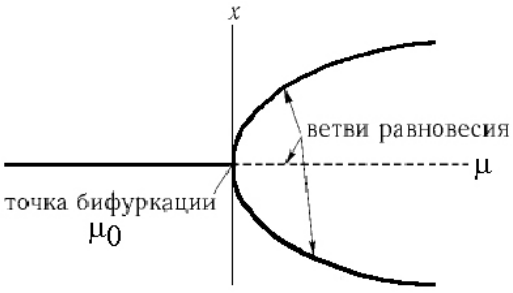


Рис. 14. Бифуркационная диаграмма: бифуркация типа вил, отвечающая переходу из состояния с одним устойчивым положением равновесия в состояние с двумя устойчивыми равновесными точками: сплошные линии - устойчивое состояние (стоки), пунктир – неустойчивое состояние (источники).

Система уравнений для бифуркации типа вилка имеет вид*

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\mu x-x^3\\ \dot{y}(t)=-y\end{cases} \quad x,\ y,\ \mu\in R \qquad (25)$$

Система имеет:

1) одно положение равновесия $P(0;\ 0)$, которое является устойчивым узлом, если α ≤ 0; (0;0),

2) три положения равновесия (0;0), $\left(-\sqrt{\mu},0\right)$, $\left(\sqrt{\mu},0\right)$, если μ>0. Первое является седлом, два других – устойчивыми узлами.

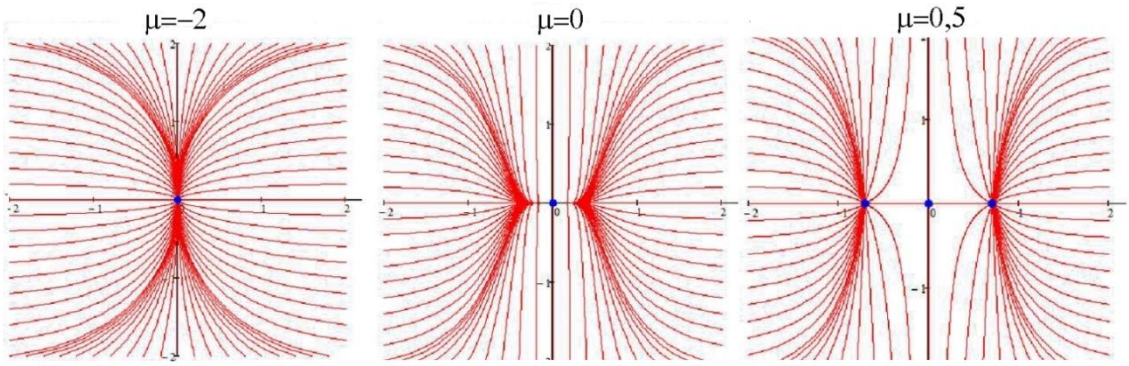


Рис. 15. Бифуркация типа «вилка»

Существуют два вида этой бифуркации: надкритическая и подкритическая, имеющие нормальные формы

$$\dot{y} = \mu y - y^3; \quad \dot{y} = \mu y + y^3. \quad . \qquad (26)$$

В случае надкритической бифуркации стационарные решения имеют вид: y=0 и $y_{12} = \pm\sqrt{\mu}$ (последние два решения определены только при μ>0). Устойчивое стационарное решение, становясь неустойчивым, порождает два других устойчивых стационарных решения. Бифуркация также является мягкой.

Сверкритический случай. Нормальная форма бифуркации надкритической вилы

$$F(x,\mu) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \mu x - x^3. \qquad (27)$$

где μ – внешний управляющий параметр.

Ур.27 предложено Ландау (1944) для описания влияния нелинейностей на линейную гидродинамическую неустойчивость, причем амплитуда возмущения определялась x.

Замечание. Ур.27 – каноническая форма бифуркации вил. Бифуркация бифуркаций является общей для задач, имеющих симметрию (Ур.27) инвариантно относительно замены переменных x→-x).

Это уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$.

В зависимости от значения μ возможны три различных варианта векторного поля.

Неподвижные точки определяются как решения алгебраического уравнения

$-x_o^3+\mu x_0=0.$ (28)

Откуда $x_{10} = 0, \quad x_{20} = \sqrt{\mu} \quad x_{30} = -\sqrt{\mu}$

Если μ≤0 существует только одна ветвь, а если μ>0, то три ветви, которые пересекаются в точке бифуркации при μ=0 и x=0. Критическая точка x_1 стабильна при μ<0, и нестабильна, если μ>0, тогда как $x_{2,3}$ стабильны при μ>0 и нестабильны при μ<0. Эти две имеют противоположные стабильности и меняют свои стабильности при переходе через точку бифуркации при μ=0. Заметим, что в точке бифуркации x=0, но всё ещё $\frac{d\mu}{dx_0} = 0$. Для отрицательных значений μ, μ<0, существует одно устойчивое равновесие при x=0 (начало координат – единственная неподвижная точка и она устойчивая). Если μ=0 начало всё ещё устойчиво, но эта устойчивость слабая, т.к. линейный член исчезает (и производная $F'(0)$=0). Здесь решения стремятся к тривиальному очень медленно. Наконец, когда μ>0, начало координат становится неустойчивым. Два стабильных равновесия (неподвижные точки) возникают по обе стороны от нуля при $x_{0(2;3)} = \pm\sqrt{\mu}$. (рис.15).

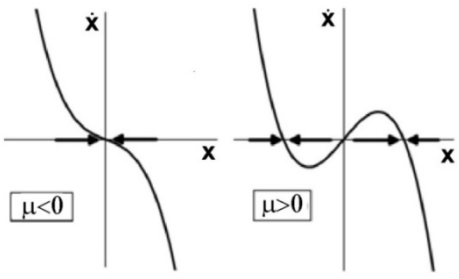


Рис. 16. ***Устойчивость неподвижных точек для*** $\dot{x} = -x^3 + \mu x$.

Неподвижная точка $x_{o(1)}=0$ существует при любых значениях μ, а неподвижные точки $x_{0(2;3)} = \pm\sqrt{\mu}$ – только при μ>0. Если μ=0, равновесие возможно только в точке $x_0=0$ (негиперболическое равновесие). При μ<0 и при любых начальных условиях решение Ур.27 при больших временах стремится к неподвижной точке $x_{o(1)}$ (глобальная асимптотическая устойчивость). При μ>0 неподвижная точка $x_{o(1)}$ тоже существует, но она уже не является устойчивой. Теперь решение Ур.27 при больших временах стремится к одной из неподвижных точек $x_{0(2)}$ или $u_{0(3)}$. Причём выбор между этими устойчивыми равновесия определяется начальными условиями (неподвижные точки $u_{0(2)}$ и $u_{0(3)}$ являются асимптотически локально устойчивыми). Ветвление положения равновесия Ур.27 показано на рис. 17. Здесь имеет место бифуркация типа вил.

Подкритический случай.

В суперкритическом случае кубический член играет стабилизирующую роль при $x(t)\to 0$. Если кубический член входит в уравнение со знаком "+", то он выступает как дестабилизатор и имеет место субкритическая бифуркация.

Нормальная форма бифуркации подкритической вилы

$$F = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \mu x + x^3. \qquad (29)$$

В этом случае для μ<0 равновесие при x=0 является стабильным, и существует два неустойчивых равновесия (ненулевые неподвижные точки) при $x_0 = \pm\sqrt{-\mu}$ - неустойчивые и бифуркация происходит при μ→0- (слева, под нулём, *sub*-), откуда и происходит её название. Начало координат по-прежнему устойчиво при μ<0 и неустойчиво при μ>0, но здесь кубический член не противодействует неустойчивости, а наоборот ей помогает. Дело в том, что оба слагаемых имеют одинаковый знак, а это значительно увеличивает скорость удаления траекторий от тривиального решения. Здесь траектории могут достигать бесконечности за конечное время, стартуя из точки $x_0\neq 0$ (эффект взрыва).

При переходе через бифуркационное значение параметра μ=0 дополнительно появляются две ветви кривой равновесия $x = \pm\sqrt{\mu}$, при этом ветвь x=0 остается, однако изменяется характер её устойчивости.

Форма вил задаётся знаком третьей производной

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(0,\mu_0)\begin{cases} <0, & \textit{сверкритические} \\ >0, & \textit{субкритические} \end{cases} \qquad (30)$$

Таким образом, точки бифуркации для критических и вихревых бифуркаций определяются путём расчёта точек, в которых пересекаются ветви критических точек, а бифуркации седло-узлов устанавливают путем нахождения точек, в которых $d\mu/x_0 = 0$.

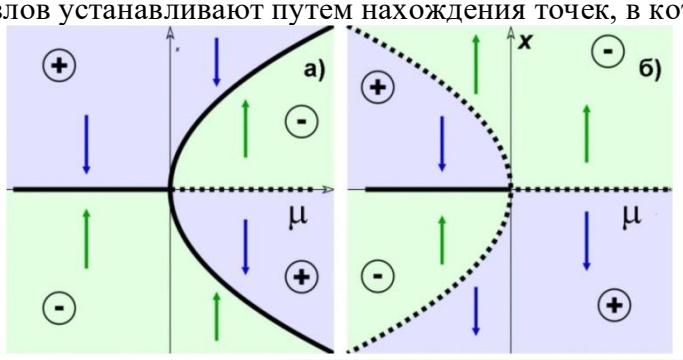


Рис. 17: Бифуркация типа вилы: а – сверхкритический случай; б – подкритический случай.

Аналогом этой бифуркации для двумерных систем дифференциальных уравнений является бифуркация, при которой устойчивый узел становится седлом, в окрестности которого симметрично рождаются два новых устойчивых узла (рис. 18). В случае размерности пространства больше двух в результате рассмотренной бифуркации устойчивый узел становится седло-узлом, а родившиеся в его окрестности устойчивые особые точки могут быть не только узлами, но и фокусами, т.е. иметь наряду с одним отрицательным вещественным собственным значением матрицы линеаризации ещё два комплексно сопряженных собственных значения с отрицательными вещественными частями.

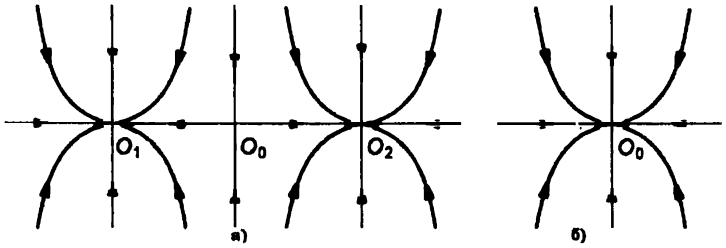


Рис. 18. Бифуркация типа вилки на плоскости: а - два устойчивых узла и седло после бифуркации; б - одинустойчивый узел до бифуркации.

Бифуркация типа вилки имеет место, например, в знаменитой трехмерной диссипативной системе уравнений Лоренца

$$\dot{x}=\sigma(y-x), \quad \dot{y}=x(r-z)-y, \quad \dot{z}=xy-bz, \qquad (31)$$

при переходе параметра r через значение r=1 и во многих других нелинейных системах дифференциальных уравнений, включая консервативные системы. В последнем случае эллиптическая особая точка становится седловой, порождая две другие эллиптические особые точки. В случае подкритической бифуркации стационарные решения имеют вид: у =0 и $y_{12}=\pm\sqrt{-\mu}$ (последние два решения определены только при μ<0). Таким образом, устойчивое стационарное решение (узел) становится неустойчивым (седлом, седло-узлом, седлофокусом), а вместе с этим исчезают два других неустойчивых стационарных решения (седла, седло-узла, седло-фокуса). Бифуркация является кризисом.

6) Вилообразная бифуркация в отображениях.

наблюдается в системе с симметрией.

Рассмотрим отображение вида

$$x_{n+1}=(1+\mu)x_n-x_n^3. \qquad (32)$$

График функции симметричен относительно замены $x_n \to -x_n$.

При $\mu < 0$ имеется единственная неподвижная точка $x_{10}=0$. При $\mu>0$ появляются еще две точки: $x_{0;2,3}=\pm\sqrt{\mu}$. Собственные значения неподвижных точек есть: $\rho_1=1+\mu$, $\rho_{2,3}=1-2\mu$.

Если $-2<\mu<0$, то x_{10} – устойчива. Если $\mu=0$, то от нее «отщепляются» устойчивые x_{20} и x_{30}, сама же x_{10} теряет устойчивость. $\rho_{1,2,3}=+1$ при $\mu=0$.

Изобразим графически изменение собственных значений в неподвижных точках в зависимости от μ:

$$f'(x_n)=1-\mu+2x, \quad \begin{matrix} x_{10}: & \rho_1=1-\mu, \\ x_{20}=\mu: & 1+\mu. \end{matrix}$$

Прямые пересекаются в точке транскритической бифуркации μ=0 и $\rho_{1,2}=+1$.

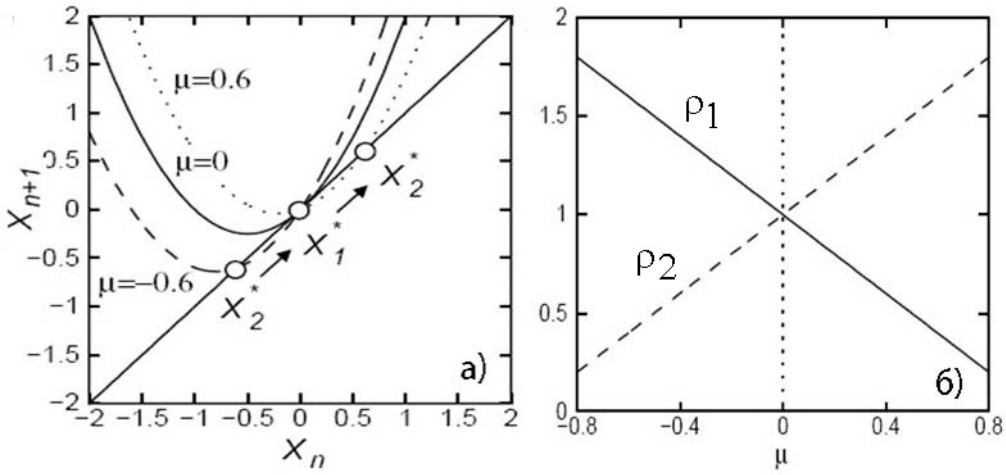


Рис. 19. Бифуркация типа вилы в отображении. Эволюция системы при транскритической бифуркации. *Изменение собственных значений в неподвижных точках в зависимости от* μ.

Бифуркационная диаграмма для отображения (32) напоминает вилы, откуда и следует название рассматриваемой бифуркации. Данный вариант вилообразной бифуркации является **суперкритическим**, т.к. новые неподвижные точки рождаются в момент бифуркации и существуют далее.

Существует другой вариант этой бифуркации. Замена знака перед кубическим членом в отображении (32) дает новое отображение

$$x_{n+1}=(1+\mu)x_n+x_n^3. \qquad (33)$$

Оно имеет три неподвижные точки при $\mu<0$ и одну $x_{10}=0$ при $\mu>0$. При $\mu<0$ $x_{10}=0$ является устойчивой, а две точки x_{20} и x_{30} – неустойчивые. При $\mu=0$ точка x_{10} также претерпевает бифуркацию и теряет устойчивость. Однако общая картина эволюции состояний равновесия иная. При увеличении μ два неустойчивых состояния равновесия «влипают» в устойчивую точку x_{10} и исчезают, а сама x_{10} теряет устойчивость. Данный вариант – **субкритическая бифуркация**, т.к. к моменту бифуркации пара неустойчивых неподвижных точек исчезает.

16. БИФУРКАЦИИ ЦИКЛОВ

Теоремы Пуанкаре-Бендиксона и Андронова-Понтрягина утверждают, что *типичная* система с непрерывным временем на плоскости (физически говоря – состояние которой задаётся двумя вещественными параметрами) может стремиться только к положению равновесия или к предельному циклу.

Ранее мы рассмотрели различные типы равновесий, связанные с ними особые точки и аттракторы. Теперь займёмся другим состоянием динамической системы – предельному циклу. Основное внимание уделим устойчивости предельных циклов и условиям появления в них бифуркаций

16.1 Предельные циклы

Если $\gamma(t)$ – фазовая траектория, соответствующая решению $x(t)$, определенному на интервале $(p,\ q)$, то траектория $\gamma(t)$ **периодическая**, если существует такое T, что $\gamma(t+T)=\gamma(t)$, причём $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ при $|t_1-t_2|<T$.

Периодическая траектория – автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений -траектория периодического решения этой системы; решение не сводится к константе, т. е. фазовая траектория не сводится к одной точке (равновесия положению) и не уходит в бесконечность, а приближается к другой, замкнутой траектории.

Траектория решения динамической системы может стремиться не к какой-то точке, а к некоторому циклу. В этом случае, независимо от начальных условий, динамическая система на бесконечных временах выходит на определённые колебания. Это - устойчивый **предельный** цикл. В диссипативных динамических системах он рождается из петли сепаратрисы**.** Предельный цикл – изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве динамической системы, изображающая периодическое движение.

Примерами динамических систем с предельным циклом являются модель трёхвидовой конкуренции и модель брюсселятора.

Предельный цикл – это один из возможных вариантов стационарного состояния системы в теории динамических систем; предельным циклом векторного поля на фазовой плоскости называется изолированная замкнутая (периодическая) траектория этого векторного поля, в окрестности которой нет других периодических траекторий. Всякая достаточно близкая к предельному циклу траектория стремится к нему либо в прямом, либо в обратном времени.

С каждой из сторон предельный цикл является либо отталкивающим, либо притягивающим. Если поведение с обеих сторон одинаково – цикл называется соответственно **отталкивающим** или **притягивающим**. Если же с одной стороны происходит притяжение, а с другой отталкивание – говорят о **полуустойчивом** цикле. Как уже обсуждалось в предыдущих главах, поведение траекторий, близких к предельному циклу, описывается отображением Пуанкаре на отрезке, трансверсальном циклу к циклу, – для этого отображения точка, соответствующая циклу, является неподвижной. Так, цикл является притягивающим или отталкивающим тогда и только тогда, когда эта точка соответственно притягивающая или отталкивающая.

Понятие предельного цикла используется для описания незатухающих периодических процессов. Это характерно только для **нелинейных систем**.

Предельный цикл может быть устойчивым (аттрактор), неустойчивым (репеллер) и полуустойчивым.

Предельный цикл называется устойчивым, если существует такая область на фазовой плоскости, содержащая этот предельный цикл, – окрестность ε , что все фазовые траектории, начинающиеся в окрестности ε, асимптотически приближаются при $t\to+\infty$ к предельному циклу. Если же, наоборот, в сколь угодно малой окрестности ε существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающая к предельному циклу при $t\to+\infty$, то такой цикл называется неустойчивым.

Для нахождения предельных циклов не существует таких простых аналитических методов, как для нахождения положений равновесия (стационарных точек) и исследования их устойчивости. Однако, исследование фазовой плоскости системы позволяет ответить на вопрос, есть в данной системе предельный цикл или нет.

Некоторые критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий (в том числе предельных циклов):

1. Если в системе не существует особых точек, то в ней не может быть замкнутых траекторий.
2. Если в системе существует одна особая точка, отличная от узла, фокуса и центра (например, седло), то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.
3. Если в системе имеются только простые особые точки, причём через все точки типа узел и фокус проходят интегральные кривые, уходящие на бесконечность, то в такой системе нет замкнутых фазовых траекторий.
4. Критерий Бендиксона. Если в некоторой односвязной области $U \subset R^2$ выражение $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ не меняет знака, то в этой области система линейных ОДУ не может иметь предельных циклов.

Теория предельных циклов строится на теореме Пуанкаре-Бендиксона, описывающей возможные типы предельного поведения траектории векторного поля на плоскости или на сфере. Теорема утверждает, что предельное поведение траекторий в этом случае регулярно, и не может быть хаотическим (невозможно даже наличие всюду плотных орбит).

Используются и ещё две теоремы.

Теорема 1. Пусть на фазовой плоскости существует область, из которой фазовые траектории не выходят и в которой нет положений равновесия. Тогда в этой области обязательно существует предельный цикл, причем остальные траектории обязательно наматываются на него.

Теорема 2. Если существует на фазовой плоскости некоторая замкнутая область, такая, что все фазовые траектории, пересекающие границу этой области, входят в нее, и внутри этой области находится неустойчивая точка покоя, то в этой области обязательно имеется хотя бы один предельный цикл.

Предельный цикл называется орбитально асимптотически устойчивым (или просто устойчивым), если для сколь угодно малой его окрестности U, все траектории, начинающиеся в достаточно малой его окрестности, не выходят со временем из U и неограниченно приближаются к циклу при $t \to \infty$.

16.2 Устойчивость предельных циклов

Важный тип частного решения дискретной системы – ***периодическое*** решение. Последовательность точек $\boldsymbol{x}^*_1, \boldsymbol{x}^*_2, \ldots, \boldsymbol{x}^*_m$ называется ***циклом периода m*** или ***m-циклом*** точечного отображения, если они удовлетворяют условиям

$$\boldsymbol{x}^*_{n+m} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_n), \quad \boldsymbol{x}^*_2 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_1), \quad \boldsymbol{x}^*_3 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_2), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{x}^*_1 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_m), \qquad (37)$$

причем никакие два элемента в наборе $\boldsymbol{x}^*_1, \boldsymbol{x}^*_2, \ldots, \boldsymbol{x}^*_m$ не совпадают.

Точки цикла $\boldsymbol{x}^*_1, \boldsymbol{x}^*_2, \ldots, \boldsymbol{x}^*_m$ называют иногда ***m-кратными неподвижными точками*** и для них можно записать:

$$\boldsymbol{x}^*_1 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_m) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F} \ldots \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_1)\ldots)) = \boldsymbol{F}^{(m)}(\boldsymbol{x}^*_1). \qquad (38)$$

Неподвижная точка отображения является циклом периода 1 (когда $m = 1$).

Устойчивость *m*-цикла дискретного отображения можно определить, исследовав на устойчивость неподвижные точки отображения:

$$G(m, x_n) = F^{(m)}(x_n). \qquad (39)$$

Мультипликаторы λ_{km} m-кратной неподвижной точки отображения (39) определяются как собственные значения характеристического уравнения: $\det[A_m - \lambda_m E] = 0$.

Матрица линеаризации $\boldsymbol{A}_m$ является m-периодичной и для неё справедливо следующее равенство: $A_m = A(m)\cdot A(m-1)...A(2)\cdot A(1)$.

Условие устойчивости m-цикла: $|\rho_{km}|<1$. В случае одномерного отображения

$$x_{n+m} = f(x_n), \qquad G(m,x_n) = f^{(m)}(x_n) \tag{40}$$

матрица линеаризации A_m для m-кратной неподвижной точки отображения или цикла периода m имеет вид:

$$A_m = \frac{d}{dx} f^{(m)}(x) = \prod_{i=0}^{m} f'(f^{(i)}(x)). \tag{41}$$

Здесь $f^{(0)}(x) = x$. В случае, когда производная m раз примененной функции вычисляется для одной из точек x^*_i цикла периода m, получим

$$\frac{d}{dx} f^{(m)}(x)\Big|_{x=x_i^*} = \prod_{j=0}^{m} f'(f(x_j)). \tag{42}$$

Производная m раз примененного отображения в точке цикла – это произведение производных исходного отображения по всем точкам цикла. Таким образом, условие устойчивости цикла периода m одномерного отображения определяется неравенством:

$$|\prod_{i=1}^{m} f'(x_i^*)| = |f'(x_1^*)f'(x_2^*)...f'(x_m^*)| < 1. \tag{43}$$

Устойчивость цикла в целом определяется совокупными свойствами всех его точек. При итерации на одних из них начальное отклонение может локально нарастать, тогда как на других – уменьшаться. Однако имеется особый случай, когда свойства одной точки определяют устойчивость цикла в целом, а именно, если для одной из точек x^*_i цикла выполняется условие $\lambda = f'(x_i^*) = 0$, то автоматически равно нулю и произведение производных по всем точкам. Это означает, что малое начальное отклонение от такого цикла *полностью* затухнет не более чем за m итераций, что и определяет название такого цикла. Поскольку с точки зрения геометрии функции $f(x_n)$ данное условие означает наличие экстремума (минимум, максимум, либо точка перегиба), то можно сказать, что **сверхустойчивый цикл** содержит хотя бы одну критическую точку функции.

Наиболее простой бифуркацией, связанной с предельными циклами, является седлоузловая бифуркация: два гиперболических предельных цикла, отталкивающий и притягивающий, сближаются. В момент бифуркации они сливаются, образуя один полуустойчивый цикл, который при дальнейшем изменении параметра исчезает. Эта бифуркация может рассматриваться как уход предельного цикла в комплексную область. Физический пример бифуркации предельного цикла – осциллятор Ван дер Поля.

Приведём несколько примеров.

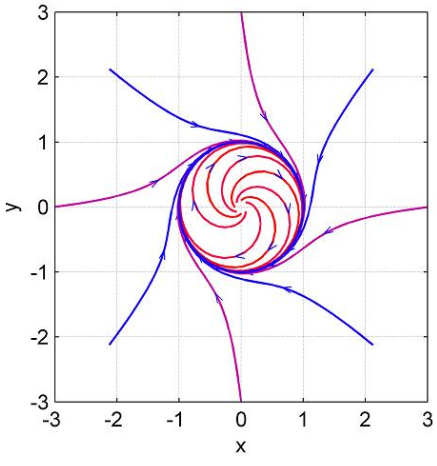


Рис. 1. К примеру 2.

Пример 1. Простейший пример периодических траекторий – траектории линейной системы типа центр:

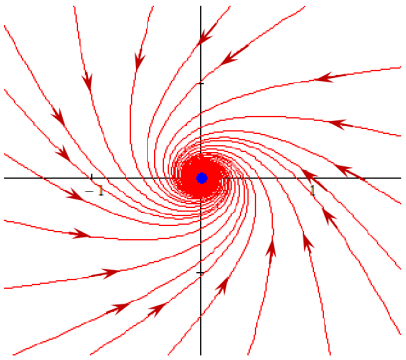
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Её траектории можно описать формулами $x = R\cos t$, $y = -R\sin t$. Все они периодические.

Пример 2. Система $\dot{x} = y + x(1-x^2-y^2)$, $\dot{y} = -x + y(1-x^2-y^2)$ имеет замкнутую траекторию $x^2+y^2=1$, поскольку при этом условии система сводится к предыдущей, у которой эта кривая — тоже фазовая траектория (более строго это можно обосновать, заметив, что в каждой точке окружности векторное поле касается этой окружности). При переходе в полярную систему координат получим систему $\dot{r} = r(1-r^2)$, $\dot{\varphi} = -1$ Уравнения распались, каждое можно анализировать отдельно. Первое уравнение имеет два положения равновесия: 0 и 1. По знаку производной (положительна при $0<r<1$, отрицательна при $r>1$)

определяем, что r=1 – устойчивое положение равновесия, r=0 – неустойчивое. Изменения полярного радиуса и полярного угла независимы. На основании этого легко воспроизвести фазовый портрет.

Пример 3. Исследовать на устойчивость положения равновесия следующей системы (x, $y \in R$):



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y - x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y}(t) = x - y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$ Система имеет единственное нулевое положение равновесия $P(0, 0)$. В окрестности точки P соответствующая линеаризованная система имеет вид:

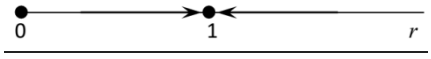
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y, \\ \dot{y}(t) = x. \end{cases}$$

Рис.2. К примеру 3.

Так как собственные значения матрицы системы являются чисто мнимыми $\lambda = \pm i$, то точка P является либо центром, либо фокусом. Но так как $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -3\sqrt{x^2 + y^2} < 0$ то, по критерию Бендиксона, изучаемая здесь система не имеет замкнутых траекторий. Следовательно, положение равновесия P является фокусом. Сложив первое равнение системы, умноженное на x, со вторым, умноженным на y, получим $\frac{1}{2}\frac{d\left(x^2 + y^2\right)}{dt} = -\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{t + C}$. Поскольку $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{t + r(0)}$ то $t \to +\infty$, то движение по фазовой траектории направлено к началу координат. Следовательно, положение равновесия $P(0, 0)$ является устойчивым фокусом. А так как $\dot{y}\big|_{y=0} = x > 0$, то спирали закручиваются против часовой стрелки.

Пример 4 28. Исследовать на устойчивость положения равновесия следующей системы ($x, y \in R$):

$$\begin{cases} x'(t) = -y + x - x\sqrt{x^2 + y^2}, \\ y'(t) = x + y - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$ Выяснить, имеет ли система предельный цикл. При переходе к полярным координатам получим систему: $\begin{cases} r'(t) = r(1 - r) \\ \varphi'(t) = 1. \end{cases}$ Уравнение $r'(1\text{-}r)$ имеет два положения равновесия: $r_1 = 0, r_2 = 1$.

Первому соответствует положение равновесия $P(0,0)$ изучаемой системы. Второму – замкнутая траектория (окружность радиуса 1 с центром в начале координат), т.е. предельный цикл системы $r'(t) = r$. Построив фазовый портрет уравнения $1\text{-}r$) : 

можно сделать вывод: 1) Система (3) имеет неустойчивое положение равновесия $P(0,0)$, которое является фокусом.

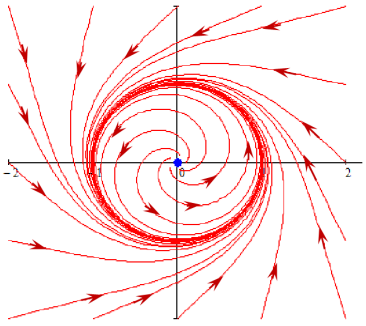
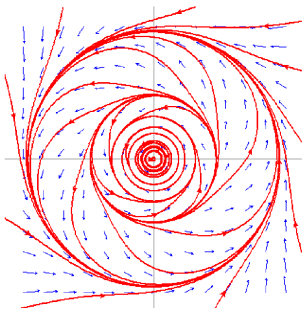


Рис. 3. К примеру 4.

2) Исследуемая система имеет устойчивый предельный цикл. Так как $y'(t)\big|_{y=0} = x > 0 \quad \forall x > 0,$ то траектории накручиваются на предельный цикл против часовой стрелки (Движение по фазовым траекториям против часовой стрелки, так как $\varphi'(t)=1>0$.)

Пример 5. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы ($x, y \in R$):

$$\begin{cases} x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}\,\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ x' = x - y\sqrt{x^2 + y^2}\,\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$ При переходе к полярным



координатам получим систему: $\begin{cases} r'(t) = -r^2 \sin\dfrac{\pi}{r}, \\ \varphi'(t) = 1. \end{cases}$ Так как $f(r) = -r^2 \sin\dfrac{\pi}{r} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0, \\ r = \dfrac{1}{n}, \quad n \in N, \end{array}\right.$ то исследуемая система имеет одно положение равновесия $P(0,0)$ и бесконечное счетное множество предельных циклов, которые являются окружностями с центрами в начале координат и радиусами $r_n=1/n$ ($1/n\to0$ при $n\to+\infty$). Пусть n определяет номер цикла. Так как $f(r)$ функция при прохождении через точку rn меняет свой знак и $f(r)<0$, если $r>1$, то предельные циклы с нечетными номерами являются устойчивыми, а с четными – неустойчивыми. Фазовые траектории накручиваются на нечетные циклы, и раскручиваются с чётных предельных циклов. Так как $\varphi'(t)= 1 > 0$, то движение по всем фазовым траекториям происходит против часовой стрелки. Точка P(0,0) является **центро-фокусом.**

Рис. 4 . К примеру 5.

Устойчивость предельного цикла исследуется с помощью показателей Флоке, либо отображения Пуанкаре.

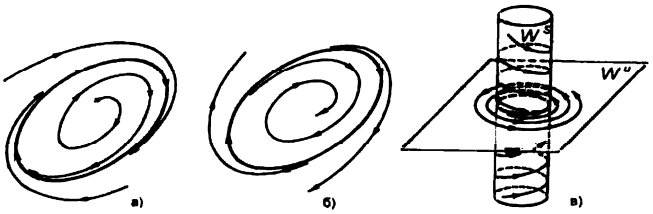


Рис. 5. Устойчивый (а), неустойчивый (б) и седловой (в) предельные циклы.

Исследование предельного цикла на устойчивость может быть проведено с использованием теории Флоке.

Теория Флоке – теория о строении пространства решений и о свойствах самих решений линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами $\dot{x} = A(t)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n$, где матрица $A(t)$ периодическая по t с периодом $\omega>0$ и суммируемая на каждом компактном интервале из R. Любая фундаментальная матрица этой системы имеет представление $X(t)=P(t)\exp(tB)$ называемое представлением Флоке, где $P(t)$ – некоторая ω-периодическая матрица, B - некоторая постоянная матрица.

Пусть $x_0(t)$ – T-периодическое решение системы $\dot{x} = F(x)$, представленное в фазовой плоскости своим предельным циклом. Линеаризуя эту систему на ее периодическом решении аналогично, получим линейную неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = A(t)y, \text{ где } A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0(t)\right) \qquad (14)$$

с T-периодической матрицей $A(t)$ и $y(t)=x(t)-x_0(t)$.

<u>Теорема Флоке</u>. Каждое фундаментальное матричное решение линейной системы (14) с периодическими вещественными коэффициентами представимо в виде $Y(t)=P(t)\exp(Bt)$, где $P(t)$ – некоторая T-периодическая комплексная матрица, а B – некоторая постоянная комплексная матрица, причём существует обратимая действительная матрица C такая, что $C=\exp(BT)$. Матрица C, называемая матрицей монодромии, единственным образом определяется периодической матрицей $A(t)$. Её собственные значения λ_i называются мультипликаторами линейной системы (14) или мультипликаторами цикла, по которому эта система построена.

Мультипликатор периодической точки $\rho=f'(x_0)$ – собственное значение дифференциала отображения за период в этой точке. Удобная характеристика усиления или затухания возмущения периодического движения.

Показатели Флоке - собственные значения α_i матрицы B. Их вещественные части также определяются однозначно, а мнимые части определяются с точностью до слагаемого $2\pi k/T$. Очевидно, что $\lambda_i=\exp(a_iT)$, а $C=Y(T)$, если $Y(0)$ - единичная матрица.

Действительная неособая матрица C не обязана иметь действительный логарифм, т.е. не всегда существует действительная матрица B, такая что $C=\exp(BT)$. Примером является матрица C, имеющая простой отрицательный мультипликатор. Однако матрица C^2 уже всегда имеет действительный логарифм. По значениям мультипликаторов цикла или **показателей Флоке** линейной неавтономной системы (14) первого приближения можно сделать вывод об устойчивости периодического решения $x_o(t)$ нелинейной автономной системы $\dot{x} = F(x)$.

Теорема. Один простой мультипликатор цикла всегда имеет значение +1, соответствующий показатель Флоке равен нулю. Если один показатель Флоке равен нулю, а все остальные *n*-1 показателей имеют отрицательные вещественные части (или все мультипликаторы цикла, кроме единичного, имеют модули, меньшие 1, т.е. лежат внутри единичного круга плоскости комплексного переменного), то периодическое решение $x_0(t)$ системы $\dot{x} = F(x)$ устойчиво (асимптотически орбитально устойчиво). Если же хотя бы один показатель Флоке имеет положительную вещественную часть (или мультипликатор цикла лежит вне единичного круга), то периодическое решение $x_0(t)$ системы $\dot{x} = F(x)$ неустойчиво.

Периодическое решение не может быть периодически устойчивым, так как решения с начальными условиями в разных точках цикла не сближаются при $t \to +\infty$.

Поведение траекторий, близких к предельному циклу, описывается отображением Пуанкаре на отрезке, трансверсальном к циклу, – для этого отображения точка, соответствующая циклу, является неподвижной. Цикл является притягивающим или отталкивающим тогда, когда эта точка притягивающая или отталкивающая. Если производная по модулю >1, цикл неустойчив, если меньше – устойчив.

Предельный цикл называется **гиперболическим**, если соответствующая неподвижная точка гиперболична – т. е. имеет производную, отличную от $\pm$. Гиперболический предельный цикл не имеет мультипликаторов, лежащих на единичной окружности, кроме одного, равного +1 (имеется ровно один **показатель Флоке** с нулевой вещественной частью, равный нулю). Предельный цикл называется невырожденным, если он не имеет мультипликаторов, равных +1, кроме одного (имеется ровно один простой нулевой **показатель Флоке**, но могут быть ненулевые **показатели Флоке** с нулевыми вещественными частями). Предельный цикл, имеющий мультипликаторы внутри и на границе единичного круга, называется полуустойчивым. Полуустойчивый предельный цикл в трёхмерном случае имеет мультипликаторы, равные $\{|\lambda_1|<1, +1, |\lambda_2|=1\}$.·Гиперболический предельный цикл, для которого **показатели Флоке** имеют как отрицательные, так и положительные вещественные части (или мультипликаторы лежат как внутри, так и вне единичной окружности) называется седловым. Понятие седлового цикла определено для размерности фазового пространства $m>2$. При $m=3$ седловой предельный цикл имеет мультипликаторы, равные $\{|\lambda_1|<1, +1, |\lambda_2|>1\}$.

Гиперболические предельные циклы не разрушаются малыми возмущениями – если у исходного векторного поля был гиперболический предельный цикл, то у любого поля, -близкого к нему, также найдётся близкий к исходному гиперболический предельный цикл.

Наиболее простой **бифуркацией**, связанной с предельными циклами, является седлоузловая бифуркация: два гиперболических предельных цикла, отталкивающий и притягивающий, сближаются. В момент бифуркации они сливаются, образуя один полуустойчивый цикл, который при дальнейшем изменении параметра исчезает. Эта бифуркация - уход предельного цикла в комплексную область (см. далее).

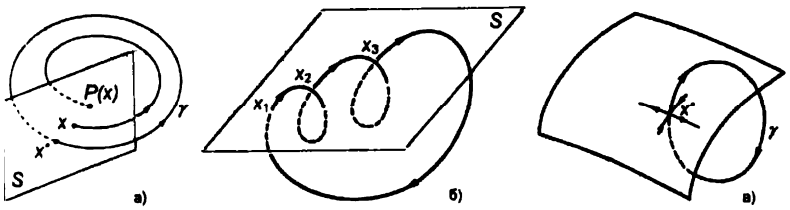


Рис. 6. Неподвижная точка (а), цикл (б) и седловая точка отображения Пуанкаре с соответствующим ей седловым предельным циклом.

Приведём некоторые примеры фазовых кривых, векторных полей и фазовых портретов, создаваемых системой ОДУ.

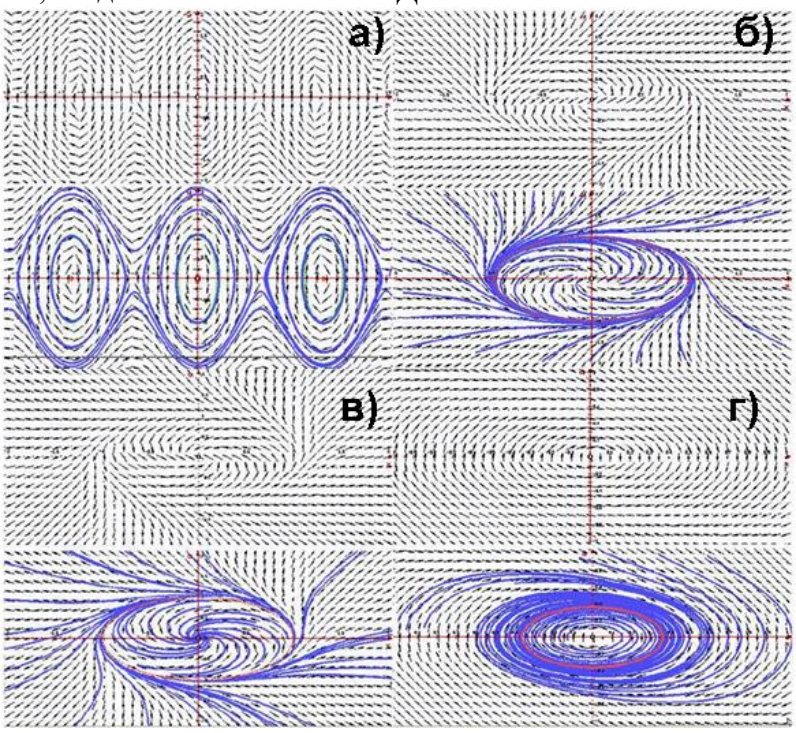


Рис. 7. Предельные циклы.

Пример 6. Среди фазовых кривых автономной системы $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$ можно видеть фазовые кривые всех трёх типов: точки, замкнутые гладкие кривые и гладкие кривые без самопересечений (рис. 7а).

Пример 7. Устойчивый предельный цикл. Автономная система $\begin{cases} \dot{x} = -y + x\left(1 - x^2 - y^2\right) \\ \dot{y} = x + y\left(1 - x^2 - y^2\right) \end{cases}$ имеет устойчивый предельный цикл: фазовые кривые навиваются на предельный цикл (рис. 7б).

Пример 8. Неустойчивый предельный цикл. Автономная система $\begin{cases} \dot{x} = -y - x\left(1 - x^2 - y^2\right) \\ \dot{y} = x - y\left(1 - x^2 - y^2\right) \end{cases}$ имеет неустойчивый предельный цикл: фазовые кривые "отходят" от предельного цикла (рис. 7в)

Пример 9. Полуустойчивый предельный цикл. Автономная система $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0{,}1y - y^3 - x \end{cases}$ имеет полуустойчивый предельный цикл: фазовые кривые "отходят" от предельного цикла (рис. 7г).

Система на рис.7а имеет два положительных действительных собственных значения и одно отрицательное собственное значение. Точка равновесия – неустойчивое седло. Все фазовые траектории сходятся к неустойчивому собственному пространству (плоскости, связанной с положительными вещественными собственными значениями), и захватываются расширяющейся динамикой. Единственными исключениями являются те орбиты, которые начинаются на устойчивом собственном пространстве (определяемом собственным вектором, ассоциированным с отрицательным собственным значением), которые сходятся к плоскости в точке равновесия.

Предельный цикл отличен от простейших колебаний, типа колебания идеального маятника, которые существенно зависят от начальных условий. Начальная амплитуда маятника при отсутствии затухания сохраняется на протяжении всего времени колебаний. Если движение маятника начинается с некоторой амплитудой, то такая амплитуда

сохраняется до бесконечности. В предельном цикле ситуация совершенно другая. Здесь при любом начальном условии, динамическая система идёт к предельному циклу с определённой, наперёд заданной, амплитудой и частотой.

Циклы подверженные разного рода бифуркациям. Рассмотрим некоторые из них.

16.3 Бифуркации устойчивых предельных циклов

Кроме бифуркаций состояния равновесия в динамических системах при изменении параметра может происходить ещё одна перестройка структуры фазового пакета. Этот тип бифуркации рассматривает рождение предельного цикла из неподвижной точки.

Рассмотрим эффекты бифуркаций в семействе нелинейных автономных систем ОДУ

$$\dot{x} = F(x,\mu), \quad x \in M \subset R^m, \quad C^\infty \qquad (9)$$

заданных в фазовом пространстве M гладкими векторными полями F, зависящими от координат векторов системных параметров μ, лежащих в области L пространства R.

В случае, когда предельный цикл $x_0(t,\mu)$, имеющий период T, является семйством уравнений (9) при всех $\mu \in U$, то, линеаризуя семейство (9) на цикле, получим зависящую от параметра систему ОДУ с периодической матрицей линейной части

$$\dot{y} = A(t,\mu)y,\ A(t,\mu) = D_x F(x_0(t,\mu)\mu) \qquad (10)$$

где $y(t) = x(t) - x_0(t,\mu)$, а $A(t+T,\mu) = A(t,\mu)$. При этом вектор y=0 является решением системы (10) для всех μ∈U.

Как следует из теории Флоке, каждое фундаментальное матричное решение линейной системы с периодическими коэффициентами представимо в виде $Y(t,\mu) = P(t,\mu)U(t,\mu)$, где $P(t,\mu)$ – некоторая, вообще говоря, комплексная T-периодическая матрица, а матрица $U(t,\mu) = \exp(B(\mu)t)$ является фундаментальной матрицей линейной системы уравнений с постоянными, вообще говоря, комплексными коэффициентами $\dot{u} = B(\mu)u(t)$

Устойчивость (неустойчивость) периодического решения определяется собственными значениями матрицы B – показателями Флоке исходного цикла или, что равносильно, собственными значениями действительной матрицы C=exp(BT) – мультипликаторами цикла. Так как цикл устойчив при всех μ<0, то один показатель Флоке равен нулю, а все остальные m-1 показателей имеют отрицательные вещественные части (один простой мультипликатор имеет значение +1, а все остальные мультипликаторы имеют модули, меньшие 1, т. е. лежат внутри единичного круга плоскости комплексного переменного).

Следовательно, бифуркации, связанные с потерей устойчивости периодического решения семейства (9), могут произойти лишь в тех случаях, когда при μ=0 один или несколько показателей Флоке из m-1 пересекают мнимую ось слева направо или, что равносильно, один или несколько мультипликаторов, лежащих внутри единичного круга при μ<0, пересекают единичную окружность при μ=0. Бифуркации циклов могут иметь место, очевидно, только в системах уравнений размерности m>1.

Как и в случае особой точки, бифуркации, приводящие к потере устойчивости периодического решения семейства (9), определяются исключительно теми координатами системы, которые соответствуют собственным значениям матрицы B(0), лежащим на мнимой оси. Система уравнений, записанная в этих координатах, есть нормальная форма семейства (9) в окрестности периодического решения.

Определение нормальной формы и, соответственно, вида происходящей бифуркации периодического решения, является чрезвычайно сложной задачей. Так как мультипликатор цикла, соответствующий вектору $\dot{x}_0(t)$ всегда равен единице, а показатель Флоке – нулю и не является бифуркационным, то координаты нормальной формы заведомо лежат в гиперплоскости S, трансверсальной вектору $\dot{x}_0(t)$ и задаваемой последними m-1 компонентами вектора $z(t)$. Обозначим этот вектор, имеющий на единицу

меньшую размерность, чем исходный вектор $y(t)$ линеаризованной на цикле системы (10), через $v(t)$. Вектор $v(t)$ удовлетворяет системе m-1 линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}(t) = D(t,\mu)v(t) \qquad (11)$$

где действительная матрица $D(t, \mu)$ получается из действительной матрицы

$$G(t,\mu) = Q^{-1}A(t,\mu)Q(t,\mu) - Q^{-1}(t,\mu)\dot{Q}(t,\mu) \qquad (12)$$

вычеркиванием ее первой строки и первого столбца. Система (12) имеет те же показатели Флоке, за исключением нулевого, что и исходная линеаризованная система.

Возможны два принципиально различных случая: случай постоянной матрицы $D(t,\mu) = D(\mu)$ и случай переменной T-периодической матрицы $D(t, \mu)$. Первый случай означает, что матрицы $Q(t,\mu)$-$P(t, \mu)$ и $G(t, \mu)$=$B(\mu)$ действительны, а показателями Флоке цикла, отличными от нулевого, являются собственные значения матрицы $D(\mu)$. Другими словами, первый случай означает, что переход преобразованием $Q(t,\mu)$ к системе координат, связанной с циклом, уже осуществляет приведение системы с периодическими коэффициентами к системе с постоянными вещественными коэффициентами. Вектор $z(t)$ в этом случае совпадает с вектором $u(t)$, а компонентами вектора $v(t)$ являются последние m-1 компонент вектора $u(t)$. Во втором случае имеет место более сложная ситуация.

В случае постоянной матрицы $D(t,\mu)$=$Q(\mu)$ бифуркация цикла происходит при переходе либо одного вещественного собственного значения, либо двух комплексно сопряженных собственных значений матрицы $D(\mu)$ через мнимую ось. При этом все остальные собственные значения должны иметь отрицательные вещественные части. Этому случаю соответствуют четыре основные, наиболее часто встречающиеся в приложениях, бифуркации предельных циклов.

Фазовые траектории не могут пересекаться, поэтому динамика на плоскости не может быть хаотичной. Траектории, которые не уходят в бесконечность, могут либо притягиваться к неподвижным точкам, либо наматываться на предельные циклы (либо в консервативном случае быть замкнутыми). Если размерность фазового пространства n>2 динамика может быть гораздо более сложной.

Важным эффектом является разрушение бифуркаций при возмущениях.

Можно отметить, что бифуркация седло-узел и бифуркация Хопфа являются общими бифуркациями в динамических системах. При возмущениях (или незначительных несовершенствах в самой системе) транскритическая бифуркация и бифуркация вил переходят в бифуркацию седло-узел. Разрушение бифуркации вил приводит к одному равновесному состоянию, которое эволюционирует плавно, по мере увеличения параметра управления, к другому состоянию разъединения, которое существует выше критического значения параметра. Разъединённое состояние может быть достигнуто только путём прерывистого скачка параметра; оно катастрофически исчезает ниже критического значения параметра.

Известны разные виды бифуркаций, связанных с рождением предельного цикла: рождение предельного цикла из сложного фокуса; рождение предельного цикла из сложного предельного цикла; рождение предельного цикла из петли сепаратрисы; рождение предельного цикла из сепаратрисы положения равновесия седло–узел при его исчезновении; рождение предельного цикла из замкнутой неизолированной траектории и др. Приведём некоторые примеры.

16.4 Бифуркация Пуанкаре-Андронова—Хопфа (бифуркация рождения цикла)

В теории динамических систем бифуркация Андронова-Хопфа – локальная бифуркация векторного поля на плоскости, в ходе которой особая точка-фокус теряет устойчивость при переходе пары её комплексно-сопряжённых собственных значений через мнимую ось. При этом либо из особой точки рождается небольшой устойчивый предельный цикл (мягкая потеря устойчивости, мягкая, суперкритическая), либо, наоборот, небольшой неустойчивый предельный цикл в момент бифуркации схлопывается

в эту точку, и её бассейн отталкивания после бифуркации имеет отделённый от нуля размер (жёсткая потеря устойчивости, жёсткая, субкритическая).

Данный тип бифуркаций встречается исключительно в нелинейных системах. Здесь устойчивый фокус через центр может переходить в неустойчивый фокус. При этой бифуркации в нелинейных системах происходит рождение предельного цикла, и система становится автоколебательной. При переходе параметра через бифуркационное значение это положение равновесия теряет устойчивость, однако в его окрестности появляется замкнутая асимптотически устойчивая траектория, характерный размер которой увеличивается при дальнейшем изменении параметра μ.

Бифуркация Хопфа возникает, когда периодическое решение или предельный цикл, окружающий точку равновесия, возникает или исчезает при изменении параметра μ. Когда устойчивый предельный цикл окружает неустойчивую точку равновесия, бифуркация называется сверхкритической бифуркацией Хопфа. Если предельный цикл неустойчив и окружает устойчивую точку равновесия, то бифуркация называется докритической бифуркацией Хопфа.

Бифуркации Хопфа возможны, только если система уравнений первого порядка $\frac{dx}{dt} = F(x;\mu)$ имеет размерность $n \geq 2$. Для плоского случая $n=2$ система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u,v;\mu \\ \frac{dv}{dt} &= g(u,v;\mu) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где f и g – аналитические функции u, v и μ.

Критические точки $u_0(\mu)$, $v_0(\mu)$ Ур.13 определяются

$$\left.\begin{aligned} f\left(u_0(\mu),v_0(\mu)\right) &= 0 \\ g\left(u_0(\mu),v_0(\mu)\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Обычно эту нелинейную модель представляют в виде:

$$\frac{dz}{dt} = (\mu + j\eta)z - x|z|^2, \qquad (15)$$

где z – комплексная переменная; $\mu+j\eta$ – комплексный параметр, причём j – мнимая единица, μ – варьируемый бифуркационный параметр.

Уравнение представляет собой комплексный аналог бифуркации типа «вилка». С целью определения всех равновесных решений необходимо произвести замену комплексной переменной z:

$$z=x_1+jx_2 \qquad (16)$$

где x_1 и x_2 новые вещественные переменные.

В результате подстановки z в Ур.15 получается система из двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left[\mu - \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]x_1 - \eta x_2 \\ \dot{x}_1 &= \left[\mu - \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]x_1 + \eta x_2 \end{aligned} \qquad (17)$$

Здесь осуществлён переход от модели второго порядка с вещественными параметрами. Полученные уравнения связаны между собой через комплексную переменную z и имеют следующие стационарные решения:

$x_1=x_2=0$ при $z=0$ (18а)

$x_1^2+x_2^2=|z|^2=\mu$ при $z\neq 0$ (18б)

Первое решение является неустойчивым и совпадает с точкой бифуркации, а второе решение определяет окружность радиуса $\sqrt{\mu}$ в пространстве координат (x_1,x_2,μ).

Существуют разные формы записи систем уравнений для бифуркации Хопфа. Начнём с рассмотрения простой двумерной динамической системы с двумя управляющими параметрами μ и ω. В полярных координатах

$$\frac{dr}{dt} = -r^3 + \mu r$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \qquad (19)$$

где радиус $r>0$.

При $\mu<0$ существует лишь тривиальное решение $r_{0(1)}=0$, которое является устойчивым. В фазовом пространстве с координатами $x_1=r\cdot\cos\varphi$ и $x_2=r\ \sin\varphi$ траектории будут стремиться к неподвижной точке $x_1=x_2=0$ (рис. 8). При $\omega\neq0$ эта точка должна быть фокусом, в силу того, что угловая переменная меняется по закону $\varphi=\varphi_0+\omega t$. При $\mu>0$ тривиальное решение $r_{0(1)}=0$ также существует, но теперь оно неустойчиво. Однако появляется второе нетривиальное решение $r_0^2=\sqrt{\mu}$, которое является устойчивым. В фазовом пространстве $\{x_1,\ x_2\}$ такой случай будет представлен траекториями, удаляющимися по спирали от неподвижной точки и стремящимися к предельному циклу, наматываясь на окружность (рис. 8). В случае, когда исходная точка лежит в области $r>r_{0(2)}$, траектории будут представлять собой спирали, сходящиеся к предельному циклу (окружности) извне.

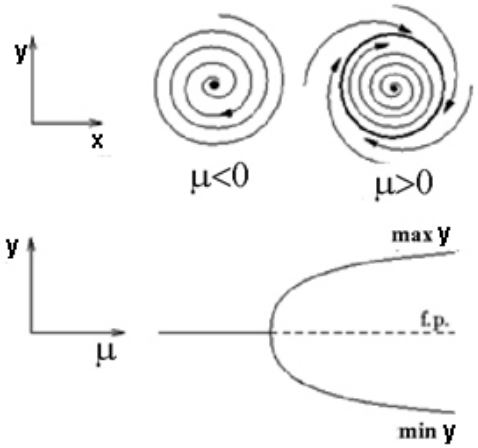


***Рис. 8. Рождение предельного цикла при бифуркации Хопфа**: фазовое пространство для бифуркации Хопфа (вверху); бифуркационная диаграмма, представлены как максимальное так и минимальное значение x_2 на периодической орбите. f.p. – неподвижная точка.*



Рис. 9. Фазовый портрет семейства (20) при c=0 и ε<0 (слева), ε=0 (в центре), ε>0 (справа).

Бифуркация Хопфа включает в себя изменение устойчивости неподвижной точки динамической системы вместе с рождением периодической орбиты. Например, для бифуркации Хопфа, показанной на рис. 8, при $\mu<0$ существует устойчивая неподвижная точка, а при $\mu>0$ – неустойчивая неподвижная точка и устойчивая периодическая орбита. В системе (19) при $\mu=0$ происходит бифуркация нового типа: из неподвижной устойчивой точки рождается **устойчивый предельный цикл**.

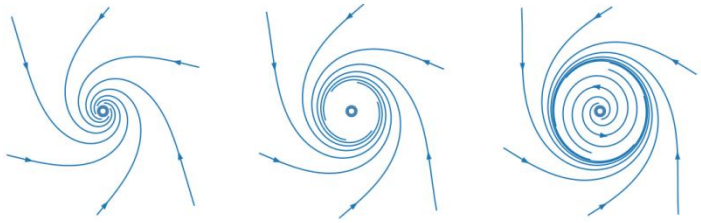


Рис. 10. Фазовый портрет семейства (20) при $\mu_2<0$ и $\mu_1<0$ (слева), $\mu_1=0$ (в центре) и $\mu_1>0$ (справа).

Подобные бифуркации примечательны тем, что потеря устойчивости происходит мягко: по мере увеличения надкритичности (параметра μ) вновь возникшие устойчивые решения плавно удаляются от решения, которое стало неустойчивым. Если, например, говорить про бифуркацию Хопфа, то амплитуда колебаний в возникающем предельном цикле плавно увеличивается от нуля пропорционально $\sqrt{\mu}$.

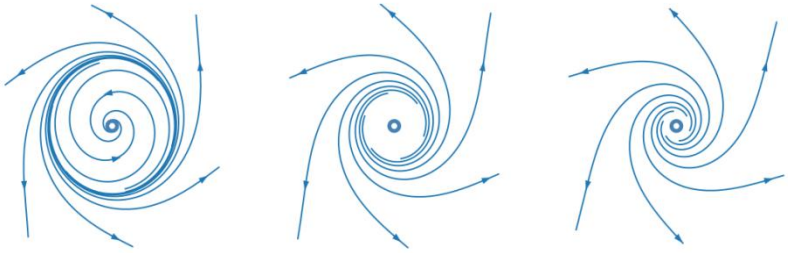


Рис. 11. Фазовый портрет семейства (1) при $c>0$ и $\varepsilon<0$ (слева), $\varepsilon=0$ (в центре) и $\varepsilon>0$ (справа).

Поясним механизм возникновения цикла на примере систем уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - \mu_1 x + \mu_2 x\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = \mu_1 y + \mu y + \mu_2 (x^2 + y^2). \end{cases} \qquad (20)$$

где μ_1 и μ_2 - фиксированные параметры.

Рассмотрим сначала случай $\mu_2=0$, при котором система является линейной. Собственные значения матрицы равны $\mu_1 \pm i$. Если $\mu_1<0$, система имеет устойчивый фокус, при $\mu_1=0$ – центр, при $\mu_1>0$ – неустойчивый фокус (рис. 9).

Чтобы понять, как устроена динамика, снова перейдем в полярные координаты. Вместо полярного радиуса будем использовать его квадрат $\rho=x^2+y^2$. Имеем:

$$\dot{\rho} = 2\rho\left(\mu_1 + \mu_2 \rho\right), \qquad (21)$$

где $\rho>0$.

Пусть теперь $\mu_2\neq0$. В этом случае у системы появляется нелинейная часть. Чтобы

Итак, по углу происходит вращение с постоянной угловой скоростью, но расстояние до начала координат может меняться со временем. Рассмотрим два случая в зависимости от знака μ_2.

Нелинейное притягивание

Пусть $\mu_2<0$. График правой части Ур.21 – парабола с ветвями, направленными вниз. У неё обязательно есть корень $\rho=0$. Второй корень находится как $\rho^* = -\frac{\mu_1}{\mu_2}$, но при $\mu_1<0$ мы получим отрицательное число, в то время как ρ обязано быть положительным. При $\mu_1=0$ оба корня совпадают и равны нулю. При $\mu_1>0$ второй корень положителен и имеет смысл. При $\mu_1<0$ динамика очень простая: ρ монотонно уменьшается со временем, фазовые кривые являются спиралями, приближающимися к началу координат, как в линейном фокусе (рис. 10). При $\mu_1=0$ происходит примерно то же самое, только спирали

наматываются чаще – мы уже сталкивались с этой системой, это медленный фокус. А вот при $\mu_1>0$ происходит нечто новое. Для начальных условий $\rho\in(0,\rho*)$ производная $\dot{\rho}$ положительна и значит, решения будут приближаться к началу координат с *уменьшением* t и убегать от него с ростом *t*. Но далеко они не убегут: по мере приближения ρ к значению $\rho*$ скорость «убегания» уменьшается, и траектория наматывается на окружность $\rho=\rho*$ изнутри. Если начальное условие лежит на этой окружности, то ρ не меняется со временем (это положение равновесия для Ур.21) и значит, траектория сама является окружностью. При $\rho>\rho*$ производная отрицательна, траектория будет приближаться к началу координат, но не сможет пересечь окружность $\rho=\rho*$ (поскольку траектории не умеют пересекаться). Значит, она наматываться на эту окружность извне.

Здесь траектория не стремится к особой точке и не уходит на бесконечность, а приближается к другой, замкнутой траектории (предельному циклу). При $\mu_1=0$ система не является структурно устойчивой. Например, особая точка, находящаяся в начале координат, при $\mu_1=0$ является асимптотически устойчивой, а при любом положительном μ_1 становится неустойчивой. Такие системы не могут быть орбитально топологически эквивалентными и значит при $\mu_1=0$ происходит бифуркация. При $\mu_1=0$ особая точка теряет устойчивость: была устойчивой (при $\mu_1\le0$), а стала неустойчивой (при $\mu_1>0$). Потеря устойчивости сопровождается рождением устойчивого предельного цикла, к которому стремятся все траектории, кроме самой особой точки.

Нелинейное отталкивание

Рассмотрим теперь случай $\mu_2>0$. График правой части Ур.21 теперь является параболой, направленной ветвями вверх. Корень $\rho*$ положителен при $\mu_1<0$. Предельный цикл, следовательно, существует тоже при $\mu_1<0$. При этом траектории, стартующие $\rho\in(0,\rho*)$ притягиваются к особой точке и отталкиваются от предельного цикла при увеличении *t*. При $\rho>\rho*$ траектории также отталкиваются от предельного цикла и уходят на бесконечность. При стремлении μ_1 к нулю предельный цикл уменьшается и схлопывается в точку.

При $\mu_1\ge0$ правая часть Ур.21 положительна для всех $\rho>0$ и траектории удаляются от особой точки.

Несмотря на сходство, между этими двумя сценариями есть существенное различие.

Пусть $\mu_2<0$. Давайте представим себе, что мы следим за решением с каким-то конкретным начальным условием, выбранным наугад. При этом само решение нам доступно с некоторой погрешностью: в каждый момент времени мы видим положение точки в фазовом пространстве с небольшой случайной ошибкой. Несмотря на «дрожание» картинки мы всё-таки можем сделать какие-то качественные выводы о том, как меняется динамика при различных значениях. Мы видим, что при $\mu_1\le0$ решение стремится куда-то к началу координат и там живет при $t\to+\infty$. Установившийся режим – небольшие случайные колебания, вызванные погрешностью нашего наблюдения, вокруг устойчивого положения равновесия. При небольших значениях $\mu_1>0$ положение равновесия становится неустойчивым, но мы этого не заметим: траектория будет притягиваться к маленькому устойчивому предельному циклу, что будет соответствовать колебательному движению с небольшой амплитудой. Отличить такие маленькие колебания от случайного шума будет невозможно до тех пор, пока их амплитуда значимо не вырастет. Такой тип потери устойчивости называется мягкой потерей устойчивости. По отношению к бифуркации Андронова-Хопфа, происходящей по этому сценарию, используют также термин суперкритическая бифуркация.

Для $\mu_2>0$ ситуация иная. При $\mu_1<0$ предельное поведение нашей траектории существенно зависит от того, находится ли начальное условие внутри предельного цикла или вне него. В первом случае решение будет стремиться к началу координат и останется где-то там. А во втором случае оно уйдет куда-то на бесконечность. Никаких колебаний с

малой амплитудой в этом случае мы не увидим (и с не малой тоже): предельный цикл неустойчивый и значит выбранная наугад траектория, будет от него быстро отдаляться с течением времени.

Если постепенно увеличивать μ_1, приближая его к нулю, при некотором значении предельный цикл пересечет наше начальное условие и траектория «резко» изменит свое предельное поведение. Говорят, что произойдёт «жёсткая» потеря устойчивости или субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа.

Можно показать, что в «типичном случае» в однопараметрических семействах в фазовых пространствах любой размерности происходят только два типа локальных бифуркаций, которые мы сейчас рассмотрели: седлоузловая бифуркация и бифуркация Андронова-Хопфа. (Система уравнений (20) зависит от двух параметров, но нас интересует только один из них: при анализе бифуркации параметр μ_2 считался фиксированным.) Однако, уже для семейств с двумя параметрами ситуация становится гораздо более сложной.

Термины «мягкая» и «жёсткая» потери устойчивости связаны с описанием поведения системы с точки зрения «внешнего» наблюдателя, при медленной (в сравнении с динамикой системы) эволюции параметра системы и зашумлении системы малыми случайными возмущениями. В случае мягкой потери устойчивости решение перейдёт из положения равновесия (ставшего неустойчивым) в предельный цикл – наблюдатель будет видеть периодическое «дрожание» состояния системы недалеко от положения равновесия, которое будет усиливаться с ростом параметра. Однако, в масштабе времени «движения параметра», «отклонения» решения нарастают непрерывно. Напротив, при жёсткой потере устойчивости решение «резко» срывается и уходит за границу бассейна отталкивания исчезнувшего предельного цикла: с точки зрения наблюдателя, живущего в масштабе времени, в котором изменяется параметр, решение скачком поменяло режим.

Потеря устойчивости, происходящая при рождении цикла, называется мягкой, однако на практике это явление может приводить к катастрофическим последствиям. Один из наиболее известных примеров – колебания крыльев или хвостового оперения самолета при превышении скоростью набегающего потока некоторого критического (бифуркационного) значения. Это явление, называемое "флаттером" приводило к разрушению самолетов в конце 30-х годов XX в., когда их скорости достигли величин, достаточных для возникновения флаттера.

Пример бифуркации типа рождение предельного цикла из состояния равновесия - переход простейшего лампового генератора при соответствующем изменении управляющего напряжения от режима статических колебаний к автоколебательному режиму. В этом случае на фазовой плоскости из устойчивого фокуса в начале координат при коэффициенте затухания $\mu \geq 0$ рождается предельный цикл, амплитуда которого при малых μ имеет порядок $\sqrt{\mu}$, а фокус становится неустойчивым.

Бифуркация Хопфа может быть супер- или субкритической.

Суперкритическая (сверхкритическая, мягкая) бифуркация Хопфа – бифуркация, имеющая место, если равновесная точка (0,0) – асимптотически стабильна при $\tau=0$ (в точке бифуркации). В сверхкритической бифуркации Хопфа предельный цикл растет из точки равновесия прямо по параметрам бифуркации Хопфа: сначала предельный цикл имеет нулевую амплитуду, которая возрастает по мере дальнейшего перехода параметров в предельный цикл.

Субкритическая (докритическая, жёсткая) бифуркация – бифуркация, имеющая место, если равновесная точка (0,0) отрицательно асимптотически стабильна (при $t \to \infty$) когда $\tau=0$. (Равновесная точка достигается при времени $\tau=\tau_0$, где $\mu(\tau_0)=0$). В докритической бифуркации Хопфа существует неустойчивый предельный цикл, окружающий точку равновесия, и устойчивый предельный цикл, её окружающий. Нестабильный предельный цикл сжимается до точки равновесия, которая в ходе процесса

становится неустойчивой. Для систем, запущенных вблизи точки равновесия, результатом является внезапное изменение поведения от подхода к устойчивому фокусу, к колебаниям большой амплитуды.

Мягкая бифуркация Андропова—Хопфа имеет место и в общем случае любой размерности пространства $m>2$ и даже в бесконечномерном случае. В случае жесткой бифуркации следует говорить об исчезновении седлового предельного цикла.

Рассмотрим простейший вариант **суперкритической** бифуркации Хопфа.

Простейшая двумерная система, описывающая суперкритическую бифуркацию Хопфа в полярных координатах, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x\left(x^2 + y^2 - \mu\right)\\ \dot{y} &= -x - y\left(x^2 + y^2 - \mu\right)\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

В полярных координатах это уравнение принимает форму

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \qquad (22а)$$

$$\dot{\theta} = 1 \qquad (22б)$$

$r \geq 0$

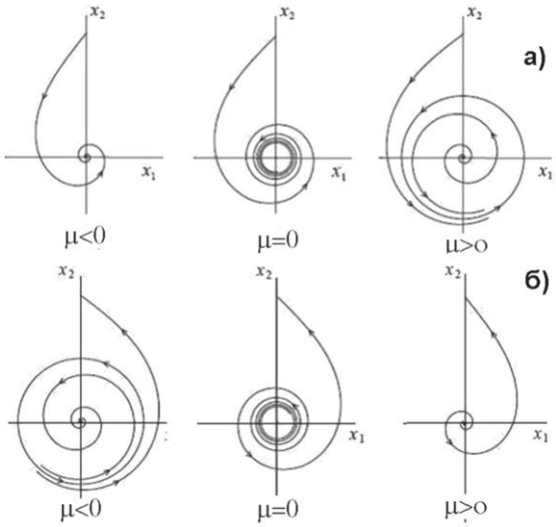


Рис. 12. Фазовые портреты бифуркации Хопфа: а – суперкритическая, б – субкритическая.

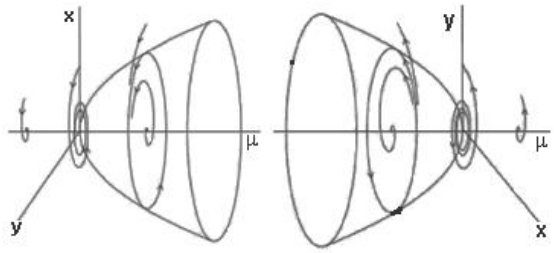


Рис. 13. Бифуркации Хопфа: а – сверхкритическая бифуркация, отвечающая переходу от устойчивой спирали к колебаниям на предельном цикле; б – субкритическая бифуркация.

Из Ур.22б следует

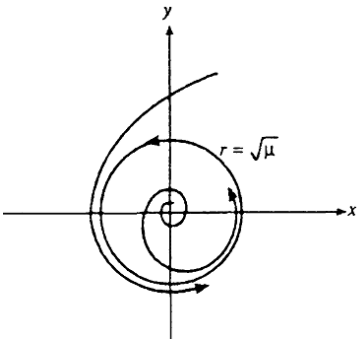
$\theta = t + t_0$. (23)

Если $\mu>0$, то Ур.22а имеет решение

$$r = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu}{r_0^2}-1\right)e^{-2\mu t}}} \qquad (24)$$

где $t=0$: $r=r_0$.

Ур.45 демонстрирует существование предельного цикла при $r=\sqrt{\mu}$, для μ>0 (рис. 13), с суперкритической бифуркацией вил (точка (0,0) – нестабильный фокус для μ>0.



Таким образом, при прохождении μ через точку μ=0, в начале координат происходят изменения от стабильного фокуса, через нестабильный фокус, с появлением нового периодического решения, бифурцирующего от μ=0.

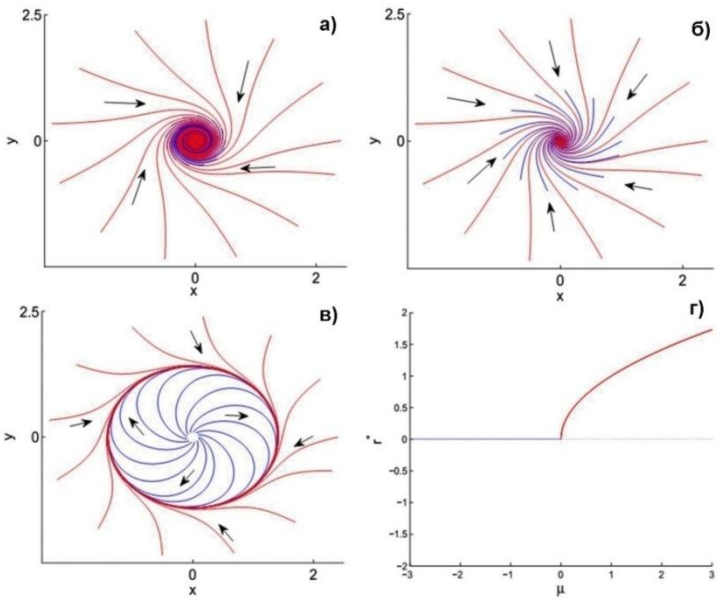
Рис. 13. Предельный цикл для системы 2.68 для μ>0.

Единственной критической точкой этой системы r_0=0, т.е. начало координат. Если $\dot{\theta}<0$ траектории движутся по часовой стрелке около точки r_0=0. Если μ=0, то $\dot{r}=-r^3$. Для ненулевого r имеем $\dot{r}<0$. Следовательно, здесь нет замкнутых орбит и все траектории сходятся к началу координат при $t\to\infty$. Начало координат - стабильный фокус (рис. 14а). Если μ<0, то $\mu-r^2<0$ для всех r. Как и в предыдущем случае, $\dot{r}<0$ для ненулевого значения r, здесь нет замкнутых орбит и начало координат – стабильный фокус (рис. 14б). Если μ>0, то $\dot{r}<0$ для $r=\in\left(\sqrt{\mu},\infty\right)$ и $\dot{r}>0$ для $r=\in\left(\infty,\sqrt{\mu}\right)$. Начало координат – нестабильный фокус и, следовательно, имеет стабильную орбиту $r=\sqrt{\mu}$ (рис. 14в). В этом случае имеет место суперкритическая бифуркация Хопфа при значении параметра μ=0 (рис. 14г).

Несколько усложним исходную систему уравнений

$$\frac{dr}{dt}=\alpha(\mu)r+\gamma(\mu)r^3 \qquad (25а)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-\beta(\mu)+\delta(\mu)r^2 \qquad (25б)$$



Если γ(0)≠0 так что γ(μ) не равно нулю в окрестности μ=0, то Ур. 25 имеет две критические точки r_0=0 и $r_0^2=-\frac{\alpha(\mu)}{\gamma(\mu)}$

Рис. 15. Фазовые портрет суперкритической бифуркации Хопфа: а – μ=0, начало координат – стабильный фокус; б – μ=-0,5, начало координат – стабильный фокус; в – μ=2, начало координат – нестабильный фокус, устойчивая орбита $r=\sqrt{\mu}$.

В случае сверхкритической бифуркации Хопфа при прохождении μ через точку бифуркации μ=0 ветвь r_0=0 изменяется от устойчивого фокуса до неустойчивого фокуса и приводит к периодическому решению.

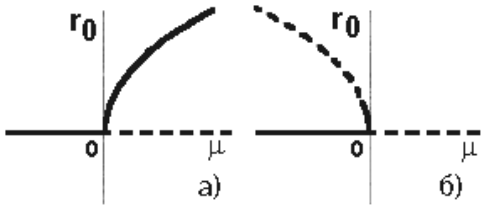


Рис. 16. Бифуркационная диаграмма бифуркации Хопфа: а – суперкритическая: б – субкритическая.

Однако при субкритической бифуркации Хопфа при изменении μ через точку бифуркации μ=0 ветвь r_0=0 изменяется от устойчивого фокуса до неустойчивого фокуса, но не переходит в

периодическое решение. Поэтому субкритические бифуркации Хопфа обеспечивают механизм возникновения хаоса (модель Лоренца, см. далее). В результате мягкой или суперкритической бифуркации Андронова—Хопфа происходит смена устойчивости особой точки, сопровождающаяся рождением из неё устойчивого предельного цикла, амплитуда которого пропорциональна $\sqrt{\mu}$, а период $T \approx 2\pi/\nu$ при $\mu \to 0$.

Эта бифуркация играет важную роль в теории нелинейных систем дифференциальных уравнений как отправная точка различных каскадов бифуркаций перехода к хаосу.

Суперкритическая (сверхкритическая) бифуркация Хопфа – бифуркация, имеющая место, если равновесная точка (0,0) – асимптотически стабильна при $\tau=0$ (в точке бифуркации). В сверхкритической бифуркации Хопфа предельный цикл растет из точки равновесия прямо по параметрам бифуркации Хопфа: сначала предельный цикл имеет нулевую амплитуду, которая возрастает по мере дальнейшего перехода параметров в предельный цикл.

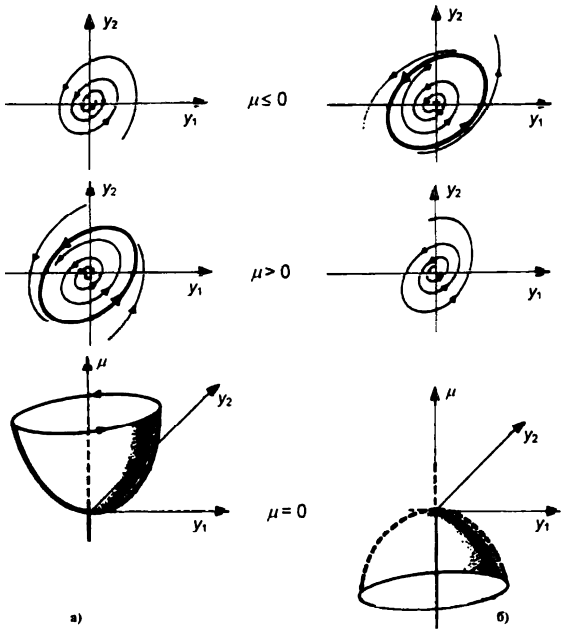


Рис. 17. Два вида бифуркаций Андронова-Хопфа на плоскости: а – суперкритическая; б – субкритическая.

Субкритическая (докритическая) бифуркация – бифуркация имеет место, если равновесная точка (0,0) отрицательно асимптотически стабильна (при $t \to \infty$) когда $\tau=0$. (Равновесная точка достигается при времени $\tau=\tau_0$, где $\mu(\tau_0)=0$). В докритической бифуркации Хопфа существует неустойчивый предельный цикл, окружающий точку равновесия, и устойчивый предельный цикл, её окружающий. Нестабильный предельный цикл сжимается до точки равновесия, которая в ходе процесса становится неустойчивой. Для систем, запущенных вблизи точки равновесия, результатом является внезапное изменение поведения от подхода к устойчивому фокусу, к колебаниям большой амплитуды.

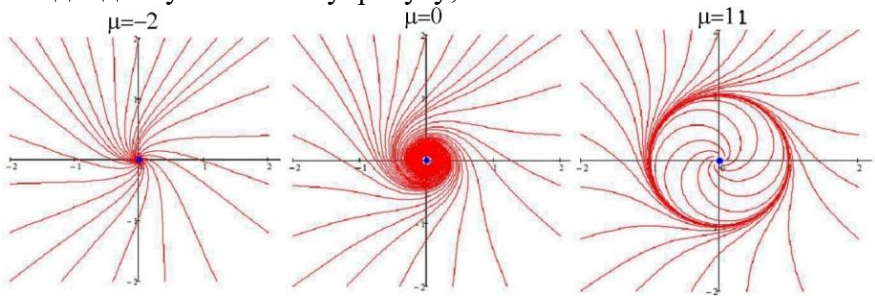


Рис. 18. Бифуркация рождения цикла

Пример 10. В простейшем однопараметрическом случае бифуркация Андропова-Хопфа описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mu x - y - x\left(x^2 + y^2\right) \\ \dot{y}(t) = x + \mu y - y\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

В полярных координатах система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = r\left(\mu - r^2\right) \\ \dot{\varphi}(t) = 1 \end{cases}$$

Система имеет одно положение равновесия $P(0; 0)$, которое является устойчивым фокусом, если $\mu \le 0$ и устойчивый предельный цикл, если $\mu > 0$.

Представляет интерес изучение влияния параметра μ_2 на картину бифуркаций. Рассмотрим систему

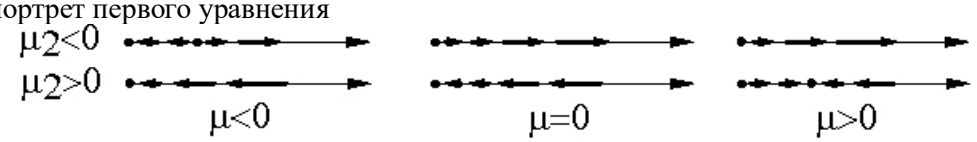
$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x + \mu_2 x\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = y + \mu y + \mu_2 (x^2 + y^2). \end{cases}$$

В полярных координатах система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{r} = r\left(\mu - \mu_2 r^2\right) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Уравнение $\dot{\varphi} = 1$ означает, что фазовая точка вращается с постоянной скоростью.

Фазовый портрет первого уравнения



При $\mu_2 < 0$ в случае отрицательного μ у исходной системы нуль является экспоненциально устойчивым фокусом. Когда μ обращается в нуль, начало координат продолжает оставаться устойчивым фокусом, правда, уже не экспоненциально устойчивым.

Когда μ становится положительным, начало координат теряет устойчивость и одновременно рождается малый предельный цикл динамической системы. Начало координат "передает" свою устойчивость этому циклу – он орбитально асимптотически устойчив. Амплитуда отвечающего этому циклу решения пропорциональна $\sqrt{\mu}$. При положительном значении параметра μ_2 картина иная. При $\mu < 0$ начало координат представляет собой экспоненциально устойчивое положение равновесия, окруженное неустойчивым предельным циклом (пропорционального $\sqrt{\mu}$ радиуса). При $\mu = 0$ этот цикл сливается с началом координат, опять же "передавая" ему свою неустойчивость, причем неустойчивость пока не экспоненциальная. Впоследствии, при $\mu > 0$, начало координат становится экспоненциально неустойчивым фокусом.

В многомерном случае соответствующая типичная бифуркация получается приписыванием к системе (4) гиперболической системы. Один из примеров (отвечающий случаю $\mu_2 < 0$) изображен на рис. 19.

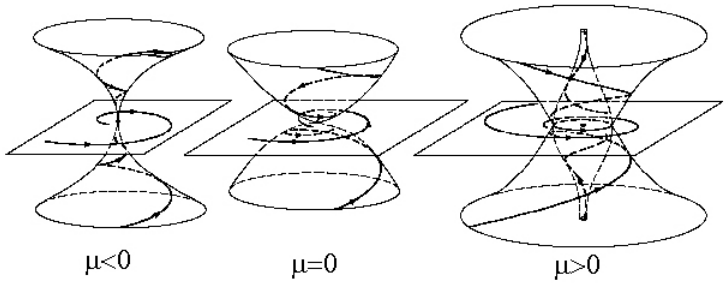


Рис. 19. Бифуркация седло-узел в трехмерном случае.

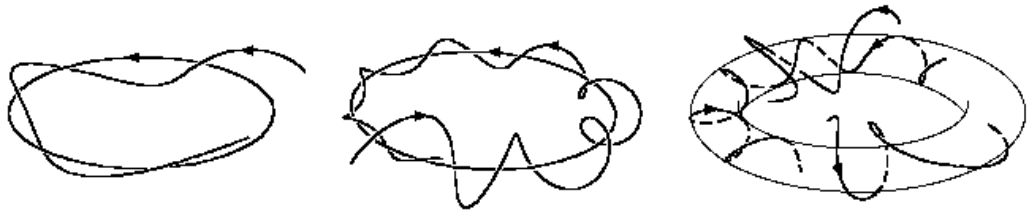


Рис. 20. Бифуркация рождения инвариантного тора – бифуркация рождения цикла.

Бифуркация рождения цикла, отвечающая случаю $\mu_2 < 0$, называется *мягким возбкждением автоколебаний*, сопровождающим потерю устойчивости стационарной точки, поскольку при возрастании параметра рождающийся цикл непрерывно зависит от μ. В противоположность этому, потеря устойчивости положения равновесия при $\mu_2 > 0$

называется *жестким возбуждением системы*, т. к. фазовая точка, находившаяся при μ<0 в окрестности устойчивого начала координат, при μ>0 быстро "выбрасывается" из окрестности стационарной точки (например в окрестность имеющейся у системы удаленной устойчивой стационарной точки или удаленного устойчивого цикла).

Пример 11. Найти бифуркацию Андронова-Хопфа в модификации уравнения ван-дер-Поля

$$\ddot{x}-(\lambda-x^2)\dot{x}-x+\beta x^3=0$$

Исследовать все возможные неподвижные точки.

Перепишем это уравнение в стандартной форме:

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=(\lambda-x^2)y+x-\beta x^3$$

Найдем неподвижные точки рассматриваемой системы. Для этого приравняем нулю производные по времени и решим полученные уравнения. Тогда получаем, что система имеет три неподвижных точки (y=0, x=0) и (y= 0, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}$). Выпишем теперь матрицу линеаризации системы. Она имеет вид: $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-3\beta x^2 & \lambda-x^2\end{pmatrix}$. Соответственно, след и якобиан этой матрицы будут

S=λ-x^2, J=-1+3βx^2

Известно, что условие для нахождения бифуркации Андронова-Хопфа имеет следующий вид:

S=0, J>0.

Для определения в каких неподвижных точках рассматриваемой системы наблюдается бифуркация Андронова – Хопфа начнем с первой неподвижной точки (y=0, x=0). След и якобиан для этой неподвижной точки будут: S=λ, J=-1. Поскольку якобиан отрицательный, то условие бифуркации Андронова- Хопфа выполнено быть не может. Соответственно для этой неподвижной точки бифуркация Андронова-Хопфа не наблюдается. Теперь рассмотрим две оставшиеся неподвижные точки (y= 0, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}$). Для них получаем S=λ-1/β, J=2. Из полученных равенств следует, что условие J>0 выполняется всегда. Следовательно, надо проверить выполнение условия S =0. Приравнивая нулю след, находим, что для неподвижных точек (y= 0, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}$) бифуркация Андронова-Хопфа происходит при выполнении условия: λ=1/β.

Пример 12. Найти бифуркации седло-узел Андронова-Хопфа и их общую точку (бифуркацию Богданова-Такенса) для автоколебательного осциллятора Богданова-Такенса:

$$\ddot{x}-(\mu-x)\dot{x}+a-x^2=0.$$

Уравнение осциллятора может быть переписано в следующем виде

$$\ddot{x}-(\mu-x)\dot{x}+\frac{\partial U(x)}{\partial x}=0$$

где потенциал задан кубическим полиномом, показанным на рис. 21. Таким образом, в системе должна иметь место бифуркация седло-узел, отвечающая слиянию максимума и минимума потенциала. С другой стороны, при μ>0 осциллятор характеризуется отрицательным трением, т.е. имеются предпосылки для возникновения автоколебаний и бифуркации Андронова-Хопфа

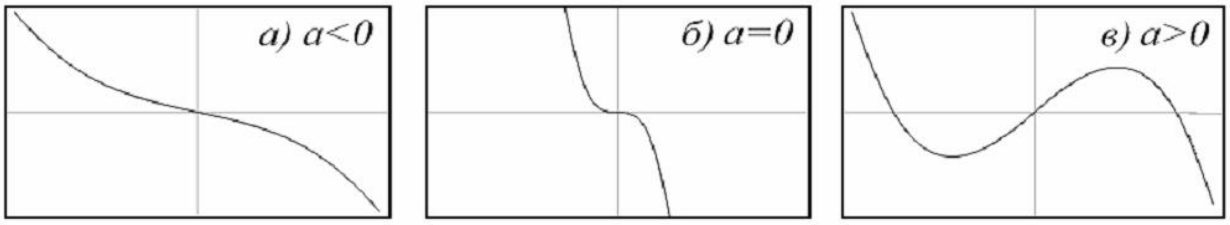


Рис. 21. Вид потенциала U(x).

Проведем соответствующий бифуркационный анализ. Перепишем уравнение осциллятора Богданова-Такенса в стандартной форме:

$\dot{x}=y,\ \dot{y}=(\mu-x)y-a+x^2$

и запишем для него матрицу линеаризации: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -y+2x & \mu - x \end{pmatrix}$

Неподвижные точки этой системы находятся их условия равенства нулю производных от времени динамических переменных x и y. Осциллятор Богданова-Такенса имеет две неподвижные точки $x = \pm\sqrt{a}, \quad y = 0$. Первая из них (отвечающая знаку +), в соответствии с рис.6в, неустойчива, а вторая – устойчива. Для последней тогда имеем $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{a} & \sqrt{a}+\mu \end{pmatrix}$

Находим далее след и якобиан этой матрицы. Они равны:

$$S = \sqrt{a} + \mu; \quad J = 2\sqrt{a}$$

Условием бифуркации седло-узел является обращение в ноль якобиана матрицы M. Это условие выполняется при a=0. Условия на бифуркацию Андронова-Хопфа имеют следующий вид S=0, J>0. Поэтому бифуркация Андронова – Хопфа имеет место при $\mu = -\sqrt{a}$

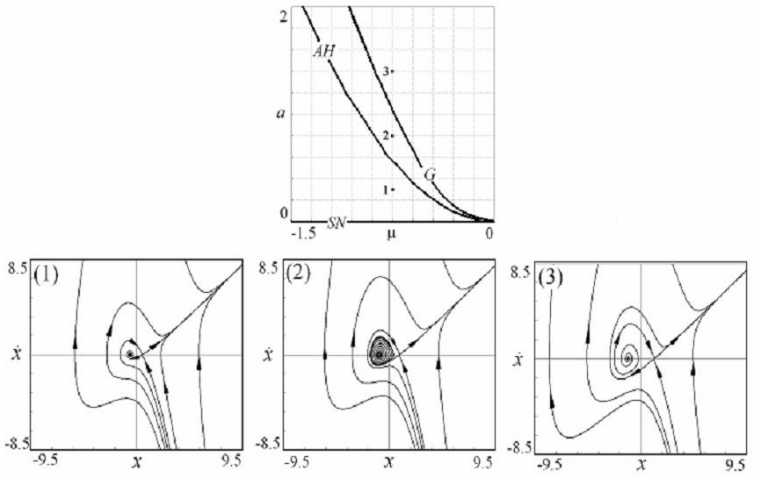


Рис. 22. Бифуркационные линии осциллятора в окрестности точки Богданова-Такенса *BT на плоскости параметров (μ, a),(и фазовые портреты в характерных точках, AH – линия бифуркации Андронова-Хопфа, SN – линия бифуркации седло-узел, G – линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы.*

При этом условие положительности якобиана выполняется при любых значениях параметра a. Теперь найдем общую точку обеих бифуркаций. Для этого положим a =0. Тогда получим, что . Таким образом, общая точка двух бифуркаций, отвечающая бифуркации Богданова-Такенса, на плоскости параметров имеет координаты μ=0. Таким образом, общая точка двух бифуркаций, отвечающая бифуркации Богданова-Такенса, на плоскости параметров имеет координаты μ=a=0 . В этой точке обращаются в ноль одновременно и след, и якобиан линеаризованной матрицы, что может служить удобным приемом при определении точек Богданова-Такенса в конкретных системах. На рис. 22 показаны линии основных бифуркаций коразмерности один в окрестности точки бифуркации Богданова-Такенса и фазовые портреты системы в избранных точках. Можно видеть характерные для точки Богданова-Такенса метаморфозы фазового портрета системы. Отметим, что наряду с описанными локальными бифуркациями для такой системы оказывается типичной и нелокальная бифуркация влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы.

Пример 13. Дискретный осциллятор Богданова-Такенса описывается отображением:

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon y_{n+1}, \quad y_{n+1} = y_n + \varepsilon\left[(\mu - x_n)y_n - a + x_n^2\right]$$

Провести полный анализ бифуркаций устойчивой неподвижной точки этого отображения; построить карту динамических режимов этого отображения и указать на ней характерные линии и точки бифуркаций; сопоставить свойства этого отображения и исходной потоковой системы-прототипа. Найдём неподвижные точки этого отображения. Они находятся из условия $x_{n+1}=x_n$, и $y_{n+1}=y_n$]. Тогда из формул (6) следует что $x=x+\varepsilon y$; $y=y+\varepsilon[(\mu-x)y-a+x^2$ Решим последние уравнения и получим, что рассматриваемое отображение имеет две неподвижные точки $x = \pm\sqrt{a}$ и y=0. При этом одна из них будет устойчивой, а вторая неустойчивой. Выпишем теперь матрицу возмущений (матрицу монодромии) для исходного отображения. Она имеет вид: $M = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2(-y+2x) & \varepsilon+\varepsilon^2(\mu-x) \\ \varepsilon(-y+2x) & 1+\varepsilon(\mu-x) \end{pmatrix}$. Далее запишем след и якобиан этой матрицы S=2+ε(μ-x)+ε^2(2x-y), J=1+ε(μ-x). Для определения устойчивости неподвижных точек двумерного отображения и нахождения их бифуркаций необходимо знать собственные числа матрицы монодромии (мультипликаторы). Из свойств матрицы 2×2 известно, что собственные числа подчиняются соотношению μ^2-Sμ+J=0. Откуда следует, что $\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \mp \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}$

Таким образом, зная след и якобиан, легко определить тип устойчивости неподвижных точек и найти условия всех локальных бифуркаций. Можно показать, что неподвижная точка ($x=\sqrt{a}$, y=0) является неустойчивой, а неподвижная точка ($x=-\sqrt{a}$, y=0) - устойчивой.

Анализ бифуркаций двумерного отображения удобно выполнить, используя плоскость параметров след – якобиан матрицы монодромии. Устройство этой плоскости в общем случае показано на рис. 23. На нем представлен треугольник устойчивости неподвижной точки двумерного отображения, границы которого, в общем случае, заданы линиями 1-*S*+*J*=0 (μ=+1), 1+*S*+*J*=0 (μ=-1) и *J*=1 (|μ|=1) . Таким образом, для устойчивой неподвижной точки двумерного отображения имеют место три бифуркации коразмерности 1 на границах треугольника устойчивости: касательная бифуркация (μ=+1), бифуркация удвоения периода (μ=-1) и бифуркация Неймарка-Сакера (|μ|=1). А так же три бифуркации коразмерности 2 в вершинах треугольника: μ_1=-1 и μ_2=-1 (резонанс 1:2), μ_1=+1 и μ_2=+1 (резонанс 1:1) и μ_1=-1 и μ_2=+2 (fold-flip бифуркация).

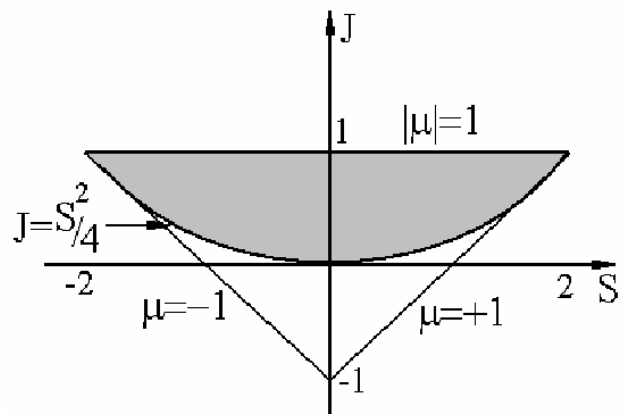


Рис. 23. Треугольник устойчивости неподвижной точки двумерного отображения на плоскости след S - якобиан J матрицы монодромии. *Серым цветом обозначена область, к которой мультипликаторы неподвижной точки принимают комплексные значения.*

16.5 Бифуркация рождения пары устойчивых замкнутых траекторий.

Пусть при μ<0 в системе существует устойчивый цикл $x_0(t,\mu)$ один мультипликатор которого равен +1, а все остальные мультипликаторы лежат внутри единичного круга. При переходе значений параметра μ через точку μ=0 один простой мультипликатор цикла переходит через точку +1 единичной окружности, что соответствует пересечению мнимой оси одним простым вещественным показателем Флоке линеаризованной системы или одним вещественным собственным значением матрицы *D*(μ). Поэтому нормальная форма такой бифуркации цикла совпадает с одномерной нормальной формой бифуркации особой точки типа вилки: $\dot{u}=\mu u-u^3$. Циклу, очевидно, соответствует нулевое решение этого уравнения.

В результате бифуркации цикл $x_0(t,\mu)$ теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно рядом с ним на расстоянии $u_{12}=\pm\sqrt{\mu}$ в направлении собственного вектора, соответствующего показателю, проходящему через мнимую ось, рождается пара устойчивых предельных циклов. На рис. 24 родившиеся циклы лежат в параллельных исходному циклу плоскостях, так как вектор и направлен вертикально.

Возможен и другой случай, когда вектор и лежит в плоскости исходного цикла. Тогда родившиеся циклы будут лежать в той же плоскости – один внутри исходного цикла, а другой вне него.

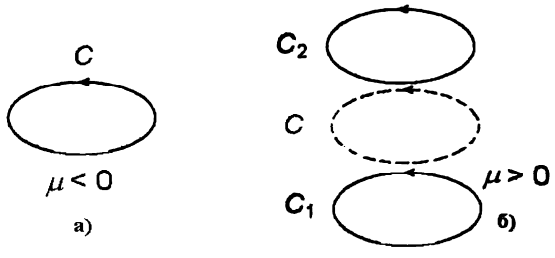


Рис. 24. Рождение из устойчивого цикла (а) двух других устойчивых циклов (б) (бифуркация вилки предельных циклов).

В случае размерности фазового пространства *m*>2, цикл, потерявший устойчивость, становится седловым. Бифуркация является мягкой.

В качестве примера рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$\dot{x}_1 = -\nu x_2 - x_2 x_3 + (\mu+1)(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1,$
$\dot{x}_2 = \nu x_1 + x_1 x_3 + (\mu+1)(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2,$
$\dot{x}_3 = \mu x_3 - x_3^3$

Эта система имеет своим решением особую точку $O=(0,0.0)^T$, устойчивую при μ<-1. При μ>-1 из нее в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл $x_0(t)=(\cos\nu t, \sin\nu t,0)^T$, лежащий в плоскости переменных (x_1,x_2). Линеаризованная на цикле система примет вид:

$\dot{y}_1 = -2y_1(\mu+1)\cos^2\nu t - y_2(\nu + (\mu+1)\sin 2\nu t) - y_3 \sin\nu t + f_1,$
$\dot{y}_2 = y_1(\nu - (\mu+1)\sin 2\nu t) - 2y_2(\mu+1)\sin^2\nu t + y_3\cos\nu t + f_2,$
$\dot{y}_3 = \mu y_3 - y_3^3$

где разложения функций $f_1(y_1,y_2)$ и $f_2(y_1,y_2)$ в ряды в точке (0,0) начинаются с членов второго порядка. Заменой переменных $y(t) = Q(t)z(t)$ с $2\pi/\nu$ – периодической матрицей

$$Q(t) = (\dot{x}_0(t), x_0(t), (0\ 0\ 1)^T) = \begin{pmatrix} -\nu\sin\nu t & \cos\nu t & 0 \\ \nu\cos\nu t & \sin\nu t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

перейдём к системе, записанной в связанных с циклом координатах:

$\dot{z}_1 = \frac{z_3}{\nu} + \tilde{f}_1(z_1, z_2),$
$\dot{z}_2 = -2(\mu+1)z_2 + \tilde{f}_2(z_1, z_2),$
$\dot{z}_3 = \mu z_3 - z_3^3.$

Линейная часть последней системы имеет действительную постоянную матрицу $G(t,\mu)=G(\mu)=B(\mu)$ с нулевым первым столбцом, т.е. координата z_1 однозначно определяется координатами z_2 и z_3 системы, лежащими в плоскости S, перпендикулярной плоскости цикла. Поэтому устойчивость цикла и его возможные бифуркации определяются исключительно двумерной системой уравнений

$\dot{u}_2 = -2(\mu+1)u_2 + \tilde{f}_2(u_1, u_2),$
$\dot{u}_3 = \mu u_3 - u_3^3.$

записанной в координатах $u_2=z_2$ и $u_3=z_3$ с диагональной матрицей $D(\mu) = diag(-2(\mu+1),\mu)$. Заметим, что диагональные элементы матрицы $\Omega(\mu)$ являются показателями Флоке предельного цикла исходной системы. Цикл является устойчивым в интервале изменения параметра -1<μ<0. При μ > 0 нулевая особая точка и цикл системы становятся неустойчивыми. Происходит рождение двух новых устойчивых особых точек $u_3=z_3=x_3=\mp\sqrt{\mu}$, лежащих на отрезке, перендикулярном плоскости цикла. Этому соответствует рождение двух устойчивых циклов, лежащих в параллельных плоскости исходного цикла плоскостях на расстоянии $=\mp\sqrt{\mu}$ от неё. Бифуркация рождения из одного устойчивого цикла двух других устойчивых циклов предваряет субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций рождения устойчивых циклов в системе Лоренца.

16.6 Транскритическая (обмена устойчивостью между циклами) бифуркация.

В этом случае при μ<0 наряду с устойчивым циклом $x_0(t, \mu)$ в системе существует также и неустойчивый (седловой) цикл $x_1(t,\mu)$, лежащий на расстоянии и u=μ от устойчивого цикла в направлении собственного вектора, соответствующего показателю Флоке устойчивого цикла (простому вещественному собственному значению матрицы $D(\mu)$), проходящему через мнимую ось. При переходе значений параметра μ через точку μ=0 один простой мультипликатор цикла, соответствующий указанному показателю Флоке, переходит через точку +1 единичной окружности, а циклы обмениваются устойчивостью - устойчивый цикл $x_0(t, \mu)$ становится неустойчивым (седловым), а неустойчивый (седловой) цикл $x_1(t,\mu)$ ~ устойчивым (рис. 25).

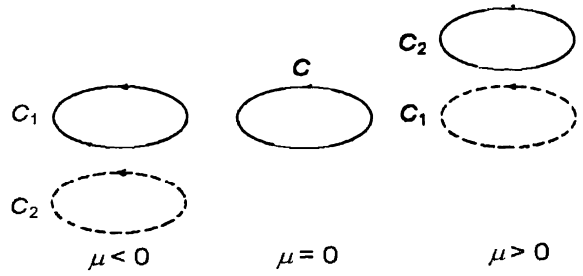


Рис. 25. Бифуркация обмена устойчивостью между циклами.

Нормальная форма такой бифуркации цикла совпадает с одномерной нормальной формой транскритической бифуркации

особой точки: $\dot{u} = \mu u - u^2$ (на рис. 25 направление вектора и совпадает с вертикалью). Бифуркация является мягкой. Если направление вектора и совпадает с горизонталью, то при этом оба цикла должны лежать в одной плоскости (один внутри другого). В результате бифуркации внутренний устойчивый, например, цикл становится неустойчивым, а внешний неустойчивый – устойчивым циклом.

16.7 Бифуркация исчезновения (рождения) пары замкнутых траекторий.

В этом случае при μ<0 наряду с устойчивым циклом $x_0(t,\mu)$ существует также и неустойчивый седловой цикл $x_1(t,/\mu)$. При возрастании значений параметра μ эти циклы сближаются друг с другом и при μ = 0 сливаются в один вырожденный цикл. При μ>0 оба цикла исчезают (рис. 26). Поэтому нормальная форма такой бифуркации цикла совпадает с одномерной нормальной формой седло-узловой бифуркации особой точки: $\dot{u} = \mu + u^2$ (на рис. 26 направление вектора и совпадает с вертикалью). Бифуркация является жесткой (кризисом). Как и в случае предыдущих бифуркаций, циклы могут лежать в одной плоскости один внутри другого.

В качестве примера рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$\dot{x}_1 = -vx_2 - x_2x_3 + (\mu+1)(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1,$
$\dot{x}_2 = vx_1 - x_1x_3 + (\mu+1)(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2,$
$\dot{x}_3 = \mu + x_3^2.$

При -1<μ< 0 исходная система кроме устойчивого предельного цикла $x_0(t) = (cos(v - \sqrt{-\mu})t, \sin(v - \sqrt{-\mu})t, \sqrt{-\mu})^T$, лежащего в плоскости $x_3 = -\sqrt{-\mu}$, имеет также и неустойчивый предельный цикл $x_1(t) = (cos(v + \sqrt{-\mu})t, \sin(v + \sqrt{-\mu})t, \sqrt{-\mu})^T$, лежащий на расстоянии $2\sqrt{-\mu}$ от него в плоскости $x_3 = \sqrt{-\mu}$. Заметим, что движение по циклам происходит с разными частотами. При μ=0 оба цикла сливаются, образуя лежащий в плоскости x_3=0 неустойчивый цикл, исчезающий при μ>0. Анализ устойчивости цикла также сводится к анализу устойчивости нулевой особой точки двумерной системы

$\dot{u}_2 = -2(\mu+1)u_2 + \tilde{f}_2(u_2, u_3),$
$\dot{u}_3 = \mu + u_3^2.$

Если рассмотреть процесс изменения параметра μ от больших значений к меньшим, то описываемая бифуркация означает, что при μ=0 внезапно возникает замкнутая траектория (цикл), которая при дальнейшем уменьшении значений параметра расщепляется на две замкнутые траектории, одна из которых устойчивая, а другая – нет. Другими словами, происходит внезапное одновременное рождение устойчивого и седлового предельных циклов. Каскад бифуркаций этого типа, порождающих бесконечную последовательность пар различных устойчивых и седловых циклов субгармонического и гомоклшшческого каскадов бифуркаций, можно наблюдать в системе Лоренца и практически во всех других нелинейных системах дифференциальных уравнений с хаотической динамикой

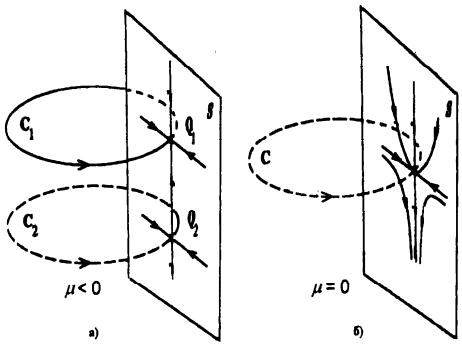


Рис. 26. Седло-узловая бифуркация предельных циклов.

16.8 Бифуркация удвоения периода цикла

Эта бифуркация может произойти только в фазовом пространстве размерности *m*>2. Она связана с переходом через мнимую ось слева направо одного комплексного показателя Флоке α(μ) исходного цикла $x_0(t, \mu)$ при μ=0. При этом соответствующий вещественный мультипликатор цикла при μ=0 имеет вид: $\lambda = \exp(\alpha(0)T) = \exp(i\pi) = -1.$.

Переход одного комплексного показателя Флоке цикла $x_0(t.\mu)$, имеющего период *T*, через мнимую ось, что эквивалентно переходу мультипликатора цикла через точку -1 единичной окружности, означает, что цикл $x_0(t,\mu)$ теряет устойчивость (но не исчезает), и

одновременно возникает другой устойчивый цикл, имеющий ту же амплитуду и удвоенный период $2T$ (рис. 27).

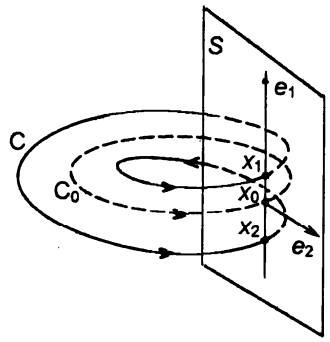


Рис. 27. Суперкритическая бифуркация удвоения периода цикла: C_0-исходный цикл; C - цикл удвоенного периода после бифуркации.

Бифуркация удвоения соответствует второй границе зоны устойчивости неподвижной точки, когда ρ=-1. Суперкритический вариант этой бифуркации получил широкую известность благодаря той роли, которую она играет при возникновении хаотического аттрактора по сценарию Фейгенбаума.

Рассмотрим отображение $x_{n+1} = \mu - x_n - x_n^2$.

Его неподвижные точки

$$x_{1,2}^* = -2 \pm \frac{\sqrt{4+4\mu}}{2} = -1 \pm \sqrt{\mu+1}$$

Будем следить за точкой x_1* и эволюцией ее собственного значения, которое можно вычислить следующим образом:

$$\rho_1 = -(2x_1^* + 1) = -1 + 2 - 2\sqrt{\mu+1} = 1 - 2\sqrt{\mu+1} \qquad (26)$$

При -1<μ<0 ρ_1<1 и неподвижная точка x_1* устойчива. В точке μ=-3/4 ρ_1=0. Это означает, что при переходе μ через это значение характер сходимости меняется от монотонного при -1<μ<-3/4 к знакопеременному при μ>-3/4. При μ=0 ρ_1=-1. Этот случай соответствует потере устойчивости неподвижной точкой. Траектория начинает расходиться, причем отклонение меняет свой знак на каждой итерации. Если бы отображение было линейным, то это было бы единственным событием. Однако наличие нелинейности обогащает картину бифуркации.

Рассмотрим дважды примененное отображение (26):

$$x_{n+2} = \mu - (\mu - x_n - x_n^2) - (\mu - x_n - x_n^2)^2 \qquad (27)$$

Определенные выше неподвижные точки отображения (27) будут таковыми и для дважды примененного отображения, при этом траектория в их окрестности уже не осциллирует. Однако расчёт собственного значения ρ в точке μ=0 даёт значение +1!

В дважды примененном отображении критической ситуации ρ_1=-1 соответствует совсем другое событие, $\rho_{1,2}$=+1. При μ=0 имеет место вилообразная бифуркация. x_1* теряет устойчивость, однако в её окрестности рождаются две новые устойчивые неподвижные точки.

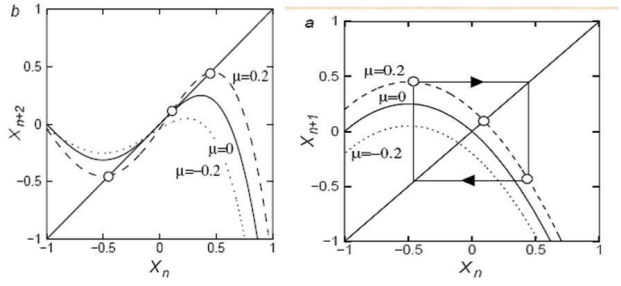


Рис. 28. Бифуркация удвоения.

С точки зрения исходного отображения обе родившиеся точки принадлежат одной и той же траектории – циклу периода 2, т.е. отвечают условию $x_{n+2}=x_n$.

Таким образом, потеря устойчивости точкой x_1* при μ=0 приводит к рождению устойчивого цикла удвоенного периода. По этому признаку данный случай получил название **«бифуркация удвоения».**

Функция последования отображения (27) качественно не меняется в момент бифуркации μ=0, но неподвижная точка теряет устойчивость и при μ>0 возникает замкнутая траектория из двух неподвижных точек.

Субкритическая бифуркация удвоения.

Отметим, что условие ρ_1=-1 описывает локальную динамику системы (27) в точке x^*_1 , тогда как наличие и устойчивость цикла удвоенного периода определяются

свойствами отображения в некоторой окрестности x^*_1. Другой вид нелинейности может привести к иному сценарию развития бифуркации. Например, отображение вида

$$x_{n+1}=-x_n(1+\mu)-2x_n^3 \qquad (28)$$

имеет неподвижную точку $x^*_1=0$, которая также претерпевает бифуркацию удвоения при $\mu=0$, так как $\rho 1=-(1+\mu)-6(x_1^2)=-\mu-1$.

Однако дважды примененное отображение в этом случае претерпевает не суперкритическую, а субкритическую вилообразную бифуркацию. Это означает, что в отображении (28) *до* точки бифуркации при $\mu<0$ существует *неустойчивый* цикл периода 2, который «влипает» в x^*_1 в момент бифуркации удвоения при $\mu=0$. Далее траектория уходит от потерявшей устойчивость точки x^*_1 в бесконечность.

Одномерное отображение – это простейшая модель эволюционного процесса, когда состояние системы характеризуется *единственной переменной, а время дискретно.* Примером может служить динамика численности биологической популяции, если наблюдение за её численностью производится, например, один раз в год.

Пример 14. Рассмотрим бифуркацию удвоения периода в системе трёх дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -vx_2 - x_2x_3 - 2x_1x_3 - \mu(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1,$$
$$\dot{x}_2 = vx_1 + x_1x_3 - 2x_2x_3 - \mu(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2,$$
$$\dot{x}_3 = 2\mu x_3 - x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Эта система имеет предельный цикл $x_0(t) = (\cos vt, \sin vt, 0)^T$, лежащий в плоскости переменных (x_1,x_2). Линеаризованная на цикле система имеет вид:

$$\dot{y}_1 = 2y_1\mu\cos^2 vt - y_2(v - \mu\sin 2vt) - y_3(\sin vt + 2\cos vt) + f_1$$
$$\dot{y}_2 = y_1(v + \mu\sin 2vt) + 2y_2\mu\sin^2 vt + y_3(\cos vt - 2\sin vt) + f_2$$
$$\dot{y}_3 = 2y_1\cos vt + 2y_2\sin vt + 2\mu y_3 - y_3^3$$

где разложения функций $f_1(y_1, y_2)$ и $f_2(y_1, y_2)$ в ряды в точке (0,0) начинаются с членов второго порядка. Заменой $y(t)=Q(t)z(t)$ с $2\pi/\nu$- периодической матрицей $Q(t)$ приведем исходную систему (к связанным с циклом координатам

$$\dot{z}_1 = \frac{z_3}{v} + \tilde{f}_1(z_1, z_2),$$
$$\dot{z}_2 = 2\mu z_2 - 2z_3 + \tilde{f}_2(z_1, z_2),$$
$$\dot{z}_3 = 2z_2 + 2\mu z_3 - z_3^3/$$

Анализ устойчивости цикла сводится к анализу устойчивости нулевой особой точки двумерной системы

$$\dot{u}_2 = 2\mu u_2 - 2u_3 + g(u_2, u_3),$$
$$\dot{u}_3 = 2u_2 + 2\mu u_3 - u_3^3,$$

матрица $D(\mu)$ линейной части которой имеет комплексно сопряженные собственные значения $2\mu\pm 2i$. Следовательно, при $\mu<0$ нулевая особая точка и цикл $x_0(i)$ устойчивы. При $\mu>0$ в системе в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл периода $T\approx\pi$, что соответствует рождению устойчивого двумерного тора с частотами, приближенно равными и и 2. Четкие переходы от резонансных к нерезонансным торам можно наблюдать при малых $\mu > 0$ и варьировании параметра ν.

Рассмотренная бифуркация рождения устойчивого тора T^2 является супер критической (мягкой) бифуркацией. Наряду с ней, как и в случае бифуркации Андронова-Хопфа. может происходить также и субкритическая (жесткая) бифуркация. В этом случае при $\mu< 0$ система имеет устойчивый цикл, лежащий внутри неустойчивого тора. При $\mu>0$ тор влипает в устойчивый цикл, который после этого становится неустойчивым. Происходит исчезновение аттрактора, и. следовательно, бифуркация является кризисом.

Случай бифуркации удвоения периода цикла, которому соответствует переход при $\mu=0$ одного комплексного собственного значения матрицы $E(\mu)$ через мнимую ось важен с точки зрения приложений. При этом все остальные собственные значения должны иметь отрицательные вещественные части.

Пример 15. Рассмотрим систему трёх дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -vx_2 - \frac{vx_1x_3}{2} - \big((\mu - 1)x_1 + 1\big)(1 - x_1^2 - x_2^2),$$
$$\dot{x}_2 = vx_1 + 2x_3(1 - vx_2/4) - (\mu - 1)x_2(1 - x_1^2 - x_2^2),$$

$\dot{x}_3 = 2(\mu - 1 - x_1)x_3 + (x_2 + v/4)(x_1^2 + x_2^2 - 1).$

Эта система имеет предельный цикл $x_0(t) = (\cos vt, \sin vt, 0)^T$, лежащий в плоскости переменных (x_1,x_2). Линеаризованная на цикле
система имеет вид:

$$\dot{y}_1 = 2y_1\big((\mu - 1)\cos vt + 1\big)cos\ vt + y_2\left(\big((\mu - 1)\,cos\ vt + 1\big)2\sin vt - v\right) - y_3\frac{v}{2}cos\ vt + f_1(y_1, y_2, y_3)$$

$$\dot{y}_2 = y_1(v + (\mu - 1)\sin 2vt) + 2y_2(\mu - 1)\,sin^2\ vt + 2y_3\left(1 - \tfrac{v}{4}sin\ vt\right) + f_2(y_1, y_2, y_3),$$

$$\dot{y}_3 = 2y_1\left(\frac{v}{4} + sin\ vt\right)\cos vt + 2y_2\left(\frac{v}{4} + sin\ vt\right)\sin vt + 2y_3(\mu - 1 - cos\ vt) - f_3(y_1, y_2, y_3)$$

где разложения функций $f_1(y_1, y_2, y_3), f_2(y_1, y_2, y_3)$ и $f_3(y_1, y_2, y_3)$ в ряды в точке (0,0,0) начинаются с членов второго порядка. Систему можно привести к связанным с циклом координатам

$$\dot{z}_1 = -\frac{2}{v}z_2\sin vt + \frac{2}{v}z_3\cos vt + \tilde{f}_1(z_1, z_2, z_3),$$

$$\dot{z}_2 = 2(\mu - 1 + \cos vt)z_2 + \left(2\sin vt - \frac{v}{2}\right)z_3 + \tilde{f}_2(z_1, z_2, z_3),$$

$$\dot{z}_3 = \left(2\sin vt + \frac{v}{2}\right)z_2 + 2(\mu - 1 - cos\ vt)z_3 + \tilde{f}_3(z_1, z_2, z_3).$$

Анализ устойчивости цикла сводится к анализу устойчивости нулевого решения линейной двумерной системы

$$\dot{u}_2 = 2(\mu - 1 + cos\ vt)u_2 + \left(2\,sin\,vt - \frac{v}{2}\right)u_3,$$

$$\dot{u}_3 = \left(2\sin vt + \frac{v}{2}\right)u_2 + 2(\mu - 1 - cos\ vt)u_3.$$

При μ<0 нулевое решение и, соответственно, цикл $x_o(t)$ исходной системы устойчивы. При μ >0 в системе появляется устойчивое решение с частотой ν/2 или же с удвоенным периодом 4π/ν.

Бифуркация удвоения периода цикла играет основополагающую роль в процессе формирования сингулярных аттракторов и хаотической динамики в нелинейных системах дифференциальных уравнений. Она начинает бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода, ведущий к возникновению простейшего нерегулярного (сингулярного) аттрактора Фейгенбаума. Её можно наблюдать во всех классических трехмерных хаотических системах нелинейных дифференциальных уравнений. Она обнаружена также и практически во всех нелинейных автономных и неавтономных, диссипативных и консервативных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными и с запаздывающим аргументом.

16.9 Бифуркация рождения (гибели) двумерного тора.

Эта бифуркация может произойти только в фазовом пространстве размерности m>2. Она связана с переходом при μ=0 двух комплексно сопряженных мультипликаторов исходного предельного цикла $x_0(t,\mu)$, имеющего период T, через точки $\exp(\pm i\varphi)$, 0<φ<π единичной окружности или, что равносильно, с переходом двух комплексно сопряженных показателей Флоке цикла (собственных значений матрицы $D(\mu)$ системы (1.15)) через точки $\pm i\varphi/T$ мнимой оси плоскости комплексного переменного. Бифуркация является частным случаем бифуркации Андронова—Хопфа в гиперплоскости S, трансверсалыюй к исходному циклу, и имеет нормальную форму

$$\dot{u}_1 = \mu u_1 - \frac{\varphi}{T}u_2 - (u_1^2 + u_2^2)u_1,$$

$$\dot{u}_2 = \frac{\varphi}{T}u_1 + \mu u_2 - (u_1^2 + u_2^2)u_2.$$

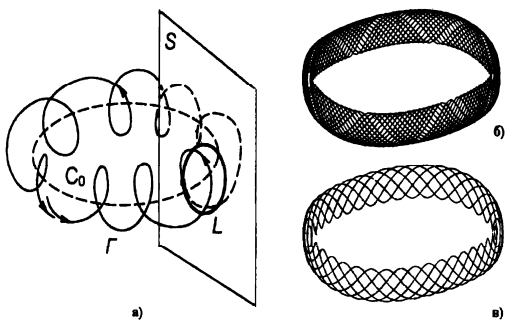


Рис. 29 Бифуркация рождения двумерного тора из предельного цикла C_0: а - траектория на торе в окрестности потерявшего устойчивость цикла C_0; б - эргодический тор; в - резонанс в торе.

При этом цикл $x_0(t,\mu)$ теряет устойчивость (но не исчезает), и одновременно возникает новое устойчивое движение по двумерному тору T^2, задаваемому основной частотой исходного цикла $\omega_0=2\pi/T$ и частотой $\omega_1= \varphi/T=\omega_0\varphi/2\pi$ родившегося в результате бифуркации цикла $u(t) = \sqrt{\mu}\exp(i\varphi/T)$ (рис. 29).

Величина, равная отношению между частотами $\theta=\omega_1/\omega_0)=\varphi/2\pi$. называется числом вращения на торе T^2. Если число вращения рационально, т.е. $\theta = p/q$, где q и $\rho<q/2$ - целые положительные числа, то родившееся устойчивое движение на торе будет периодическим. Если же число вращения иррационально, то фазовая кривая родившегося устойчивого движения образует всюду плотную обмотку тора. Родившийся тор является устойчивым в том смысле, что любая траектория системы стремится к некоторой траектории, расположенной на торе, с некоторой своей асимптотической фазой. При дальнейшем увеличении значений параметра μ фазовый портрет системы будет качественно меняться, демонстрируя переходы от эргодического движения на торе к режимам резонансов.

16.10 Гомоклиническая бифуркация рождения/исчезновения цикла

Гомоклиническая орбита - траектория, которая приближается к неподвижной точке как при $t\to\infty$, так и при $t\to-\infty$. Формирование гомоклинической орбиты при изменении параметра (гомоклиническая бифуркация) может привести к созданию или разрушению периодической орбиты. Для гомоклинической бифуркации, показанной на рис. 37, гомоклиническая орбита образуется при μ=0, а периодическая орбита существует при μ>0, но не для μ<0. При μ→+ период периодической орбиты расходится к бесконечности.

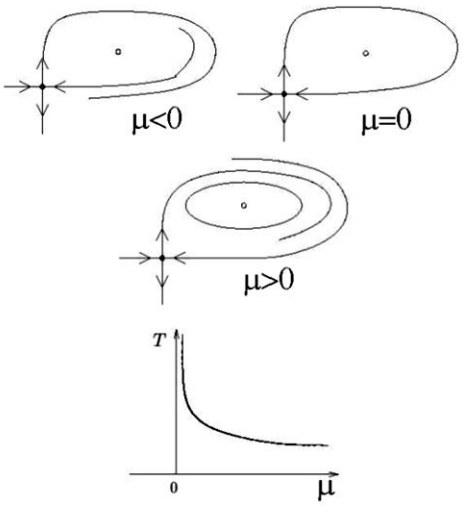
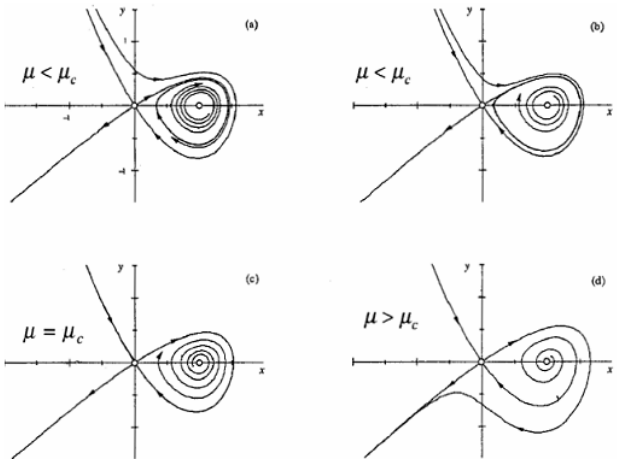


Рис. 30: Верху: фазовое пространство и бифуркационная диаграмма для гомоклинической бифуркации, рождающей устойчивую периодическую орбиту, когда μ увеличивается, проходя через 0. *Открытые кружки показывают неподвижные точки, которые не участвуют в бифуркации. Внизу: Бифуркационная диаграмма, показывающая период периодической орбиты как функцию μ*



Гомоклиническая бифуркация рождения/исчезновения цикла возникает, например, в системе ОДУ:

$$\dot{x} = y;$$

$$\dot{y} = \mu y + x^2 + xy \qquad (48)$$

Можно показать, что в этой системе критическое значение параметра μ_c=-0,8645.

Рис. 31 Гомоклиническая бифуркация.

17. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

Нелинейная динамика базируется на бифуркационной теории динамического (детерминированного) хаоса, которая использует математический аппарат нелинейных систем дифференциальных уравнений включая автономные и неавтономные, диссипативные и консервативные нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения с частными производными и с запаздывающим аргументом. Теория нелинейной и хаотической динамики оказалась способной описать совершенно разные по своей природе научные, технические и социально-экономические процессы и явления с помощью близких моделей, и одних и тех же математических структур - нелинейных дифференциальных уравнений.

Теория нелинейной динамики уделяет существенное внимание хаотическим процессам, процессам возникновения и развития хаоса как в консервативных, так и диссоциативных системах, особенностям хаотических явлений различного типа, а так же проблеме управления хаосом. Интересуется она, однако, не истинным классическим (статистическим) хаосом, а детерминированным (динамическим) хаосам, т.е. частично упорядоченными структурами и процессами, в которых за кажущимся полным беспорядком можно усмотреть какой-то порядок, обнаружить следы предопределённости и как-то характеризовать хаотические процессы (например, найти аттрактор или репеллер), хотя спрогнозировать их долгосрочное поведение всё равно будет невозможно.

Динамических системы, описываемые ОДУ, имеют четыре типа решений: состояние равновесия, периодическое движение, квазипериодическое движение и хаотическое. В данной главе нас интересуют последнее. Основное внимание будет сосредоточено на анализе процессов перехода от регулярной динамики к хаотической, а так же на некоторых свойствах динамического (детерминированного) хаоса.

17.1 Хаос статистический и динамический

Порядок необходим глупцам,
гений же властвует над хаосом.
А. Эйнштейн

Под классическим (идеальным, недерминированным, статистическим, стохастическим) хаосом понимают полный (идеальный) беспорядок, полностью разупорядоченную структуру (например, аморфное тело, на рентгенограмме которого нет каких-либо рефлексов), неупорядоченное, случайное, непрогнозируемое поведение элементов системы, процесс, описываемый чисто статистическими законами (например, броуновское движение, белый шум и т.п.). Процесс статистического хаоса не помнит своей истории и его будущее не определено. Для таких процессов понятия аттрактор не существует.

Беспорядок – отсутствие или нарушение порядка, упорядоченности системы, последовательности в чем-либо.

Хаос – беспорядок, неразбериха, смешение. Понятие возникло от названия в древнегреческой мифологии изначального состояния мира, некой «разверзшейся бездны» (а не беспорядочного состояния), из которой возникли первые божества. Лишь в раннехристианские времена этому слову стали приписывать значение беспорядка. Хаос – первичное состояние Вселенной, бесформенная совокупность материи и пространству (в противоположность порядку).

Хаос – сложное, нерегулярное (апериодическое) изменение состояния физической системы в пространстве и/или во времени.

Хаос – это состояние беспорядка и нерегулярности. Хаотические процессы можно подразделить на два вида: случайные процессы и хаотические процессы.

В хаотическом режиме статистические закономерности определяются числом степеней свободы. Хаос – это отражение сложного поведения большого количества частиц, которые, сталкиваясь, создают картину неупорядоченного поведения. Примерами

хаотических процессов являются: метание шарика в рулетке, броуновское движение частицы под случайными ударами «соседей», беспорядочные вихри турбулентности, образующиеся при течении жидкости с достаточно большой скоростью, диффузия и т.п. В броуновском движении молекул в газовой или жидкой среде имеет место хаотические тепловые перемещения громадного числа молекул (частиц), случайным образом ударяющих по другим молекулам (частицам), вынуждая их к случайным блужданиям. Такой процесс оказывается полностью непредсказуемым, недетерминированным, поскольку точно установить последовательность изменений в направлении движения частицы невозможно. Из этого следует невозможность выведения таких закономерностей, которые позволяли бы точно прогнозировать каждое последующее изменение траектории частицы по предыдущему ее состоянию. Здесь нельзя связать между собой причину и следствие. Однако некоторые усредненные характеристики поведения в состоянии недетерминированного хаоса можно найти, например, расстояние, пройденное частицей за некоторое время.

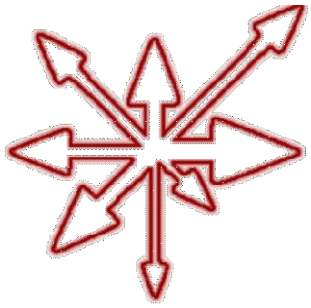


Рис. 1. Символ хаоса.

Истинно хаотический процесс случаен – управлять им нельзя. Хаос – предельный случай беспорядка; это полная непредсказуемость системы, нерегулярность движения, неповторяемость траекторий. Предсказать развитие случайного процесса невозможно, можно лишь ставить вопрос о вероятности того или иного варианта его эволюции, хотя некоторые параметры процесса (математическое ожидание, медиана, дисперсия) оценить удаётся, хотя и не всегда.

Идеальному хаосу противостоит идеальный порядок. Примером является монокристалл с чётко определённым типом кристаллической решётки и расположением атомов. Под порядком понимают чёткую, подчиняющуюся определенному порядку смену событий в окружающем пространстве и во времени. Например, понаблюдав за Луной и Солнцем, мы с высокой точностью можем предсказать даты будущих солнечных и лунных затмений и написать историю этих затмений. Хотя и здесь возможны непредсказуемые флуктуации.

Порядок – гармоничное, ожидаемое, предсказуемое состояние или расположение чего-либо, структурированный хаос.

В теории линейных динамических систем под порядком понимают детерминированный процесс, т.е. процесс, каждый шаг которого предопределен некоторыми закономерностями, которые хорошо известны, так что с большой степью вероятности можно предсказать эволюцию системы (в пределах точности измерений).

Порядок способен трансформироваться в хаос, а хаос рождать порядок. Известные тезисы: *анархия – мать порядка, хаос – порядка отец*; *хаос всегда побеждает порядок, поскольку лучше организован. (Терри Пратчетт); хаос – закономерности, которые мы не сумели распознать (Чак Паланик); хаос – сущность порядка* отражают взаимопревращения порядок-беспорядок.

Между идеальным хаосом и идеальным порядком располагаются в той или иной мере разупорядоченные структуры (например, частично кристаллические полимеры типа полиэтилена или полипропилена) и процессы динамического хаоса, которые внешне выглядят случайными, хаотичными, но управляются вполне определёнными (детерминированными) законами. Оказалось, что вполне упорядоченная структура, развивающаяся по чётко определённому закону, при монотонном изменении управляющего параметра, неожиданно подвергаются бифуркациям, катастрофам, срывается в хаотический режим, в котором один тип хаоса сменяется другим типом, а хаотические и регулярные стадии начинают чередоваться. Описание таких процессов является основной задачей теории нелинейной динамики.

Замечание. Основное различие между статистическим (статическим) и детерминированным видами хаоса заключается в том, что для каждого вида динамического хаоса существует свой аттрактор (регулярный для консервативной системы) и "странный" (фрактальный) для диссипативной системы, тогда как у случайного хаоса (например, диффузии, броуновского движения, белого шума) аттрактора нет. *Детерминированный хаос* относится к ограниченной случайности, им можно управлять и даже прогнозировать, правда, только на короткие отрезки времени.

Если статический хаос несёт разрушение, деструкцию, то динамический хаос способен создавать структуры самой невероятной упорядоченности, обладающие многими осями симметрии, многоступенчатой иерархией, тенденцией к усложнению.

Примерами систем, в которых обнаруживаются элементы случайного, хаотического поведения: атмосфера, турбулентные потоки, некоторые виды аритмий сердца, биологические популяции, общество, как система коммуникаций и его подсистемы: экономические, политические и другие социальные системы, частично кристаллические полимеры и др.

Поведение детерминированной системы кажется случайным, хотя оно определяется детерминированными законами.

В неустойчивых (стохастических) областях фазового пространства расхождение двух изначально бесконечно близких траекторий увеличивается с течением времени экспоненциально. Такие системы и считают хаотическими. Возникновение хаоса может показаться несовместимым с основным свойством детерминированной системы, подразумевающим возможность однозначного предсказания конечного состояния по начальному состоянию. Однако оказывается, что допустим хаотический режим движения динамической системы, при котором сколь угодно малая неопределенность в начальных условиях быстро нарастает во времени, так что предсказуемость поведения системы становится недостижимой на достаточно больших интервалах времени. Такого рода режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени.

В фазовом пространстве диссипативных систем этим процессам отвечают странные или хаотические аттракторы, являющиеся образом детерминированного хаоса. С подобными аттракторами связаны новые (по отношению к классической геометрии) геометрические объекты – фрактальные множества. Важным свойством является размерность странного аттрактора, которая обычно является дробной (фрактальной), а не целой. В частном случае трёхмерного фазового пространства фрактальное множество странного аттрактора выглядит как набор бесконечного числа слоёв или параллельных плоскостей, причём расстояние между некоторыми из них бесконечно мало. Существование фрактальной структуры у подобных притягивающих множеств при асимптотическом стремлении к ним фазовых траекторий можно отнести к одной из парадигм нелинейной динамики.

В конечномерных гладких динамических системах могут наблюдаться принципиально различные формы хаоса. В макромире возможен диссипативный хаос при котором близкие фазовые траектории вне зависимости от начальных условий стремятся со временем к нерегулярному (странному, дикому и т.п.) аттрактору; динамический хаос в консервативных и гамильтоновых системах и консервативный хаос, для которого всё фазовое пространство является большим «хаотическим морем» с беспорядочно расположенными внутри него эллиптическими островами, где близкие траектории не стремятся к одному аттрактору, а решения существенно зависят от конкретных начальных условий; и смешанная динамика, характеризующаяся принципиальной неотделимостью в фазовом пространстве аттракторов, репеллеров и консервативного поведения траекторий. В микромире в квантовомеханических системах возможен квантовый хаос при котором в силу принципа неопределённости понятие близких траекторий вообще отсутствует.

В данной главе мы под хаосом будем подразумевать именно динамический хаос и будем интересоваться системой, которая без всяких шумов и случайностей ведёт себя хаотически.

Детерминированный (регулярный, динамический) хаос – явление в теории динамических систем, при котором поведение нелинейной системы выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется детерминистическими законами. Это нерегулярное апериодическое детерминированное поведение динамической системы, обладающее основными свойствами случайного процесса и крайне чувствительное к начальным условиям. Бесконечно малое возмущение граничных условий для хаотической динамической системы приводит к конечному изменению траектории в фазовом пространстве. Хаос – случайный процесс, наблюдаемый в динамических системах, не подверженных влиянию шумов или каких-либо случайных сил.

Хаос динамический (хаос детерминированный) – нерегулярное, апериодическое изменение состояния (движение) динамич. системы, обладающее осн. свойствами случайного процесса.

Грань хаоса – критическая точка системы, в которой незначительное изменение может либо вызвать хаотическое поведение системы, либо замкнуть систему в статическом состоянии. Эта точка аналогична фазовому переходу в термодинамике. В этой точке сложность (количество информации, требуемое для описания системы) максимальна. Без внешнего воздействия система обычно стремится к точке грани хаоса.

Напомним, что принцип детерминизма гласит: если мы знаем текущее состояние какой-либо системы и законы её эволюции, то мы можем предсказать будущее поведение этой системы. Однако, в природе есть системы, полностью детерминистические в ньютоновском смысле, но их будущее в определённом интервале параметров принципиально нельзя рассчитать.

Теория динамического хаоса – математический аппарат, описывающий поведение нелинейных динамических систем, подверженных при определённых условиях явлению, известному как хаос.

Для количественного измерения хаотичности некоторой системы используется понятие энтропии, которая одновременно характеризует информационную ёмкость системы. Основным атрибутом динамического хаоса является чувствительность к малым возмущениям начальных условий, что делает невозможным предсказание будущего состояния на временах больше, чем некоторый характерный масштаб, который обычно зависит логарифмически от неточности начальных условий.

Теория динамического хаоса – наука о непредсказуемом поведении простых динамических систем.

Хаотическая динамическая система – система, в которой все ее траектории ограничены, но быстро расходятся в каждой точке фазового пространства; в системе детерминированного хаоса небольшое изменение начальных условий приводит к существенным изменениям во всей траектории; процессы в динамической системе описываются странным аттрактором.

От регулярного движения детермированный хаос отличается сложными, неповторяющимися траекториями и непредсказуемостью поведения системы при больших временах (зависимость от начальных условий). От случайного процесса детермированный хаос отличается тем, что в нём нерегулярность происходит из самой системы, а не от внешнего фактора (шум, флуктуации).

Обратным к динамическому хаосу является динамическое равновесие и явления гомеостаза.

Динамическое равновесие – состояние системы или структуры, в которой, несмотря на ее изменения, общее соотношение или конфигурация сил и энергии остается постоянным.

Гомеостаз – саморегуляция, способность открытой системы сохранять постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия. Стремление системы воспроизводить себя, восстанавливать утраченное равновесие, преодолевать сопротивление внешней среды.

Существуют два класса динамических систем – консервативные (и гамильтоновы) системы с динамикой, сохраняющей начальный объём фазового пространства, и диссипативные системы, для которых с течением временем облако точек в фазовом пространстве R^N сжимается и собирается в итоге на одном или нескольких аттракторов (притягивающее множество точек в фазовом пространстве, к которому приближаются все соседние траектории после затухания переходных процессов).

Диссипативная среда – распределенная физическая система, в которой энергия одних движений или полей (обычно упорядоченных) необратимым образом переходит в энергию других движений или полей (обычно хаотических).

Гамильтонова система – частный случай динамической системы, **описывающей физические процессы без диссипации. В ней силы не зависят от скорости.**

Гамильтонова (каноническая) система – система обыкновенных дифференциальных уравнений для $2n$ неизвестных $p=(p_1, ..., p_n)$ («обобщенные импульсы») и $q=(q_1,...,q_n)$, («обобщенные координаты»), имеющая вид:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \dots, n$$

где H - некоторая функция от (p, q, t), называемая Гамильтона функцией, или гамильтонианом, системы.

В автономном случае (когда H не зависит явно от времени t) гамильтонова система называется **консервативной системой**, поскольку в этом случае функция H (имеющая физический смысл энергии) является первым интегралом (т. е. энергия сохраняется при движении).

Консервативная система – система, в которой сумма кинетической энергии и потенциальной энергии системы постоянна. Может быть как закрытой, так и открытой.

Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от вида траектории, точки приложения этих сил и закона их движения, и определяется только начальным и конечным положением этой точки.

Неконсервативная сила – сила, которая зависит от траектории. Неконсервативные силы зависят от вектора скорости (от его модуля или направления). Работа таких сил может приводить к диссипации энергии. Неконсервативными являются силы трения и сопротивления.

Хаотическая динамика свойственна всем нелинейным физическим явлениям. Детерминированный хаос возникает при разрушении порядка. Конкретный его вид зависит от путей его возникновения. Хаос конструктивен в самой своей разрушительности: он «выжигает» все лишние структурные образования - нежизнеспособные, неустойчивые, не встраивающиеся в общую структуру системы.

Хаотическая - любая система, способная претерпевать существенные изменения в результате малейшей модификации исходных условий, причём невозможно предугадать, в какую сторону пойдут эти изменения. Она одновременно детерминирована (в теории) и непредсказуема (на практике). Наше знание об её актуальном состоянии никогда не бывает настолько точным, чтобы прогнозировать отдаленные во времени состояния. Однако при всей своей непредсказуемости хаотические явления детерминированного типа всё же не относятся к числу иррациональных.

Причиной появления хаоса является неустойчивость (чувствительность) по отношению к начальным условиям и параметрам: малое изменение начального условия со временем приводит к сколь угодно большим изменениям динамики системы. Динамику, которая чувствительна к малейшим изменениям начальных условий системы, из которых начинается её развитие, и в которой эти малейшие отклонения со временем многократно приумножаются, затрудняя предсказание будущих состояний системы, называют хаотичной. Например, траектория движения механической системы определена, если даны начальные условия. Если система устойчива, не хаотична, то незначительное изменение начальных условий, из которых начинается движение, не приведёт к заметному отличию новой траектории от прежней; возможно даже, что новая траектория движения

со временем совпадёт с прежней. Но если система хаотична, неустойчива, то хотя сначала старая и новая траектории близки, однако со временем их траектории расходятся, т. е. система проявляет высокую чувствительность к начальным условиям. Так как начальное состояние системы нельзя задать абсолютно точно, то приходится рассматривать некоторую область начальных условий. При движении в ограниченной области пространства экспоненциальная расходимость с течением времени близких орбит приводит к перемешиванию начальных точек по всей области. После такого перемешивания не имеет смысла говорить о координате конкретной частицы, более целесообразным является переход к статистическому описанию процесса, т. е. к определению вероятности нахождения частицы в некоторой точке.

В фазовом пространстве *детерминированный хаос* отображается непрерывной траекторией, располагающейся во времени без самопересечения (иначе процесс замкнулся бы в цикл) и постепенно заполняющей некоторую область фазового пространства. Здесь любую сколь угодно малую зону фазового пространства пересекает бесконечно большое количество фрактально организованных отрезков траектории. Это и создает в каждой зоне случайную ситуацию – хаос. При этом, несмотря на детерминизм процесса ход его траектории непредсказуем: не удаётся предвидеть или хотя бы грубо предсказать поведение системы на достаточно большом отрезке времени.

Наблюдаемое во времени хаотическое поведение возникает не из-за внешних источников шума, не из-за бесконечного числа степеней свободы и не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические). Настоящая первопричина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства. Невозможно предсказать длительное поведение таких систем, поскольку начальные условия можно задать лишь с конечной точностью, а ошибки экспоненциально нарастают. При решении такой нелинейной системы уравнений на компьютере, результат на всё более дальних временах зависит от всё большего количества цифр в (иррациональных) числах, представляющих начальные условия. Так как цифры в иррациональных числах распределены нерегулярно, траектория становится хаотической. Хаотические процессы в диссипативных системах с потерями обнаруживают фрактальную структуру фазовых портретов, в то время как в бездиссипативных системах такая структура отсутствует. Важным обстоятельством является тот факт, что степень упорядоченности динамического хаоса довольно часто можно рассчитать. Меру даёт геометрия фракталов.

Системы детерминированного хаоса позволяют по другому относиться к использованию статистических подходов к повышению надёжности эксперимента. Согласно традиционной статистике, чем больше мы проведём параллельных экспериментов, тем надежнее будут установлены изучаемые зависимости. К детерминированным системам это абсолютно не применимо – здесь имеет место эффект принципиальной невоспроизводимости эксперимента. Мы можем ставить один и тот же эксперимент, точнейшим образом воспроизводить начальные условия, и получать повторяемые результаты, но в один прекрасный момент (предсказать его мы не можем) наблюдения начнут давать совершенно несхожие результаты.

Теория динамического хаоса утверждает, что сложные нелинейные системы наследственно непредсказуемы, но, всёже некоторые их свойства выразить можно, правда не в точных равенствах, а в фазовых портретах, графиках регулярных или странных аттракторов, во фракталах и т.п. Поэтому теория хаоса, при всей своей непредсказуемости, есть наука о предсказуемости нестабильных систем. Теория хаоса сосредотачивает усилия не на беспорядке системы – наследственной непредсказуемости системы – а на унаследованном ей порядке – общем в поведении похожих систем. Динамический хаос - это порядок. Порядок в высшем смысле!

Система (например, консервативная) выглядит стабильной и устойчивой, но эта стабильность не является неизменной. При определенных внешних условиях характер коллективного взаимодействия элементов изменяется радикально. Доминирующую роль начинают играть положительные обратные связи, которые не подавляют, а наоборот – усиливают индивидуальные движения составляющих. Флуктуации, малые движения, незначительные прежде процессы выходят на макроуровень, так что возникают новые структуры, нового порядка, новой организации в исходной системе.

Флуктуации – случайные отклонения характеристик системы от средних значений. Флуктуации, будущие альтернативы, конкурируют, и побеждает наиболее быстрорастущая из них – порядок через флуктуации. Это и есть процесс самоорганизации в режиме становления.

Флуктуации – обусловленные случайными факторами небольшие колебания (случайные отклонения мгновенных значений) физических и иных величин вокруг средних значений. Служат показателем хаотичности процессов на микроуровне системы, которые при некоторых условиях могут играть роль "пускового механизма" для изменения направления развития системы.

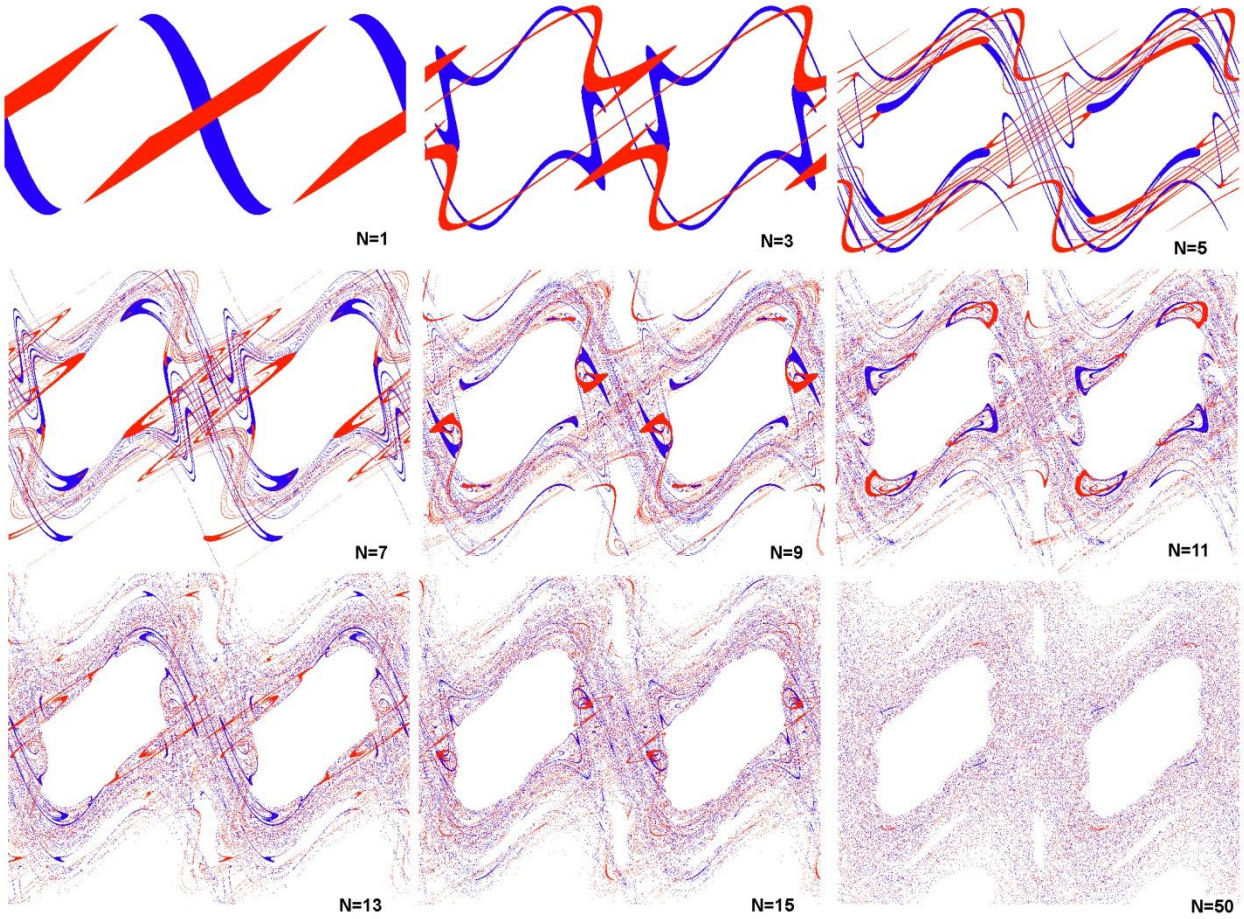


Рис. 2. Эволюция стандартного отображения при увеличении числа итераций N. Демонстрация эффекта перемешивания.

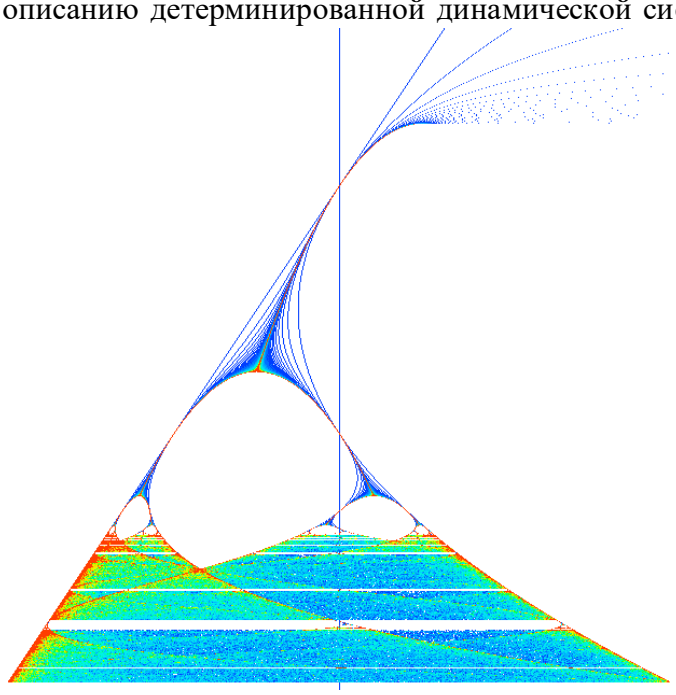
Чем дальше система уходит от равновесия, тем больше колебательных частот появляется в системе. Взаимодействие колебаний с разными частотами способствует возникновению больших флуктуаций. Область на бифуркационной диаграмме, определяемая значениями параметров, при которых возможны сильные флуктуации, обычно принято называть хаотической. Но это не простой хаос. В нем содержатся те аттракторы, на один из которых система выйдет, образовав диссипативную структуру. Такой хаос чреват порядком, он-то и называется детерминированным хаосом, в отличие от теплового хаоса, который соответствует равновесным состояниям, определяемым в термодинамике принципом максимума энтропии. Динамическая система в хаотическом

состоянии – это своего рода сепаратор, отбрасывающий большинство случайных последовательностей и сохраняющий лишь те из них, которые совместимы с динамическими законами данной системы.

Начальное состояние реальной физической системы нельзя определить с абсолютной точностью. Можно задать только распределение вероятности нахождения системы в некоторой (малой) область фазового пространства. В течении некоторого времени траектории из начальной области движутся вместе и этот "пакет" действительно ведет себя как частица. Однако неустойчивость приводит к растяжению (и деформации) начальной области и расползанию её по фазовому пространству (рис. 2).

Этот процесс напоминает расплывание капли чернил в жидкости при перемешивании. Если движение ограничено в пространстве, то через некоторое время пакет перемешивается по этой области. Так как конечное состояние опять нельзя определить абсолютно точно, то следует провести усреднение (огрубление) распределения на малых масштабах. После этого удаётся предсказать только вероятность нахождения системы в той или иной точке фазового пространства.

На рис. 2 показано расплывание красной квадратной области при итерациях стандартного отображения. N - число итераций. Так, например, для рассмотренного выше квадратичного отображения плотность распределения точек орбиты одинакова почти для всех начальных x_o. Поэтому на больших временах естественно перейти к статистическому описанию детерминированной динамической системы и заменить среднее по траектории на среднее по инвариантному распределению.



Сложно устроенное множество может оказаться отталкивающим странным канторовым репеллером. Близкая к нему траектория в течение длительного времени хаотически блуждает в его окрестности, прежде чем выйти на регулярный аттрактор. Это явление называется переходным хаосом.

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма квадратичного отображения.

Для квадратичного отображения $x_{n+1}=f_c(x_n)=x_n^2+C$ области значений параметра C, соответствующие регулярной динамики плотны в интервале [-2, 1/4]. Поэтому сколь угодно близко к C_{ch} с хаотической динамикой найдется регулярная область с притягивающим циклом. Однако при приближении к C_{ch} период орбиты растет, длительность переходного хаоса стремится к бесконечности и практически невозможно отличить регулярную динамику от хаотической. Сложное переплетение области регулярной и хаотической динамики показано на бифуркационной диаграмме (рис. 3).

Следует различать детерминированный хаос в **консервативных системах** (например, движение планет, подчиняющееся гамильтоновым уравнениям) и в **диссипативных системах** (например, возбуждаемый маятник с трением). Обычно обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие такие системы, имеют довольно простые решения (например: осциллятор, кеплеровские орбиты планет, предельные циклы генератора Ван-дер-Поля). Однако, оказалось, что и простые нелинейные системы могут обладать чрезвычайно запутанными траекториями, которые выглядят совершенно хаотическими.

Возможность хаотического поведения в **консервативных системах** известна давно. В 1892 А. Пуанкаре при поиске решений задачи трёх тел в небесной механике обнаружил, что в некоторых механических системах, эволюция которых во времени определяется уравнениями Гамильтона, возможно непредсказуемое хаотическое поведение. Оказалось, что решения многих задач динамики чувствительны к начальным условиям и поэтому детали движения тел по орбитам оказываются непредсказуемыми. Например, неинтегрируемая задача трёх тел, в определённых условиях приводит к полностью хаотическим траекториям.

Частным случаем задачи трёх тел является движение пробной частицы в гравитационном поле двух неподвижных точечных масс. Даже если движение происходит в одной плоскости, траектория частицы выглядит чрезвычайно сложной и запутанной. Она, то обвивается вокруг одной из масс, то неожиданно перескакивает к другой. Первоначально близкие траектории очень быстро расходятся.

Впоследствии было показано, что неинтегрируемых систем в механике много. Неустойчивость – их важная характеристика. Теперь известно, что в классической механике движение в фазовом пространстве не является ни полностью регулярным, ни полностью нерегулярным, а тип траектории зависит от выбора начальных условий.

Консервативные системы не могут иметь притягивающие области в фазовом пространстве, т. е. в них невозможны асимптотически устойчивые неподвижные точки, предельные циклы или странные аттракторы.

В **диссипативных системах** хаотическая динамика развивается в рамках определённой структуры. Эту структуру трудно изучать обычными методами изучения динамики, например, откладывая зависимость отклика от времени или получая частотный спектр. Порядок следует искать в фазовом пространстве (по осям которого отложены координата и скорость). Попутно можно обнаружить, что хаотические движения обладают фрактальной структурой.

Диссипативные структуры являются результатом противоборства двух противоположностей: накачки энергии средой в систему и оттока энергии за счет теплопроводности или излучения; притока массы реагирующих веществ и рассеяния их за счет диффузии или стока продуктов реакции. Иными словами, диссипативные структуры возникают на потоке энергии или массы (а также информации).

В отличие от консервативных, диссипативные динамические системы, характеризуются сокращением объемов фазового пространства с увеличением времени. Из-за диссипации динамика системы, фазовое пространство которой является n-мерной, в конечном итоге будет ограничено подмножеством размерности, меньшим n.

Диссипативные системы независимо от вида устойчивости **уменьшают фазовый объем** во времени до нуля. Поэтому диссипативная система может переходить в упорядоченное состояние в результате неустойчивости предыдущего неупорядоченного состояния. Первоначально устойчивая диссипативная структура в процессе своей эволюции достигает критического состояния, отвечающего порогу устойчивости структуры, начинает осциллировать, а возникающие в ней флуктуации приводят к самоорганизации новой, более устойчивой структуры на данном иерархическом уровне эволюции. При этом важным является тот факт, что как и в диссипативных системах, переходы устойчивость – неустойчивость – устойчивость контролируются кумулятивной обратной связью. Она отличается от регулируемой извне обратной связью тем, что позволяет самоорганизовывать такую внутреннюю структуру, которая повышает степень ее организации. Таким образом, кумулятивная обратная связь за счёт накопленной внутренней энергии позволяет системе осуществлять не просто обратное взаимодействие, учитывающее полученную информацию о предыдущем критическом состоянии, но и обеспечивать сохранение или повышение организованности структур.

Тип диссипативной структуры в значительной степени зависит от условий её образования. Например, существенную роль в отборе механизма самоорганизации могут

играть внешние поля, в частности, гравитационное или магнитное поля Земли для ряда физических и биологических систем. В сильно неравновесных условиях системы начинают «воспринимать» внешние поля, в результате чего появляется возможность отбора тех конфигураций системы, которые учитывают внешнее воздействие.

К числу важнейших свойств нелинейных систем относится их **когерентность**.

Когеретность – принцип, заключающийся в утверждении, что все существующее находится во взаимосвязи.

Система ведёт себя как единое целое, т.е. так, как если бы между любыми частями системы существовали сколь угодно дальнодействующие связи. Равновесному состоянию термодинамической системы соответствует тепловой хаос, в котором частицы системы ведут себя независимо друг от друга. Такой хаос совершенно бесплоден. Источником порядка является неравновесность. Она порождает порядок из детерминированного хаоса, где частицы ведут себя когерентно.

При описании детерминированного хаоса используют такие понятия, как фазовый объём, точки равновесия, критерий устойчивости, показатель Ляпунова, бифуркации, аттракторы и др. Остановимся на некоторых из них несколько подробнее.

17.2 Предсказание статического поведения системы

Достижением теории динамических систем стало открытие хаотической динамики. Возникновение хаоса непосредственно связано с неустойчивостью, присущей фазовым траекториям системы. Таким образом, задача анализа неустойчивости конкретного режима движения является одной из наиболее важных в стохастической теории динамических систем.

При изучении статистических свойств орбит в фазовом пространстве, порождаемых измерительными преобразованиями, рассчитывают средние с течением времени. Некоторые величины, такие как показатели Ляпунова (которые измеряют скорость расхождения близлежащих орбит) или метрическую энтропию (которая измеряет скорость производства информации наблюдений системой) можно рассматривать как средние значения времени. Существование таких средних гарантировано.

Вполне детерминированные системы (т. е. системы без случайных компонент) малых размеров (с небольшим числом переменных состояния) и с простыми нелинейностями (одна квадратичная функция) могут проявлять стохастическое поведение. Это означает, что для хаотических систем, если измерения, определяющие их состояния, ведутся в конечных точках, наблюдаемый результат может быть случайным и непредсказуем. Математическое описание таких систем строится с учётом нелинейности некоторых основных функциональных связей системы. При определенных конфигурациях параметров равновесие системы может потерять свою устойчивость, что приведет к устойчивому периодическому решению (предельный цикл). Потеря устойчивости связана с положительным значением показателя Ляпунова, при котором динамической системы становится непредсказуемым, так что предсказать возможность и характер хаотического поведения с достаточной точностью невозможно.

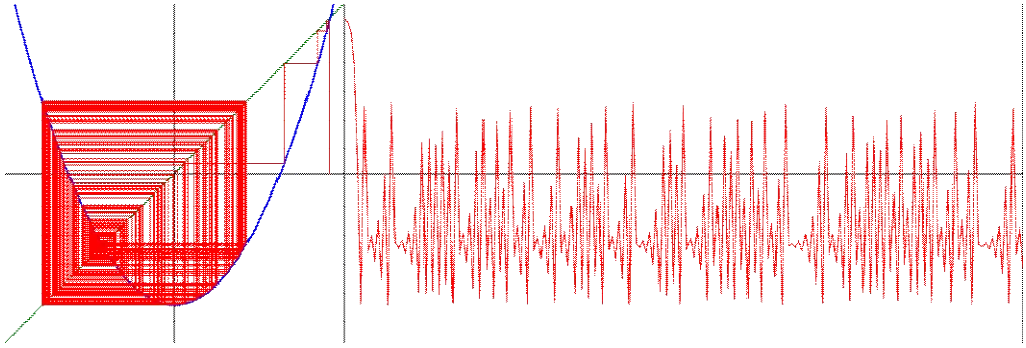


Рис. 4. Хаотическая траектория квадратичного отображения с положительным показателем Ляпунова L, вычисленным по отрезку такой траектории.

Траектория динамической системы, заданной дифференциальным уравнением d$\boldsymbol{x}$/dt = $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ или дискретным отображением $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n)$, однозначно определяется начальным состоянием $\boldsymbol{x}_0$. Хаос ассоциируется с непредсказуемым случайным поведением и поэтому ("по определению") орбиты детерминированной системы не могут быть хаотическими. Однако нелинейные системы часто обладают неустойчивыми траекториями. В этом случае расстояние δx_k между точками близким их траекторий экспоненциально увеличивается со временем и неустойчивость можно обнаружить по положительному показателю Ляпунова

для дифференциального уравнения (показатель Ляпунова – λ(x))

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = f^{(N)}(x_0+\varepsilon) - f^{(N)}(x_0) \qquad (1а)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\frac{df^{(N)}(x_0)}{dx_0} \qquad (1б)$$

для отображения (показатель Ляпунова – Λ)

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} L_n, \quad L_n = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{\delta x_n}{\delta x_0}\right|. \qquad (2)$$

Предсказуемость – мера регулярности в характере повторяющихся изменений. Например, сезонные колебания условий среды предсказуемы, а изменения, происходящие изо дня в день нет.

Грубо оценить предсказуемость можно с помощью расчёта энтропии. Пусть $p_1,\ldots,p_N$) – конечное распределение вероятности, т.е. $p_i \geq 0$ для всех i и $p_1+\ldots+p_N=1$ при возникновении событий $A_1,\ldots,A_N$. Энтропия этого распределения:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log(p_i)$$

в которой 0log0=0. H – мера степени неопределенности (неточности) события. Наибольшее значение log$N$ достигается при $p_1=\ldots=p_n=1/N$: распределение имеет максимальную неопределенность, а его минимальное значение (ноль), когда одно из p равно единице, а остальные равны нулю.

Энтропия используется для описания поведения состояния пространства динамической системы. В случае единственной траектории для больших времен (в аттракторе) для $P=P_1,\ldots,P_N$ – конечного μ-мерного разбиения X, энтропия для P имеет вид

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{N} \mu(P_i)\log\mu(P_i)$$

где $\mu(P_i)$ – мера вероятности нахождения системы в «клетке» P_i.

Существует однозначная связь между энтропией и предсказуемостью. Нулевая энтропия означает, что поскольку наблюдение за состоянием динамической системы продолжалось долго и велось с хорошей точностью, то неопределенности в предсказании будущего нет. Напротив, положительная энтропия означает, что независимо от того, как долго отслеживали динамику системы и от того, насколько наблюдения были информативными, будущее непредсказуемо. H увеличивается линейно при увеличении числа наблюдений, а число возможных следствий возрастает экспоненциально. С этой точки зрения легко понять, почему «простые» системы (те, что характеризуются аттракторами, представляющими собой неподвижные точки или периодические орбиты) имеют нулевую энтропию. В переходных процессах у этих систем возможные последовательности состояний ограничены, и их число не увеличивается с количеством наблюдений. Напротив, в сложных системах число возможных последовательных состояний растет экспоненциально с числом наблюдений. Для конечномерных детерминированных систем, характеризуемых регулярными аттракторами, энтропия ограничена сверху суммой положительных показателей Ляпунова и, следовательно,

конечна (определяется как энтропия Колмогорова-Синая (метрическая энтропия), которую рассчитать, однако, достаточно трудно).

Энтропия тесно связана с показателями Ляпунова. Показатели Ляпунова, являясь усредненными характеристиками аттрактора, описывают его свойства независимо от начальных условий. Исключение представляют лишь начальные условия, соответствующие нетипичным траекториям, имеющим меру нуль. Энтропия положительна в том и только в том случае, когда фазовая траектория в среднем экспоненциально неустойчива на аттракторе. Значит, спектр показателей Ляпунова такой траектории обязан содержать положительный показатель.

Формула, связывающая энтропию Колмогорова с положительными показателями Ляпунова, имеет вид:

$$K_1 = \sum_{\lambda_1 > 0} \lambda_i \qquad (3)$$

т.е. энтропия равна сумме положительных показателей Ляпунова.

К-энтропия является удобной мерой хаоса: она равна нулю для регулярного движения, бесконечна для случайных систем, положительна и постоянна для систем с детерминированным хаосом. Для одномерных отображений К-энтропия равна показателю Ляпунова. Для систем большей размерности информация о системе теряется, так как ячейка, в которой прежде находилась система, расширяется на новые ячейки в фазовом пространстве со скоростью, определяемой ляпуновскими показателями. Поэтому правдоподобно, что скорость изменения *K*-энтропии, с которой происходит потеря информации о системе, равна средней сумме положительных показателей Ляпунова и зависит от инвариантной плотность аттрактора.

Количественной мерой стохастичности диссипативных систем служат характеристические показатели Ляпунова, рассчитываемые по известным уравнениям движения. При этом устойчивость траектории вдоль собственного вектора $e^k(t)$ определяется характеристическим показателем Ляпунова λ_k. Для *N*-мерного фазового пространства устойчивость траектории определяется набором из *N* показателей Ляпунова, которые, в случае расположения их в убывающем порядке $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$, образуют спектр характеристических показателей Ляпунова (ЛХП) фазовой траектории. С помощью показателей Ляпунова проверяется чувствительность системы к вариациям начальных условий. Если траектории устойчивы по Ляпунову, то произвольное начальное возмущение, в среднем, вдоль траектории не растет. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр характеристических показателей Ляпунова (ЛХП) не содержал положительных показателей; случаю положительности хотя бы одного из них отвечает хаотическое движение системы. Таким образом, критерий хаоса в терминах показателя Ляпунова имеет следующий вид:

$\lambda > 0$ – хаотическое движение в динамической системе

$\lambda \leq 0$ – регулярное движение в динамической системе

Положение равновесия является аттрактором, если оно асимптотически устойчиво во всех направлениях, т.е. спектр ЛХП состоит только из отрицательных показателей (устойчивый узел или фокус). Если состояние равновесия неустойчиво во всех направлениях, то оно является репеллером (неустойчивый узел или фокус). Если спектр ЛХП включает как положительные, так и отрицательные показатели, то состояние равновесия принадлежит к седловому типу (простое седло или седло-фокус). Показатели Ляпунова позволяют исследовать также поведение фазовых траекторий в окрестности периодических, квазипериодических или хаотических решений нелинейной системы ОДУ. Непериодические решения уравнений ОДУ соответствуют хаотическим аттракторам сложной геометрической структуры, которые имеют, по крайней мере, один положительный показатель Ляпунова и, как следствие, дробную Хаусдорфову (фрактальную) размерность.

С показателями Ляпунова, определяющими меру расхождения траекторий, теснейшим образом связана энтропия Синая-Колмогорова (*K*-этропия для динамических систем). Эта величина равна сумме положительных показателей Ляпунова, характеризующих количественную меру процесса хаотизации. При этом положительность К-энтропии указывает на зарождение стохастичности или, другими словами, на экспоненциальные расходимости близлежайших территорий, локальная неустойчивость которых по своей физической сути характеризует статистические свойства динамической системы. Существует также тесная связь между показателями Ляпунова и дробной Хаусдорфовой (фрактальной) размерностью аттрактора.

Область временного (и/или пространственного) хаоса может возникать практически в любой нелинейной динамической системе уже при малом числе степеней свободы. Так, исходные представления о случайных процессах, характеризующих статистические ансамбли и большие динамические системы, оказываются переменными уже при числе степеней свободы $N \geq 3/2$, например, когда на систему с одной степенью свободы действует непериодическая сила. Энтропия зависит от скорости, с которой число новых возможных последовательностей «зернистых» состояний системы растет с увеличением числа наблюдений. Но эта скорость строго связана с темпом расхождения близлежащих орбит, который измеряется показателями Ляпунова. Таким образом, наличие одного положительного показателя Ляпунова на аттракторе сигнализирует о положительной энтропии и непредсказуемости системы.

17.3 Сценарии перехода к хаосу

Переход системы к хаотическому поведению может быть обусловлено различными причинами и идти по различным маршрутам. Реализуются различные сценарии эволюции режимов динамики нелинейных систем при изменении управляющего параметра: через каскад бифуркаций Фейгенбауэра удвоения периода устойчивых циклов, через касательную бифуркацию (перемежаемость) по сценарию Помо-Манневиля, по сценарию Рюэля-Такенса через квазипериодичность и разрушение трёхмерного тора с образованием странного аттрактора и через возникновение цикла периода $3 \to 5 \to 5 \to 3 \cdot 2 \to 5 \cdot 2 \to 7 \cdot 2 \to 3 \cdot 2 \cdot 2 \to \ldots$, по квазипериодическому маршруту. Однако их, видимо, можно свести к одному маршруту.

Переход к диффузионному или пространственно-временному хаосу в диссипативных системах уравнений с частными производными осуществляется по сценарию Рюэля-Такенса.

К сожалению, современное состояние теории не позволяет определить предпосылки хаотического поведения с достаточной точностью и общностью.

Хаос может представлять собой некоторое многопериодическое движение. Если среди его частот есть несоизмеримые, то реализация представляет сложное изменение со временем вектора состояния хаоса (например, с возникновением многопериодических движений связан один из сценариев появления турбулентности). Сложная динамика может возникать также за счёт того, что под действием внешних факторов параметры системы меняются со временем.

Хаос возникает, если в системе протекают случайные процессы. Такие процессы могут быть связаны со случайными внешними воздействиями, а также с флуктуациями внутренних параметров. Примером случайного, хаотического процесса является броуновское движение. Динамика случайных процессов описывается уравнениями для физических характеристик – координат, скоростей и др., включающими случайные параметры (уравнениями Ланжевена), а также уравнениями для вероятностных характеристик системы. Например, если процесс марковский, то при определённых допущениях эволюция функции распределения f случайной величины определяется из уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Случайный процесс характеризуется такими параметрами, как среднее, дисперсия, корреляционная функция, спектральная функция.

Важным признаком случайности процесса является убывание корреляций по мере увеличения интервала времени между сопоставляемыми наблюдениями:

Сложное поведение, обладающее основными свойствами случайного процесса, обнаруживается у многих нелинейных динамических систем (хаос динамический). Происхождение хаоса в таких системах связывают с тем, что нелинейные системы можно рассматривать как совокупность нескольких взаимодействующих подсистем, обладающих различными динамическими свойствами. Хаотическая динамика возникает в результате различного рода процессов синхронизации колебаний указанных подсистем.

В квантовых системах, описываемых линейным уравнением Шрёдингера, стохастические колебания невозможны. Однако если характерные времена переходных процессов велики, может наблюдаться явление квантового хаоса. Возможность подобного режима легко понять из того, что в классическом пределе система будет описываться нелинейными уравнениями движения, для которых такая динамика известна.

Структурно устойчивые системы – это системы в окрестностях которых не происходят бифуркации. При наличии точек неустойчивости, в системе возникают бифуркации, ведущие к хаосу, катастрофам, а иногда и к новым структурам, причём более сложным, чем исходные.

Состояние системы неустойчиво, если любые отклонения от неё со временем увеличиваются. В точке неустойчивости система становится открытой, чувствительной к воздействию внешних полей, получает информацию, ранее недоступную ей. Такие состояния неустойчивости называют точками бифуркаций и характеризуют рубеж между новым и старым. Только в точках бифуркации можно несиловым путем повлиять на выбор поведения системы. Именно свойство неустойчивости системы в критические моменты позволяет расширять пространства состояний системы, генерировать информацию в перемешивающем хаотическом слое.

Расмотрим эффект перемешивания несколько подробнее.

Замечание. Развитие динамической системы представляет чередование динамических и хаотических стадий (точнее стадий «перемешивающего слоя»): Динамическая стадия-1 (содержит меньшее количество информации) → Хаос → Динамическая стадия-2 (содержит большее количество информации) → Хаос → …

Перемешивание – свойство системы «забывать» информацию о начальном условии с течением времени. Более точно, различают топологическое и метрическое перемешивание. Первое относится к теории непрерывных систем и, грубо говоря, утверждает, что сколь бы точно ни было известно начальное положение точки, с течением времени возможное её местонахождение становится всё более и более плотным множеством. Второе относится к теории измеримых систем – систем, сохраняющих некоторую меру – и утверждает, что распределение абсолютно непрерывной относительно меры (например, ограничения на заданное подмножество начальных условий) при итерациях стремится к самой мере .

Перемешивающий слой – область фазового пространства мультистабильной динамической системы, обладающая следующими свойствами: – все траектории, исходящие из определенной области начальных условий, в момент времени t_0 попадают в перемешивающий слой; – все траектории в момент времени T выходят из перемешивающего слоя и переходят в область мультистабильного динамического режима; - в области перемешивающего слоя имеет место стохастический режим.

Существование хаоса в динамических системах связано со специфической неустойчивостью, называемой локальной неустойчивостью и определяемой след. образом. Пусть $z(t)$ – точка в фазовом пространстве, определяющая состояние системы в момент времени t. Совокупность всех точек $z(t)$ в различные моменты t образует фазовую траекторию системы, выходящую из точки $z_0=z(0)$.

Обозначим через $D(t)=||z_1(t)-z_2(t)||$ расстояние между двумя точками в фазовом пространстве, принадлежащими разным траекториям $z_1(t)$ и $z_2(t)$ в момент времени t.

Пусть система совершает финитное движение в фазовом пространстве. Такая система называется локально неустойчивой, если для траекторий, близких в начальный момент времени, существует направление, в котором

$$D(t) = D(0)\exp(h_0 t)\,,\ h_0 > 0 \qquad (4)$$

Свойство (1) имеет место для множества начальных условий, имеющих конечную меру в фазовом пространстве системы, и при сколь угодно малых возмущениях начальных условий (т. е. при $D(0)\to 0$). Поэтому локальную неустойчивость называют также чувствительностью к возмущению начальных условий.

Вследствие финитности движения (конечности объёма Г фазового пространства, занимаемого траекториями) траектории не могут разойтись на расстояния, превышающие характерный размер области *Г*, и начинают запутываться. Как следствие, системы с локальной неустойчивостью обладают свойством перемешивания.

Это свойство, введённое в статистическую физику в работах Дж. У. Гиббса, является более тонким, чем свойство эргодичности. Пусть *z(t)* – фазовая точка, характеризующая состояние системы в момент времени *t*, $z_0=z(0)$, *f*(z) – произвольная функция от z, S_t – эволюционный оператор, $S_t z(0)=z(t)$. Движение называется эргодическим, если независимо от выбора момента времени *t*

$$\bar{f} = \langle f \rangle$$

где среднее по времени $\bar{f}$ и фазовое среднее $\langle f \rangle$ от функции *f* определены соотношениями

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f[z(t)]dt = lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f[S_t, z_0]dt \qquad (5)$$

$$\langle f \rangle = \int_\Gamma f(z)d\Gamma(z) \qquad (6)$$

Здесь $d\Gamma(z)$ – элемент объёма фазового пространства в окрестности точки *z*. В определении учтена независимость $\bar{f}$ от выбора *t* (второе равенство в первой строке).

Пусть имеются две произвольные функции *f(z)* и *g(z)*. Тогда движение называется перемешивающим, если

$$\lim_{T\to\infty} R_T(f,g) = 0 \qquad (7)$$

где $R_T(f, g)$ – корреляционная функция, определяемая через фазовые средние равенством

$$R_T(f,g) = \int_\Gamma f(S_T z)g(z)d\Gamma(z) - \left(\int_\Gamma f(z)d\Gamma(z)\right)\left(\int_\Gamma g(z)d\Gamma(z)\right) = \langle f(S_T z)g(z)\rangle - \langle f\rangle\langle g\rangle \qquad (8)$$

Из наличия перемешивания автоматически следует свойство эргодичности; обратное, вообще говоря, неверно.

Эффективное перемешивание элемента фазового объёма dГ происходит за время $t\sim 1/h_0$. Пример эволюции "фазовой капли", иллюстрирующий свойства локальной неустойчивости и перемешивания, показан на рис. 5.

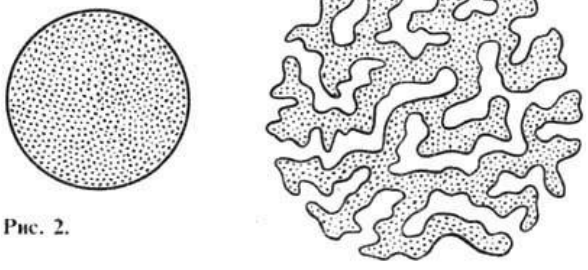


Рис. 2.

Рис. 5. Эволюция фазового объёма диссипативной системы.

Эволюция динамических систем с перемешиванием различна в зависимости от того, является система гамильтоновой или диссипативной.

При хорошем перемешивающем преобразовании функции усложняются за счёт повышения чувствительности всех переменных. Небольшое возмущение в любой из них приводит к значительному изменению конечного результата.

Фазовый объём **гамильтоновой системы** не меняется: $d\Gamma_t = d\Gamma_0$ ($d\Gamma_0$ – фазовый объём в начальный момент времени, $d\Gamma_t$ – фазовый объём той же "капли" в момент времени *t)*. Однако структура "фазовой капли" изменяется (рис. 5): "капля" принимает неправильную, амёбообразную форму и постепенно заполняет все области фазового пространства за счёт вытягивания и утоньшения отростков. Следовательно, эффективный объём капли растёт, однако в нём появляется большое количество пустот. Для характеристики "раздувания"

капли вводится огрубление фазового объёма. Пусть масштаб огрубления есть e (*e* имеет размерность Г). Это значит, что все точки капли следует заменить на сферы объёмом *e*. Объединение всех таких сфер даст огрублённый объём фазовой капли $\widetilde{\delta\Gamma}_t$. В отличие от истинного объёма $d\Gamma_t$ величина $\widetilde{\delta\Gamma}_t$ меняется со временем за счёт роста объёма пустот в огрублённой капле. Выберем начальный объём фазовой капли $d\Gamma_0=e$ (при точности огрубления e меньший объём не имеет смысла). Величина

$$h = \lim_{t\to\infty} \quad \lim_{\delta\Gamma_0\to 0} \frac{1}{t}\frac{\widetilde{\delta\Gamma}_t}{\delta\Gamma_0} \qquad (9)$$

называется энтропией Колмогорова-Синая (или К-энтропией, КС-энтропией). Величина *h* не зависит от способа разбиения фазового пространства и огрубления и характеризует усреднённый по объёму инкремент неустойчивости h_0 в (1), $h=\langle h_0\rangle$. Системы с хаосом имеют ненулевую К-энтропию $h>0$. Такие системы (т. е. системы с перемешиванием) называются К-системами.

Вследствие перемешивания фазовой жидкости происходит "забывание" начальных условий. В данном элементе объёма dГ могут присутствовать траектории из различных областей всего допустимого фазового объёма Г, если только время наблюдения *t* достаточно велико: $t>>t\sim 1/h$. Поэтому время *t* может быть интерпретировано как время забывания начальных условий или время перемешивания.

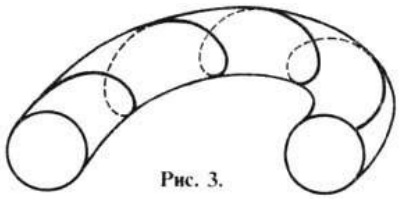


Рис. 3.

Рис. 6. Фазовые траектории на 2-мерном торе.

Гамильтонова система с *N* степенями свободы описывается системой 2*N* уравнений движения.

Теорема Лиувилля: Пусть система обладает *N* независимыми интегралами движения $I_1, I_2, ..., I_N$, коммутирующими между собой: $\{I_i,I_k\}=0$, *i. k*=1, 2, ..., *N*({...}-скобки Пуассона). Тогда:

1) траектории лежат на *N*-мерном торе (пример для *N*=2 показан на рис. 3);

2) движение условно-периодично и характеризуется *N* частотами $w_i= w_i(I_1, I_2, ..., I_N)$, $i= 1, 2, ...$;

3) угловые переменные q_i, характеризующие положение фазовой точки на торе, определяются из уравнений

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(I_1, I_2, \dots, I_N) \text{ или } \theta_i = \omega_i t + \text{const},\ i=1, 2, \dots, N$$

Из теоремы Лиувилля следует, что для полной интегрируемости гамильтоновой системы достаточно знать *N* интегралов движения. Совокупности всех комплектов $\{I_i\}$ соответствует семейство инвариантных торов. Торы являются инвариантными, т. к. их положение и форма в фазовом пространстве не меняются со временем.

Углам q_i соответствуют канонически сопряжённые им обобщённые импульсы (действия) I_i, так что уравнения движения имеют вид

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_i} = 0,\ \dot{\theta}_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, I_2, \dots, I_N),\ i=1, 2, \dots, N \qquad (10)$$

(первое уравнение – следствие сохранения I_i). В соответствии с теоремой Лиувилля гамильтониан H_0 системы может быть записан в виде $H_0(I_1, I_2,..., I_N)$.

Действие возмущения на систему описывается гамильтонианом

$$H=H_0(I_1, I_2,...,I_N)+\varepsilon V(I_1, I_2,...,I_N: \theta_1, \theta_2,...,\theta_N, t), \qquad (11)$$

где углы q_i и действия I_i – канонически сопряжённые переменные по отношению к гамильтониану H_0, *e* – малый параметр, *eV* – потенциал возмущения. Предполагаются финитность невозмущённого движения и его невырожденность: $\det|\partial^2 H_0/\partial I_i \partial I_k|\neq 0$.

Согласно теории устойчивости Колмогорова-Арнольда-Мозера (1963) (КАМ), в системе с гамильтонианом (11) при достаточно малых $e<e_0$ большинство инвариантных торов сохраняется и отличается от невозмущённых торов слабой деформацией. Они занимают фазовый объём Г – dГ(*e*). Часть торов, занимавшая объём dГ(*e*), разрушается, но их мера стремится к нулю при $e\to 0$.

Траектории в $d\Gamma(e)$ – стохастические. Хаос является альтернативой устойчивости, описываемой теорией КАМ. Исследование геометрии областей, в которых нет устойчивости и есть хаос, составляет важную часть различных физических задач.

Теория динамического хаоса исследует механизм непредсказуемых (случайных) явлений. Особую роль здесь играет хаос, который возникает, длится конечное время и затем исчезает. Именно на стадии хаоса (точнее, при выходе из него) возникает новая ценная информация. В этой стадии существует момент, когда генерация ценной информации наиболее эффективна. Предложено несколько названий промежуточной хаотической стадии: она называется «**перемешивающий слой**», используются и более образные термины: «джокер» – хаотическая стадия и « русло» – динамическая.

Перемешивающий слой возникает в динамической системе в процессе эволюции последней, в ходе которой элементы системы могут перемещаться, т.е. диффундировать. Если исходное состояние системы хаотическое, то на первом этапе образования динамического слоя в системе зарождаются отдельные фрагменты перемешивающего слоя, затем они расширяются, образуя границы друг с другом и заполняя всю систему, число областей начинает уменьшаться за счёт их укрупнения, при этом криволинейные границы между областями выпрямляются, и постепенно в процессе поглощения малых областей большими образуется перемешивающий слой.

Если на систему, находящуюся в сильно неравновесном состоянии, действуют, угрожая её структуре, флуктуации, то наступает критический момент — система достигает **точки бифуркации**. В точке бифуркации принципиально невозможно предсказать, в какое состояние перейдёт система. Случайность подталкивает то, что остаётся от системы, на новый путь развития, а после того как путь (один из многих возможных) выбран, вновь вступает в силу детерминизм – и так до следующей точки бифуркации.

Основным принципом прохождения системой точек бифуркаций, её становления, рождения и гибели иерархических уровней является эмерджентность – динамическая иерархичность. Эмерджентность заключается в том, что свойства системы в целом (свойства целостности системы) не являются простой суммой ее составных частей. Система может обладать такими свойствами, какими не обладает ни одна ее часть. Этот принцип описывает возникновение нового качества системы на одном уровне, когда изменение управляющих параметров вышестоящего уровня (мегауровня) приводит к перестройке ее структуры. В точке бифуркации коллективные переменные, параметры порядка макроуровня передают свои степени свободы в хаос микроуровня, растворяясь в нем и увеличивая его хаотизацию. Затем в непосредственном процессе взаимодействия мега- и микроуровней рождаются новые параметры порядка обновленного макроуровня.

Диссипативные системы – сильно неравновесные. В них возможны неустойчивые состояния. В таких системах на определенном для каждой системы удалении от состояния равновесия флуктуации вместо того, чтобы затухать (как в равновесных системах), наоборот усиливаются и завладевают всей системой, вынуждая её эволюционировать к новому режиму. Эти явления возникают в нелинейной области, в которой свойства системы моделируются нелинейными уравнениями. Величины флуктуаций резко увеличиваются вблизи точек бифуркации по сравнению с неравновесными состояниями, далекими от точек бифуркаций, и тем более по сравнению с равновесными состояниями. Гигантские флуктуации, чередуясь, создают впечатление хаоса, но на самом деле система прощупывает, какая из флуктуаций наиболее соответствует как состоянию самой системы, так и внешним условиям. Любая из них по стечению обстоятельств, а не в силу детерминированного выбора может стать началом эволюции системы в совершенно неожиданном направлении. На уровне математического описания бифуркация означает разветвление решений нелинейного дифференциального уравнения.

В нелинейных динамических системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, существуют последовательности (каскады)

бифуркаций, приводящие к возникновению сложных, хаотических режимов поведения. Они получили название сценариев перехода к хаосу.

Как уже неоднократно упоминалось, в линейной системе оператор эволюции линеен, т.е.

$A(x+y)=Ax+Ay$, $A(\lambda x)=\lambda Ax$. (12)

В такой системе не может быть хаотических колебаний. В ней периодические внешние воздействия вызывают после затухания переходных процессов периодический отклик того же периода. К линейным уравнениям применим принцип суперпозиции: сумма решений есть тоже решение. К системам, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями (или их системами) принцип адитивности уже неприменим. Нелинейная система управляется нелинейным оператором эволюции:

$A(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\neq\alpha_1 Ax_1+\alpha Ax_2$. (13)

Примером является функция $\sin(x)$. Ситуация осложняется еще и тем, что у нелинейных уравнений часто не одно, а несколько решений. Среди них могут быть как хаотические, так и регулярные, периодические решения. Какое из них осуществляется на практике, зависит от начальных условий.

Как известно, линейные дифференциальные или разностные уравнения могут быть решены преобразованием Фурье и не приводят к хаосу, а нелинейные могут приводить к хаосу. Важно, однако, понимать, что нелинейность – необходимое, но не достаточное условие для возникновения хаотического движения. Так, маятник с затуханием – нелинейная задача, но хаос здесь не возникнет, напротив, задачи возбуждаемого и двойного маятника приводят к хаосу.

Простейшим видом динамического хаоса является хаотическая динамика в нелинейных системах с *дискретным* временем (регулярная динамика рассматривается при этом как этап, предшествующий хаосу). Математический аппарат здесь прост, фактически он сводится к теории разностных уравнений. Описание хаоса в системах с *непрерывным* временем сложнее, используются все возможности теории дифференциальных уравнений.

Как уже упоминалось, при изучении динамических систем предпочтение отдают отображениям, поскольку они обладают невероятно сложной динамикой с выходом на поразительные фрактальные картинки, и получить их решения можно намного легче и быстрее, чем в случае дифференциальных уравнений.

Для возникновения хаоса в системе с *непрерывным* временем их размерность (порядок N нелинейного дифференциального уравнения, описывающего данную систему) должна быть не ниже 3-х («период 3 производит хаос»). Такие системы ($3D$–динамические системы) представляются *потоками* траекторий в фазовом пространстве, размерность которого 3 (или выше, в соответствии с порядком дифференциального уравнения). Однако в нелинейных динамических системах с *дискретным* временем хаотические движения могут возникать уже в случае систем 1-го порядка ($1D$–дискретные динамические системы). Эти движения представляют *каскады* дискретных отображений и описываются нелинейными разностными уравнениями порядка 1 и выше. Любая одномерная система, в которой обнаружен регулярный цикл с периодом 3, проявит и регулярные циклы с любым периодом, а также полностью хаотичные циклы. Если одномерное отображение вида $x_n=f(x_n)$ имеет цикл периода 3, то оно имеет бесконечное множество циклов всех прочих периодов. Такт с периодом 3 есть последовательность, в которой каждое состояние повторяет имевшее место тремя шагами ранее, но не состояния одним или двумя шагами ранее.

Обычно, переход к хаосу происходит через бифуркации. Бифуркация – существенно нелинейное явление; она описывает качественное изменение структуры орбиты (дискретной или непрерывной) динамической системы при изменении одного или нескольких параметров. Существуют различные типы маршрутов хаоса, генерируемые бифуркациями коразмерности один. Самым известным из них является удвоение периода.

К настоящему времени довольно точно определён маршрут перехода к хаосу в двумерных неавтономных системах с периодическими коэффициентами, трехмерных, многомерных и бесконечномерных автономных системах. Во всех этих системах существует один универсальный бифуркационный сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых циклов или торов, затем через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского устойчивых циклов или торов любого периода вплоть до цикла (тора) периода три. и затем через гомоклинический или гетероклинический каскад бифуркаций Магницкого устойчивых циклов (торов), сходящихся к гомоклиническим или гетероклиническим контурам особых точек и циклов и к другим сепаратрисным многообразиям.

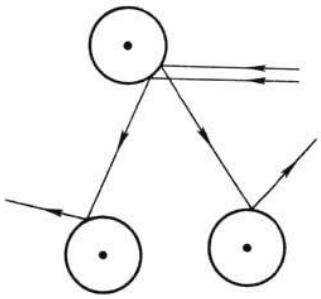
Во всех нелинейных системах дифференциальных уравнений: диссипативных и консервативных, автономных и неавтономных, обыкновенных, с частными производными и с запаздывающим аргументом существует один единственный вид динамического хаоса. Этот единственный вид динамического хаоса может быть успешно описан в рамках траекторного подхода методами качественной теории дифференциальных уравнений и теории бифуркаций в нелинейных системах дифференциальных уравнений, а именно, универсальной бифуркационной теорией ФШМ (Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого).

17.4 Примеры систем с хаосом

I. Консервативные системы

Рис. 7. Пример возникновения локальной неустойчивости.

Рис. 4.



1. Рассеяние материальной точки на шариках радиусом *R*

Из рис. 7 видно существование локальной неустойчивости. Данная задача эквивалентна задаче о рассеянии двух шариков радиусом $R/2$ каждый. Возникновение локальной неустойчивости в этой ситуации исследовано Крыловым. Критерий возникновения неустойчивости записывается в виде $K=r/R>1$, где r – длина свободного пробега материальной точки в "газе" из неподвижных шариков. Если t_0 - характерное время между соударениями, то K-энтропия $h\sim(1/t_0)\ln K$.



Рис. 5.

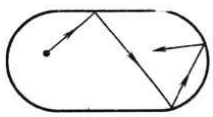


Рис. 6.

Рис. 8. Фазовые траектории на бильярдах: а бильярд Синая, б - стадион.

***2*. Рассеивающие билльяды (бильярд Синая).**

Обобщение предыдущей модели, в которой вместо рассеивающих шаров имеется кривая граница. Пример бильярда Синая дан на рис. 8а. Для таких объектов характерна выпуклая граница (по отношению к налетающей частице).

Другой тип бильярда реализуется, если граница вогнутая (по отношению к частице). На рис. 8б показан пример бильярда типа "стадион". В этом бильярде движение частицы также стохастическое. Вообще, почти все криволинейные формы бильярдов, в которых столкновения частиц со стенками происходят по законам абсолютно упругого удара, приводят к стохастическим траекториям частиц.

3. Отображение

$$x_{n+1}=\{Kx_n\},\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots\ . \qquad (14)$$

Здесь индекс n играет роль дискретного времени, K- параметр, а скобки {...} означают дробную часть числа. Соотношение (14) задаёт отображение отрезка [0, 1] в себя. При

$K<1$ из (10) следует $x_n=K^n x_0\to 0$ при $n\to\infty$ независимо от выбора начального значения x_0. При $K>1$ расстояние между двумя близкими траекториями растёт:

$$\delta x_{n+1}/\delta x_m=K>1. \qquad (15)$$

Отсюда $dx_n= K^n dx_0=\exp(n h_0) dx_0$, где инкремент неустойчивости $h_0=\ln K$ одинаков для всего фазового пространства и является К-энтропией: $h=\ln K$.

4. Двумерное отображение

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \bmod 1) \qquad (16)$$

где матрица $A = \begin{pmatrix} K+1 & 1 \\ K & 1 \end{pmatrix}$. В силу $d(x_{n+1},y_{n+1})/d(x_n,y_n)=\det A=1$ отображение (16) сохраняет фазовый объём системы. Характеристические показатели находятся из уравнения $l^2-(K+2)l+1=0$. При $K>0$ один из корней $l_1=[K+2+\sqrt{(K+2)^2-4}]/2$ больше единицы, чем и определяется локальная неустойчивость. Отображение (16) диагонализуется и имеет в направлении первого орта растяжение элементов длины

$$\partial r_{n+1} = \lambda_1 \delta r_n,\ r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \qquad (17)$$

Соответственно К-энтропия равна $h=\ln l_1$.

5. Ротатор, испытывающий периодические толчки

Гамильтониан модели имеет вид

$$H = \frac{1}{2}p^2 - K\cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \qquad (18)$$

Невозмущённый гамильтониан $H_0=p^2/2$ задаёт пару канонически сопряжённых переменных (p, x), причём $w(p) = \partial H_0/\partial p=p$. В переменных (p, x) уравния движения имеют вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -K\sin x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT),\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \qquad (19)$$

После n-го толчка импульс приобретает приращение: $p_{n+1}-p_n=-K\sin x_n$, а при дальнейшем движении до начала $(n+1)$-го толчка сохраняет значение p_{n+1}.

$$p_{n+1} = p_n - K\sin x_n,\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1}T \bmod 2\pi \qquad (20)$$

К началу $(n+1)$-го толчка фаза x приобретает значение $x_{n+1}=x_n+p_{n+1}T$. Таким образом, отображение определяет значения переменных p, x к моменту (n+1)-го толчка через их значения до начала n-го толчка. Отображение (20) называется отображением Чирикова - Тейлора или стандартным отображением (1979). Без ограничения общности можно принять $T=1$. Фазовые портреты (20) приведены на рис. 9: (а) для $K<K_c$ и (*б*)для $K>K_c$, где критическое значение K_c=0,9716.... На плоскости p, x каждой точке соответствует некоторая пара (p_n, x_n), принадлежащая одной траектории. Беспорядочное распределение последовательных пар (p_n, x_n) на плоскости демонстрирует явление хаоса для модели (20). Отдельные области не заняты точками стохастической траектории. Эти области - островки, в которых имеется конечная мера периодических траекторий. В центральных частях островков выполнены условия теории КАМ. На рис. 9*а* узкие области стохастической динамики (стохастические слои) отделены друг от друга инвариантными кривыми. На рис. 9*б* стохастические слои сильно расширились и соединились друг с другом, образовав "стохастическое море". Этот переход происходит при некотором критическом значении параметра $K=K_c$. При $K>K_c$ возможно неограниченное увеличение энергии частицы благодаря стохастическому ускорению. Существование островков обусловлено наличием члена ~sin$x$ в (15), который приводит к появлению областей.

Стохастический слой является зародышем хаоса в гамильтоновых системах. Примеры образования таких слоев видны на рис. 7(*а*). Они образуются при любых сколь угодно малых возмущениях и поэтому являются примером неустранимого хаоса. Пусть, например, задан нелинейный маятник, описываемый уравнением движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = \varepsilon \sin(Kx - \omega t) \qquad (21)$$

В отсутствие возмущения (e=0) сепаратрисой является траектория с энергией $E=w^2_0$, которая отделяет колебания ($E<w^2_0$) от вращений ($E>w^2_0$). При $e\neq 0$ сепаратриса разрушается и в её окрестности возникает зона хаоса шириной $dE\sim e$, если частота $w\sim w_0$.

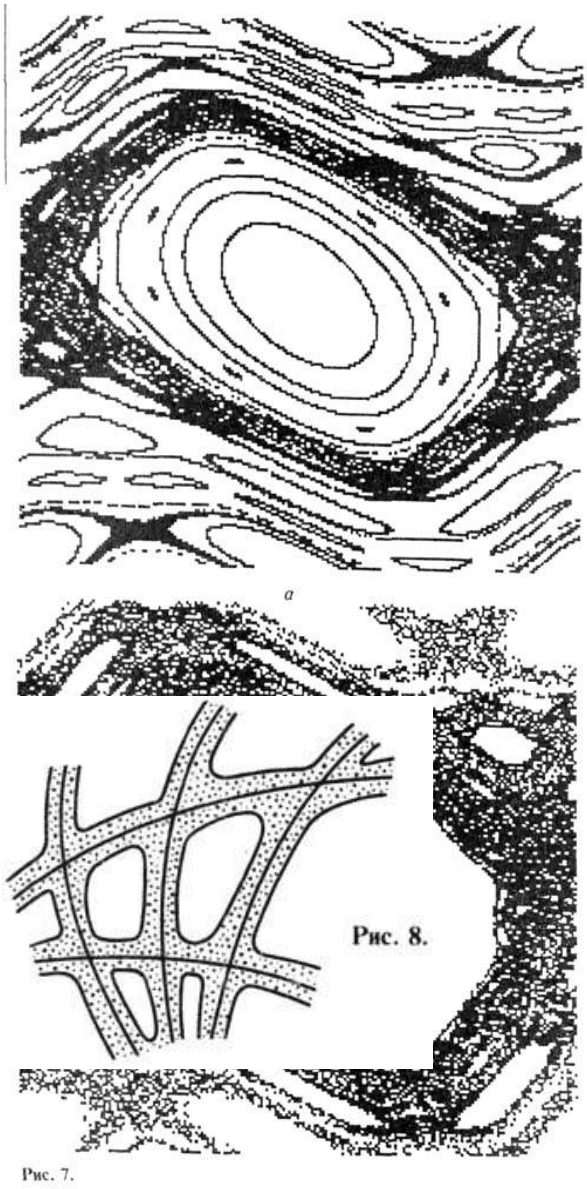


Рис. 7.

Если частота $w>>w_0$. то ширина стохастического слоя оказывается пропорциональной $\exp(-pw/2w_0)$, т.е. экспоненциально малой.

Рис. 9. Фазовые портреты эволюции стандартного отображения.

Различные стохастические слои в фазовом пространстве могут пересекаться, образуя некоторую сеть каналов, внутри которых динамика системы является стохастической (рис. 10). Эта сеть называется стохастической паутиной (паутиной Арнольда). Если размерность фазового пространства $2N=4$, то двумерные инвариантные торы разделяют трёхмерный объём, в котором движется система (из-за сохранения энергии), на изолированной области (подобно тому, как линия на плоскости делит 2-мерное пространство на изолированные части). Однако уже для трёх и более степеней свободы ($N>2$) N-мерные торы не разделяют $(2N-1)$-мерную энергетическую поверхность. Поэтому стохастическая паутина оказывается связной, подходя сколь угодно близко к любой точке фазового пространства. Наличие паутины приводит к неограниченному переносу частиц вдоль стохастического слоя, называемому диффузией Арнольда.

Рис. 10. Паутина Арнольда.

Примером, в котором возникает стохастическая паутина с нетривиальной топологией, является осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) - K\cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad (22)$$

Здесь учтён вклад потенциальной энергии $x^2/2$. Этому осциллятору соответствует точечное отображение

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (p_n - K\sin x_n)\cos T - x_n \sin T \\ x_{n+1} &= (p_n - K\sin x_n)\sin T + x_n \cos T \end{aligned} \qquad (23)$$

Если период T следования ударов удовлетворяет условию $T=2p/q$, где q-целое число, то при $q>2$ на фазовой плоскости возникает стохастическая паутина с симметрией порядка q. Решётка является тем более правильной, чем тоньше паутина, т. е. чем меньше параметр K.

II. Диссипативные системы

В отличие от гамильтоновых систем фазовый объём систем диссипативных меняется со временем. При этом характер изменения зависит от выбора области в фазовом пространстве. В соответствии с этим фазовое пространство диссипативных систем может содержать не только те структурные элементы, которые имеются в случае гамильтоновых систем, но и такие, как аттракторы и репеллеры. Первые характеризуются тем, что к ним асимптотически притягиваются все фазовые траектории из некоторой области $D\Gamma$ фазового пространства, называемой областью притяжения. Для вторых характерна неустойчивость, т. е. отход любой траектории, начинающейся в некоторой окрестности

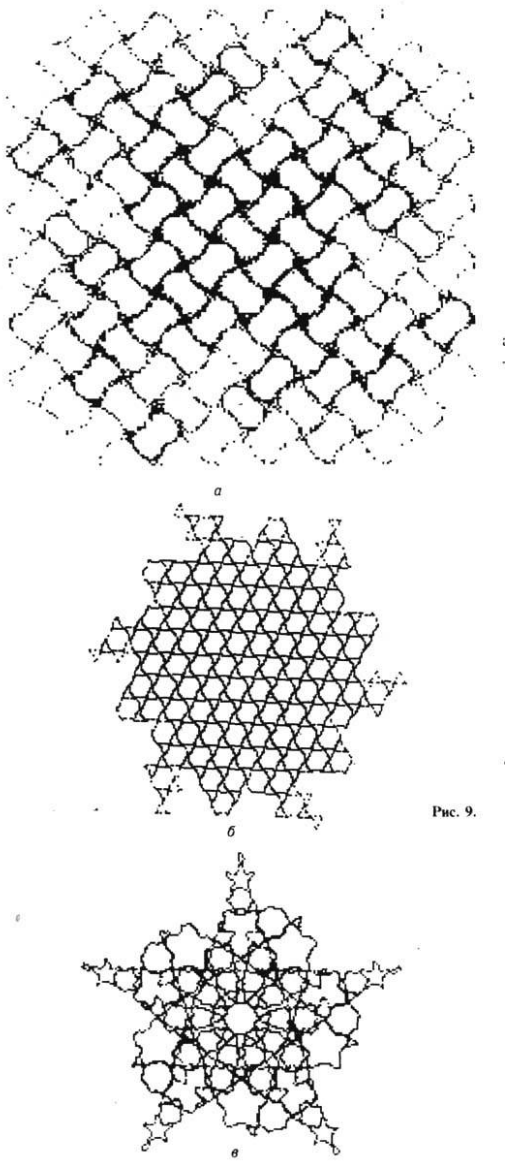


Рис. 9.

репеллера (иными словами, асимптотические свойства траекторий в окрестности аттрактора и репеллера аналогичны, если только для первых смотреть прямую эволюцию, т. е. при $t \to +\infty$, а для вторых- обратную, т.е. при $t \to -\infty$). Наибольший интерес для анализа свойств диссипативных систем представляют именно аттракторы.

Рис. 11. Примеры стохастической паутины с(а) симметрией квадратной решётки (q=4), (б)гексагональной симметрией (q=3 и q=6) и (в) симметрией 5-го порядка (q=5).

В ходе эволюции динамической системы, обладающей аттрактором, объём фазовой капли неограниченно уменьшается – капля сжимается к аттрактору. Однако сам аттрактор, имея нулевую меру в исходном фазовом пространстве, может оказаться нетривиальным множеством, движение на котором является стохастическим. Это значит, что: 1) на таком аттракторе движение является локально неустойчивым и для него может быть введена К-энтропия и 2) это движение обладает свойствами эргодичности и перемешивания. Аттрактор, на котором реализуется стохастическая динамика, называемая стохастическим или странным аттрактором.

Асимптотическая устойчивость аттрактора как множества в фазовом пространстве определяется сжатием фазового объёма: средня скорость этого сжатия выражается через показатели Ляпунова:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)} \qquad (24)$$

Для различных направлений величина λ принимает различные значения, так что всего имеется M различных показателей (M – число дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающих движение системы). Из них один, отвечающий смещению вдоль аттрактора, равен нулю вследствие финитности движения. Все показатели l_i можно упорядочить, так что для странного аттрактора окажется

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_q = 0 > \cdots > \lambda_M \qquad (24)$$

Скорость сжатия фазового объёма определится тогда равенством

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i < 0. \qquad (25)$$

Показатели Ляпунова связаны с К-энтропией. Если все l_i не зависят от точки, то

$$h = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \qquad (26)$$

В сумму входят только положительные показатели, поскольку именно они определяют разбегание фазовых траекторий, имеющее место только на аттракторе.

Странный аттрактор, занимая область фазового пространства нулевой меры, не может, тем не менее, целиком лежать в плоскости (поскольку фазовые траектории не пересекаются). Кроме того, он должен иметь размерность d>1. С геометрической точки зрения он представляет собой, как правило, фрактальное множество, характеризуемое фрактальной размерностью (размерностью Хаусдорфа) d_C, являющейся дробным числом, превышающей размерность топологическую d_T.

В качестве примера диссипативной динамической системы, демонстрирующей стохастическое поведение, можно привести Лоренца систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y + xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \qquad (27)$$

где s, r, b - неотрицат. числа. Сжатие фазового объёма однородно:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + b + 1) < 0 \qquad (28)$$

Стохастическая динамика обнаружена Лоренцем при s=10, b=8/3, r=24,74. Размерность странного аттрактора оказалась d_C≈2,05 (при r=28).

Другим классическим примером является модель Рёслера (1976):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{5}y, \\ \dot{z} &= \frac{1}{5} + z(x - \mu). \end{aligned} \qquad (29)$$

Здесь странный аттрактор обнаруживается при m>4,2.

В дискретных отображениях стохастич. движения обнаружены во мн. моделях. Классическим является универсальное отображение Фейгенбаума:

$$x_{n+1} = \Lambda x_n(1 - x_n),\ 0 \le \Lambda \le 4 \qquad (30)$$

отображающее отрезок [0,1] в себя. Стохастичское поведение здесь наблюдается при 3,57<L<=4.

Одномерное точечное отображение, порождающее хаос, приводилось выше.

Примером двумерного сжимающего отображения является ротатор с трением, возбуждаемый периодическими толчками:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= e^{-\gamma T}(p_n + K \sin x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + A p_{n+1},\ A = \frac{e^{-\gamma T} - 1}{\gamma} \end{aligned} \qquad (31)$$

где γ – коэффициент трения, T – период между толчками.

Сжатие фазового объёма за одну итерацию определяется равенством

$$\frac{\partial(p_{n+1}, x_{n+1})}{\partial(p_n, x_n)} = e^{-\gamma T} \qquad (32)$$

Типичный фазовый портрет стохастического аттрактора отображения (31) показан на рис. 12*а*, где нанесены точки (p_n, x_n), получаемые последовательными итерациями одной начальной точки (p_0, x_0), т. е. принадлежащие одной траектории. Аттрактор имеет канторову структуру в направлении, перпендикулярном к линиям. Это свойство видно из рис. 12*б*, где в увеличенном масштабе показана область, выделенная на рис. 12*а* квадратом. Если на рис. 12*б* взять малую область и также увеличить её, то структура отображения окажется той же, что и на рис. 12*б*.

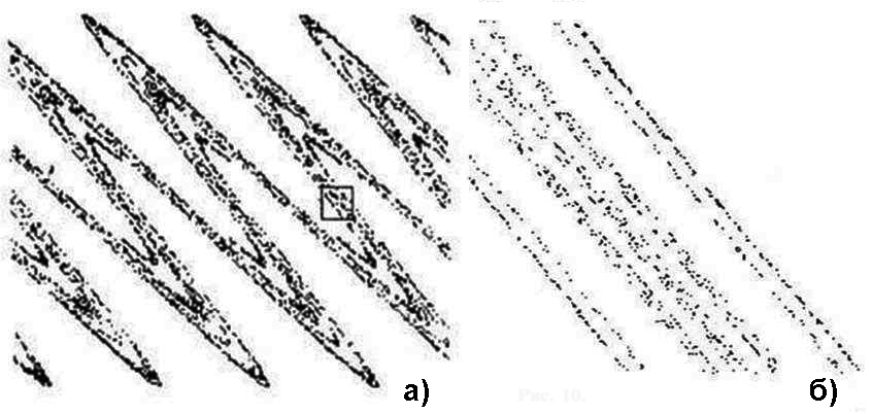
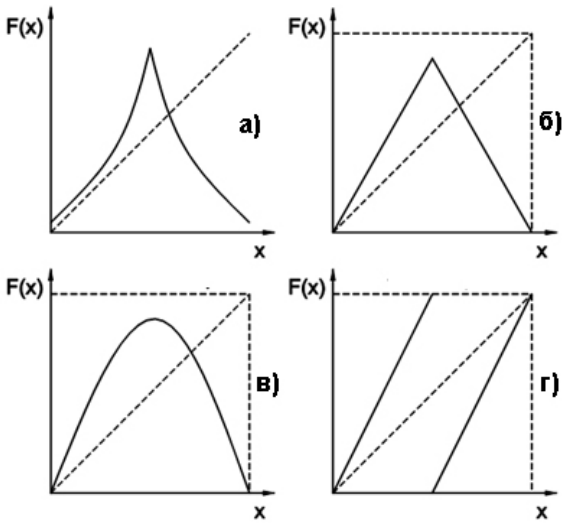


Рис. 12. Пример фазового портрета стохастического аттрактора отображения (31). Фрактальная структура.

18. ХАОС В ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

В свое время, при развитии теории динамических систем, наибольшее удивление вызвало возникновение неустойчивостей, бифуркаций и даже хаоса в чрезвычайно простых обыкновенных дифференциальных уравнениях и отображениях.



Графики некоторых простых отображений приведены на рис.1.

Рис. 1. Графики некоторых простых одномерны отображений, способных переходить к хаотическим режимам: а – Лоренц, б – Тент, в – квадратичное, г – сдвиг Бернулли.

Анализ причин и характера неустойчивостей привело к созданию теории детерминированного хаоса, призванной адекватно описать сложное движение и динамику систем, чувствительную к начальным условиям. В основе динамических процессов лежат строгие и хорошо известные законы, поведение системы полностью детерминировано, но предсказать будущее состояние системы и дальнейшее развитие событий невозможно. Обычно такой хаос возникает при больших временах, при большом удалении от начального состояния. Поведение в хаотических системах является периодическим, т.е. никакая переменная не описывает состояние системы, что приводит к регулярному повторению значений. Хаотическая система развивается монотонно и упорядоченно; начальные условия известны точно, но делать какие-либо долгосрочные прогнозы решительно невозможно. Помимо высокой чувствительности важную роль в детерминированном хаосе играют режимы смешения (транзитивность) и условия регулярности (плотность периодических точек).

В данной главе приведены примеры маршрутов перехода к хаосу в некоторых простых одномерных (однопараметрических) отображениях: «зуб пилы», "сдвиг Бернулли", «треугольное», «тент», описываемых линейными отображениями и приводящих к динамическому хаосу. Нелинейные: квадратичные (в том числе – логистическое) и кубические отображения будут рассмотрены в следующей главе.

18.1 Бифуркационные диаграммы

Как уже упоминалось, под бифуркацией понимают резкое изменение решения, происходящее при изменении управляющего параметра при больших временах, например, с переходом от фиксированной точки к предельному циклу с удвоенным периодом.

При исследовании нелинейных динамических систем часто возникает необходимость в определении числа стационарных состояний, отслеживании того, как изменяется это число при варьировании параметров системы, а также с целью исследования возможных бифуркационных процессов и предсказания хаотического поведения системы. Эту динамику наглядно отражают с помощью бифуркационных диаграмм, нахождение которых проводится численно, путём многократного решения соответствующих систем дифференциальных уравнений и традиционного построения отображения Пуанкаре.

Бифуркационная диаграмма – изображение на рисунке смены возможных динамических режимов системы (равновесных состояний, стационарных точек, периодических орбит и пр.) при изменении значения бифуркационного параметра. Как правило, устойчивые режимы изображают сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной.

Обычно бифуркационная диаграмма строится отложением на оси абсцисс управляющего параметра задачи, а на оси ординат – некоторой выделенной характеристики (все значения x, при которых ищутся решения уравнений задачи). Например, в случае осциллятора по горизонтальной оси откладывается величина управляющего параметра, например, амплитуда или частота наблюдения, а по координате – значения амплитуды из временной выборки. Эта диаграмма описывает серию экспериментов, каждый из которых проводится при определённом значении управляющего параметра. При построении диаграммы, однако, необходимо проявить достаточную осторожность и убедиться, что после каждого изменения управляющего параметра успевают затухнуть переходные процессы. Фазовая траектория (орбита), появляющаяся как единственная кривая с неподвижной точкой, в точке бифуркации разбивается на две кривые с периодом 2 и т.д. Хаотическая динамика, при которой орбита посещает бесконечное число точек (в противном случае орбита повторялась бы, и поэтому была бы периодической) проявляется в виде полос континуумов точек.

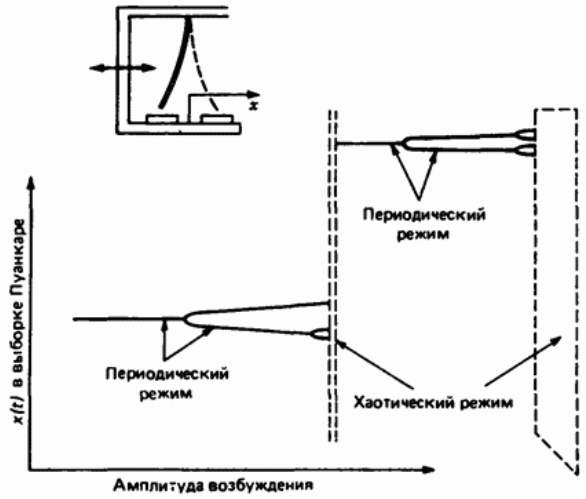


Рис. 2. Экспериментальная бифуркационная диаграмма колебаний продольно изогнутого стержня *– выборки Пуанкаре изгибного смещения как функция амплитуды возбуждающего колебания.*

Пример бифуркационной диаграммы приведён на рис. 2 непрерывные горизонтальные линии соответствуют периодическому движению различных субгармоник. Значения внутри областей, очерченных штриховыми линиями, соответствуют хаотическим режимам. На этой диаграмме ясно видна граница между хаотическим и периодическим движениями.

Анализ хаотического поведения проводится путём использования инвариантной меры и показателей Ляпунова.

Инвариантная мера – в теории динамических систем мера, определённая в фазовом пространстве, связанная с динамической системой и не изменяющаяся с течением времени при эволюции состояния динамической системы в фазовом пространстве. Понятие инвариантной меры применяется при усреднении уравнений движения, в теории показателей Ляпунова, в теории метрической энтропии и вероятностных фрактальных размерностей

Поскольку точно определить хаотическую динамику невозможно, то хаос пытаются описывать статистическими методами. На бифуркационной диаграмме видно, что при некоторых значениях параметров повторяющиеся точки покрывают интервалы линии с некоторой плотностью или распределением вероятности. Это обстоятельство используют для определения «инвариантной меры» аттрактора, под которой понимают плотность точек в точке x, $\rho(x, x_0)$ заданную многократным повторением начиная с точки x_0, т.е.

$$\rho(x,x_0)dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}n(x,n_0), \qquad (1)$$

где $n(x, x_0)$ - число $\{F^N(x_0), F^{N-1}(x_0)...F(x_0)\}$ на отрезке dx координаты x, или

$$\rho(x,x_0)dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-F^i(x_0)), \qquad (2)$$

Если аттрактор является неподвижной точкой (мера сосредоточена в неподвижной точке), то орбита никогда точно не достигает фиксированной точки для любого конечного

N. Эта мера является свойством аттрактора и не зависит от выбора начальной точки x_0, т.е. $\rho(x, x_0)$ не зависит от x_0 для «почти всех» x_0 (исключение – множество меры нуль), и определяет меру аттрактора $\rho(x)$. По построению эта мера «инвариантна», т. е. не изменяется путём итерации переменной отображения: если $y=F(x)$, то $\rho(y)dy=\rho(x)dx$, так как все точки в интервале dx заканчиваются в интервале $dy=F_0(x)dx$. В определение также входит понятие эргодичности, т. е. средние по времени равны средним показателям для почти всех начальных условий (относительно начальной меры Лебега).

Обычно существует бесконечное число инвариантных мер, поэтому необходим какой-то процесс для выбора физической меры. Такой процесс, предложенный Колмогорову, заключается в том, чтобы к динамике добавляют небольшое количество случайных шумов, что, как правило, даёт уникальную меру, а затем, силу шума устремляют к нулю. Эргодическая теорема требует, чтобы средние значения времени могут быть заменены измеренными средними значениями для почти всех начальных условий, но теперь почти все состояния, за исключением множества меры нуль относительно инвариантной меры.

В некоторых случаях инвариантная мера может быть построена непосредственно из ее определения. Рассмотрим плотность точек после n итераций $\rho_n(x)$. Тогда при итерации отображения плотность развивается по уравнению Фробениуса-Перрона:

$$\rho_{n+1}(y) = \int dx \delta\left[y - F(x)\right]\rho_n(x) \qquad (3)$$

которое реализует идею о том, что все точки интервала dx оказываются в интервале dy, где $y=F(x)$ и $dy=F_0(x)dx$. Инвариантная мера определяется приравниванием ρ_n и ρ_{n+1}, можно также исследовать подход к инвариантной мере от начальной плотности $\rho_0(x)$.

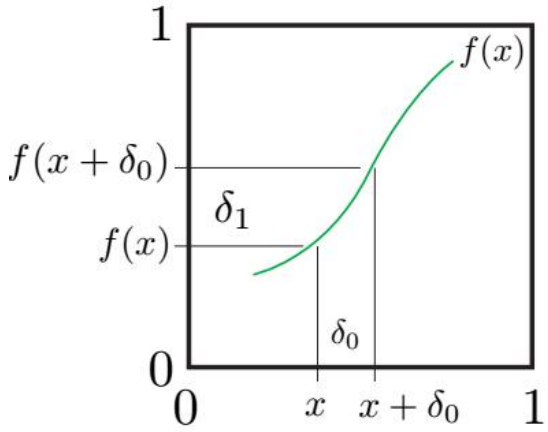


Рис. 3. Приращение функции.

Инвариантная мера часто демонстрирует значительную структуру. Например, квадратичное отображение при $\mu=4$ имеет особенности с квадратным корнем в конечных точках: $\rho(x)\sim 1/\sqrt{x(1-x)}$, и при значениях μ в промежутке 0 и 1 показывает богатую структуру особенностей.

Показатели Ляпунова используются для описания хаотических процессов.

Идею неустойчивости неподвижной точки можно обобщить, и рассмотреть «чувствительность зависимости итерации от начального условия» более количественной.

Пусть дано отображение $x_{n+1}=f(x_n)$, тогда приращения при итерациях

$\delta_1 \approx f'(x_0)\delta_0$

$\delta_2 \approx f'(x_1)\delta_1$

$\delta_3 \approx f'(x_1)f'(x_0)\delta_0$

.

.

$|\delta_N| \sim |\delta_0| e^{\lambda N}$

В общем случае

$$\delta x_{n+1} = F'(x_n)\delta x_n \qquad (4)$$

так что произведение производных при последовательных итерациях даёт разложение (или сжатие) разделения между соседними точками при итерации.

Показатель Ляпунова

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} \right| \qquad (5)$$

Начиная с начальных условий x_0 и x_0+ε при итерации расстояние между n-ой итерацией увеличивается по закону

$$|\delta x_n| = \varepsilon e^{n\lambda(x_0)} \qquad (6)$$

где $\lambda(x_0)$ - показатель Ляпунова для начального условия x_0, т.е.

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\left|\frac{F^n(x_0+\varepsilon)-F^n(x_0)}{\varepsilon}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{dF^n(x_0)}{d(x_0)}\right) \qquad (7а)$$

$$\lambda = \lim_{N\to}\frac{1}{N}\log_2\left|\frac{f^N(x_0+\delta_0)-f^N(x_0)}{(x_0+\delta_0)-x_0}\right|;\ \delta 0\to 0;\ \lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_2\left|\left(f^N\right)'(x_0)\right| \qquad (7б)$$

$$\left(f^N\right)'(x_0) = f'(x_{N-1})\left(f^{N-1}\right)'(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\ldots f'(x_{N-1})$$

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\log_2|f'(x_n)| \qquad \begin{matrix}\lambda<0 & \textit{стабильный}\\ \lambda>0 & \textit{нестабильный}\end{matrix} \qquad (7в)$$

Для систем с эргодической инвариантной мерой предел существует и не зависит от начального условия x_0 для почти всех начальных условий (кроме точек на нестабильных периодических орбитах). Он обозначается λ и называется показателем Ляпунова отображения. Производная имеет вид

$$\frac{dF^n(x_0)}{d(x_0)} = F'(x_{n-1})F'(x_{n-2})\ldots F'(x_1)F'(x_0). \qquad (8)$$

Показатель Ляпунова в компактном виде

$$\lambda = <\log|F'|> \qquad (9)$$

Положительное значение λ соответствует разности между близко расположенными начальными условиями, растущими (в среднем экспоненциально) с итерацией, что определяет чувствительность зависимости от начальных условий. Таким образом, положительный показатель Ляпунова является сигнатурой хаоса и может использоваться как определяющий критерий. Показатель Ляпунова отображения тент легко вычисляется, так как $F_0=|\mu|$ для всех значений x. Таким образом, $\lambda=\log|\mu|$ и хаотическая динамика ожидается при $1<\mu\le 2$.

18.2 Лестница Ламерея

Прежде чем заниматься исследованием маршрутов перехода каскада бифуркаций к хаосу, полезно вспомнить об одном простом и наглядном способе наблюдения за ходом решения дискретного уравнения, основанном на использовании диаграммы (лестницы) Ламерея.

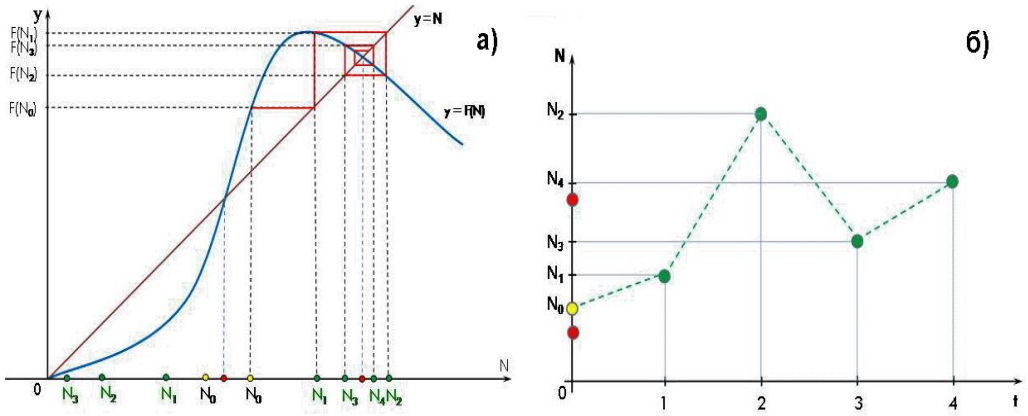


Рис. 4. Пример построения лестницы Ламерея: *а – решение уравнения $N_{n+1}=F(N_n)$; б – траектории.*

Диаграмма (лестница) Ламерея графически демонстрирует ход решения дискретного уравнения вида $N_{t+1}=f(N_t)$ (рис. 4). Точка пересечения биссектрисы первого

координатного угла $N_{t+1}=N_t$ и функции $F(N_t)$ определяет равновесное состояние системы N^* (рис. 4а). На рис. 4б показан способ нахождения значений N_t в последовательные моменты времени. Пусть в начальный момент времени $N=N_0$. $F(N_0)=N_1$ задаёт значение функции в последующий момент времени $t=1$. Величина N_1, в свою очередь, определяет значение $F(N_1)=N_2$. И так далее. На рис. 4б изображен случай, когда траектория сходится к равновесному состоянию, совершая затухающие колебания.

Пример: логистическое уравнение. Зависимость численности популяции N_{t+1} от численности на предыдущем шаге N_t ,задаваемая решением логистического уравнения:

$$N_{t+1} = N_t e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)} = F(N_t) \qquad (10)$$

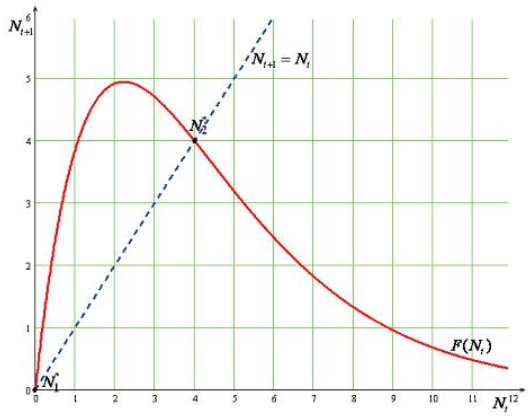


Рис. 5. График функции, задающей дискретное уравнение логистического роста *(модель динамики популяции с неперекрывающимися поколениями). Пунктирной линией представлена биссектриса $N_{t+1}=N_t$. В точках пересечения графика функции $F(N_t)$ с биссектрисой выполняется равенство: $N_{t+1}=N_t=F(N_t)$,т.е. выполняется определение точки равновесия. Таким образом, точки пересечения графиков N_1^* (с координатами (0,0)) и N_2^* являются точками равновесия.*

ШАГ 1. Если известна некоторая начальная численность популяции N_0, то можно найти последовательность следующих значений численностей $\{N_1, N_2, N_3,...\}$Значение N_1 определяется равенством $N_1=F(N_0)$, т.е. пара значений (N_0, N_1) является координатами соответствующей точки на графике функции $F(N_t)$. Отложим на координатной плоскости (t,N_t), t точки $(0, N_0)$ и $(1,N_1)$.

ШАГ 2. Следующее значение численности N_2 определяется из соотношения $N_2=F(N_1)$. На графике, величина $N1$ из значения функции должна стать значением аргумента: проводим перпендикуляр от точки $(0, N_1)$ до пересечения с биссектрисой, затем опускаем перпендикуляр до оси абсцисс N_t .

ШАГ 3. Повторяем *шаг 1*. Теперь начальная точка N_1, значение численности N_2 - ордината точки на графике функции $F(N_t)$: $(N_1, (F(N_1))$

ШАГ 4. Повторяем *шаг 2*. Значение N_2 переносим на ось абсцисс с помощью отражения от биссектрисы).

ШАГ *5*. Повторяем *шаг 1*. Следующее значение численности N_3 определяем как ординату точки на графике функции F: $(N_2, F(N_2))$. Продолжая повторять шаги построения лестницы Ламерея, получим последовательность значений численности популяции в разные моменты времени.

Графики демонстрируют, что со временем численность популяции в виде затухающих колебаний сходится к равновесному значению K. Характер последовательности значений численности популяции, полученной при помощи лестницы Ламерея, может быть монотонным, циклическим, колебательным и хаотическим. Конкретный случай определяется формой кривой $F(N(t))$. В свою очередь, форму кривой определяют значения параметров функции $F(N_t)$ (скорость прироста r и емкость экологической ниши, К). Далее эти процессы будут рассмотрены более детально.

Вариантом лестницы Ламерея является диаграмма паутины (*a cobweb plot*) – это визуальный инструмент, используемый в области математической физики динамических систем для исследования качественного поведения одномерных итерированных функций, типа логистического отображения. Используя диаграмму паутины, можно сделать вывод о долгосрочном статусе начального условия при повторном применении отображения.

Диаграмма паутины позволяет итерировать функцию исключительно графическими средствами и, не прибегая к аналитическим или численным методам.

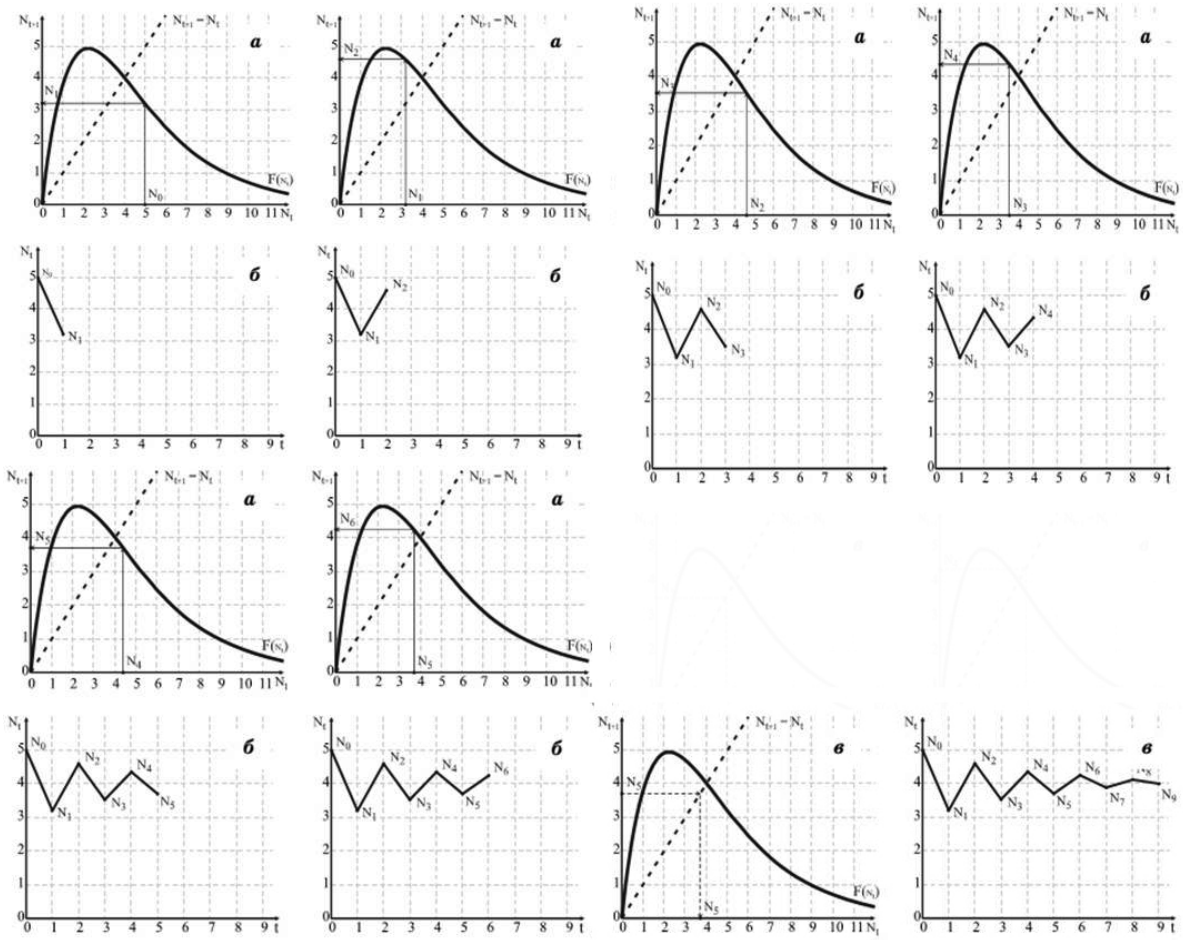


Рис. 6. Этапы построения лестницы Ламерея для логистического уравнения

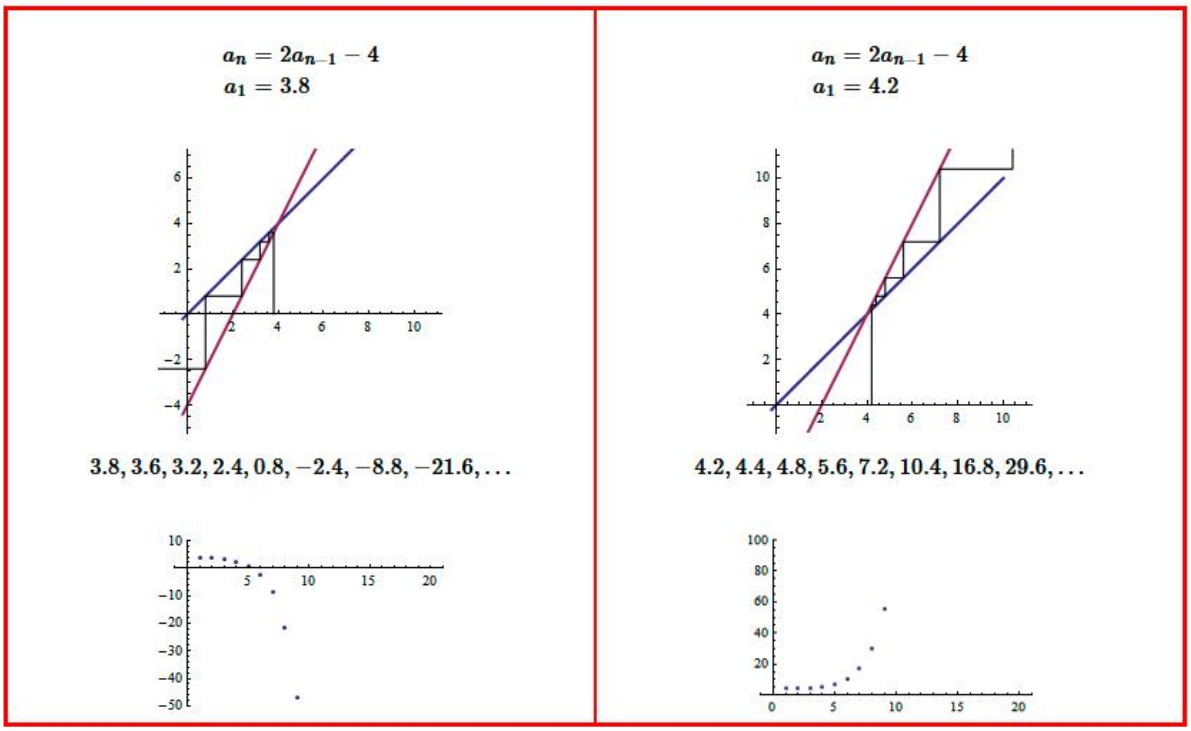


Рис. 7. Две диаграммы для последовательности $a_n=2_{n-1}-4$. *Наклон рекурсивной функции больше единицы и итерации паутины расходятся от точки пересечения функции с линией*

y=x расходятся от пересечения функции с линией y=x. Значения этой последовательности неограниченны.

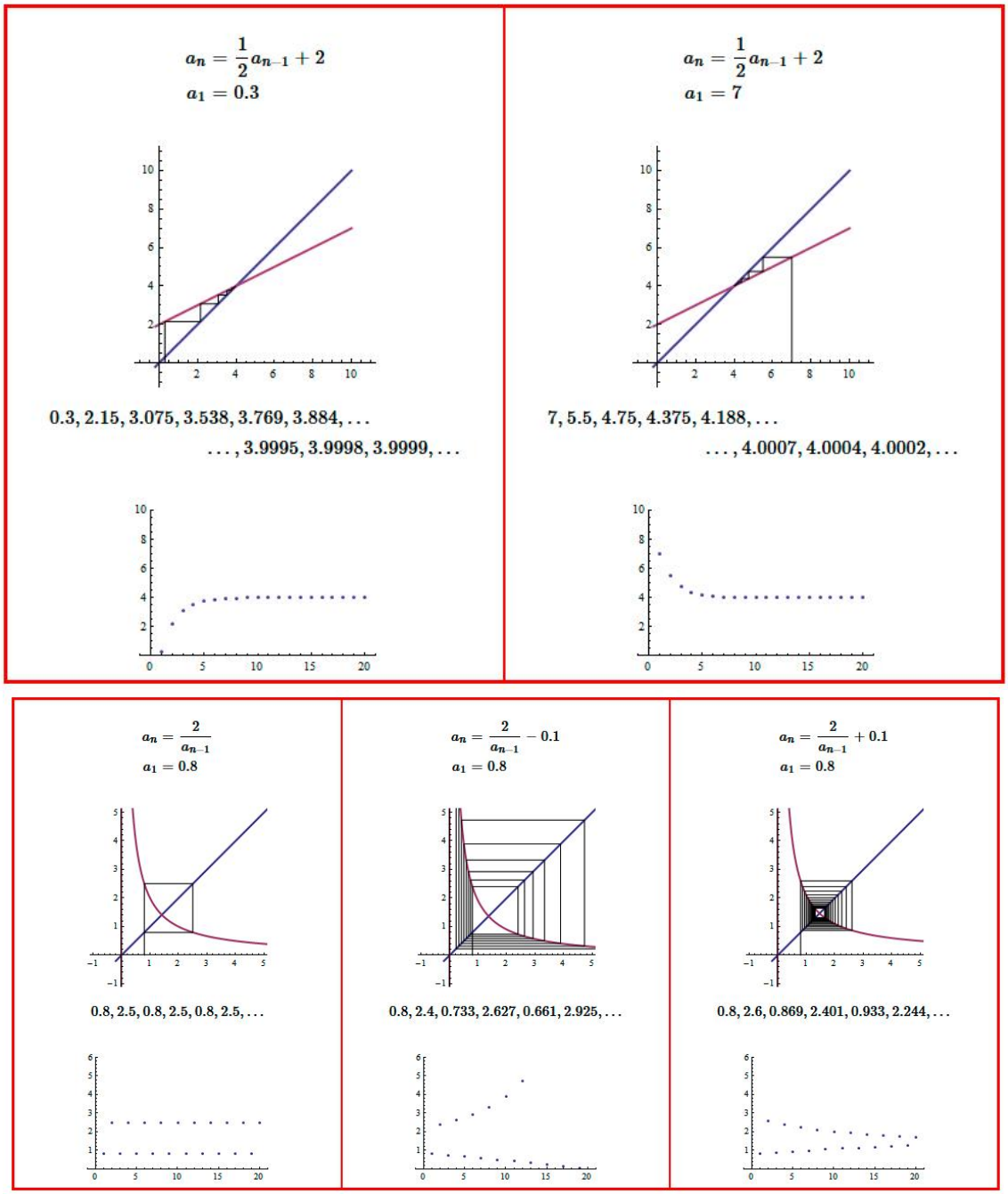


Рис. 8. Диаграммы паутины трех связанных уравнений. *Первый график демонстрирует, что здесь возможно циклическое поведение, а второй и третий графики показывают, что небольшие изменения в уравнении могут привести к тому, что итерации либо приближаются, либо расходятся с неподвижной точкой.*

Для данной итерированной функции *f*: ***R→R*** график представляет собой диагональную (*x=y*) линию и кривую функции *y=f*(*x*). Чтобы построить график поведения значения x, выполняют следующие операции:

1. На функциональной кривой находят точку с *x*-координатой *x*, Она имеет координаты (*x*.
2. Проводят горизонтальную линию от этой точки до диагональной линии. Она имеет координаты (.
3. Проводят вертикальную линию от точки на диагонали до функциональной кривой. Он имеет координаты (*f*(*x*.
4. Повторяем шаг 2 по мере необходимости.

На диаграмме паутины устойчивая неподвижная точка соответствует внутренней спирали, а неустойчивая неподвижная точка – внешней. Из определения неподвижной точки следует, что эти спирали концентрируются в точке, где диагональ $y=x$ пересекает график функций. Орбита периода 2 представлена прямоугольником, в то время как более длительные циклы образуют, более сложные замкнутые контуры. На хаотичной орбите отображается «заполненная» область, указывающая на бесконечное количество неповторяющихся значений.

Паутина строится в процессе рекурсии, при котором предыдущий результат используется как вход для следующего результата.

Продемонстрируем процесс рекурсии на простых примерах. Рассмотрим две диаграммы для последовательности

$$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 2. \qquad (11)$$

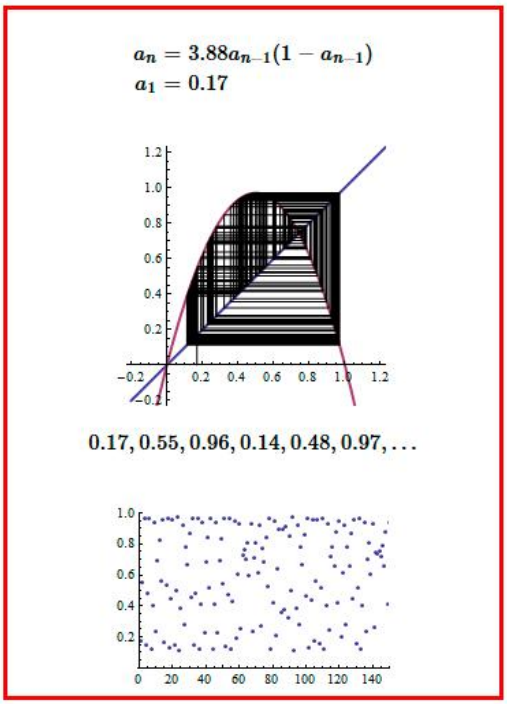


Рис. 9. Диаграмма паутины для динамического хаоса.

На обеих этих диаграммах наклон рекурсивной функции меньше единицы, и итерации паутины приближаются к пересечению функции с линией $y=x$. Эта последовательность сходится к значению 4 – решению уравнения $x=f(x)$. Уравнение $x=f(x)$ называется уравнением с неподвижной, а его решение является неподвижной точкой рекурсивного уравнения. Если первый член последовательности был решением уравнения с фиксированной точкой, то последовательность была бы постоянной.

Поведение последовательности может быть весьма непредсказуемым. Хотя значения последовательности полностью определяются рекурсивной формулой и явно ограничены, но они не сходятся к неподвижной точке и не являются циклическими. Фактически, за исключением того, что все значения находятся между нулем и единицей, долгосрочное поведение этой системы кажется довольно хаотичным (рис. 7).

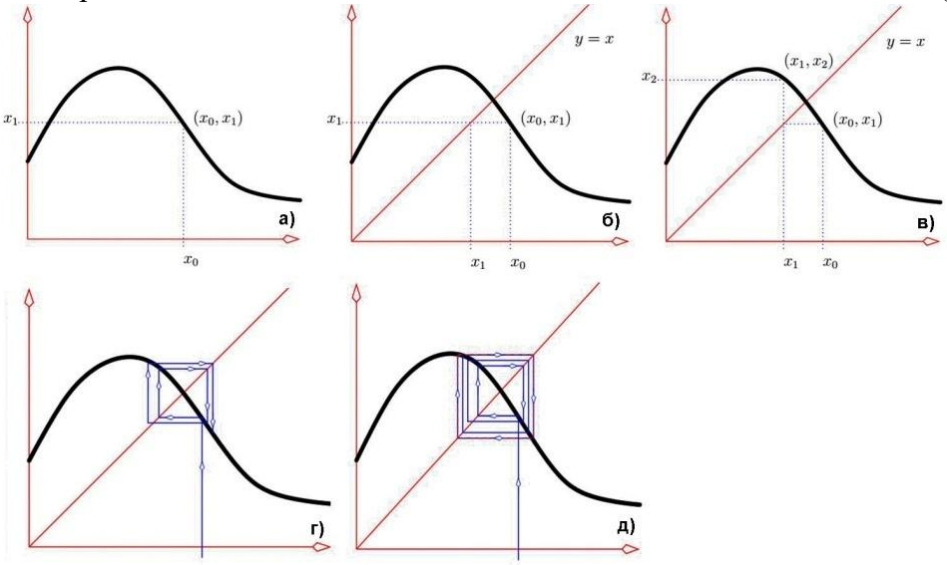


Рис. 10. Схема построения диаграммы паутин: итерации сходятся в 2-цикл.

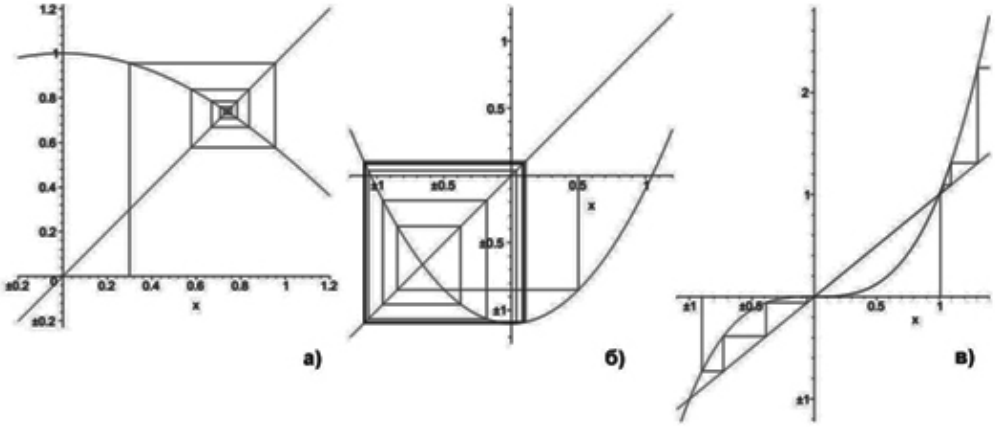


***Рис. 11. Примеры применения диаграммы паутины**: а – диаграмма итераций $x_0=0,3$ при cos(x) (итерации сходятся к неподвижной точке при $x\approx0.739$); б – диаграмма итераций $x_0=0,5$ при $x^2 - 1,1$ (итерации сходятся к двум циклам в $\{p_+, p_-\} \approx \{0,0916, -1,0916\}$); в – фазовый портрет итерации функции $f(x)=x^3$. Эта функция имеет три неподвижные точки, $x=-1, 0, 1$. Если $|x_0|>1$, то итерации расходятся до бесконечности, а если $|x_0|<1$, то итерации сходятся к неподвижной точке $x=0$.*

Арифметические последовательности могут показывать только один тип конечного поведения, неограниченность (если общая разница не равна нулю). Геометрические последовательности могут быть либо неограниченными, либо сходятся к неподвижной точке. Ни арифметические, ни геометрические последовательности не проявят циклического или хаотического поведения. Классическим примером последовательности, которая показывает все эти конечные поведения, является логистическая последовательность.

18.3 Отображение Бернулли

Прежде, чем рассматривать отображение сдвига Бернулли, коротко остановимся на свойствах сдвига Бернулли.

Преобразование двоичной последовательности, состоящее в сдвиге всех её символов на одну позицию, называют сдвигом Бернулли. Сдвиг Бернулли базируется на операторе сдвига.

Оператор сдвига – оператор, который переводит функцию $x \mapsto f(x)$ в $x \mapsto f(x+a)$. В анализе временных рядов оператор сдвига называется оператором задержки.

Важное свойство сдвига Бернулли – возможность перехода его к хаотическому поведению. Возникающие явления имеют все свойства динамического хаоса: 1) плотные периодические орбиты, 2) транзитивность динамической системы, 3) чувствительность системы к начальным условиям.

Замечание. Топологически транзитивная динамическая система имеет точки, которые движутся при итерации от одного сколь угодно малого открытого множества к любому другому; такую систему нельзя разложить на два непересекающихся множества с непустыми внутренними областями, которые не взаимодействуют при преобразовании. Каждая минимальная динамическая система транзитивна (система минимальна, если все орбиты плотны). Транзитивность – важный компонент хаоса. Впрочем транзитивность совместима и с регулярным поведением траекторий. Транзитивная система бывает либо очень правильная, либо очень нерегулярная.

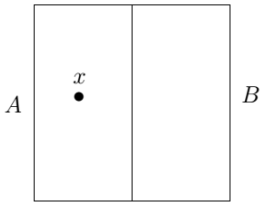
Сдвиг Бернулли демонстрирует следующие хаотические свойства: сохранение фазового пространства, ограниченность и детерминированность. Сохранение фазового пространства чрезвычайно важно в гамильтоновых системах, поскольку теорема Луивилля гарантирует сохранение объема фазового пространства по мере развития системы во времени. Преобразование ограничено, так как оно является результатом линейных преобразований. Аналитически описание этого преобразования:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} [2x_n, y_{n/2}] & \text{если} \quad x_n < 1/2 \\ [2x_n - 1, (y_n + 1)/2)] & \text{если} \quad x_n \geq 1/2 \end{cases} \qquad (12)$$

Детерминизм - важнейшая особенность отображения Бернулли. Отображение сдвига полностью детерминировано, но очень чувствительно к начальным условиям, в результате чего трансформация становится непредсказуемой, возникает хаос.

Приведём простой пример сдвига Бернулли для случая $\{x_0\}=(1/2,\ 1/2)$

1 этап. Делим квадрат на две колонки одинаковой ширины.



2 этап. Сжимаем каждый столбец прямоугольником высотой 1/2 и основанием 1.



3 Этап. Перемещаем A_0 *на верх* B_0 *формируя квадрат*

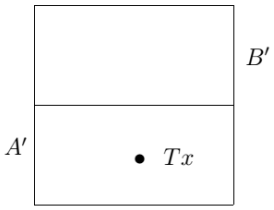
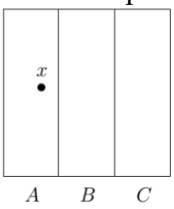


Рис. 10. Операции при осуществлении сдвига Бернулли для случая $\{x_0\}=(1/2, 1/2)$.

Этот алгоритм можно обобщить. Например, если $\{x_0\}= (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$, то, используя тройные разложения, сдвиг Бернулли осуществляется операциями:

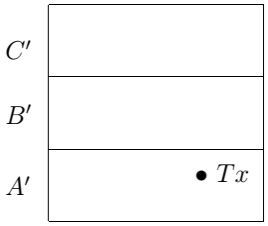
1 этап. Разрезаем квадрат на три столбца одинаковой ширины



2 этап. Сжимаем каждый столбец прямоугольником высотой 1/3 и основанием 1



3 этап. Перемещаем A_0 *на верх* B_0 *формируя квадрат*



Согласно теореме Колмогорова эти трансформации являются изоморфными.

Отображение Бернулли определяется как одномерная дискретная динамическая система с кусочно-определенной системной функцией по правилу

с параметром μ>0.

В данной части главы мы ограничимся случаем μ=2, при котором и возникает сдвиг Бернулли.

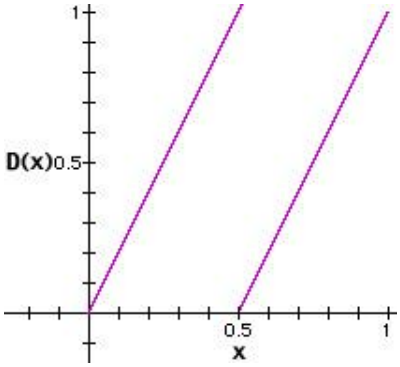


Рис. 12. Отображение сдвиг Бернулли.

Преобразование сдвига заключается в умножении исходного числа на некоторый множитель (обычно это 2), после чего сохраняется только дробная часть. Это – верный шаг к хаосу, поскольку значимость некоторого дальнего возмущения всё время растёт.

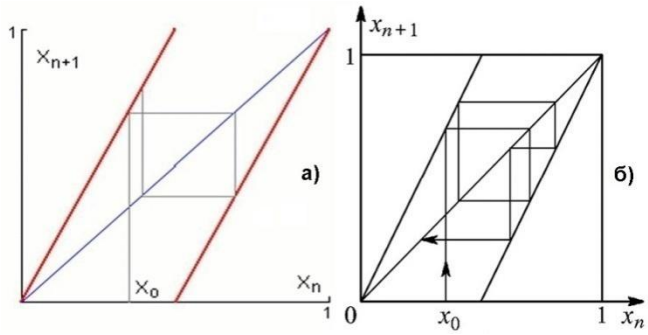
Одномерное рекурентное отображение – сдвиг Бернулли, заключается в удваивании числа x через регулярные промежутки времени с отбрасыванием в случае необходимости целой части произведения $2x$. Требуется, чтобы число x всё время должно оставаться заключённым между 0 и 1.

Отображение сдвига Бернулли (отображение сдвига, *shift map*) записывается в виде одномерного рекуррентного отображения $\sigma:[0,1]\to[0,1]$

$$x_{n+1}=\sigma^n(x_n)=\{2x_n\}=2x_n(mod\ 1), \qquad (14)$$

где $x_n\in[0,\ 1]$, фигурные скобки или оператор *mod* 1 означают операцию отбрасывания целой части числа при сохранении его дробной части (фигурные скобки - дробная часть числа). Геометрически это эквивалентно сдвигу растянутого отображения в исходную область.

Решение Ур. 14:



$$x_n=2^n x_0(mod\ 1) \qquad (15)$$

Отображение Бернулли реализует правило итераций

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n, & 0\le x_n<0{,}5;\\ 2x_n-1, & 0{,}5\le x_n<1.\end{cases} \qquad (16)$$

Рис. 13. График отображения Бернулли: а – первая итерация; б – несколько итераций

Анализ динамики сдвига Бернулли провести легче, если перейти к двоичной системе счисления.

<u>Замечание</u>. Двоичное представление имеет конечное число членов после точки начала системы счисления, например $3*2^{-5}=0{,}00011$. Это означает, что ряд двоичных рациональных чисел есть бассейн аттрактора неподвижной точке в нуле. Есть, однако, рациональные числа в двоичном представление, но вместо того, чтобы быть конечными, они повторяются: конечная последовательность цифр повторяется бесконечно (т.е такие числа содержат периодическую часть которой может предшествовать непериодическая часть): $\frac{13}{36}=0{,}01\overline{011100}_2$, где $\bar{\bullet}$ – периодическая часть: они соответствуют периодическим орбитам вместе с их бассейном притяжения отображения сдвига.

Тогда начальное условие представляется как $x_0=0, a_1, a_2...$, что эквивалентно

$$x_0=\Sigma a_v 2^{-v} \qquad (17)$$

где каждое a_i – это 0 или 1.

Действие отображение сводится к отбрасыванию первой цифры и к сдвигу влево последующих цифр двоичного числа

$$x_1=f(x_0)=0.a_2a_3... \qquad (18)$$

Эта операция называется сдвигом Бернулли.

Свойства отображения сдвига Бернулли.

1. Чувствительность к начальным условиям: два начальных условия, незначительно отличающиеся друг от друга (на множитель 2^{-m}, так что отличие имеет место в после m-ой цифры в двоичном числе), после m итераций расходятся весьма существенно.
2. При случайном начальном условии последовательность итераций имеет те же вероятностные характеристики, что бросок монеты, т.е. $\sigma^n(x)$ будет меньше или больше 1/2 в зависимости от того, равна ли a_{n+1} нулю или единице. . Эта редукция хаотической динамики до случайной последовательности чисел 0 и 1 (т.е. до последовательности Бернулли) путём фиксированного разбиения фазового пространства называется «символической динамикой».
3. Информация увеличивается на 1 бит при одной итерации (энтропия Колмогорова).
4. Существует счётная бесконечность начальных условий (x_0 рациональное число), которые приводят к (неустойчивым) периодическим орбитам.
5. Дополнение этого множества (в теории множеств дополнение множества A относится к элементам не принадлежащим A) имеет меру 1, т. е. большинство начальных условий приводят к хаотическим орбитам.

В отображении сдвига неподвижная точка: $x*=0$, нестабильная точка $f'(x*)=2>1$, период-2 орбита: $\{x*\}=\{1/3,\ 2/3\}$,нестабильная точка: $(f^2)'(x*)=4>1$ Все периодические орбиты нестабильны. Отображение Бернулли способно на хаотическое поведение. Его график и диаграмма, иллюстрирующая динамику на протяжении нескольких итераций, приведены на рис.13.

Если число представлено в двоичной форме, то им легко манипулировать. При этом путь к хаосу лежит в повышении роли менее значимых цифр в числе. Например, возьмём 0.1010010 ... и умножим его на 2. В двоичной системе счисления умножение на 2 соответствует сдвигу всех цифр числа влево на один разряд. Поэтому результат 1.010010 .... Для взятия модуля, отбросим целочисленную часть, и получим 0,010010 ... При операции сдвига случайное число приобретает любую сложность, в результате чего оно становится хаотичным, ничем не отличаясь от шума. Это при том, что процесс, приведший к хаосу, был полностью детерминированным. В этом отображении существуют две неподвижные точки: $0{,}111\ldots = 0{,}\overline{1} = 1$ и $0{,}000\ldots = 0{,}\overline{0} = 0$. Возможны также периодические отображения для чисел, например, $0{,}101\ldots = 0{,}\overline{1}\,\overline{0}$.

Пример 1. При операции сдвига отбрасывается старший разряд, так что x_{n+1} получается из x_n сдвигом Бернулли: x_o=0.01011..., x_1=0.1011... x_2= 0.011 ...

Пример 2. Последовательность $(x_o, x_1...)$ называется орбитой (фазовой траекторией) точки x_o. Например, x_0=0,1101010111..., x_1=0,1010101110...,

Пример 3. Если x_0=0,4, то:

	Десятичная система	Двоичная система
	0,4	0,01100110
	0,8	0,11001100
	0,6	0,10011001
	0,2	0,00110011

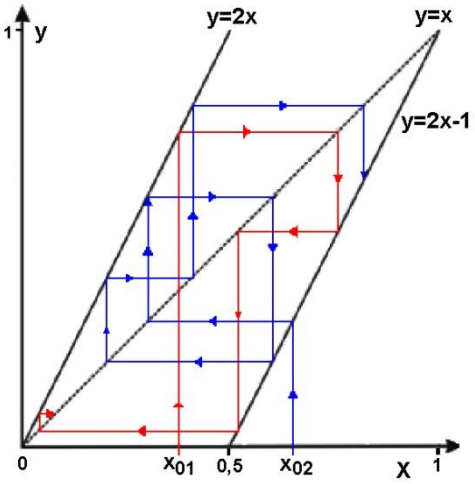
Из таблицы понятно, почему отображение Бернулли при μ=2 называют сдвигом Бернулли: двоичная цифра сдвигается влево, а цифра перед десятичной меткой отбрасывается. После каждого шага итерации система забывает ровно одну цифру двоичного представления, так что некоторая информация теряется.

Пример 4. Сдвиг Бернулли – пример детерминированного хаоса. Можно представить примеры последовательностей, начинающихся с какого-нибудь произвольного числа, например: (0,13; 0,26; 0,52; 0,04; 0,08; 0,016; 0,16; 0,32; 0,64; 0,028) и (0,14; 0,28;, 0,56; 0,12; 0,24; 0,48; 0,96; 0,96; 0,84). Как видно, незначительное отличие в начальных условиях уже на 4-ом шаге порождает

существенное отличие траекторий, а в дальнейшем их поведение совершенно различно. Можно показать, что со временем разойдутся траектории любых сколь угодно близких точек.

В двоичном представлении ясно видно, что отображение Бернулли имеет несколько инвариантных множеств в зависимости от значений параметров.

• Все рациональные начальные значения, двоичное представление которых конечно, заставляют орбиту оседать после конечного числа шагов на неподвижную точку.



• Все рациональные начальные значения, двоичное представление которых является периодическим, заставляют орбиту оседать после конечного числа шагов на периодический аттрактор.

• Все иррациональные начальные значения имеют бесконечное и апериодическое двоичное представление и поэтому образуют апериодический аттрактор.

Рис. 14. Итерации сдвига Бернулли, начиная с двух разных начальных значений $0<x_{01}<0,5$ и $0,5<x_{02}<1$}

Если у двух близких точек x_o и y_o равны первые k двоичных знаков, то для отображения пилы, пока $n<k$

$$y_n - x_n = 2^n(y_o - x_o) = (y_o - x_o)\, e^{n \ln 2}. \qquad (19)$$

Расстояние между двумя близкими орбитами экспоненциально расходится с ростом n. Это свойство называют также *чувствительностью к начальным условиям*. Оно означает кроме того, что все периодические орбиты отображения неустойчивы. Показатель экспоненты называется *показателем Ляпунова* и для этого отображения $\Lambda=ln2$. После k итераций расстояние между x_n и y_n будет порядка 1.

Для отображения пилы известно, что начинающаяся при рациональном $x=p/q$ орбита периодическая, если q – нечётное. Например, орбита 1/3 имеет период *2* 1/3→2/3 →1/3 ..., а для 1/7 получается орбита с периодом 3 1/7→2/7→4/7→1/7 ... При четном q траектория выходит на периодическую орбиту через несколько итераций, например 1/6 → 1/3→2/3→1/3... или 1/8→1/4→1/2→1→1... Т.о. у отображения существует бесконечное (счётное) множество неустойчивых периодических орбит и они плотны на интервале [0,1]. Если в конце любой конечной двоичной последовательности добавить периодическую последовательность, соответствующую неустойчивой периодической орбите, то полученная точка будет прообразом этой орбиты. Т.к. исходное число можно выбрать как угодно близко к любой точке [0, 1], то прообразы любой орбиты плотны на этом интервале.

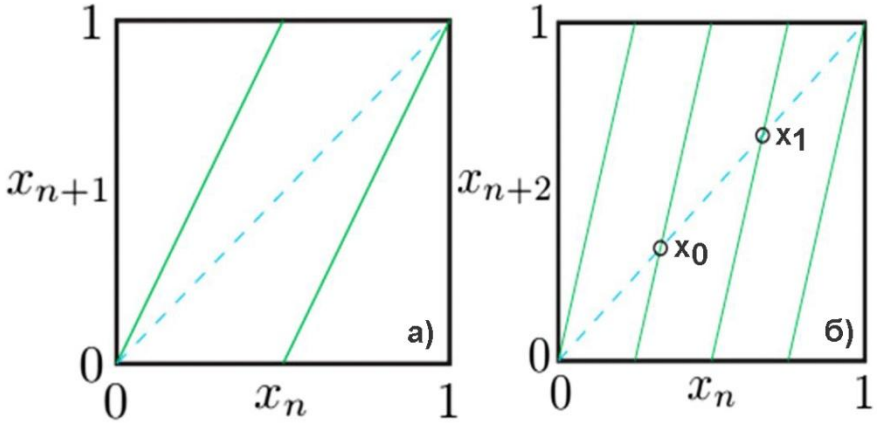


Рис. 15. Итерации отображения зуб пилы и неподвижные точки.

Пример. На рис.15 показана вторая итерация отображения пилы и две точки орбиты с периодом 2, полученные из символической последовательности σ=(01)

x_0=0.0101...=0.(01)=1/11$_2$=1/3,
x_1=0.1010...=0.(10)=10$_2$/11$_2$=2/3.

Две последние комбинации x_2=0.(00)=0 и x_3=0.(11)=1 неподвижные точки отображения (с периодом 1). Приведем также две орбиты с периодом 3

x_0= 0.001001...=0.(001)=1$_2$/111$_2$=1/7,

x_1=0.(010)=2/7, x_2=0.(100) =4/7

и x_3=0.(110)=6/7, x_4=0.(101)=5/7, x_5=0.(011)=3/7.

Как уже упоминалось, преобразование в ходе отображения Бернулли состоит из равномерного растягивания исходного отрезка в 2 раза и сдвига его правой половины на -1. Такое растяжение ведёт к экспоненциальной расходимости близлежащих точек. Сдвиг сохраняет ограниченность области отображения, но приводит также к его необратимости, т.к. две различные точки x_n отображаются в одну x_{n+1}. Необратимость следует также из отбрасывания старшего символа последовательности при сдвиге Бернулли. После каждой итерации отображения расстояние между близлежащими точками удваивается, поэтому гладкое распределение также расплывается в два раза. Так как все точки лежат в ограниченном интервале [0,1], то в пределе $n\to\infty$ возникает однородное распределение точек $\rho(x)=1$. Отображение не меняет этого распределения и оно называется *стационарным* или *инвариантным распределением* (заметим, что точки неустойчивых периодических орбит образуют сингулярные инвариантные распределения).

$$\lambda = \lim_{n\to} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} \log_2 \left| f'(x_n) \right| \qquad (20)$$

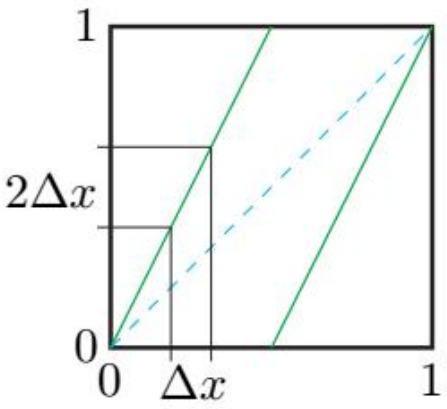


Рис. 16. Приращение при итерации.

Малое возмущение Δx начального условия за один шаг итераций увеличивается в два раза. Поэтому показатель Ляпунова для данного отображения равен λ=ln2=0.693.

Предположим, что взято очень близкое, но другое начальное значение x_0. Очень близкое – значит, что достаточно большое количество цифр двоичной записи до некоторой позиции, например, 333, зафиксированы, а дальнейшие цифры – хвост – не определены. Тогда после 333 временных шагов начало хвоста как раз придвинется к разделительной запятой. Дальнейшая динамика сдвигов будет зависеть от символов хвоста и может в корне отличаться от поведения системы при исходных начальных условиях. Малое изменение начального условия за одну итерацию при сдвиге Бернулли увеличивается в два раза. Показатель Ляпунова для данного отображения λ=ln2=0,693...

Описание эволюции динамической системы типа сдвига Бернулли в терминах траектории неадекватно, так как для адекватности траектория должна оставаться почти одной и той же при незначительном изменении начальных условий. Поэтому используют статистическое описание, вводя плотность вероятности пребывания системы в каждой точке x интервала (0, 1). Важно, что при многократном применении оператора отображения к произвольному распределению плотности вероятности оно стремится к константе.

Корреляционная функция $C(m)$ для последовательности x_k

$C(m)=lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{k=1,n}(x_k-<x>)(x_{k+m}-<x>)$, $<x>=lim_{n\to\infty} 1/n \sum_k x_k$. (21)

Для отображения пилы

$C(m) = 2^{-m}/12$. (22)

Таким образом перемешивание ведёт к экспоненциальному затуханию корреляций с ростом m.

18.4 Треугольное отображение

О роли треугольника в построении фракталов мы уже говорили: кривая фон Коха и снежинка Коха, треугольная салфетка Серпинского, двумерные стохастические фракталы, используемые для моделирования сильно развитого рельефа поверхности и др. Простая динамическая система, траектории которой образуют на плоскости Пуанкаре треугольное отображение, может служить моделью необратимой эволюции.

Простой вариант треугольного отображения имеет вид:

$$x_{n+1} = 1 - 2\left|x_n - \frac{1}{2}\right| \qquad (23)$$

В более общем виде:

$$x_{n+1}=\sigma_r(x_n)=2rx_n mod 1 = r\left(1-2\left|\frac{1}{2}-x\right|\right),\ n=1, 2, 3,..., \qquad (24)$$

Заметим, что если параметр r удовлетворяет условию $r<1/2$, то $x=0$ – единственная неподвижная точка, к которой притягиваются все точки из интервала (0, 1); при $r>1/2$ существуют две неустойчивые неподвижные точки, при этом последовательность $\{X_n\}$ приобретает свойства хаотичного поведения. График треугольного отображения приведен на рис. 17.

Растяжение приводит к экспоненциальному разбеганию близких траекторий. Складывание возвращает образ в интервал (0, 1) и вызывает необратимость отображения (образ имеет два прообраза).

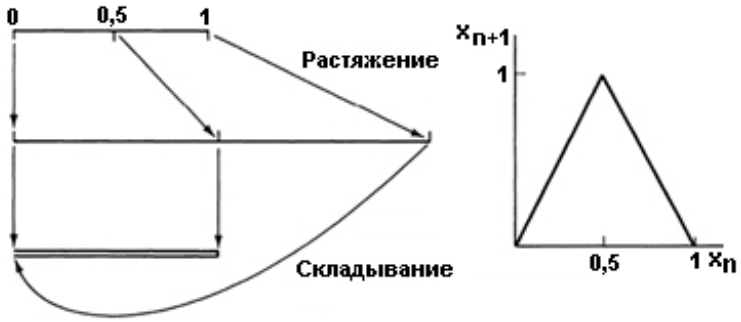


Рис. 17. График «треугольного отображения».

Треугольное отображение может быть представлено как

$$x_{n+m}=M^m(x_n) \qquad (25)$$

Точки пересечения графика с прямой $x_{n+m}=x_n$ задают 2^m неподвижных точек отображения; из них две – неподвижные точки отображения M. Остальным соответствуют периодические орбиты M. Если начальная точка известна с точностью $\pm 2^{-m}$, то положение её образа после m и более итераций предсказать нельзя, треугольное отображение переходит в хаотическим режим.

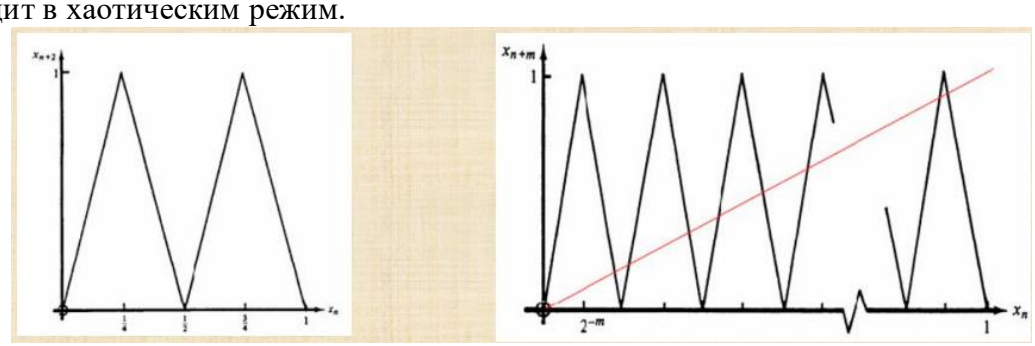


Рис. 18. Итерации треугольного отображения.

Треугольное отображение – хаотическая система. Разбегание траекторий характеризуется показателем Ляпунова. Для x_{n+1} = отображения $f(x_n)$:

$$\lambda = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right|; \quad \lambda = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left|f'(x_i)\right|\right\} \qquad \textbf{(26)}$$

Показатель Ляпунова для треугольного отображения вдоль типичной траектории равен λ=ln2>0, при r=1 инвариантная мера $p(x)$=1. Положительное значение показателя экспоненты демонстрирует, что система неустойчива и склонна к детерминированному хаосу. Типичная траектория треугольного отображения равномерно покрывает интервал (0, 1).

18.5 Отображение «тент»

Отображение тент получило название за форму своего графика, напоминающего палатку – тент. Способно приводить к специфическим хаотическим эффектам.

Как показано выше, отображение Пила описывается кусочно-линейной сингулярной функцией, определённой на полуотрезке [0, 1] с разрывом по середине и непрерывной только справа. Отображение Тент описывается кусочно-линейной сингулярной функцией, определённой на всём отрезке [0, 1] без разрыва, т.е. в отличие от Пилы является непрерывным отображением и справа и слева. С этой точки зрения Тент - самая простая из известных моделей хаоса.

Отображение тент – простейшая нелинейная функция, состоящая из двух линейных функций

$$T_\mu(x) = \begin{cases} 2\mu x & для \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2\mu(1-x) & для \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \qquad (27)$$

где 0≤μ≤1 и 0≤x≤1.

Другое представление: f_μ=2μ$min\{x, 1\text{-}x\}$

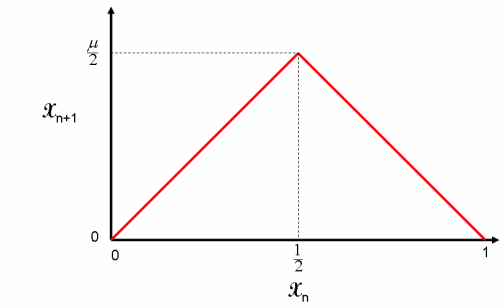


Рис. 19. График функции тент

Отображение тент непрерывно, линейно на каждом отрезке (−1, 1/2] и [1/2, 1) (с соответствующими наклонами μ и −μ) и на своём графике имеют точки (0,0) и (1,0). Максимальное значение равное r достигается при x=0,5.

Отображение тент кусочно-линейно, что облегчает его анализ отображения. Хотя форма отображения тент проста и уравнения линейны (две прямые), для некоторых значений параметров это отображение может приводить к сложному поведению, включающему существование периодических орбит, перемешивание, чувствительность к начальным условиям и. хаотичность. Отображение тент, как и отражение сдвига Бернулли, чувствительно к начальным условиям, однако поведение отображения тент к тому же сильно зависит от величины параметра μ: оно может быть хорошо предсказуемым, но может быть и хаотичным.

Замечание. Логистическое отображение (см. следующую лекцию) и отображение тент топологически сопряжены при r=4 (для логистического) и μ=1 (для тента), т.е. их поведения совпадают.

Рассмотрим итерации $x_{n+1}=f(x_n)$. Неподвижная точка или точка периода 1 динамической системы (27) есть точка, при которой $x_{n+1}=f(x_n)=x_n$ для всех n. Для отображения тент это означает, что $T_r(x_n)=x_n$. Как уже упоминалось, неподвижные точки - это точки пересечения отображения T_r с прямой $y=x$. Рис. 20(а-в) демонстрируют T_μ для μ=2/7, 1/2 и 5/6. С ростом r высота графика T_r возрастает. Если 0<μ<1/2, то T_μ пересекает линию $y=x$ один раз (при 0), тогда как если 1/2<μ<1, то имеются две точки пересечения.

Свойства:

Если $0<\mu<1/2$, то единственная неподвижная точка $x=0$ является притягивающей точкой: система будет стремиться к нулю с устремлением времени в бесконечность при любом исходном значении x из отрезка [0;1]. Если $0<x<1/2$ то $0\le T_\mu(x)=2\mu x<x$, а если $1/2<x\le 1$, то $0\le T_\mu(x)=2\mu(1-x)<1-x<-0,5<x$. Следовательно, для любого $x\in[0,\ 1]$ последовательность $\left\{T_\mu^{\{n\}}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена и уменьшается; благодаря непрерывности T_r последовательность сходится к неподвижной точке 0. Следовательно точка 0 – притягивающая неподвижная точка (стабильна). Её бассейн притяжения [0, 1].

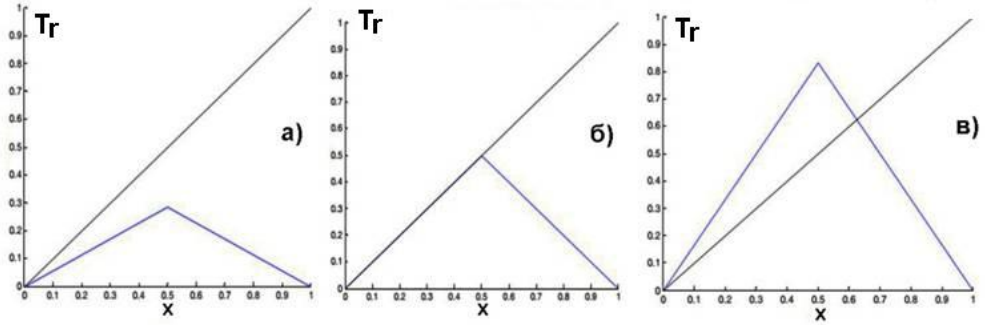


Рис. 20. Итерации отображения тент.

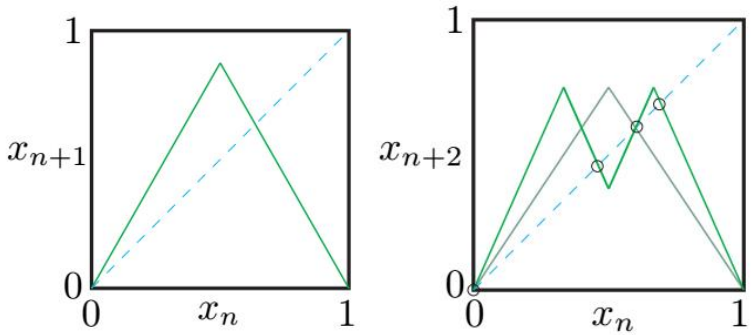


Рис. 21. Вторая и третья итерация отображения тент; *неподвижные точки: на а $\mu=1$ неподвижнык точки при $x=0$ и $x=2/3$, б – $\mu=1$четыре неподвижные точки: 0, 2/3 и две нестабильные точки орбиты с периодом 2: при $x=2/5$ и $4/5$.*

Если $\mu=0,5$, то все значения $x<0,5$ – неподвижные точки системы; каждая точка в [0, 1] есть или неподвижная точка $T_{1/2}$ или неподвижная точка первой итерации.

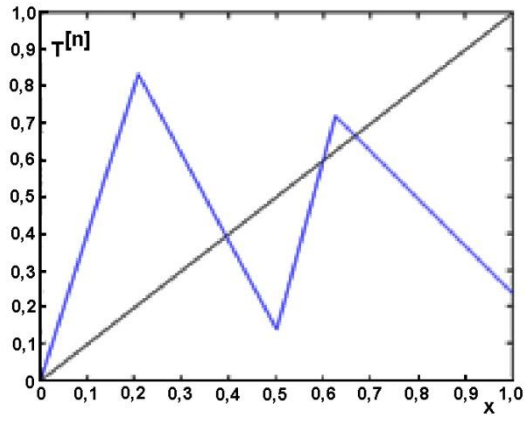


Рис. 22. Переход отображения тент в отображение сдвиг Бернулли.

Если $1/2<\mu<1$, то система имеет две неподвижные точки: одну при 0, а другую на отрезке (1/2, 1] при значении $p=2\mu/(1+2\mu)$ (p находится решением уравнения $p=T_\mu(p)=2\mu(1-p)$). При увеличении μ от 1/2 к 1, p уменьшается от 1/2 до 2/3. Поскольку $\left|T_\mu'(x)\right|=2\mu>1$ на [0, 1] за исключение при 1/2, обе 0 и p – повторяющиеся неподвижные точки. Обе неподвижные точки нестабильны, т.е. значение x вблизи такой неподвижной точки будет двигаться от неё, чем к ней. Периода-2 неподвижные точки T_μ - неподвижные точки $T_\mu^{[2]}$, которые задаются

$$T_\mu^{[2]}(x)=\begin{cases}4\mu^2 x & для \quad 0\le x\le 1/4\mu\\ 2\mu(1-2\mu x) & для \quad 1/4\mu < x\le 1/2\\ 2\mu(1-2\mu+2\mu x) & для \quad 1/2 < x\le 1-1/4\mu\\ 4\mu^2(1-x) & для \quad 1-1/4\mu\le x\le 1\end{cases} \tag{28}$$

График $T_8^{[2]}$ предполагает, что для 1/2<μ<1, $T_\mu^{[2]}$ имеют четыре фиксированных точки, которые находят решением четырёх уравнений $x=T_\mu^{[2]}(x)$ возникающих из определения $T_\mu^{[2]}$. Четыре неподвижные точки есть 0, 2μ/(1+4μ^2), 2μ/(1+2μ) и 4μ^2/(1+4μ^2). Первая и третья – две неподвижные точки T_μ, для которых $\left\{\frac{2\mu}{1+4\mu},\ \frac{4\mu^2}{1+4\mu^2}\right\}$ есть 2-цикл для T_μ. Этот 2-цикл – отталкивающий, т.к. $\left|\left(T_\mu^{[2]}\right)(x)\right|=4\mu^2>1$, где производная определена. Поскольку график $T_\mu^{[2]}(x)$ линеен на 2^n подинтервалах [0,1/2^n,...,[1-1/2^n,1], можно описать вариации всех повторяющихся n-циклов T_μ.

Если $0\le\mu\le\sqrt{2}/2$, множества интервалов является множество Жюлиа отображения тент, т.е. инвариантное множество точек, чьи орбиты неустойчивы. Оно является нигде не плотным и гомеоморфном канторову множеству.

Если $\mu>\sqrt{2}/2$, то точки сливаются в множество Жюлиа.

Если μ=1, то отображение тент переходит в отображение сдвиг Бернулли, T. Как и для отображения зуба пилы, умножение x на 2 соответствует сдвигу двоичного числа на один разряд влево. Орбиты с большей длиной появляются при увеличении μ. Например:

$\frac{2\mu}{\mu^2+4}$ при μ=0,5

$\frac{4\mu}{\mu^3+8}$ при $\mu=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\approx 0{,}81$

$\frac{8\mu}{\mu^4+16}$ при μ≈0,92

Как и все члены $\{T_\mu\}$, точка 0 является неподвижной точкой T. Так как $x=T(x)=2(1-x)$, то $x=2/3$ – вторая неподвижная точка T. На рис. 23(б и в) видно, что $T^{[2]}$ и $T^{[3]}$ имеют соответственно четыре и восемь неподвижных точек, соответственно. Таким образом, T-отображение имеет периода-2 две точки и шесть периода-3 точки, которые можно оценить, решив уравнения $x=T^{[2]}(x)$ и $x=T^{[3]}(x)$ для x.

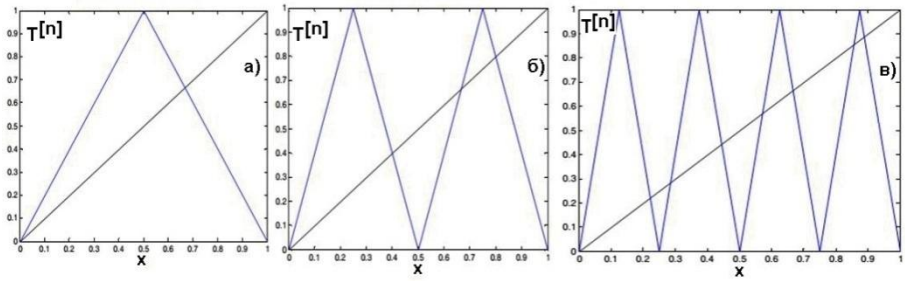


Рис. 23. Несколько итераций отображения тент.

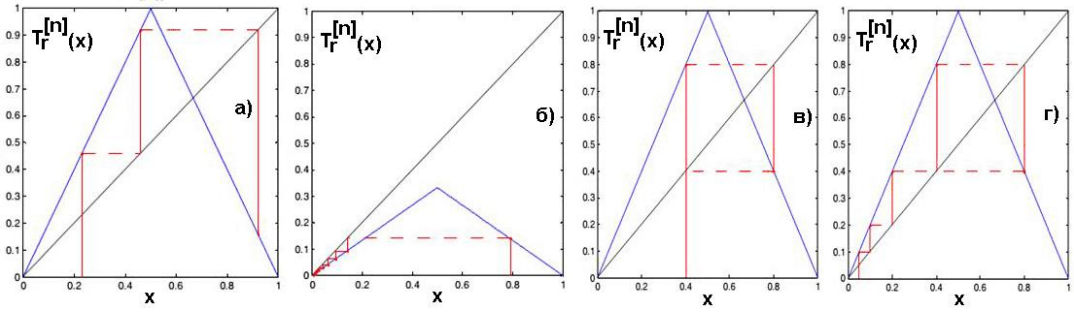


Рис. 24. Примеры равновесия и периодической орбиты в отображении тент.

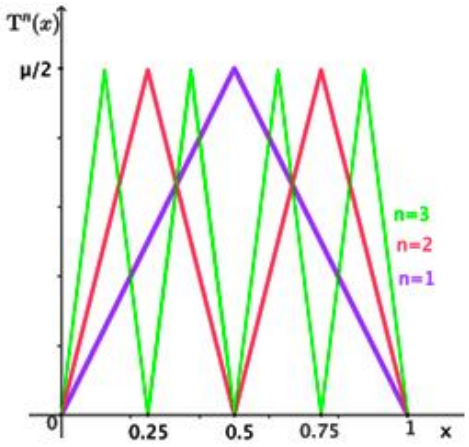


Рис. 25. График случая μ =1 для 1, 2 и 3 итераций отображения тент

Автокорреляционная функция для достаточно длинной последовательности $\{x_n\}$ показывает нулевую автокорреляцию при всех ненулевых запаздываниях. Поэтому нельзя отличить последовательность от белого шума с помощью автокорреляционной функции. Заметим, что случай r=4 логистического отображения и случай μ=1 отображения тента гомеоморфны друг другу. Действительно, пусть x_n – орбита отображения тент при μ=1, а y_n – орбита логистического отображения для r=4, тогда они связаны соотношением:

$$x_n = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{y_n}\right). \qquad (29)$$

Если μ>1, то множество Жюлиа отображения все еще содержит бесконечное количество и периодических, и непериодических точек, но почти всюду точки отрезка [0;1]} стремятся к бесконечности. Само множество становится канторовым. В частности, множество Жюлиа отображения тент для μ=3 – стандартное канторово множество.

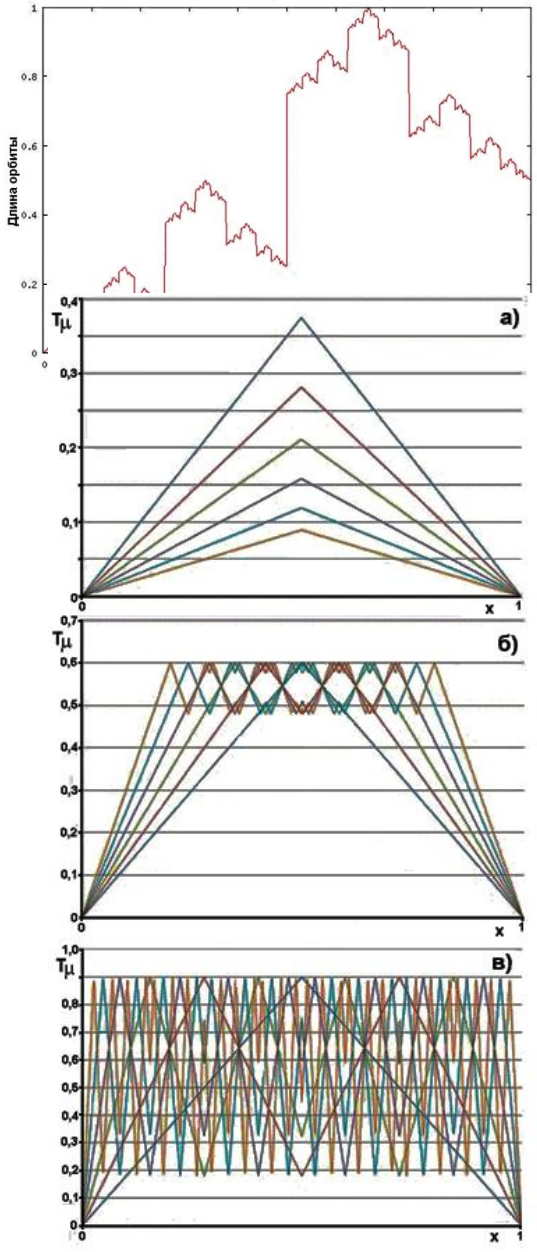


Рис. 26. Орбиты отображения тент для μ=1, выраженные в действительных числах.

Исследовать поведение отображения тент удобно методом паутины. Продемонстрируем этот способ на трех итерациях. Начальное значение x=0.23, число итераций равно 3, количество повторов для отображения и параметр μ=1 (рис. 24а, б и в). На рис. 24г показан участок паутины из 10 итераций. Начальное значение равно x= 0,789. Демонстрируется приближение к началу координат.

Рис. 27. Графики нескольких итераций отображения тент для: *а – μ =0,325; б - μ=0,6 (μ< $\sqrt{2}$ /2); в - μ=0,9 (μ< $\sqrt{2}$ /2).*

Показатель Ляпунова для отображения тент

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=0}^{n-1}\log_2\left|\pm\mu\right| = \log_2\mu \qquad (30)$$

Кусочно-линейное одномерное отображение на отрезке [0, 1], заданное x_{n+1}=μ(1-2|x_n-0,5|) проявляет хаотическую динамику.

Первые несколько итераций

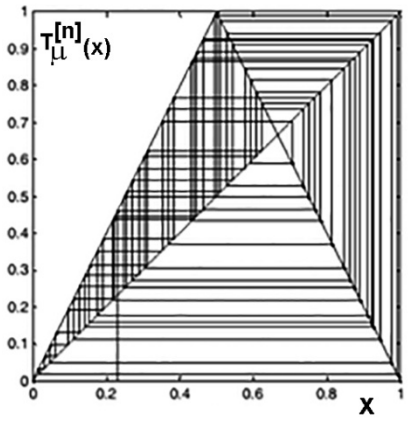
$$x_1 = -\mu\left(2\left|x_0-\frac{1}{2}\right|-1\right)$$

$$x_2 = -\mu\left(2\left|\mu\left(1-2\left|x_0-\frac{1}{2}\right|\right)-\frac{1}{2}\right|-1\right)$$

$$x_3 = -\mu\left(2\left|\mu\left(2-\left|\mu\left(1-2\left|x_0-\frac{1}{2}\right|\right)-\frac{1}{2}\right|\right)-\frac{1}{2}\right|-1\right)$$

где x_0 – начальное значение, нанесенное выше на пять итераций (с увеличением номера итерации, обозначенного цветами, 1 –

красным, 2 – жёлтым, 3 – зелёным, 4 – синим, а 5 – фиолетовым) для различных значений μ (рис. 25).



Хаотическая орбита для отображения тент при μ=1 представлена на рис. 28. Вообще говоря, подобные орбиты возникают для любого начального условия, как только μ превысит 1/2.

Рис. 28. Хаотическая фазовая траектория отображения тент при μ=1 (*диаграмма паутины*), μ=0,5, *n*=1.

Часто мы хотим знать, как поведение системы зависит от параметров. В случае отображения тент T_μ мы имеем единственный параметр μ, и знаем, что существует устойчивое равновесие при μ<1/2, при μ>1/2 существуют два неустойчивых равновесия, некоторые неустойчивые периодические решения и хаотические решения.

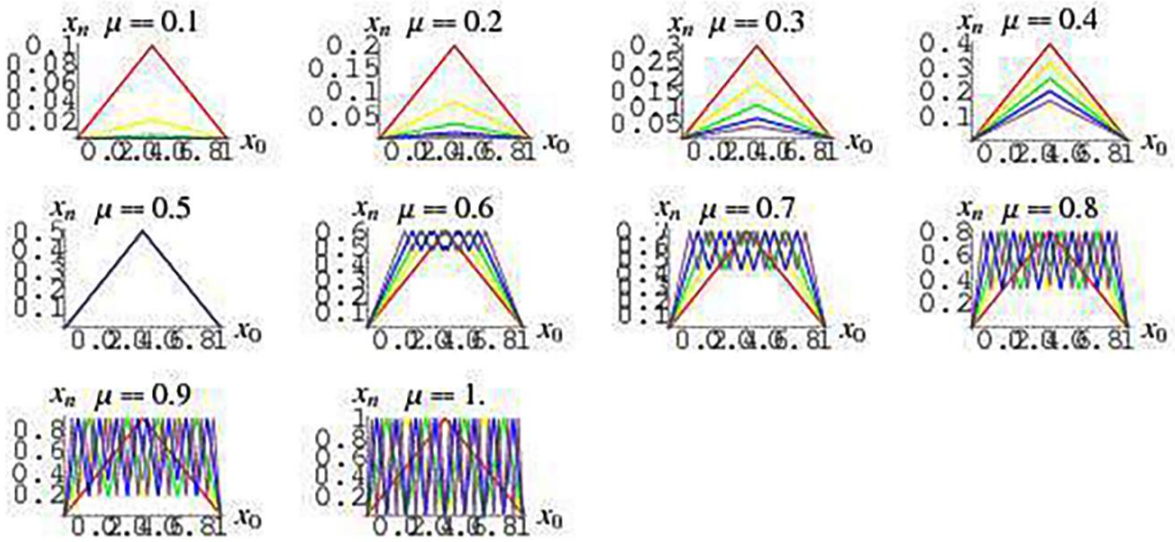


Рис. 29. Итерации отражения тент при различных значениях параметра μ.

Общий обзор зависимости решений от параметра μ даёт бифуркационная диаграмма. При её построении на абсциссу наносим значения μ, а на ординату – все значения *x* с орбиты для этого значения μ. Неподвижные точки отображаются как одна точка, периодическая орбита – как несколько точек, а хаотическая орбита – как полоса или несколько полос точек. Бифуркационная диаграмма отображения тент приведена на рис. 31. Более высокая плотность потемнения указывает на большую вероятность того, что переменная *x* получит именно это значение при данном значении параметра μ.

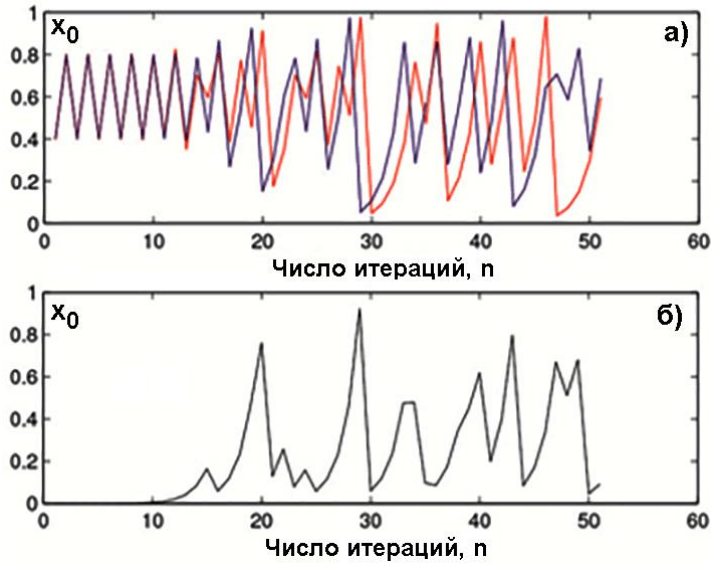


Рис. 30. Фазовые траектории отображения тент: *а – две*

орбиты для начального условия x_0=0,4 и x_0=0,40001 и μ=0,9999; б – абсолютное расстояние между двумя орбитами.*

18.6 Канторов репеллер

На рис. 34 показано, как классическое множество Кантора появляется в динамике отображения тент $f_c(x)$ при $c=3$. Легко убедиться, что при $x>1$ итерации уходят в -∞. Как видно из рисунка, на первой итерации отображения выпадает открытый интервал (1/3,2/3), а два интервала [0,1/3] и [2/3,1] линейно отображаются в [0,1]. Повторяя этот процесс до бесконечности, мы будем каждый раз вырезать центральную 1/3 из оставшихся на предыдущем шаге интервалов (несколько первых шагов показаны на рисунке). В результате мы получим фрактальное множество Кантора. Суммарная длина вырезанных интервалов $1/3+2/9+4/27+...=1/3\sum_{n=0,\infty}(2/3)^n=1/3[1/(1-2/3)]=1$, т.о. мера Лебега (площадь) классического множества Кантора равна нулю. Его фрактальная размерность log2/log3. Множество Кантора с нулевой мерой появляется в отображении тент при любом $c>2$.

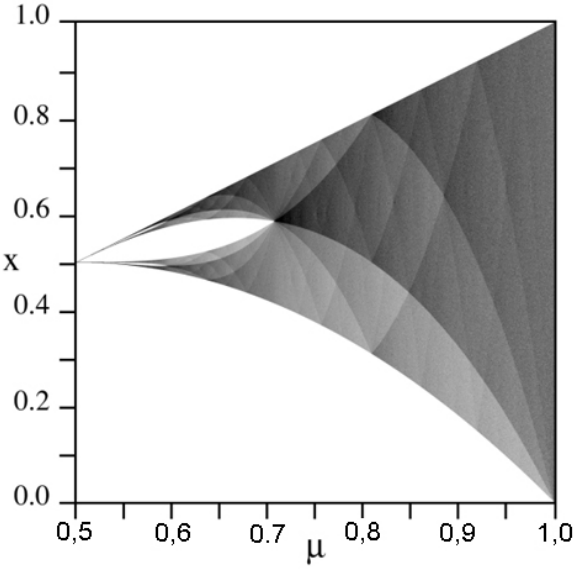


Рис. 31. Бифуркационная диаграмма отображения тент. *Более высокая плотность соответствует более высокой вероятности, что переменная x примет данное значение для параметра μ. Зачернённые области – аттрактор хаотического движения.*

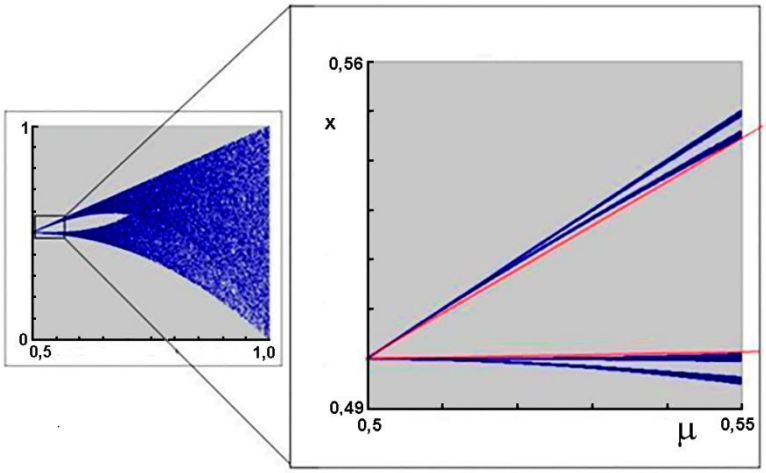


Рис. 32. Увеличение рисунка в районе острия даёт более подробную информацию о бифуркационной диаграмме отображения тент (μмакс=0.55).

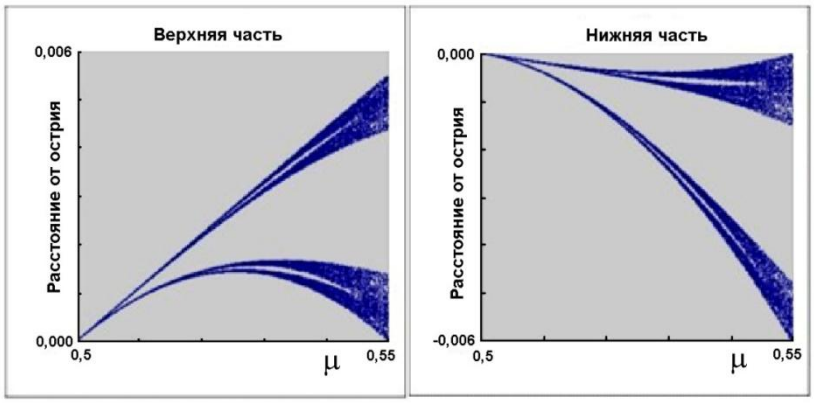


Рис. 33. Увеличение бифуркационной диаграммы отображения тент показывает 8 разделенных областей. .

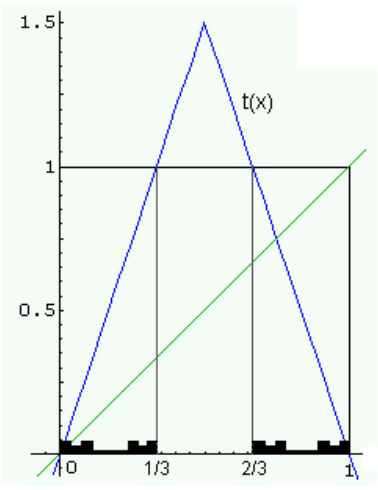


Рис. 34. Проявление канторова множества в динамике отображения тент.

Очевидно, что в троичной системе счисления после первой итерации выпадают все числа вида 0.1... Поэтому множество Кантора образуется троичными числами, без цифры 1. Заменяя цифры 2→1 видим, что это континуум. Как и ранее, рациональным числам соответствуют неустойчивые периодические орбиты. Для бесконечной случайной последовательности цифр 0 и 2 получаем хаотическую орбиту.

18.7 Детерминированная диффузия

Как известно, что итерации некоторых одномерных периодических отображений демонстрируют диффузионное поведение. Эта диффузия указывает на наличие хаотического движения у соответствующего редуцированного отображения. Обычно диффузию связывают с броуновским движением частиц жидкости. Уравнение диффузии появляется в случае большого трения (когда ускорением $\propto \ddot{x}$ можно пренебречь); оно имеет вид

$$\dot{x} \propto \eta(t). \qquad (31)$$

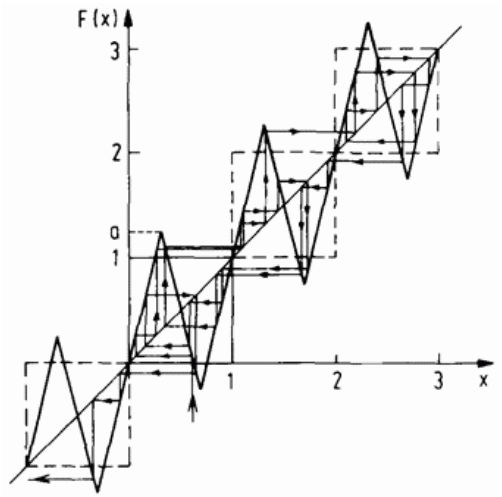
где η(t) - случайные силы, возникающие при тепловом движении молекул.

Если считать, что η(t) коррелированы по Гауссу, т.е. <η(t)≥0, <η(t), η(t'≥δ(t-t') тогда <x(t)≥0,

$$<x^2(t)>\sim t \qquad (32)$$

(в отличие от закона, согласно которому $x^2 \sim t^2$ при постоянной силе $k \sim x$). Это означает, что квадрат расстояния до начала координат линейно зависит от времени, если на частицу действуют случайные силы. Можно показать, что при $t \to \infty$ Ур.32 выполняется и тогда, когда ускорением не пренебрегают.

Рассмотрим кусочно-линейное периодическое отображение



$$x_{\tau+1}=F(x_\tau)=x_\tau+f(x_\tau),\ \tau=0,\ 1,\ 2,\ldots, \qquad (33)$$

в котором функция $f(x_\tau)$ периодична по x_τ, т.е.

$$f(x_\tau+n)=f(x_\tau),\ n=\ldots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots \qquad (34)$$

Рис. 35. Кусочно-линейное периодическое отображение с диффузионной траекторией.

Траектория медленно удаляется от начала координат (рис. 35). Диффузия возникает не за счёт случайных сил, как в броуновском движении, а за счёт движения внутри одного или нескольких единичных отрезков, система "забывает своё прошлое".

Вычислим $\langle x^2 \rangle$. Координату точки траектории x_τ представим в виде суммы номера отрезка N_τ и положения y_τ из отрезка [0, 1]:

$$x_\tau = N_\tau + y_\tau. \qquad (35)$$

Для рассматриваемого отображения имеем

$$N_{\tau+1} + y_{\tau+1} = F(N_\tau + y_\tau) = N_\tau + y_\tau + f(y_\tau), \qquad (36)$$

что эквивалентно паре динамических уравнений

$$N_{\tau+1} - N_\tau = [y_\tau + f(y_\tau)] = \Delta(y_\tau), \qquad (37а)$$

$$y_{\tau+1} = y_\tau + f(y_\tau) - [y_\tau + f(y_\tau)] = g(y_\tau), \qquad (37б)$$

где $[z]$ означает целую часть числа z.

На рис. 36 показаны функция $\Delta(y_\tau)$ которая представляет собой величину скачка, описываемого целым числом, и функция $g(y_\tau)$ дающая остаток для координаты $\tau+1$.

Расстояние от начала координат

$$N_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} \langle N_{\tau+1} - N_\tau \rangle = \sum_{\tau=0}^{t-1} \langle \Delta(y_\tau) \rangle; \quad N_0 = 1. \qquad (38)$$

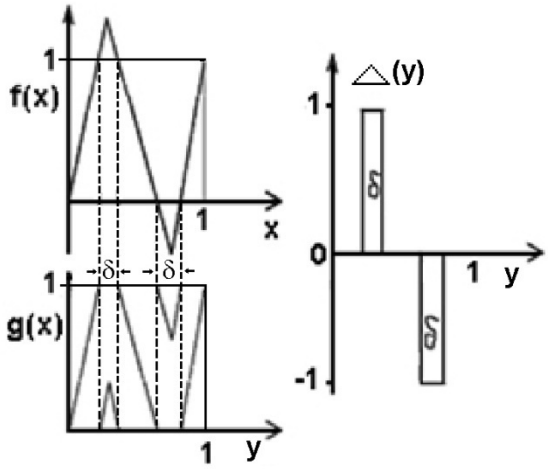


Рис. 36. Разложение кусочно-линейного отображения.

Усреднённый квадрат расстояния (дисперсия):

Для дисперсии имеем

$$\langle N_t^2 \rangle = \sum_{\tau,\lambda}^{t-1} \langle \Delta(y_\tau) \Delta(y_\lambda) \rangle \qquad (39)$$

Усреднение <...> берётся по всем начальным условиям y_0. Для простоты полагаем, что $\langle N_t \rangle = 0$.

Если движение, задаваемое $g(y)$ настолько хаотично, что корреляции между y_τ нет, т.е. $\langle \Delta(y_\tau), \Delta(y_\lambda) \sim \delta_{\tau,\lambda}$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\langle N_t^2 \rangle}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{\tau=0}^{t-1} \langle \Delta^2(y_\tau) \rangle = \int dy \rho(y) \Delta(y). \qquad (40)$$

Если $g(y)$ имеет инвариантную плотность, удовлетворяющую уравнению

$$p(y) = \int_0^1 dx\ \delta[g(y) - y] p(x), \qquad (41)$$

тогда

$\langle N_t^2 \rangle = 2Dt$, для $t \gg 1$, т.е. $\langle N_t^2 \rangle$ растёт линейно со временем.

$D = \frac{1}{2} \int_0^1 dy p(y) \sigma^2(y)$ - коэффициент диффузии.

Диффузия имеет место тогда, когда координаты y_τ в достаточной степени не коррелированны; в этом случае двойная сумма в (39) сводится к обыкновенной. (Для вполне коррелированного движения $\langle N_t^2 \rangle$) пропорционально t^2. Таким образом, для периодического отображения само наличие диффузии уже указывает на хаотичность движения, разрушающего корреляции внутри отрезков.

Для коэффициента диффузии существует простой масштабный закон, имеющий чисто геометрическую природу. Если интервалы δ, через которые траектории перескакивают из одного отрезка в другой, достаточно малы (так что изменением ρ в этой

области можно пренебречь (т. е. $\rho(x \in \delta) = \bar{\rho}$), то, поскольку Δ^2 принимает значение либо 0, либо 1, коэффициент диффузии

$$D \approx \frac{1}{2}\bar{\rho}\delta,$$

На рис. 37 показано, что D имеет скейлинг:

$$D \sim (a\text{-}1)^{1/z},$$

когда отображение $f(x)$ имеет максимум (и минимум) порядка z.

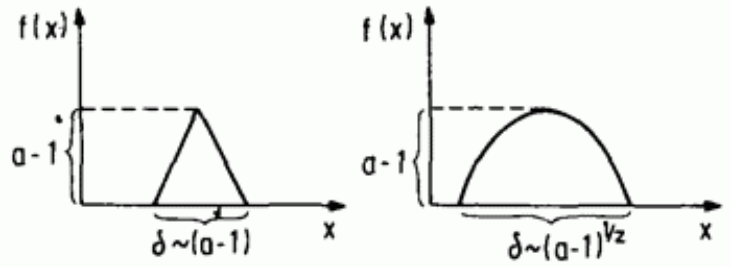


Рис. 37. Вариация δ порядка $(a\text{-}1)^{1/z}$ когда f(x) имеет максимум порядка z (схематично).

19. ХАОС В ЛОГИСТИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

В контексте данной книги под хаосом мы понимаем очень быстрое разбегание изначально близких траекторий в фазовом пространстве. Динамический хаос, в основе которого лежит детерминированный процесс, возможен в линейных (точнее – в кусотчато-линейных) системах, но всё же он более характерен для нелинейных (квадратичных, кубических...) отображений. В данной главе рассмотрен переход к хаосу в простой системе, описываемой логистическим отображением – типичным представителем квадратичных нелинейных отображений одномерных динамических систем.

19.1 Переход к хаосу через удвоение периода

Переход к динамическому хаосу возможен различными путями (рис.1):
– через каскад бифуркаций удвоения периода;
– через перемежаемость;
– через квазипериодичность и разрушение тора;
– возникновение цикла периода 3→5→5→3·2→5·2→7·2→3·2·2→...

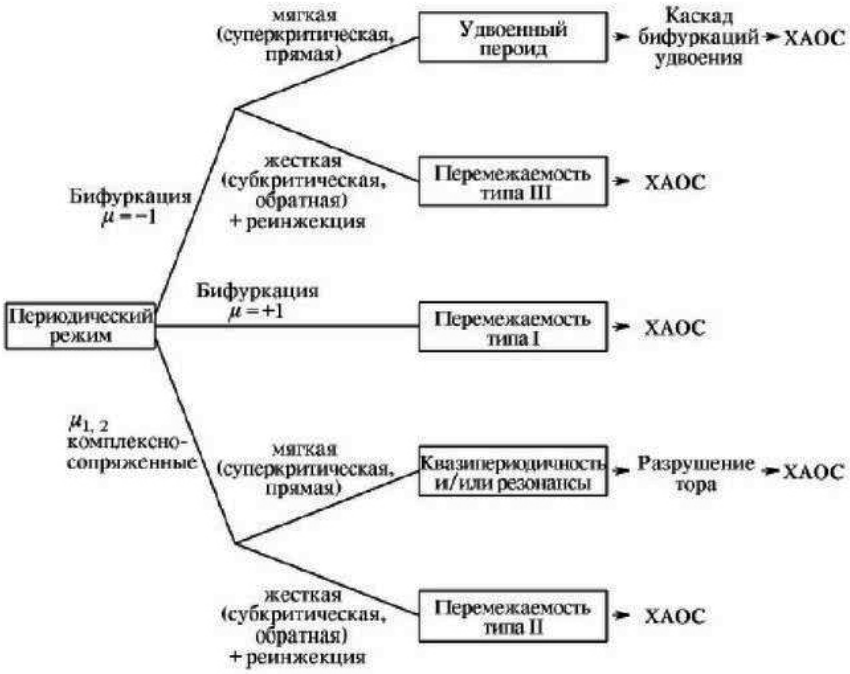


Рис. 1. Пути к хаосу.

Основной путь к хаосу динамической системы реализуется по механизму удвоения периода (как результат бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода).

Под понятием удвоение периода обычно понимают последовательность периодических колебаний, в которой при достижении управляющим параметром определённого значения происходит удвоение периода. В классической модели бифуркации удвоения периода (удвоения частоты) происходят через монотонно уменьшающиеся интервалы управляющего параметра. После прохождения критического значения параметра (точки накопления) возникают хаотические колебания. Такой сценарий перехода к хаосу наблюдается во многих физических системах.

Бифуркация удвоения периода в дискретной динамической системе – бифуркация, в которой небольшое изменение значения параметра в уравнениях системы приводит к переходу системы на новое поведение с удвоенным периодом исходной системы. При анализе отображений с удвоенным периодом для повторения числа числовых значений, посещаемых системой, требуется в два раза больше итераций.

Каскад с удвоением периода - последовательность удвоений и дополнительных удвоений повторяющегося периода, поскольку параметр корректируется все дальше и дальше.

Бифуркации удвоения периода могут возникать не только в дискретных (отображения), но и в непрерывных динамических системах, а именно, когда новый предельный цикл возникает из существующего предельного цикла, а период нового предельного цикла в два раза больше, чем у старого.

Эволюция динамической системы, включающая неожиданное удвоение периода колебаний при монотонном изменении управляющего параметра, возможна уже в простых системах. Так, простые одномерные отображения могут содержать бифуркации удвоения периода и хаос, если функция $f(x)$ имеет, хотя бы один максимум (или минимум). Удвоение периода характерно для систем с существенным затуханием.

Важность бифуркаций удвоения иллюстрирует квадратичное (например, логистическое) отображение. Подобные явления важны и в геометрии фракталов (примеры: множества Мандельброта, дерево Кейли, Канторова пыль и др.). С помощью удвоения периода система погружается в хаос.

Замечание. Энтропия отображения удвоения равна логарифму двух.

19.2 Логистическое уравнение

Мы уже упоминали логистическое уравнение при описании лестницы Ламерея. Теперь займёмся им более детально.

Логистическое уравнение (уравнение Ферхюльста), изначально появилось при рассмотрении модели изменения численности населения во времени. Это пример того, как из очень простых нелинейных уравнений может возникать сложное, хаотическое поведение.

Попытки математического описания динамики популяций восходят к Томасу Мальтусу, автору концепции, согласно которой численность людей возрастает в геометрической прогрессии, а средства поддержания жизни лишь в арифметической. Поэтому численность населения должна регулироваться войнами, эпидемиями и пр. В отсутствии факторов, сдерживающих рост населения, изменения численности популяции из года в год по Мальтусу можно описать как

$$x_{n+1}=Rx_n, \qquad (1)$$

где R – параметр, определяющий условия жизни популяции. (Если R=2, то отображение называется зуб пилы (рассмотрено нами ранее): $x_{n+1}=\{2x_n\}$. Если число рациональное, то последующие числа образуют бесконечное счётное множество; если иррациональное - множество мощностью континуума. Таким образом, детерминированное уравнение привело к случайной последовательности чисел, т.е. к хаосу.

Ввести сдерживающий фактор можно, если добавить в уравнение нелинейный, например, квадратичный член: $x_{n+1}=R(x_n-x_n^2)$. Полученное соотношение называют логистическим отображением. Заменой переменной и управляющего параметра соотношение можно привести к виду $x_{n+1}=1-\lambda x_n^2$.

Напомним, что в 1786 году Томас Мальтус разработал математическую модель роста популяций

$$\frac{dN}{dt}=\varepsilon N; \quad N=N_0e^{\varepsilon t} \qquad (2)$$

В дискретном представлении

$$N_{n+1}=(1+\varepsilon)N_n \qquad (3)$$

В 1840 г. модель Мальтуса существенно усовершенствовал Пьер Франсуа Ферхюльст, предложивший логическое уравнение (уравнение Ферхюльста) для численности населения.

Нелинейное уравнение роста численности популяции с учётом замедления роста

$$\varepsilon^*=\varepsilon(1-N/N_{max}) \qquad (4)$$

$$N_{n+1}=[1+\varepsilon(1-N_n/N_{max})]N_n \qquad (5)$$

Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

- когда численность популяции мала, она размножается со скоростью пропорциональной этой численности (первый член уравнения)
- скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов (ограниченная емкость среды). Второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции: при росте популяции скорость размножения падает, возрастает конкуренция и смертность (имеет место нелинейное ограничение роста).

Обозначив через N численность популяции, а время – t, модель сводится к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) \qquad (6)$$

где параметр r характеризует скорость роста (размножения), а K– поддерживающую ёмкость среды (максимально возможная численность популяции). Исходя из названия коэффициентов, в экологии часто различают две стратегии поведения видов:

- r-стратегия предполагает бурное размножение и короткую продолжительность жизни особей
- K-стратегия — низкий темп размножения и долгую жизнь.

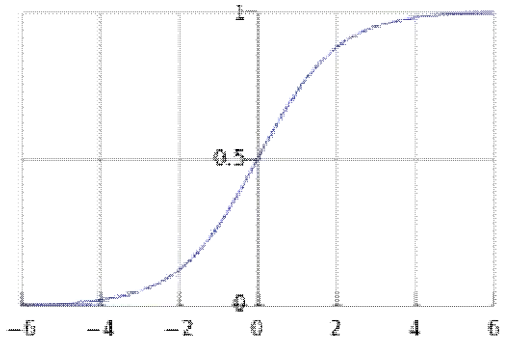


Рис. 2. Логистическая кривая для K=1 и N_0=0,5.

Точным решением уравнения (где N_0 – начальная численность популяции) является *логистическая функция*, *S*-образная кривая, (логистическая кривая):

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K+P_0(e^{rt}-1)} \qquad (7)$$

где $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$.

Ясно, что в ситуации «достаточного объёма ресурсов», т.е. пока $P(t)$ много меньше K, логистическая функция поначалу растёт приблизительно экспоненциально:

$$\frac{P(t)}{P_0e^{rt}} = \frac{K}{K+P_0(e^{rt}-1)} = \frac{1}{1+\frac{P_0}{K}(e^{rt}-1)} \qquad (8)$$

Аналогично, при «исчерпании ресурсов» ($t\to\infty$) разность K-$P(t)$ экспоненциально убывает с таким же показателем.

Скорость роста популяции - график типа "пик с хвостом".

19.3 Дискретное логистическое уравнение

Дискретный аналог логистического уравнения имеет вид:

$$N_{t+1} = N_t \cdot e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}, \qquad (9)$$

где r – константа собственной скорости роста популяции, K – ёмкость среды.

Об устойчивости системы судят по величине первой производной правой части:

$$\frac{dF}{dN_t} = \left(1-\frac{N_t r}{K}\right)\cdot e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}. \qquad (10)$$

Решение называется циклом длины T, если

$N_t^*=N_t+\tau^*$, t=0,1,2... (11а)

$N_{t+j}\neq N_t^*$, j=1,2,...,T-1 (11б)

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Положение равновесия:</td></tr>
<tr><td></td><td>$N_1^* = 0$</td><td>$N_2^* = K$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Значение производной:</td></tr>
<tr><td></td><td>$\left.\frac{dF}{dN_t}\right|_{N^*=0} = e^r$</td><td>$\left.\frac{dF}{dN_t}\right|_{N^*=K} = 1-r$</td></tr>
<tr><td>$0 < r < 1$</td><td rowspan="3">Положение равновесия неустойчиво, монотонное удаление от положения равновесия.</td><td>Положение равновесия устойчиво, монотонное приближение к положению равновесия</td></tr>
<tr><td>$1 < r < 2$</td><td>Положение равновесия устойчиво, затухающие колебания вокруг положения равновесия</td></tr>
<tr><td>$r > 2$</td><td>Положение равновесия неустойчиво, амплитуда колебаний вокруг положения равновесия нарастает</td></tr>
</table>

При r=2 в результате бифуркации происходит переход от неподвижной точки к устойчивому циклу с периодом 2. Цикл порядка 2 (2-цикл) образует последовательность точек x_1, x_2, удовлетворяющих $x_2=f(x_1)$, $x_2=f(x_2)$. Точки циклов отображения $y=f(x)$ являются неподвижными точками для $F(x)=f(f(x))\equiv f^2(x)$: $x_1=F(x_1)$; $x_2=F(x_2)$. В принципе, могут быть циклы любого порядка.

Как будет показано далее, у логистического отображения наблюдаются при следующих значениях параметра r:

$2<r<2{,}526$ - цикл длины 2

$2{,}256<r<3{,}102$ - циклы длины 4, 8, 16,...,2^k.

Переход к каждому следующему циклу с большим периодом осуществляется в результате бифуркации удвоения периода. При r>3,102 решение зависит от начальных условий. Существуют циклы с периодом 3 и квазихаотические решения.

19.4 Логистическое отображение

Логистическое отображение (отображение Ферхюльста - частный случай квадратичного отображения) – полиномиальное отображение, которое описывает, как меняется численность популяции с течением времени. Это дискретный аналог непрерывного логистического уравнения Ферхюльста; оно отражает тот факт, что прирост популяции происходит в дискретные моменты времени.

Введенный Ферхюльстом в уравнение Мальтуса дополнительный отрицательный член, пропорциональный квадрату скорости роста отражает уменьшение численности за счет ограниченности ареала или же количества ресурсов.

Переход к новым переменным $x_n = \dfrac{N_n\varepsilon}{N_{\max}(1+\varepsilon)}$; r=1+ε даёт $x_{n+1}=rx_n(1-x_n)=f(x_n)$.

Замечание. Логистическое уравнение (уравнение Ферхюльста), изначально появилось при рассмотрении модели роста численности населения (животных, насекомых и т.п.). Оно используется для описания динамики популяции с неперекрывающимися поколениями (многие виды насекомых погибают задолго до появления на свет потомков; потомки растут без общения с предками). Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом: скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях; скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

Для возникновения сложной динамики достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела квадратичный экстремум. Простейшей функцией с квадратичным экстремумом является парабола, а соответствующее отображение называется логистическим.

Математическая формулировка логистического отображения сводится к замене логистического уравнения

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x) \qquad (12)$$

на квадратичное рекуррентное уравнение (логистическое отображение)

$$x_{n+1}=rx_n(1-x_n)=f(x_n);\ n=0,\ 1,2... \qquad (13)$$

$0 \le x_n \le 1$, $0 \le r \le 4$ для любого начального условия $x_0 \in [0, 1]$, $x_n \in [0,1]$ для всех n.

Здесь $r \neq 0$ – фиксированный положительный параметр (биотический потенциал, характеризующий скорость размножения (роста) популяции); x_n – динамическая переменная – принимает значения от 0 до 1 и отражает численность популяции в n-ом году, а x_0 – начальная численность (в год номер 0); $f(x_n)$ – функция отображения $x_1=f(x_0)$; $x_2=f[f(x_0)]$; $x_n=f^{(n)}(x_0)$

Обычно логистическое отображение исследуется в интервале значений $0<r\le 4$.

Замечание 1. Иногда Ур.13 называется отображением Ферхюльста (или Ферхюльста-Пирла), а логистическим отображением называется другая, но эквивалентная по свойствам формула: $x_{n+1}=1-\lambda x_n^2$

Замечание 2. В общем виде рекурентное Ур.13 не может быть решено в замкнутой форме. Полагают, что решение должно иметь форму $x_n = \frac{1}{2}\left\{1 - f\left[r^n f^{-1}\left(1-2x_0\right)\right]\right\}$, где f – некоторая функция, а f^{-1} - обратная функция. Известны точные решения только для r=-2, r=2 и r=4.

Замечание 3. Логистическое отображение появляется в разных разделах науки. В биологии оно является простейшей моделью, описывающей изменение численности какой-либо популяции биологического вида в определённом месте пространства через определённые промежутки времени. Слагаемо rx соответствует прибыли число особей, а нелинейный член $-rx^2$ за их убыль. В области банковских сбережений (определяет изменение суммы вклада при изменении процента по нему). При r=4 это отображение появляется в описании странного аттрактора Лоренца. Логистическое отображение используется для описания турбулентного пограничного слоя при рассмотрении соответствия течения в последовательности сечениий, перпендикулярных потоку. И в ряде других областей науки.

Для точное аналитическое решение Ур.13 выглядит следующим образом:

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1-2x_0\right)^{2^n} \qquad (14)$$

Хотя логистическое отображение описывается простой (хотя и нелинейной) формулой, оно способно к очень сложному (даже хаотическому) поведению. Переход к хаосу логистического отображения первым в 1976 г. обнаружил Митчелл Фейгенбаум, Он же доказал общий характер перехода к хаосу путём удвоения периода. Открытая им универсальная постоянная, названа его именем.

Ур.13 решается численными методами. В качестве примера, в табл. 1 приведена численность поколений популяции (от n=0 до n=19) при различной скоростях размножения (управляющий параметр изменяется от r=0,5 до r=3,5). Численность выражена в относительных единицах: 0 – полное исчезновение особей, 1 – максимально возможная численность популяции. Расчёты начинали с численности 0,5.

Из значений числа особей, приведённых в столбце r=1,5 табл. 1 видно, что уровень популяции достигает конечного значения 0.333 ... к двадцатому поколению, тогда как из данных столбца с r=2.0 следует, что уровень популяции постоянен для каждого поколения. Такой эффект имеет место и в реальном мире – если предок производит два потомка, общее количество популяции не растёт и не сокращается. Поэтому параметр r=2,0 называют коэффициентом замещения.

Табл. 1 и рис. 3 иллюстрируют изменение во времени числа особей в популяции при различных темпах роста, задаваемых величиной параметра r. Синяя кривая рис. 3 (рассчитанная для r=0,5) быстро спускается до нуля, т.е. популяция вымирает; голубая

кривая (r=2,0 – скорость замещения) отражает постоянный уровень популяции равный 0,5. Более интересны темпы роста при r=3,0 и r=3,5. В то время как желтая линия для r=3.0, медленно приближается к стабильному значению, серая линия для r=3.5 скачет вокруг некоторого постоянного значения.

Табл. 1. Число особей в популяции в разных поколениях и при разной скорости роста.

	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
1	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875
2	0.0546875	0.1875	0.3515625	0.5	0.5859375	0.5625	0.3828125
3	0.02584839	0.1523438	0.3419495	0.5	0.6065369	0.7382812	0.8269348
4	0.01259012	0.1291351	0.33753	0.5	0.5966247	0.5796661	0.5008977
5	0.006215807	0.1124592	0.3354053	0.5	0.6016591	0.7309599	0.8749972
6	0.003088585	0.09981217	0.3343629	0.5	0.5991635	0.5899725	0.3828199
7	0.001539523	0.0898497	0.3338465	0.5	0.6004165	0.7257148	0.8269409
8	0.0007685764	0.08177673	0.3335895	0.5	0.5997913	0.5971585	0.5008838
9	0.0003839928	0.0750893	0.3334613	0.5	0.6001042	0.7216807	0.8749973
10	0.0001919227	0.06945089	0.3333973	0.5	0.5999479	0.602573	0.3828197
11	9.594293e-05	0.06462747	0.3333653	0.5	0.6000261	0.7184363	0.8269407
12	4.796686e-05	0.06045076	0.3333493	0.5	0.599987	0.6068567	0.5008842
13	2.398228e-05	0.05679646	0.3333413	0.5	0.6000065	0.7157449	0.8749973
14	1.199085e-05	0.05357063	0.3333373	0.5	0.5999967	0.6103624	0.3828197
15	5.995355e-06	0.05070081	0.3333353	0.5	0.6000016	0.7134604	0.8269407
16	2.997659e-06	0.04813024	0.3333343	0.5	0.5999992	0.6133039	0.5008842
17	1.498825e-06	0.04581372	0.3333338	0.5	0.6000004	0.7114867	0.8749973
18	7.494115e-07	0.04371482	0.3333336	0.5	0.5999998	0.6158202	0.3828197
19	3.747055e-07	0.04180384	0.3333335	0.5	0.6000001	0.7097571	0.8269407

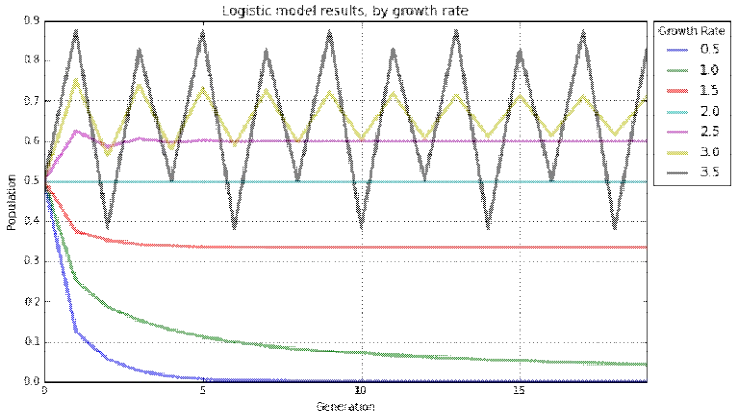


Рис. 3. Графическое представление результатов табл.2.

Ур.13 для логистического отображения решают численными методами. Результаты представляют в виде зависимости x_{n+1} от x_n. Неподвижной точкой считается точка пересечения графика x_{n+1} с прямой $x_{n+1}=x_n$, выходящей из начала координат под углом 45° (биссектриса, диагональ).

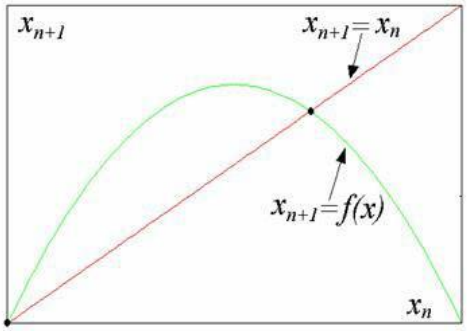


Рис. 4. График Ур.13 (итерационная диаграмма отображения). *Неподвижная точка – пересечение параболы с биссектрисой.*

Первые несколько итераций логистического отображения

$x_1=rx_0(1-x_0)$

$x_2=r^2(1-x_0)x_0(rx_0+rx_0^2)$

$x_3=r^3(1-x_0)x_0(1-rx_0+rx_0^2)x(1-r^2x_0+r^2x_0^2+r^3x_0^2-2r^3x_0^3+r_3x_0^4)$,

где x_0 - начальное значение.

Итерации вблизи начала координат идут по закону геометрической прогрессии, однако со временем рост замедляется и, в конце концов, прекращается (последовательность имеет предел. Популяция достигает постоянной величины.

Первые пять итераций при различных значениях r представлены на рис. 5. Хаос возникает при $r\geq 3$.

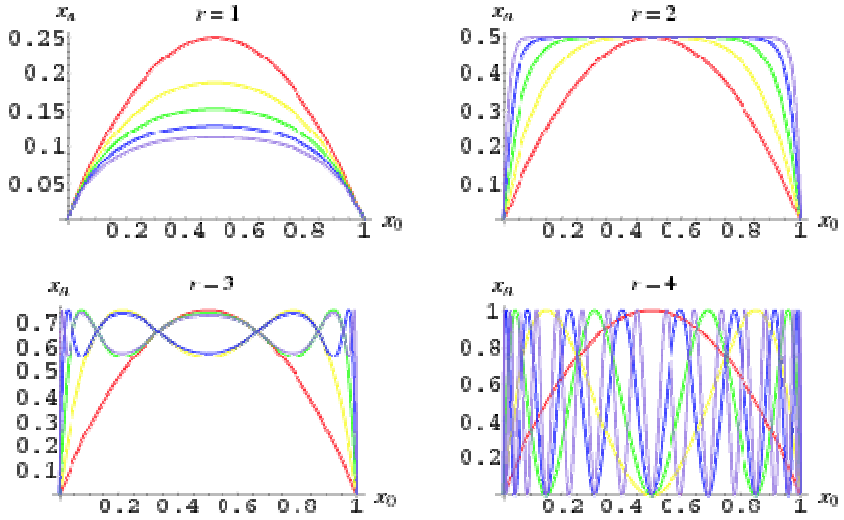


Рис. 5. Логистическое отображение: начальные итерации при различных значениях управляющего параметра r. *Цвет относится к номеру итерации: 1 – красный, 2 – желтый, 3 – зелёный, 4 – синий, 5 – фиолетовый.*

Неподвижными точками логистического отображения являются решения квадратного уравнения

$$x_n=rx_n(1-x_n) \qquad (15а)$$

или

$$rx_n^2-rx_n+1=0. \qquad (15б)$$

Из решения Ур. 15 следует, что при $r>1$ у логистического отображения есть две неподвижные точки (точки равновесия, точки покоя): $x^*_1=0$ и $x^*_2=1-1/r$.

Для нахождения неподвижных точек логистического отображения сначала определим условия, при которых сохраняются точки в выбранном интервале. Максимальное значение x_{n+1} найдём из

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n}=r(1-2x_n)=0, \qquad (16)$$

Очевидно, что наибольшее значение $max(x_{n+1})=r/4$ достигается при $x_n=1/2$.

Для того, чтобы отображение оставалось в пределах заданной области, требуется чтобы $r\in[0,4]$, а якобиан

$$J=\left|\frac{dx+1}{dx_n}\right|=\left|r(1-2x_n)\right|, \qquad (17)$$

Отображение устойчиво в точке x_0, если $J(x_0)<1$.

Найдём неподвижные точки отображения. Для удобства отбросим индекс n у x_n.

$f(x)=rx(1-x)=x$ (18а)

$x[1-r(1-x)]=x(1-r+rx)=rx[x-(1-r^{-1})]=0$ (18б)

Отсюда неподвижные точки: $x_1(1)=0$ и $x_2(1)=1-r^{-1}$. Первая точка (x_1*) встречается при всех значениях r, вторая (x_2*) - при $r>1$.

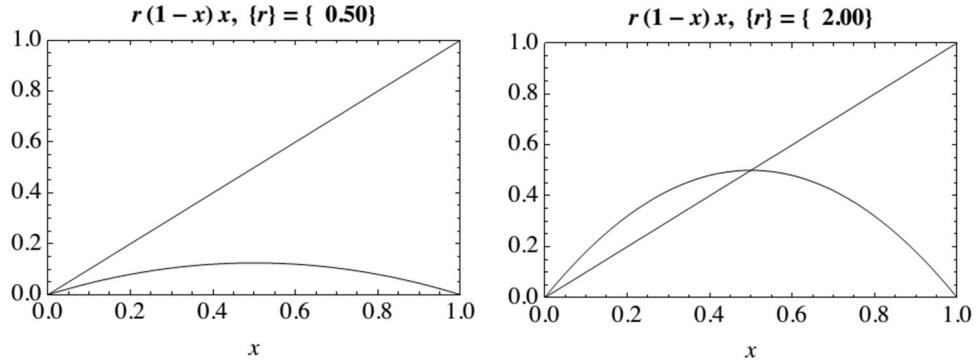


Рис. 6. Зависимость $f(x_n)=r(1-x)x$ от x_n при различных значениях управляющего параметра r: а – r=0,5 (неподвижная точка при x=0); б – r=2 (две неподвижные точки: при x=0 и x=0,5).

При росте управляющего параметра r решения логистического отображения претерпевают последовательный ряд трансформаций.

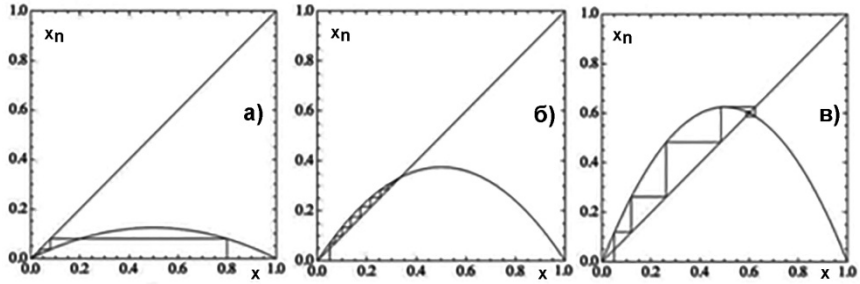


Рис. 7. Диаграмма паутины для некоторых итераций логистического отображения r(1-x)x: а – r=0,5 *- неподвижная точка x=0 (монотонная сходимость к равновесию в начале координат);* ***б – r=1,5*** *- две неподвижные точки: точка x=0 - нестабильна, x=1/3 стабильна с очень хорошей монотонной сходимостью;* ***; в – r=2,5*** *- точка x=0,6 – быстрая сходимость, с особенностью: на заключительных этапах итерации колеблются вокруг равновесия, а не приближаются к нему с одной стороны, как в двух предыдущих случаях*

Случай 0<r<1.

Если $r<1$, то существует только одна неподвижная точка $x_1=0$ (вторая точка $x_2=1-1/r$ отрицательна и не имеет физического смысла). Для выяснения устойчивости отображения $x_{n+1}=f(x_n)$ следует вычислить величину тангенса угла наклона кривой, т.е. соответствующую производную (мультипликатор, ρ) $f'(u)$ в неподвижной точке x_0. Если $|f_x'(x_0(r)|<1$, то точка устойчива, $|f_x'(x_0(r)|>1$, то точка неустойчива. Случай $|f_x'(x_0(r)|=1$ означает, что если притяжение и отталкивание есть, то оно субэкспоненциально. Если неподвижная точка x_0 устойчива при некотором значении параметра r, и производная в ней убывает с ростом r, то (если при этом бассейн притяжения неподвижной точки не вырождался) при том значении параметра r_1, когда $f_x'(x_0)=-1$, происходит бифуркация удвоения периода: неподвижная точка теряет свою устойчивость, и вблизи неё рождается притягивающая орбита x_1, x_2 периода 2.

Исследуем устойчивость точки x^*_1, для чего вычислим соответствующую производную (мультипликатор):

$$f'(x)=\left(r-2rx\right)\Big|_{x=0}=\rho. \qquad (19)$$

При x=0, ρ=r. В диапазоне 0<r<1 эта точка устойчива (аттрактор), т.е. если скорость воспроизведения менее единицы, число особей в популяции падает до нуля. При ρ>1 неподвижная точка неустойчива (репеллер). При r=1 система негиперболична: возможно как слабое притяжение, так и слабое отталкивание; в точке x=0 имеет место закритическая бифуркация.

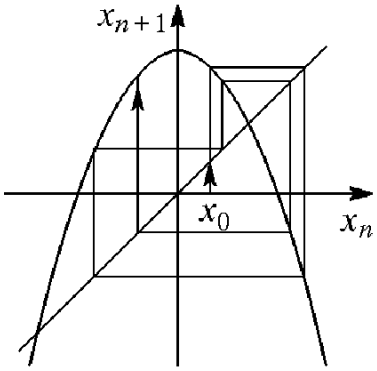


Рис. 8. «Логистическое» отображение (r=2); *иллюстрация динамики на нескольких первых шагах начального состояния x_0. Графическое решение разностного уравнения первого порядка.*

Случай 1<r<3.

По монотонном возрастании r при прохождении значения r=1, ситуация с неподвижными точками кардинально меняется. В интервале 1<r<3 встречается уже не одна неподвижная точка, а две. Первая неподвижная точка x_1=0, которая при r<1 была притягивающей (аттрактор), теперь стала отталкивающей (репеллер). Появилась вторая неподвижная точка x_2*=1-1/r. Данная точка существует и устойчива в интервале значений параметра 1<r<3. Теперь именно к ней сходятся итерации (эта точка определяет установившееся число особей в популяции): x_0=rx_0(1-x_0); x_0*=1-1/r.

По мере роста r высота параболы меняется: чем больше r, тем она выше. Но при росте r меняется производная от неподвижной точки, отличной от нуля. В конце концов эти процессы приводят к смене устойчивости первой точки и к появлению второй.

Для оценки устойчивости неподвижной точки x_2* найдем ее мультипликатор. При r>1 отображение имеет неподвижную точку x_0=1-1/r, производная которая

$$\rho = f'(x_2^*) = r - 2rx_1^* = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r. \qquad (20)$$

Значит, первая бифуркация удвоения периода происходит при r=3.

При увеличении r коэффициент стабильности неподвижной точки x_2* ρ=2-r уменьшается от ρ=1 при r=1 до ρ-1 при r=3, что является бифуркационным условием для бифуркации удвоения периода, при переходе через r=5 |ρ|>1. В результате этой бифуркации неподвижная точка x_2 теряет свою устойчивость, но не исчезает. В её окрестности мягко рождаются две неподвижные точки, образующие устойчивый цикл периода 2 или 2-цикл, который называется периодом удвоения бифуркации.

Второе равновесие устойчиво до тех пор, пока |2-r|<1, т.е. при 1<r<3 вторая неподвижная точка x_2* устойчива (при r>3 она стабильна). При r=1 точки x_1* и x_2* совпадают.

Замечание. Уравнение для *n* цикла (*n*-периодической орбиты), т.е. неподвижной точки, повторяющейся после *n* итераций отображения, имеет вид $x_0=f^{(n)}(x_0)$.

Таким образом, при произвольном значении r неподвижные точки: $\left\{\{0\}, \left\{\frac{-1+r}{r}\right\}\right\}$.

Подведём некоторые итоги.

1) 0 <r≤1. отображение имеет единственную неподвижную точку x*=0, которая является устойчивой.

2) 1 <r≤1.998... точка x_1*= 0 теряет устойчивость, появляется новая устойчивая точка x_2*

3) 1.99... <r_c≤2.235...происходит бифуркация удвоения периода, появляется 2-кратный цикл

4) Дальнейшее увеличение r ведет к каскаду бифуркаций удвоения периода

5) При $r_c<r\leq 2.5980...$ отображение для большинства значений r ведёт себя хаотически. (Например, при $r=2.598$ в системе имеются неустойчивые циклы всех возможных периодов).

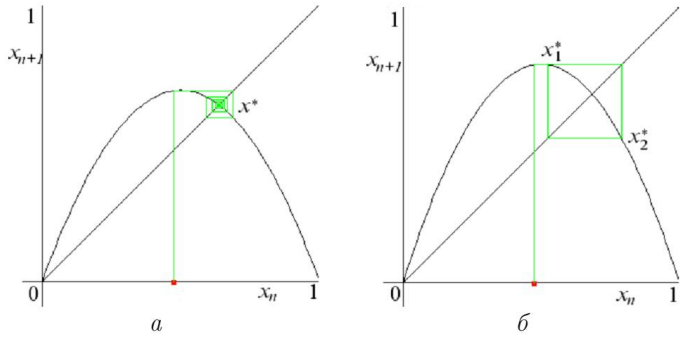
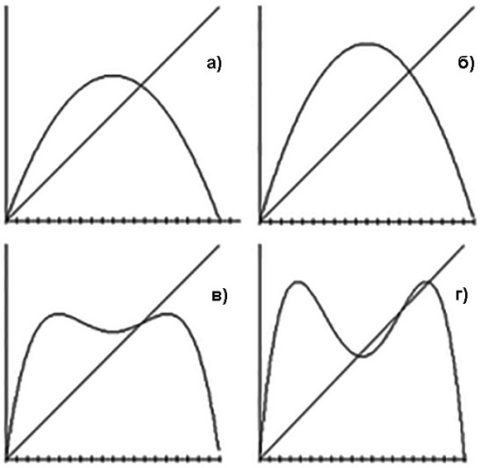


Рис. 9: Иллюстрация бифуркации удвоения периода в логистическом отображении (возникновение устойчивого 2-цикла): *а − устойчивая неподвижная точка; б − устойчивый 2-цикл.*

Бифуркационные значения параметра r
2-кратный цикл r = 1.998…
4-кратный цикл r=2.2355...
8-кратный цикл r=2.28825...
16-кратный цикл r=2.29925…
32-кратный цикл r=2.3017…
64-кратный цикл r=2.302225…
128-кратный цикл r=2.3022276...
256-кратный цикл r=2.3022282...
r конечное≈ 2.59807612



Случай r=3.

Если r=3, то производная точно =1, и мы оказываемся в точке бифуркации, в которой происходит переход от устойчивости 2-цикла при r<3 к неустойчивости при r>3.

Рис. 10. Изменение характера итераций при переходе управляющего параметра от значений r<3 к значениям r>3: *а − первая итерация графика r<3, б − то же для r>3, в − вторая итерация для r<3, г − тоже для r>0.*

Рассмотрим графики первой и второй итерации (рис. 10). Формула первой итерации $rx(1-r)$, вторая итерация рассчитывается по той же формуле повторённой дважды: $r(rx(1-r))$ $(1-(rx(1-r))=r^2x-r^2x^2-r^3x^2+2r^3x^3-r^3x^4$. Дважды повторяющееся логистическое отображение равно однократно итерированному многочлену четвертой степени. Эта вторая итерация отображения - кривая уже не с одним горбом, а с двумя. В случае r=2.9 (рис.10 а и б) неподвижная точка стабильна (рис.10 а). На рис. 10г есть одна неподвижная точка − та же самая, что на рис. 10в. Это не удивительно, т.к. было неподвижно после одной итерации, будет неподвижно и после двух. По мере роста r максимумы растут выше, а минимум углубляется и, наконец, когда параметр r превышает значение r=3, минимум пересекает биссектрису. Эта означает, что система внезапно приобретает ещё две периодические точки большего периода 2 (это неподвижные точки в графике второй итерации). Эти периодические точки устойчивы: как только r превышает r=3, а неподвижная точка изменяется от стабильной до неустойчивой, функция имеет устойчивую периодическую точку с периодом 2 (2-цикл).

Случай $3<r\leq 3{,}45$.

После того, как r превысил 3, точка x_1* стала нестабильной и уступила место стабильному периоду 2 орбиты. При переходе r через значение r=3 происходит второе резкое изменение динамики системы: обе неподвижные точки становятся неустойчивыми. В этом случае рождается новый режим. При r=3 наклон при x=(r-1)/r превышает единицу(f'=2-r) и становится неустойчивым стационарное решение, но остаётся устойчивым бицикл (двупериодическая) орбита. Эта орбита показана на рис. 11. Величина x_n повторяется через каждую итерацию.

Замечание. Говорят, что в этом случае отображение имеет 2-цикл (удвоенный период, период 2), соответственно 4- цикл имеет учетверённый период и т.д.

После бифуркации удвоения первого периода (при r=3) стабильный аттрактор изменяется от периода 1 до периода 2. При второй бифуркации (при $r\approx3{,}45$) он возрастает до периода четыре, а как только r увеличивается до 3,55, возникает другая бифуркация удвоения периода и стабильный (аттрактор) период увеличивается до восьми (8-цикл).

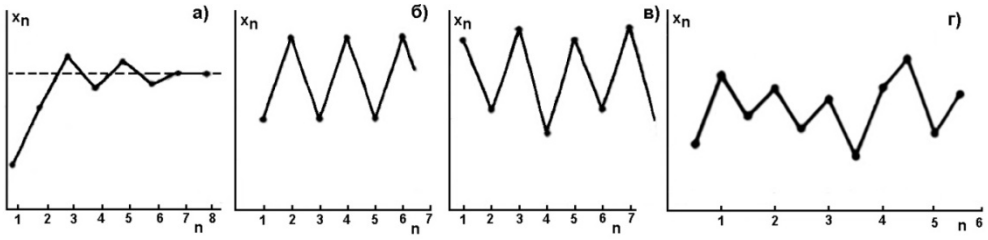


Рис. 11. Возможные типы решения логистического уравнения: а − устойчивая точка, $x_1=(r-1)/r$, $1<r<3$; б − устойчивый предельный цикл с периодом 2, $3<r\le 1+\sqrt{6}\approx3{,}45$; в − устойчивый предельный цикл с периодом 4, $3{,}45<r<3{,}54$; г − хаотическое движение, $r>3{,}54$.

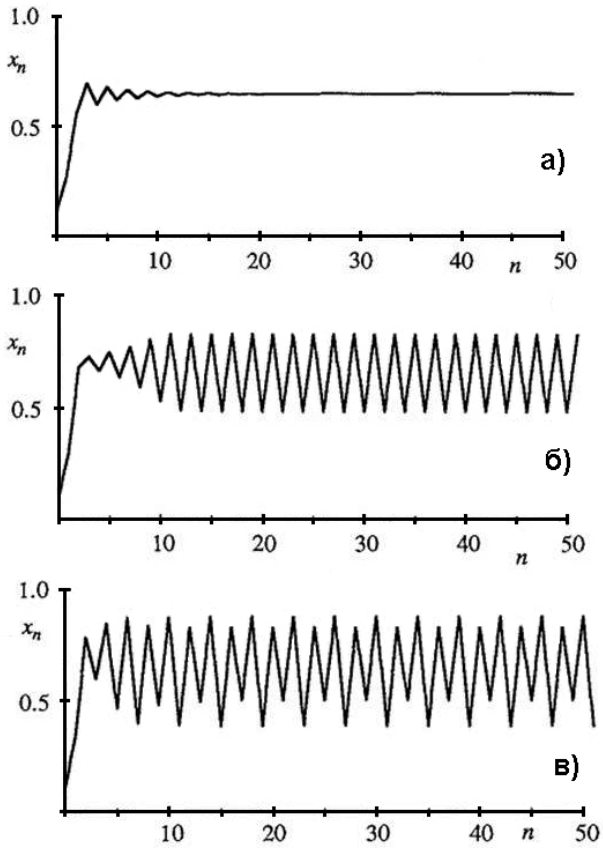


Рис. 12. Зависимость числа особей от номера популяции при различных значениях скорости роста: а − *r=2,8* (достижение ненулевого стационарного состояния); б − r≈3 (осцилляции относительно стационарного состояния; большая популяция в одном поколении и малая в последующем; величина x_n повторяется в каждой второй итерации и потому называется периода-2 циклом); в − r=3,5 (популяция достигает цикла, который теперь повторяется каждую четвёртую итерацию; предыдущий цикл удваивает свой период − периода-4 цикл). Путём дальнейшего удвоения возникают циклы 8, 16, 32...; при значении параметра rn возникает 2^n -цикл.

Если $r>3$, то логистическое отображение имеет 2-цикл, который стабилен при $r<1+\sqrt{6}=3{,}449$.

Отображение 2-цикл соответствует бифуркации вил с двумя устойчивыми орбитами периода 2, соответствующими двум устойчивым фиксированным точкам.

Неподвижные точки:

$$x_{n+2}=rx_{n+1}(1-x_n+1)=r[rx_n(1-x_n)][1-rx_n(1-x_n)]=r^2x_n(1-x_n)(1-rx_n+rx_n^2)=x_n. \quad (21)$$

Если отбросить индексы, то

$$x\{r^2[1-x(1+r)+2rx^2-rx^3]-1\}=0 \quad (22а)$$

$$x[-r^3x^3+2r^3x^2-r^2(1+r)x+(r^2-1)]=0 \quad (22б)$$

$$-r^3x[x-(x-r^{-1})][x^2-(1+r^{-1})x+r^{-1}(1+r^{-1})]=0 \quad (22в)$$

Эти выражения позволяют найти неподвижные точки не только второго, но и первого порядка, т. к. две итерации неподвижной точки первого порядка создают тривиальную неподвижную точку второго порядка.

Точки 2-цикла x_1^*, x_2^* удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} f(x_2) = x_1 \\ f(x_1) = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = rx_2(1-x_2) \\ x_2 = rx_1(1-x_1) \end{cases} . \quad (23)$$

Сложив друг с другом оба уравнения системы, а затем, вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)[r(x_1 + x_2) - r] \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)\left(\frac{r-1}{r}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1+r}{r} \\ x_1x_2 = \frac{1+r}{r^2} \end{cases} . \quad (24)$$

С учётом теоремы Виета, уравнение для поиска элементов 2-цикла имеет вид:

$$x^2 - \frac{1+r}{r}x + \frac{1+r}{r^2} = 0 . \quad (25)$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$x_{1,2} = \frac{1+r \mp \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} . \quad (26)$$

Истинные 2-циклы задаются решениями квадратичной части

$$x_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2}\left|\left(1+r^{-1}\right) \pm \sqrt{\left(1+r^{-1}\right)^2 - 4r^{-1}\left(1+r^{-1}\right)}\right| = \frac{1}{2}\left[\left(1+r^{-1}\right) \pm r^{-1}\sqrt{(r-3)(r+1)}\right]$$

В этом интервале логистическое отображение имеет четыре неподвижные точки:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1 - \frac{1}{r},\ x_3 = \frac{r+1+\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r},\ x_3 = \frac{r+1-\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \quad (27а)$$

или

$$\{0\},\quad \left\{\frac{-1+r}{r}\right\},\quad \left\{\frac{r+r^2-r\sqrt{-3-2r+r^2}}{2r^2}\right\},\quad \left(\frac{r+r^2+r\sqrt{-3-2r+r^2}}{2r^2}\right) \quad (27б)$$

Первые две относятся к 1-циклу, вторые две новые, они принадлежат к 2-циклу, если r>3.

Эти решения действительны только при $r \geq 3$, поэтому здесь начинается 2-цикл.

Из этой формулы следует, что 2-цикл рождается при $r=3$, а при $r<3$ его существование невозможно, так как под корнем стоит отрицательное число.

Производная от $\frac{r+r^2-r\sqrt{-3-2r+r^2}}{2r^2}$ равна

$$4-(-2+r)r. \quad (28)$$

Мультипликатор $|\rho<1|$ при значениях от 3 до $1+\sqrt{6} = 3{,}44948974$. Это – интервал r, в котором 2-цикл устойчив и имеет аттрактор.

Заметим, что 2-цикл также можно найти, вычислив дискриминант

$$\frac{f^2(x) - x}{f(x) - x} = r^2x^2 - r(1+r)x + (1+r) = 0, \quad (29)$$

который есть

$$\frac{(1+r)(3-r)}{r^2} \quad (30)$$

Если последнее уравнение равно 0, то два корня совпадают, поэтому $r_2=3$ - начало удвоения периода. Для $n=2$ решения (x_1, x_2, r) задаются $(0, 0, \pm 1)$ и $(2/3, 2/3, 3)$, поэтому первая бифуркация происходит при $r_2=3$. В общем случае приходится решать множество $n+1$ уравнений, чтобы найти начало произвольного цикла.

Логистическое отображение при $r=3{,}2$ имеет четыре неподвижные точки: {0}, {0,513045}, {0,6875} и {0,799455}. Точки $x=0$ и $x=0{,}6875$ – относятся к 1-циклу и обе нестабильны (расходимость вблизи $x=0$ монотонна, тогда как расходимость вблизи

x=0,6875 является колебательной), а точки x=0,513045 и x=0,799455 относятся к 2-циклу и обе строго стабильны. Поскольку все неподвижные точки неустойчивы, то для r=3,2 существует периодическая орбита: 2-цикл с периодом 2 (всего орбит две: 1-цикл и 2-цикл).

Случай 3,45<r≤3,57.

Мультипликатор 2-цикла (6) обращается в -1 при $r_2 = 1+\sqrt{6} = 3{,}4494$ и происходит вторая бифуркация удвоения. При этом каждая из точек цикла "удваивается", и траектория начинает циклировать между 4 точками. Реализуется *цикл периода 4* или *4-цикл.*

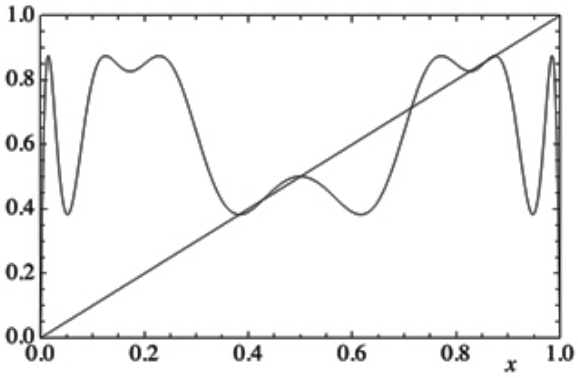


Рис. 13. 4-цикл при r=3,5.

При r=3,449 мультипликатор $\rho = |f'(x^*)| > 1$, поэтому 2-цикл теряет стабильность, все неподвижные точки неустойчивы, итерации не сходятся, возникает цикл с периодом 4. В возникающем режиме точка x_1 "удваивается" – расщепится на две. То же самое происходит с точкой x_2: у нового движения есть четыре элемента, т.е. реализуется *4-цикл.*

Возникновение другой бифуркации периода 4 при значении, близком к r=3,45 ожидалось, поскольку четвертый итерационный граф является многочленом степени 16 с еще большим количеством горбов (максимумы и минимумы), чем граф второго порядка. В какой-то момент некоторые из этих минимумов пересекают биссектрису, и возникает стабильный период 4. Очень похоже на период два. И по мере увеличения r, так же поступает и период стабильной орбиты.

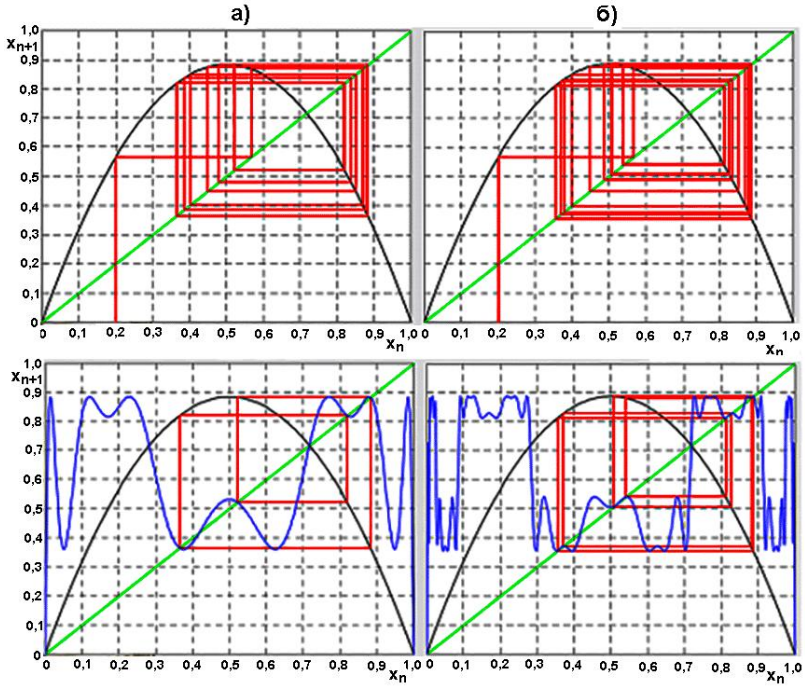


Рис. 14. Поведение логистического отображения в районе r_∞: лестница Ламерея вверху, устойчивый цикл внизу; а – r=3,54 , б – r=3,55.

Неподвижные точки: {0}, {0,428571} и {0.714286}, {0,8557143} При r=3.57 возникает 4-цикл. Исходное отображение имеет обычные два равновесия: при x=0 и 0.714286. Вторая композиция имеет эти два корня плюс два других, 0,428571 и 0,8557143, которые относятся к 2-циклу. Четвертая функциональная композиция имеет все эти четыре корня плюс четыре дополнительных: 0,38282, 0,500884, 0,826941, и 0,874997. В

этом случае имеют место два нестабильных равновесия, один нестабильный цикл с двумя орбитами и стабильный цикл с четырьмя орбитами.

Можно показать, что неподвижные точки x=0, x=0,714286, x=0,428571 (2-цикл), x=0,857143 (2-цикл) все неустойчивы, а точки x=0,38282 (4-цикл), x=0,500884 (4-цикл), x=0,826941 (4-цикл), x=0,874997 (4 - цикл) - все строго устойчивы.

При r=3.55 решение содержит орбиту 8-цикла.

Случай $r=r_\infty$=3,57.

При дальнейшем увеличении параметра r происходит следующая бифуркация удвоения периода, и цикл периода 4 сменяется циклами периода 8, 16, 32 и т.д. до бесконечности. При переходе через критическую точку r_∞=3.569 (точка накопления) в системе возникает сложный непериодический процесс, соответствующий режиму динамического хаоса или хаотическому аттрактору.

При $r=r_\infty\approx$3.5699456…возникает устойчивый цикл бесконечного(?!) порядка, при $r_\infty<r\leq$4 отображение в основном ведет себя хаотически. Например, при конечном значении r=4 в системе имеются неустойчивые циклы всех возможных порядков.

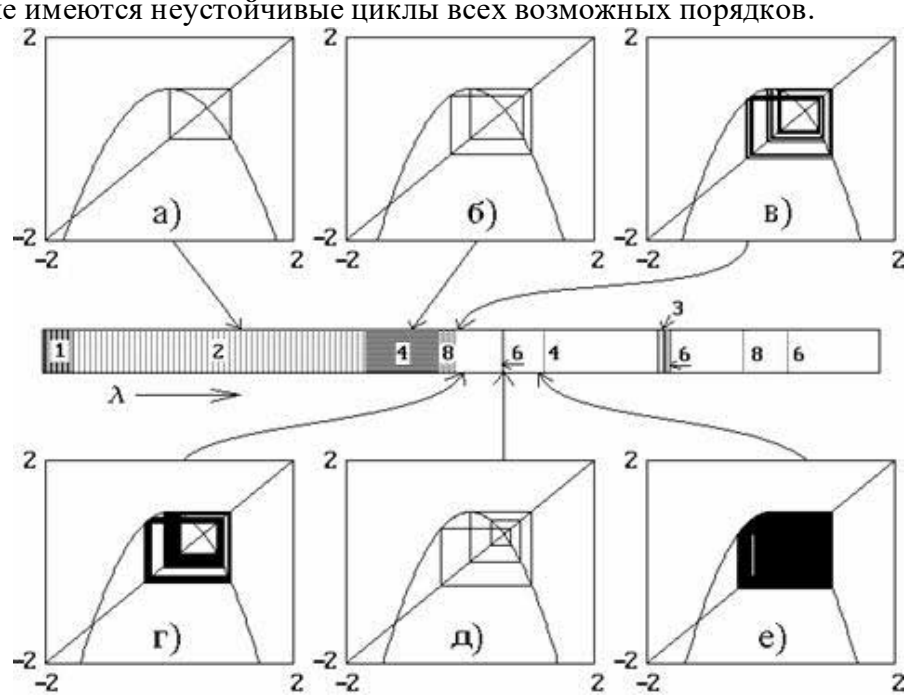


Рис. 15. Циклы при различных значениях r.

Процесс удвоения периода продолжается до тех пор, пока r не достигнет значения r_∞=3,56994... . Вблизи этого значения последовательность значений параметра, при которых происходят удвоения периода, подчиняется точному закону:

$$\frac{r_{n+1}-r_n}{r_n-r_{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 4{,}66920... \qquad (31)$$

Это предельное отношение называется числом Фейгенбауэра.

Замечание. Интересным фактом является то, что эта бифуркация периодов происходит при фиксированном соотношении. В качестве параметра расстояние между бифуркацией удвоения первого и второго периодов составляет 3,45-3=0,45, а расстояние между вторым и третьим – 3.55-3.45=0.l. Следовательно, второе расстояние примерно в 4.669 раз короче первого расстояния. Расстояние между третьим и четвертым снова 4,669 раз короче и для всех последующих бифуркаций удвоения периода расстояние становится короче на множитель 4.669. Этот результат получил Митчелл Фейгенбаум. Этот коэффициент уменьшения расстояния называется константой Фейгенбаума: δ=4,669201...

Константа Фейгенбауэра распространяется на все унимодальные функции (все непрерывные функции с одной нуль-производной, «функцией с одним горбом»). Она одинакова для любых систем, демонстрирующих последовательность бифуркаций

удвоения периода. Тот факт, что все эти виды итерированных функций подчиняются постоянной Фейгенбаума известен как принцип универсальности. Поскольку расстояние между точками бифуркации становится около пяти раз короче в каждой точке бифуркации, эта последовательность бифуркаций сходится к определенному значению; эта последовательность не бесконечно длинна. Ряд сходится к некоторой точке называемой точкой накопления, $r_\infty \approx 3{,}57$. При превышении r значения 3,57 возникает хаос.

Неподвижные точки для восьмой композиции функций включают две неустойчивые неподвижные точки исходного отображения, нестабильный 2-цикл, нестабильный 4-цикл и стабильный 8-цикл. Эта последовательность удвоений периода продолжается бесконечно, не смотря на то, что значения *r*, при которых бифуркации приближаются к конечной величине, стремится к 3.569946.

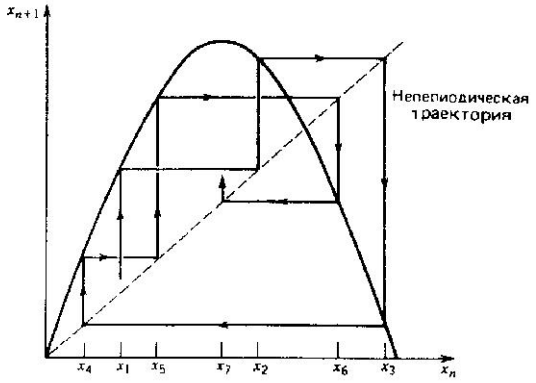


Рис. 16. Графическое решение логистического отображения. С ростом параметра r возникают сложные циклы периодов 6, 4, 3 и т.д., чередующиеся с областями непериодического поведения.

При значениях *r*, превышающих 3,57 возникают хаотические итерации, т.е. поведение модели на больших временах не укладывается в рамки простого хаотического движения. В интервале $3{,}57<r<4$ также присутствуют узкие интервалы Δr, для которых существуют периодические орбиты.

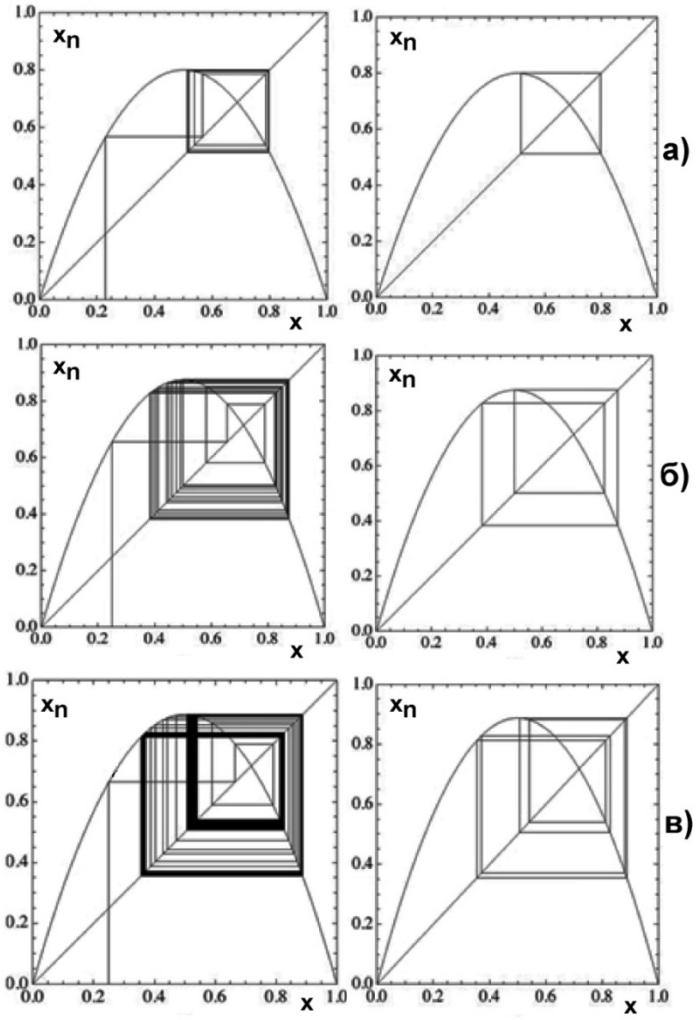


Рис. 17. Пути подхода (слева) логистического отображения к устойчивому состоянию (справа) при различных значениях управляющего параметра: а - r-3,2, б - r=3,5, в - r=3,55.

Таким образом, если при $r<3$ существует одна устойчивая точка равновесия, и итерации сходятся к этой точке, то для $r>3$ устойчивых равновесий не существует, однако в диапазоне $3<r<3{,}57$ всегда существует периодически устойчивое состояние. По мере прохождения этого диапазона значения параметра r, из-за последовательности бифуркаций удвоения периода, периоды стабильных орбит становятся все длиннее и длиннее. Важно, что после $r>3.569946...$ устойчивых периодических циклов не существует. Колебательный режим имеет почти бесконечный период. Это и есть хаос!

Табл. 2. Значения параметра r, при котором возникает новый цикл.

n	deg(r_n)	Значение r
1	1	1
2	1	3
3	2	3.82842712...
4	2	3.44948974...
5	22	3.73817237...
6	40	3.62655316...
7	114	3.70164076...
8	12	3.54409035...
9		
10		
16	240	3.56440726...

Табл. 3. Тип цикла и значение r_{2^n}, при котором впервые появляется цикл 2^n.

n	Цикл(2^n)	r_{2^n}
1	2	3
2	4	3.449490
3	8	3.544090
4	16	3.564407
5	32	3.568750
6	64	3.56969
7	128	3.56989
8	256	3.569934
9	512	3.569943
10	1024	3.5699451
11	2048	3.569945557
∞	Предел	3.569945672

Случай *3,57<r≤4*.

При $r>r_\infty=3{,}57$ наступает исключительно быстрая смена характера предельных решений логистического отображения с появлением новых циклов, иногда стохастических решений. При $r=4$ все решения экспоненциально неустойчивы. В процессе счёта на компьютере наблюдается хаотическое блуждание от одного неустойчивого решения к другому.

Начало конкретного цикла рассчитывают по следующему алгоритму.

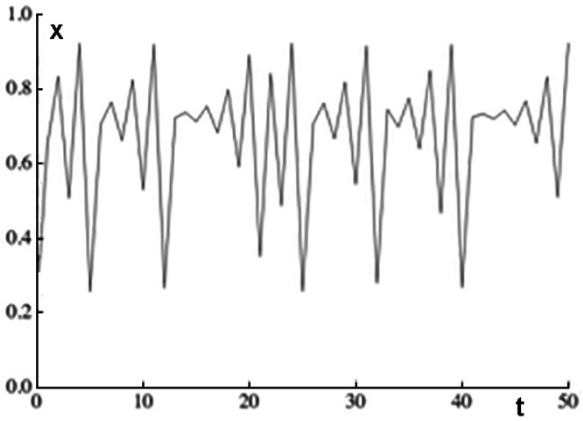
При нахождении начала 3-цикла, сначала устраняют 1-циклы

$\frac{f^3(x)-x}{f(x)-x}=0$; $r_3=1+2\sqrt{2}=3{,}828427...$ (32)

Для нахождения начала 4-цикла устраняют 2- и 1-циклы, рассматривая $\frac{f^4(x)-x}{f^2(x)-x}=0$ 4-цикл стартует при $r_4=1+\sqrt{6}=3{,}449489...$ и т.д.

В табл. 2 приведены значения, при которых впервые появляется новый n-цикл. Для n= 1, 2, ..., они имеют алгебраические степени 1, 2, 2, 22, 40, 114, 12, ...

Алгебраические порядки значений r_{2^n} (т. е. начало 2^n-цикла) при n=1, 2, ... задаются 1, 2, 12, 240, ... Если r превышает 3 и ни одно из равновесий не является стабильным, то 2^n - цикл появляется для всех n.



Когда r превышает r_∞ поведение решения становится хаотическим.

Рис. 18. Зависимость x_n от n при r=3.7.

Например, при r=3,7 никаких периодических орбит не существует, но есть неподвижные четыре точки 2-цикла: {0}, {0,390022}, {0,72973}, {0,880248} и одна точка 4-цикла {0,321626}. Все они неустойчивы. Система ведёт себя хаотично.

Хаотичный процесс наглядно демонстрирует график зависимости x_n от n (т.е. от времени t).

Как график времени, так и сюжет паутины показывают хаотический характер этой орбиты. В частности, паутина график ясно показывает распространение первоначально компактного набора начальных условий. Чтобы получить обзор карты поведение как функция от r, рассмотрим далее построение графика, известного как бифуркационная диаграмма.

Случай $r>r_\infty=3{,}57$.

Как было только что показано, в диапазоне r от 0 до r_∞=3.57 все начальные значения являются либо точкой отталкивающей орбиты, либо точкой притягивающей орбиты, либо её бассейном. Но после того как r превышает r_∞, то, поскольку константа Фейгенбаума является сходящимся рядом, то все периодические точки периода 2^n становятся неустойчивыми (и отталкивающими). При $r>r_\infty$ функция $rx(1-x)$ ведёт себя в хаотичной манере. Наступает хаос. Но не сплошной – в нём есть зоны порядка.

Замечание. На всякий случай повторим определение хаоса (Девани). Функция f. $V\to V$ является хаотичной, если 1) периодические точки плотны в V; 2) f топологически транзитивны; 3) f имеет чувствительную зависимость от начальных условий.

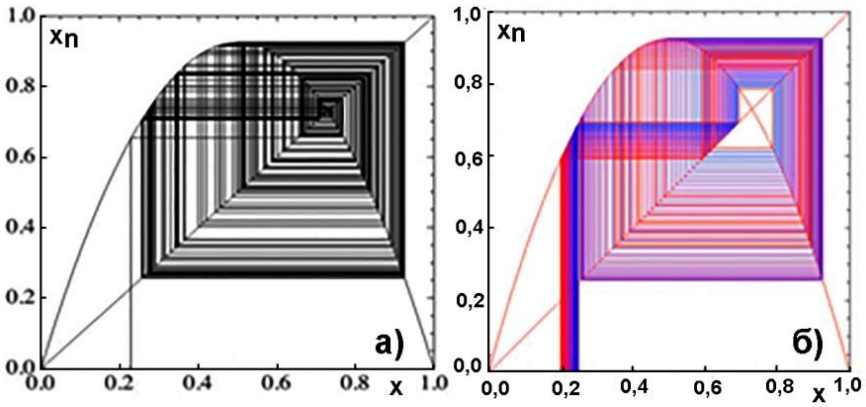


***Рис. 19. Диаграмма паутины при r=3,7: а – чёрно-белый вариант, б – цветной. По** мере роста итераций, цвет меняется от красного до синего.*

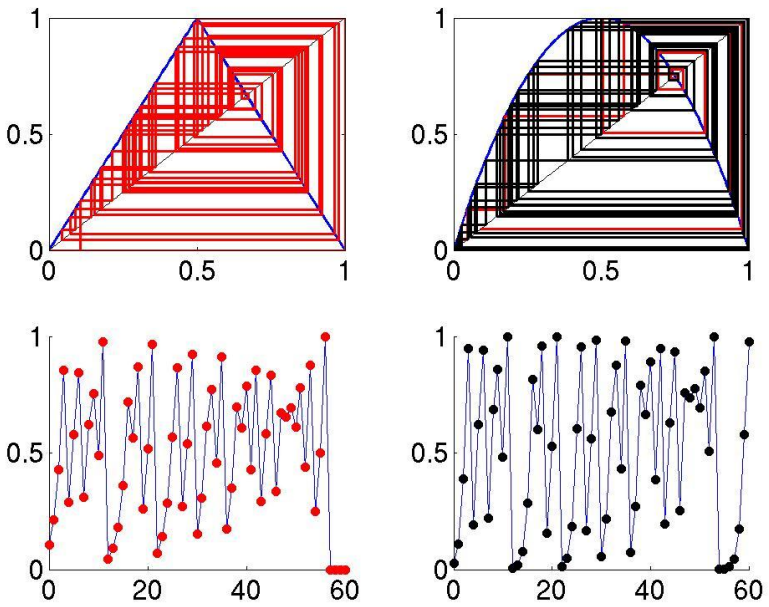


Рис. 20. Диаграммы паутины и флуктуации отображения тент (слева) и логистического отображения (справа).

В качестве примера возьмем r=4 и рассмотрим функцию $f(x)=4x(1-x)$. Эта функция отображает [0,1] в [0,1] и соответствует всем критериям хаоса. Плотность множества означает, что между любыми двумя числами есть еще одно число. Например, между 2 и 2.1 есть 2.05. Но между 2 и 2.05 есть 2.005. Между 2 и 2.005 снова появляется число. Плотное множество имеет бесконечно много точек. То же касается периодических точек: их существует бесконечно много так что между любыми двумя лежит третья. Напомним, что стабильный аттрактор был преобразован при удвоении периода бифуркационного каскада. После одной бифуркации, когда возник стабильный период два, здесь была неустойчивая неподвижная точка. После двух бифуркаций период стабильного аттрактора равен четырем, неустойчивый период 1 все еще существует, но добавляется нестабильный период два. Таким образом, есть еще две периодические точки. В следующей бифуркации добавляются более неустойчивые периодические точки. И это вплоть до бесконечности. Другими словами: в [0,1] при итерации $4x(1-x)$ существует бесконечно много периодических точек, и они настолько плотно упакованы, что между каждыми двумя мы можем найти еще одну третью. Периодические точки называются плотными в [0,1].

Топологическая транзитивность утверждает, что если в [0,1] выбрать открытый интервал любого размера, в этом интервале всегда есть точка, которая при итерации перейдет в любой другой интервал. Поэтому в любой малой окрестности в [0,1], найдётся точка, в которой идут те же итерации, что происходят где-то в другой области. Можно сказать, что эта функция $4x(1-x)$ хорошо перемешивает область [0,1]. Неким аналогом является блендер в перемешивающий коричневый и белый сахар. Если коричневый и белый сахар лежат слоями – это порядок, при хорошем перемешивании кристаллы сахара образуют беспорядок, т.е. хаос. Хаос - идеальное перемешивание.

Но самым важным признаком является чувствительная зависимость от начальных условий. Это означает, что если взять два начальных значения, очень близких друг к другу, то в ходе итерацией они сильно удаляются друг от друга. Это имеет место и в хаотической зоне логистического отображения. Если новое начальное значение даже

незначительно отличается от предыдущего, невозможно предсказать, где оно окажется после итераций.

Для случая $r>r_\infty$ справедлива теорема Фату: если квадратичная функция имеет устойчивую периодическую орбиту, то критическая точка находится в устойчивом множестве точек этой орбиты (при повторении критической точки, она попадет в аттрактор (если он существует)). Критическая точка – это точка, где производная равна нулю. В логистическом отображении критическое значение всегда равно 0,5. Именно этот факт позволяет построить бифуркационную диаграмму.

19.5 Бифуркационная диаграмма логистического отображения

Каскад бифуркаций удвоения периода в логистическом отображении можно наглядно представить на фазопараметрической диаграмме (однопараметрическая бифуркационная диаграмма, дерево Фейгенбаума). Бифуркационное дерево даёт зависимость установившихся значений переменной x от параметра r. Начальный участок дерева представлен на рис. 21 и рис.22.

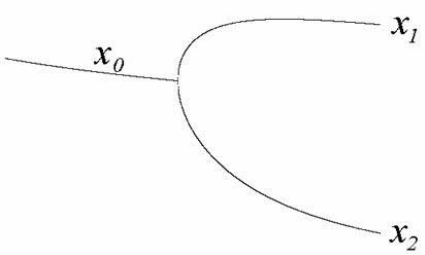


Рис. 21. Бифуркация типа вилки.

Это неустойчивая неподвижная точка и рождающийся 2-цикл. В последнем случае переменная последовательно посещает две ветви дерева. Такую ситуацию называют *бифуркацией удвоения периода.*

Полное дерево (для всех значений параметра) строят численно с помощью компьютера. Для этого сначала задают некоторое начальное значение переменной x_0 и параметра r. Затем выполняют несколько сот итераций отображения, чтобы исключить переходные процессы и реализовать установившийся режим. Потом процедуру повторяют для слегка измененного количества параметра (в качестве нового начального значения переменной использовать то, что получилось на предыдущем шаге процедуры). И, наконец, всё повторяют для всего диапазона управляющего параметра. На графике по оси x задаётся диапазон изменений управляющего параметра r (от 0 до 4), а на оси y – положение предельных точек отображения (принимаемые при больших временах значения x).

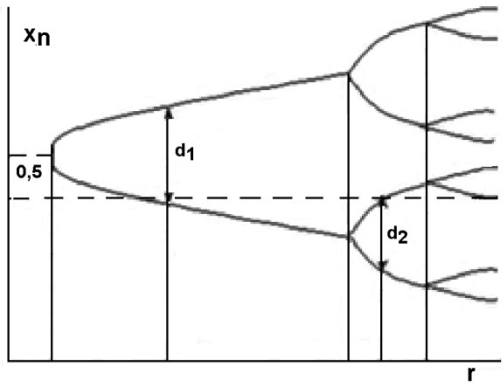


Рис. 22. Начальная стадия бифуркаций типа вилка при эволюции логистического отображения. *Последовательные бифуркации разделяются расстоянием, причём фактор d асимптотически уменьшается при росте r. Это справедливо для широкого класса отображений, причём для них значение d одинаково. При росте r число бифуркаций увеличивается.*

Стабильная точка равна 0, и поэтому кривая на отрезке $0\le r<1$ лежит точно на оси x. Между 1 и 3 функция имеет одну стабильную точку (гладкая возрастающая кривая). При увеличении r ($r>3$) отображение имеет две устойчивые неподвижные точки: одну из точек где-то между 0 и 0,5, другая – где-то между 0,5 и 1 (устойчивая орбита). После другой бифуркации оно имеет стабильную орбиту периода четыре. Постепенно расстояние между точками бифуркации становится короче и короче. Периода 8 аттрактор ещё в видим, но орбита с периодом 16 почти нет, а период 32 исчез в затемнённой массе.

Затемнённый беспорядок – это хаос, входящий в систему. После r_∞ итерация критической точки больше не попадает в хороший стабильный аттрактор. Она мечется, как муха. Это область хаотических орбит. Хаотические орбиты непериодические (они никогда не повторяются) и не являются бассейном периодического аттрактора. Важно, что

они чувствительны к начальным условиям, т.е. значит, что ближайшие друг к другу орбиты быстро разойдутся в разные стороны.

Примечательная особенность (рис. 23) – наличие вертикальных полос, пересекающих район хаоса. Это – зоны периодических орбит. Удивительно, но при росте параметра *r* в среде сплошного хаоса возникают зоны порядка и устойчивости. Причём таких зон несколько. Существует устойчивый периодический аттрактор, сколь угодно близкий к любой хаотическому аттрактору!

Бифуркационная диаграмма отчетливо демонстрирует бифуркацию из устойчивой неподвижной точки на устойчивую орбиту 2-цикла при *r*=3, а затем бифуркацию от 2-цикла к 4-циклу при r между 3.4 и 3.5. Дальнейшие удвоения периода происходят при уменьшении приращений в *r*, а орбита становится хаотичной при *r*≈3.57. При *r*=3,83 третье итерированное отображение имеет 8 неподвижных точек: {0}, {0,156149}, {0,16357}, {0,504666}, {0,524001}, {0,738903}, {0,955294} и {0,957417}. Две из них – неустойчивые неподвижные точки основного отображения. Остальные шесть оказываются компонентами двух периодов 3-цикла, одна устойчивая и одна неустойчивая. Устойчивые орбиты: 0,1556149, 0,504666 и 0,957417, неустойчивые: {0.16357, 0.524001 и 0.955294}. Удивительный эффект наблюдается при небольшом превышении r значения 3.8. При *r*=3.83 возник 3-цикл! Устойчивый периодический цикл с тремя строго стабильными неподвижными точками: 0,50466; 0,957414 и 0,156149.

На рис. 23 хорошо видны точки бифуркаций удвоения периода, когда каждая ветвь бифуркационного дерева расщепляется на две. При достаточно больших значениях параметра *r* наблюдается большое количество точек по оси ординат *x*, которые соответствуют хаотическому режиму. Области хаоса чередуются с так называемыми «окнами периодичности (или устойчивости)», в которых реализуются периодические режимы − циклы различных периодов. Появление циклов в закритической области, а, следовательно, и окон периодичности, определяется порядком Шарковского:

$$3\to5\to7\to3*2\to5*2\to7*2\to\ldots\to3*2^2\to5*2^2\to7*2^2\to\ldots\to2^3\to2^2\to2\to1. \qquad (33)$$

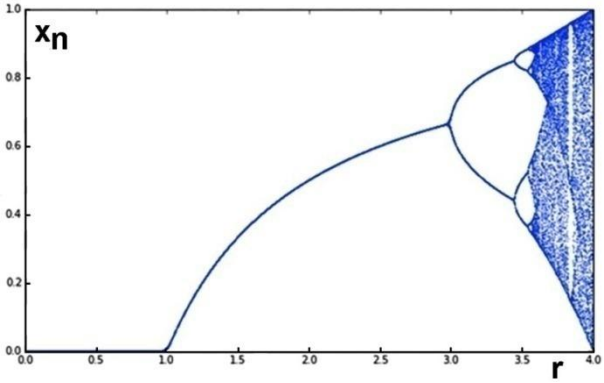


Рис. 23: Фазопараметрическая диаграмма для логистического отображения (1) (зависимости числа особей от скорости роста популляции). *Внутри режима хаоса можно найти бесконечное число всё уменьшающихся областей значений r, для которых система вновь становится периодичной (белые вертикальные полосы).*

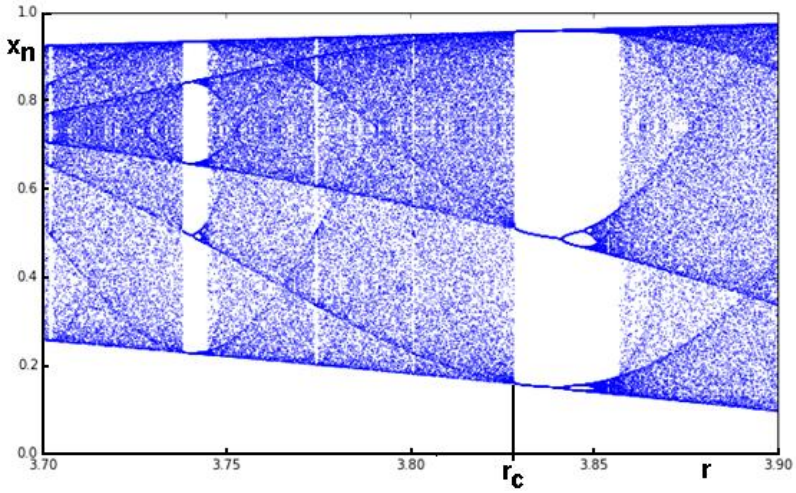


Рис. 24. Бифуркационная диаграмма рис.9 при сильном увеличении.

В (8) цифры означают периоды циклов отображений, а ∗2 − тот факт, что этот цикл претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода.

При анализе рис. 23 можно сделать следующие выводы:

− при некоторых значениях $r=r_n$ управляющего параметра происходит бифуркация, в результате которой каждая предельная точка отображения f_r распадается на две;

− при n-й бифуркации число предельных точек становится равным $2n$;

− при $r>r_\infty$ интервалы значений параметра r, при которых наблюдается сплошное заполнение отрезка [0,1] предельными точками «логистического» отображения, изредка сменяются периодами порядка, когда число предельных точек вновь конечно.

При превышении параметра r значения r=3,0 возможные изменения численности популяции по бифуркации типа вилка могут происходить по двум дискретным путям. При r=3,2 система заметно колеблется относительно двух значений популяции: одно около 0,5, а другое около 0,8. При таком значении r применение логистического уравнения к одному из этих значений дает другое. Сразу после r=3,4 диаграмма снова раздваивается, делая вероятными четыре пути, система колеблется относительно четырех значений популяции. Сразу после r=3.5 снова следует раздвоение, давая восемь путей. Здесь система осциллирует относительно восьми базовых значений числа особей.

После r=3,6, бифуркации растут до тех пор, пока система в конечном итоге не достигнет любого значения. Это путь к хаосу через удвоение периода. По мере увеличения r логистическое отображение колеблется сначала между двумя, затем четырьмя, восемью, 16, а затем 32 значениями. Это периоды подобны периоду колебания маятника. Картина в увеличенном масштабе (на участке от r=3,7 до r=3,9) приведена на рис. 24.

При приближении к хаосу из шума возникают странные закрученные узоры и пороги, с каждой стороны которых система ведет себя совершенно различно. Между параметрами r=3,82 и r=3,84 система переходит из хаоса обратно в порядок, колеблется между тремя значениями популяции (приблизительно 0,15, 0,55 и 0,95). Но затем пути снова раздваиваются и выше r=3,86 система возвращается к хаосу.

Диаграмма, подобная (рис. 23) характерна для всех систем с каскадом удвоений периодов, приводящим к хаосу.

Как уже упоминалось, структура бифуркационной диаграммы самоподобна: если увеличить область, к примеру, при значении r_c=3.82 в одном из трех ответвлений, то можно увидеть, что тонкая структура этой области выглядит, как искаженная и размытая версия всей диаграммы. То же самое верно для любой окрестности нехаотических точек. Это пример глубокой связи между хаотическими системами и фракталами. Рассматриваемая здесь структура фрактальна со странным аттрактором (см. далее). При сильном увеличении (рис. 24) видны меньшие копии большей макроструктуры: есть

повторение тех же бифуркаций, хаоса и предельных циклов, которые видели на первой диаграмме (рис. 23) бифуркации полного диапазона изменения параметра r.

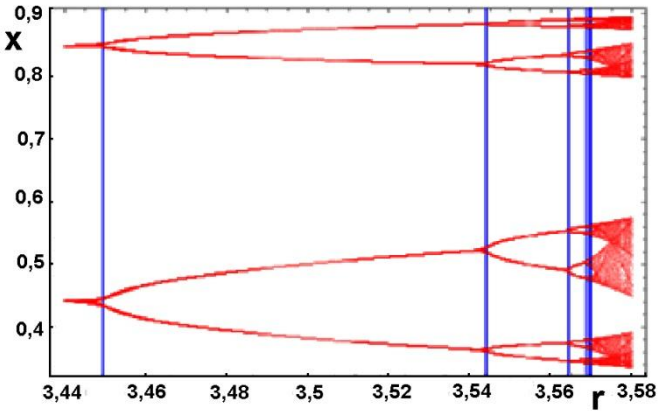


Рис. 25. Бифуркационная диаграмма логистического отображения: участок в районе r = 3,5 *(значение, при котором сначала появляется 2^n-цикл, обозначенный синими линиями)**.***

19.6 Цикл периода 3

Возникновение среди хаоса упорядоченного цикла – удивительный и важный эффект: из его существования следует возможность циклов любого периода. Самое широкое окно устойчивости имеет цикл периода 3). 3-цикл возникает в результате касательной бифуркации. Он ростом параметра *r* претерпевает последовательность бифуркаций удвоения периода. На рис. 25 показан увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы (рис. 24), соответствующий окну периодической устойчивости цикла периода 3.

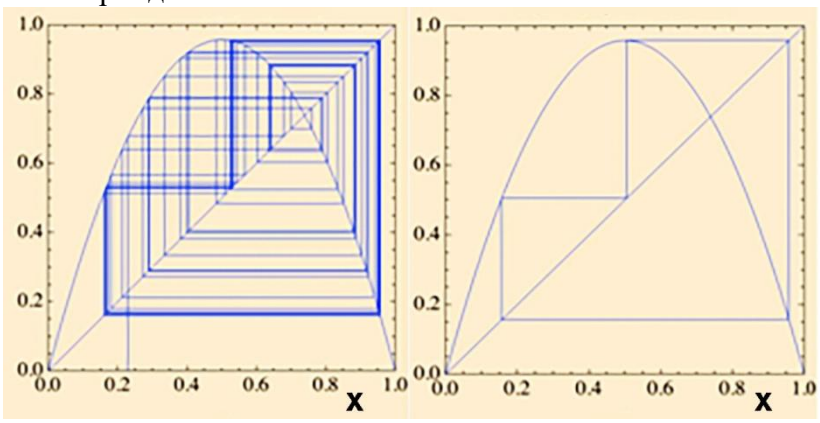
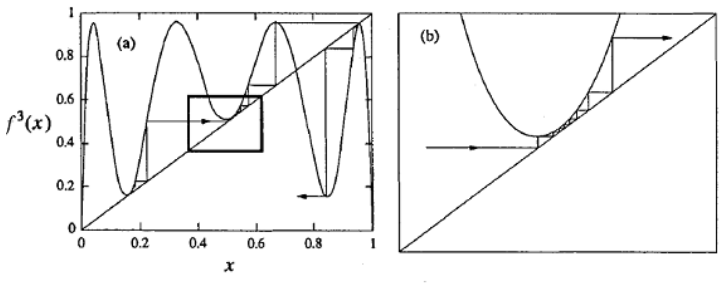


Рис. 26. Переход к 3-циклу (периодическая орбита) при r=3,83.

Для нахождения значений *r*, при которых существует 3-цикл, решают уравнение $f(x(f(x)))=x$, в котором $f(x)=rx(1-x)$, находя значения *r*, для которых третья итерация $f(x)$ пересекает диагональ 45°. Две неподвижные точки очевидны: 0 и $1-1/r$. Они имеют период 1, поэтому имеют и период 3 (что фиксируется после одной итерации остается фиксированным и после трех). Но при $r=1+\sqrt{8}\approx 3{,}828...$ существует еще одна орбита 3 орбита, причём устойчивая. Самое интересное явление наблюдается в районе, расположенном непосредственно перед периода три окном. График $f(x)$ почти затрагивает диагональ. Здесь ключевое слово почти. При большем увеличении видно, что при приближении к точке касания, в которой появляется стабильный период три, график сжимается в небольшое пространство между графиком $f^3(x)$ и диагональю. Прохождение узкого канала требует большого количества итераций.

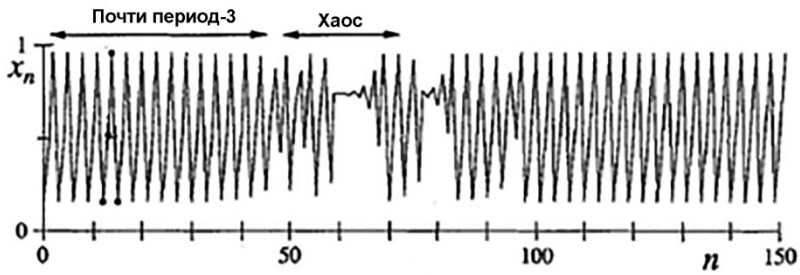


При касании $f^3(x_n)\approx x_n$. При удалении r от периодического окна прерывистость уменьшается пока не

будет достигнуто полное хаотическое поведение. Это путь к хаосу через перемежемость. При $r>r_c$ существуют неустойчивые 2^n-циклы для всех n.

Рис. 27. Графический анализ третьей итерационной функции логистического отображения в точке перехода (r=3,828): *а – исходный масштаб; б – увеличенный масштаб. Касательная бифуркация, перемежаемость (интермитанс).*

Рис. 28. Путь к хаосу через перемежаемость при r=3,8282..



Стабильный 3-цикл располагается в окне от 3.8284 ... до 3.8415 .... Когда 3-цикл становится неустойчивым, возникает бифуркация удвоения периода, и стабильный 6-цикл. Возможен устойчивый (3×2^n) -цикл для всех n: если одну ветвь стабильного 3-цикла увеличить, снова появится орбитальная диаграмма в миниатюре, т.е. диаграмма имеет фрактальную структуру. Теперь мы рассмотрим выбор r чуть ниже периодического окна. Рис.28 показывает типичную орбиту для r=3,8282. Орбита почти образует 3-цикл с вкрапленными периодами хаоса. Это явление называется прерывистостью (интермитанс).

В виду важности 3-цикла рассмотрим его появление несколько подробнее. Обозначим третью итерацию как $f^3(x)$, а точку периода 3 орбиты p как $p=f^3(p)$ Функция $y=f^3(x)$ восемь раз пересекает диагональную линию ($y=x$). При уменьшении $r_c=1+\sqrt{8}$ устойчивые и неустойчивые 3-циклы столкнутся и будут иметь одинаковые значения x.

Условие касательной бифуркации может быть выражено касанием $y=f^3(x)$ к прямой y=x. Для определения устойчивости орбиты найдём производную от отображения.

$$\frac{d\left(f^2(x)\right)}{dx}=\frac{d\left(f^3(x)\right)}{f\left(f^2(x)\right)}\cdot\frac{d\left(f^2(x)\right)}{d(f(x))}=\frac{d(f(x))}{dx}\bigg|_{x=c}\cdot\frac{d(f(x))}{dx}\bigg|_{x=b}\cdot\frac{d(f(x))}{dx}\bigg|_{x=a}=r^3(1-2a)(1-2b)(1-2c)=1 \quad (34)$$

$$r^3[1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ac)-8(abc)] \quad (35)$$

Нужно найти комбинацию $\alpha\equiv a+b+c$, $\beta\equiv ab+bc+ac$ и $\gamma\equiv abc$, но не a, b, c индивидуально.

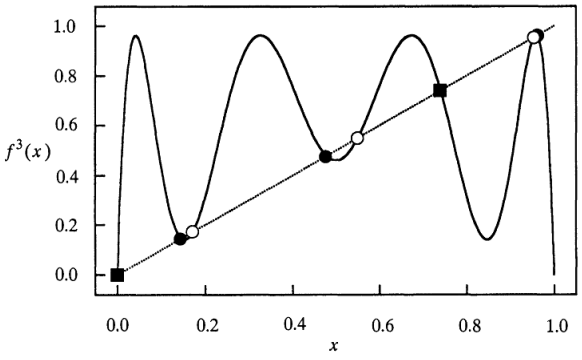


Рис. 29. График $f^3(x)$ для rc=3,85. Зачернённые кружки – устойчивый 3-цикл, пустые кружки – неустойчивый 3-цикл. заполненные квадраты – неподвижные точки $f^3(x)$.

Третья итерация $f(x)$ имеет неподвижную точку в $x=a$, b и c. Введём вспомогательную функцию $g(x)=f^3(x)-x$, которая имеет корни в фиксированных точках $f(x)$. Для r, большего, чем r_c, функция $g(x)$ имеет восемь вещественных корней. ($g(x)$ – многочлен восьмого порядка, $f^3(x)$ – третья итерация квадратичной функции). При $r=r_c$ значения x для устойчивого и неустойчивого 3-цикла смыкаются при a, b и c. Функция $g(x)$ имеет двойные корни в a, b, c. Это составляет шесть из восьми корней g. Поскольку две дополнительные неподвижные точки f находятся в точке $x=0$ и $x=1-1/r$, то

$$g(x)\sim x(x-1+1/r)[(x-a)(x-b)(x-c)]^2. \quad (36)$$

$$g(x)\sim x^8-[2\alpha+1-1/r]x^7+[2\beta+\alpha^2+2(1-1/r)\alpha]x^6-[2\gamma-2\alpha\beta+2(1-1/r)\beta+(1-1/r)\alpha^2]x^5+... \quad (37)$$

где

$$2\alpha=3+\frac{1}{r};\quad 4\beta=\frac{3}{2}+\frac{5}{r}+\frac{3}{2r^2};\quad 8\gamma=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2r}+\frac{5}{2r^2}+\frac{5}{2r^3}.$$

Отсюда получаем

$$r^2-2r-7=0, \quad (38)$$

которое имеет положительный корень $r_c = 1 + \sqrt{8} = 3{,}828427$ – начало 3-цикла.

Более детальное изучение региона вокруг окна 3-цикла можно провести с помощью построения бифуркационной диаграмму с более узким диапазоном значений *r*.

При r=3,83 существуют три цикла. Кроме того чуть выше *r*=3,84 существует бифуркация в 6-цикла, её лучше видно на диаграмме с суженном x-диапазоном до [0,12, 0,18] (r-диапазон, который должен быть [3.847, 3.857]). Сравнение паттернов при различных степенях увеличения свидетельствует о самоподобии, обычно описываемым в рамках геометрии фракталов.

19.7 Фазовые диаграммы логистического отображения

Другой способ графического анализа отображений основан на построении фазовых диаграмм (использование отображения Пуанкаре), которая отображает значение популяции при генерации в момент *t*+1 (т.е. *n*+1) по оси y по сравнению с значением популяции при *t* (т.е. *n*) по оси *x*. Поскольку логистическая модель следует простому детерминированному правилу, то зная значение величины популяции определенного поколения, всегда можно рассчитать число особей следующего поколения.

Фазовая диаграмма (рис. 29а) показывает, что логистическое отображение находится внутри аттрактора с неподвижной точкой на 0,655 (по обеим осям), когда *r*=2,9. Это соответствует вертикальному срезу над значением оси *x*=2,9 в диаграммах бифуркации. На рис. 29б показан аттрактор предельного цикла. При *r*=3,5, логистическое отображение колеблется между четырех точек.

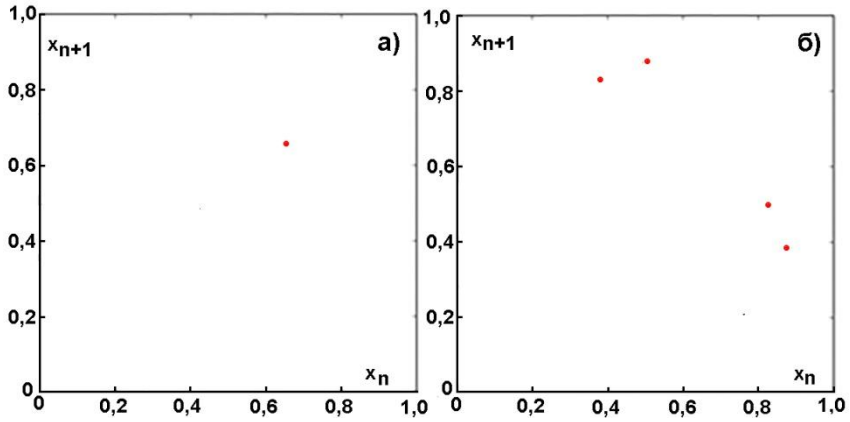


Рис.30 . Фазовая диаграмма (отображение Пуанкаре)

Для пояснения процессов, приближения к хаосу через бифуркации удвоения периода на рис. 30а изображена парабола, рассчитанная при *r*=3,9. На рис. 30б показаны графики, при 50 различных значений параметров от *r*=3,6 до *r*=4,0. Этот диапазон параметров представляет собой хаотический режим: диапазон значений параметров, в которых логистическое отображение ведет себя хаотично. Каждый параметр *r* формирует собственную кривую. Эти параболы никогда не перекрываются из-за их фрактальной геометрии и детерминированного характера логистического уравнения. В этом и проявляется странность аттрактора: система как-то ограничена, но никогда не оседает в неподвижную точку или устойчивые колебания, как это было на предыдущих фазовых диаграммах при *r*=2,9 и *r*=3,5. Число особей постоянно скачет, не повторяя значения дважды.

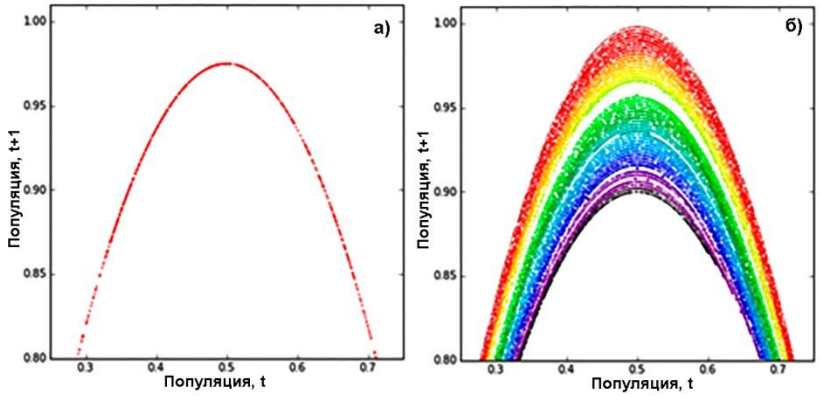


Рис.31 . Параболы логистического отображения в зоне хаоса: а – парабола при r=3,9, б – параболы при r, изменяющихся от r=3,6 до r=4,0.

19.8 Аттракторы и фракталы в логистическом отображении

Сценарий Фейгенбаума использует свойство самоподобия порогов удвоения (через фрактальную структуру с шагом 2), а также тот факт, что геометрическая структура аттракторов регулярного движения при приближении к порогу хаоса обладает свойствами самоподобия. Можно говорить об аттракторе логистического отображения. Например, при r=0,5, значения $f(x_n)$ оседают на неподвижную точку (точечный аттрактор) с уровнем популяции 0, при r=3.5, система колеблется между четырьмя значениями. Этот аттрактор называется предельным циклом. При r=3.5 начинается хаос. Хаотическая система имеет странный аттрактор, вокруг которого система постоянно колеблется. Динамическая система не приходит в устойчивое состояние, она никогда не попадает в одну и ту же точку дважды, причём структура аттрактора имеет фрактальную форму, т.е. одинаковые паттерны существуют в каждом масштабе независимо от масштаба.

Бифуркации удвоения периода вначале происходят всё быстрее и быстрее (8, 16, 32, ...), затем внезапно обрываются. В предельной точке периодичность уступает место хаосу. В середине развития сложности неожиданно появляется окно с регулярным периодом, например, 3 или 7 как результат блокировки режима. Происходит бифуркация 3-цикла и периоды удваивания начинаются снова с циклов 6, 12, ... и 7, 14, 28, ..., после чего прерываются на хаос. Важно, что в этом хаосе можно обнаружить чёткую структуру.

Табл. 4. Аттракторы логистического отображения.

Parameter Range	Type of Attractor
0 < r < 1	Equilibrium at r = 0
1 < r < 3	Equilibrium at 1 - 1 / r
3 < r < 3.449 ...	Orbit of Period 2
3.449 ... < r < 3.54409 ...	Orbit of Period 4
3.54409 ... < r < 3.5644 ...	Orbit of Period 8
3.5644 ... < r < 3.568759 ...	Orbit of Period 16
. . . . .	. . . . .
3.569946 ... < r	?

Насколько сближаются или расходятся фазовые траектории, соответствующие различным начальным точкам, судят по показателю Ляпунова

$$\lambda(x_0)=\leq mrx_{0\leq x\leq 1}\ln|f'(x)|. \qquad (39)$$

Считается, что логистическое отображение хаотично на инвариантном множестве Кантора при $r>2+\sqrt{5}\approx 4{,}236$, но на самом деле оно хаотично для всех $r>4$. Логистическое отображение имеет показатель корреляции 0,500±0,005, размер емкости 0,538 и информационный размер 0.5170976.

Логистическое отображение имеет странный аттрактор (аттрактор Фейгенбаума), который является мультифракталом на интервале [0,1], гомеоморфным канторову множеству.

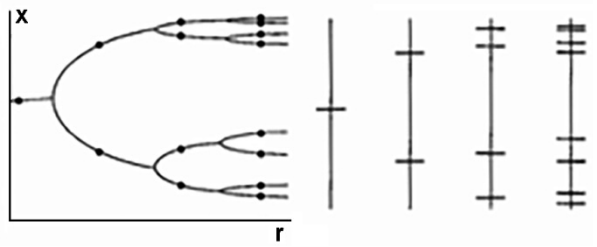


Рис. 32. Аттрактор логистического отображения.

Аттрактор Фейгенбаума получается в результате бесконечной серии бифуркаций удвоения периода предельных циклов для одномерных однопараметрических отображений интервала [0,1] на себя. Чтобы такие бифуркации были возможны, данные отображения должны удовлетворять следующим условиям:

– иметь единственный максимум на интервале [0, 1];
– слева от максимума монотонно возрастать, а справа от максимума монотонно убывать;
– гладко зависеть от управляющего параметра;
– шварциан отображения в точке бифуркации должен быть отрицателен.

Напомним, что шварцианом (производной Шварца) функции $f(x)$ называется выражение вида

$$\frac{f'''(x)}{f'} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2 \qquad (40)$$

Очевидно, что гладкие отображения с квадратичным максимумом удовлетворяют перечисленным выше условиям, так что аттрактор Фейгенбаума можно получить, итеируя центр интервала [0, 1] с помощью, например, логистического отображения $x_{n+1}=r(1-x_n)$ при $r=r_\infty=3{,}5699456$. Если управляющий параметр r принимает значения из интервала $3<r<r_\infty$, то последовательность точек x_n при $n\to\infty$, будет сходиться к некоторому предельному 2^m-циклу (m=1, 2,...), соответствующему данному значению r_m. Каждый такой предельный цикл можно рассматривать как конечную аппроксимацию аттрактора Фейгенбауэра. При плавном увеличении r внутри интервала будет сходиться к некоторому предельному 2^m-циклу $(m=1,2,\dots)$, соответствующему данному значению $r=r_\infty$. Каждый такой предельный цикл можно рассматривать как конечную аппроксимацию аттрактора Фейгенбаума. При плавном увеличении r внутри интервала $3<r<r_\infty$ периоды предельных циклов последовательно удваиваются: $2^m\to 2^{m+1}$, т.е. происходят бифуркации удвоения цикла. Название "аттрактор" в данном случае отражает тот факт, что под действием итераций при $r=r_\infty$ все точки интервала [0, 1], за исключением счётного множества точек, притягиваются к аттрактору Фейгенбаума.

Важно, что бифуркации циклов для всех отображений, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, описываются двумя универсальными константами (константами Фейгенбаума): $\alpha=2{,}5029078$ и $\delta=4{,}6692016$. Константа δ характеризует скорость сходимости управляющего параметра к предельному значению: $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{r_m-r_{m-1}}{r_{m+1}-r_m}=\delta$, в то время как константа α характеризует масштаб последовательных "расщеплений" элементов предельных циклов после каждой бифуркации: $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{|x_m-1/2|}{|x_{m+1}-1/2|}=\alpha$, где x_m означает элемент предельного 2^m-цикла, ближайший к элементу цикла $x=1/2$.

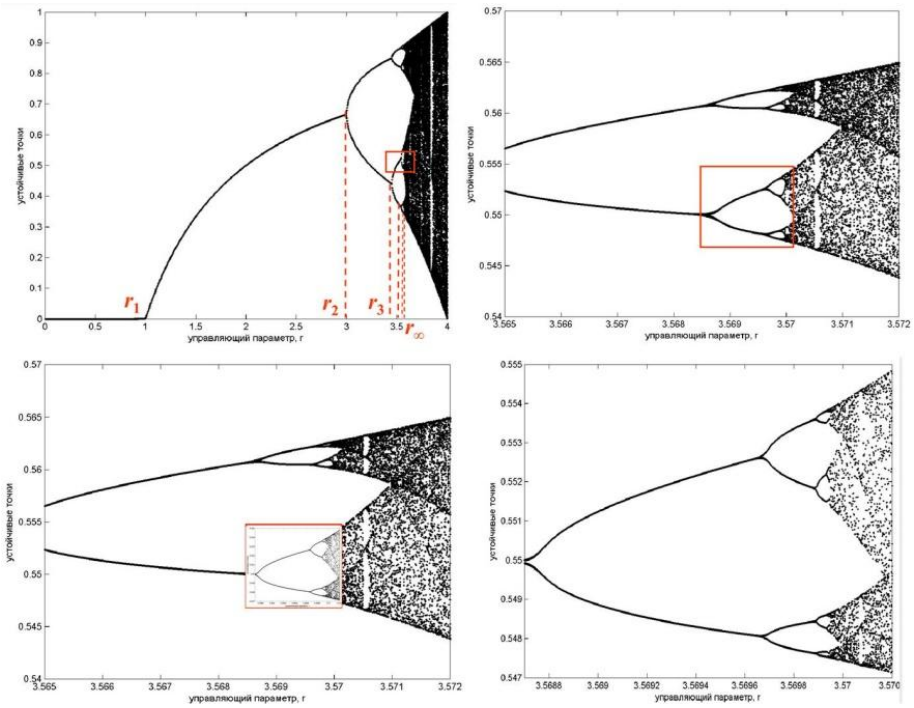


Рис.33 . Самоподобие в логистическом отображении.

Смысл коэффициентов подобия Фейгенбаума состоит в том, что если при каждой очередной бифуркации одновременно изменять масштабы бифуркационной диаграммы по горизонтали и по вертикали, соответственно, в δ и α раз, то при достаточно большом номере N получится почти полностью самоподобная фигура. Явление самоподобия (скейлинг, фрактальность) при бифуркациях удвоения периода позволяет развить аналитическую теорию для отыскания *всех* бифуркационных значений r_N по *одному* лишь первому значению r_1, вычислить которое не представляет труда.

Рассмотрим предельные суперстабильные 8-, 16-, 32-, 64- и 2048-циклы. Приставка "супер" означает, что в данный цикл входит элемент, где первая производная отображения обращается в нуль (в нашем случае это x=1/2). 2048-цикл с большой точностью воспроизводит характеристики аттрактора Фейгенбаума. Для их характеристики можно использовать обобщенные размерности Реньи, D_q. В качестве примера в табл. 5 приведены полученные величины D_∞, D_0 и $D_{-\infty}$ для предельных 2^m-циклов и аттрактора Фейгенбаума.

Табл. 5. Размерности Реньи логистического отображения

2^m	D_∞	D_0	$D_{-\infty}$
8	0,284	0,358	0,446
16	0,310	0,403	0,519
32	0,324	0,430	0,563
64	0,334	0,448	0,593
∞	0,377…	0,537…	0,755…

Размерности Реньи рассчитывают по формулам:

$$D_\infty^F = \frac{\log 2}{2\log\alpha} = 0{,}377756... \qquad (41а)$$

$$D_{-\infty}^F = 2D_\infty^F = \frac{\log 2}{\log\alpha} = 0{,}755512... \qquad (41б)$$

Выражение для спектральной функции аттрактора Фейгенбаума $f_F(\alpha)$ имеет вид:

$$f_F(\alpha) = \frac{\alpha\log\alpha - \alpha_1\log\alpha_1 - \alpha_2\log\alpha_2}{\log 2};\quad \alpha_1 = 2\alpha - 2D_\infty;\quad \alpha_2 = 2D_\infty - \alpha. \qquad (42)$$

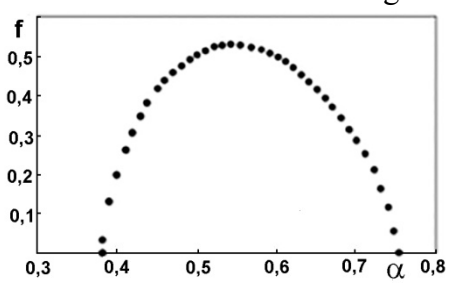


Рис. 34. Спектральная функция для аттрактора Фейгенбауэра.

При переходе к хаосу важную роль играет пограничный слой исчезающе малой толщины ($\Delta R \to 0$) между порядком и хаосом в окрестности критической точки $r_\infty \approx 3{,}569$. (рис. 34). При приближении к критической точке $r \to r_\infty$ циклы периодов 2, 4, 8,..., сменяют друг друга так, что каждый предыдущий цикл перестает быть притягивающим в момент рождения следующего цикла. При этом вне зависимости от природы процесса каскад расщеплений имеет одну и туже фрактальную структуру — вложенные одна в другую бифуркации с универсальным масштабом вложенности.

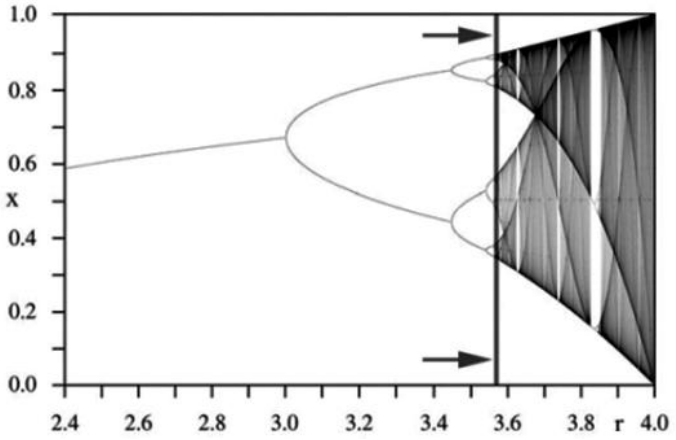


Рис. 35. Пограничный слой исчезающе малой толщины между порядком и хаосом.

В тонком пограничном слое между порядком и хаосом, в окрестности критической точки происходит накопление каскадов бифуркаций и формируется фрактальное множество точек бифуркаций — пыль с интересными и нетривиальными свойствами (критический аттрактор, аттрактор Фейгенбаума). Эта пыль имеет фрактальную размерность. Для критического аттрактора Фейгенбаума она вычислена с высокой точностью и составляет $d = 0{,}53804514358054991167...$

Так как фрактальная размерность критического аттрактора меньше единицы, то он имеет нулевую меру (мера – предел суммарной длины интервалов, оставляемых на последовательных уровнях построения). В то же время, как и канторово множество, он обладает мощностью континуума. Последнее вытекает из того, что можно построить правило кодирования принадлежащих аттрактору точек в виде мульти фрактала с двумя масштабами r и d.

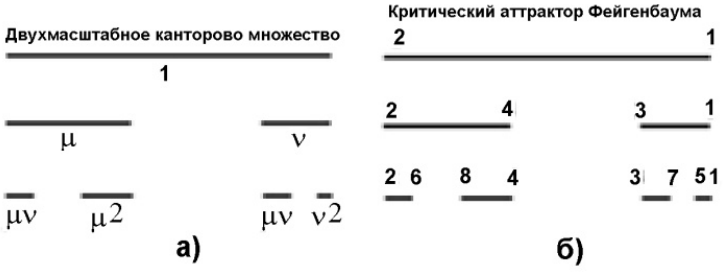


Рис. 36. **Двухмасштабное канторово множество,** построенное с использованием факторов $\mu=1/\alpha$ и $\nu=1/\alpha^2$ (а) и построение критического аттрактора Фейгенбауэра (б). Точки, отмеченные цифрами $i = 1, 2$ отвечают последовательным итерациям точки экстремума логистического отображения при критическом значении параметра**.**

Хорошей аппроксимацией критического аттрактора служит двухмасштабное канторово множество. Полагая $\mu=1/|\alpha|$ и $\nu=1\alpha^2$ на первом шаге построения делим отрезок в отношении μ к $1-\mu-\nu$ и выбрасываем среднюю часть. На последующих шагах процедура повторяется, причем отрезки различной длины располагаются так, как на рис. 36.

Тот факт, что результат асимметричен, объясняется присутствием двух характерных масштабов – α и δ. Тот факт, что с высокой степенью точности структура фрактала описывается одним параметром – коэффициентом Фенгенбаума $1/\alpha=0{,}3995$, является следствием неисчезающе малой толщины ($\Delta R \to 0$) аттрактора Фенгенбаума.

Таким образом, граница между порядком и хаосом представляет собой слой, в котором монофрактальные структуры со стороны порядка трансформируются в мультифрактальные структуры на стороне хаоса.

20. ХАОС В НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Выше было подробно описано логистическое отображение вида $x_{n+1}=r(x_n-x_n^2)$, которое можно представить как $x_{n+1}=1-\mu x_n^2$. В данной главе мы продолжим рассмотрение одномерных квадратичных отображений на примере $x_{n+1}=C+x_n^2$ и $x_{n+1}=a-x_n^2$. Все квадратичные отображения имеют похожие свойства (каждое имеет хотя бы одну точку, в которой производная от функции обращается в нуль; способно к хаотическому движению, имеет самоподобную (фрактальную) структуру бифуркационной диаграммы, зависит от одного параметра и проявляет сингулярность) но есть и отличия.

Затем будут обсуждены некоторые другие нелинейные отображения: одномодальное синус отображение и бимодальное кубическое отображение.

20.1 Отображение $x_{n+1}=C+x_n^2$.

Ранее мы уже рассмотрели свойства типичного представителя квадратичных отображений – логистического отображения $x_{n+1}=r(x_n-x_n^2)$. Теперь обсудим поведение другого представителя семейства одномерных квадратичных отображений:

$$x_{n+1}=C+x_n^2. \qquad (1)$$

Покажем, что это простое отображение обладает нетривиальной и богатой динамикой. При изменения параметра C устойчивые периодические орбиты отображения испытывают каскады бифуркаций (что проявляется, например, в самоподобии множества Мандельброта).

Напомним, что точки, в которых производная $f^{(1)}(x_c)=0$ называются *критическими точками*. Для аналитического отображения известно, что каждый устойчивый цикл обязательно притягивает к себе критическую точку. Так как у квадратичного отображения есть единственная критическая точка $x_c=0$, то у него может существовать только один притягивающий цикл и начинать его поиски следует из точки $x_c=0$. Для функции $f(x)=x^2+C$ вторая итерация функции $f^{(2)}$ помимо существовавших ранее двух отталкивающих неподвижных точек добавляет пару притягивающих неподвижных точек, которые приводят к появлению цикла с периодом 2. При переходе C через значение -3/4 система претерпевает бифуркацию удвоения периода. Другая бифуркация удвоения периода возникает при C=-5/4. Когда C становится меньше этого значения, орбиты начинают притягиваться циклом с периодом 4. По мере того как C убывает, последовательно встречаются притягивающие периодические орбиты длины 8, 16 и т. д.

За динамикой одномерного вещественного отображения удобно следить по итерационной диаграмме (рис. 1). Синяя кривая это N-ая итерация отображение $f^{oN}(x) = f(f(..f(x)))$. Зеленая линяя $y=x$. Координаты изменяются в пределах $-2\le x,y\le 2$. Т.к. $f(0)=C$, то при $N=1$ значение C совпадает с $y(0)$. Зависимость x_n от n строится в правом окне (итерации начинаются с x_0). Чтобы построить итерационную диаграмму, проведем красную вертикальную линию из начальной точки $x_o=0$ к синей линии $y=f(x)=x^2+C$, где $y_o=f(x_o)$. Чтобы получить следующую итерацию, строим горизонтальную линию к зеленой диагонали $y=x$, где $x_1=y_o=f(x_o)$. Далее снова строим вертикальную линию к синей кривой, чтобы получить $y_1=f(x_1)$ и т.д. Точки f_c: $x_o\to x_1\to x_2\to...$ при некотором значении C образуют *орбиту* точки x_o.

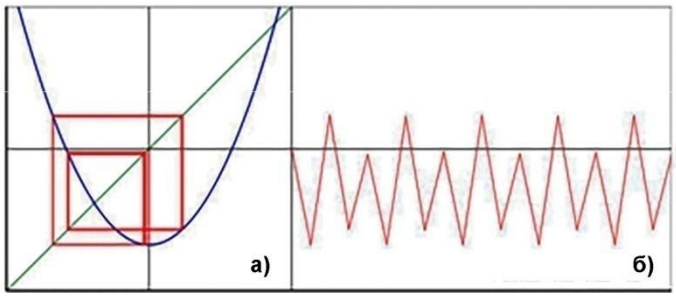


Рис. 1. Итерационная диаграмма отображения $x_{n+1}=C+x_n^2$: C=-1,35, x_0=0.

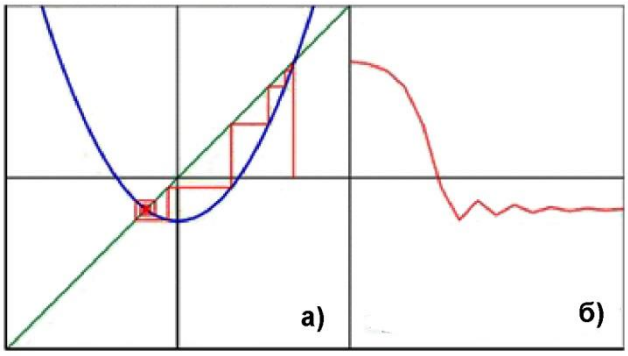
Рассмотрим теперь неподвижные точки отображения (1).

Неподвижные точки $x_*=f(x_*)$ отображения совпадают с пересечением $y=x$ и $y=f(x)$ (т.е. зелёной и синей кривых). У квадратичного отображения есть две неподвижные точки (возможно комплексные), определяемые квадратным уравнением $f(x^*)-x^*=x^{*2}+C-x^*=0$,

$x_{1,2}=1/2 \mp (1/4-C)^{1/2}$. Первая производная отображения в неподвижной точке $m=f'(x^*)=2x^*$ называется *мультипликатором* (или *собственным значением*) точки. Для малого δx

$$f(x^*+\delta x)=f(x^*)+m\delta x+O(\delta x^2)\approx x^*+m\delta x. \qquad (2)$$

Напомним, что неподвижная точка *устойчивая* (*притягивающая*), *сверхустойчивая*, *неустойчивая* или *нейтральная* в соответствии со значением мультипликатора $|m|<1$, $|m|=0$, $|m|>1$ или $|m|=1$, соответственно.



Вторая неподвижная точка (на рис. 2б) – всегда отталкивающая. При $|x|>x_2$ итерации расходятся к бесконечности. При $|x|<x_2$ они сходятся к притягивающей неподвижной точке x_1. Точки этого интервала образуют её *бассейн притяжения*.

Рис. 2. Итерационная диаграмма отображения $x_{n+1}=C+x_n^2$: C=-0,5, x_0=1,35.

При C=-1 у отображения есть притягивающий цикл с периодом два (рис. 3б). У второй итерации отображения f^{o2} при этом появляются две притягивающие неподвижные точки.

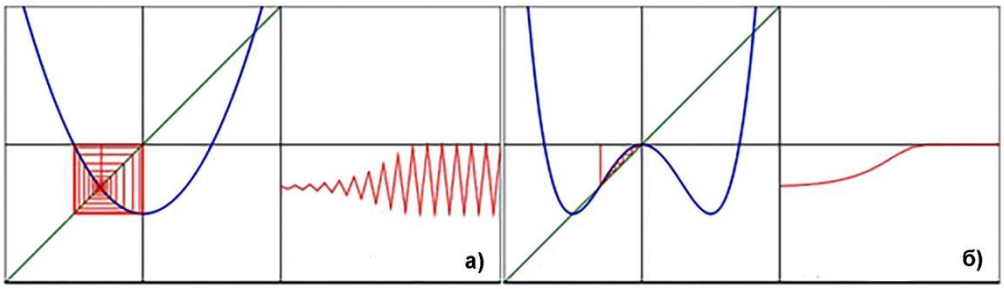


Рис. 3. Итерационная диаграмма отображения $x_{n+1}=C+x_n^2$: C=-1, x_0=-0,6.

Рассмотрим теперь переход к хаосу путём удвоения периода.

Каскад бифуркаций (последовательность Фейгенбаума или сценарий удвоения периода) – один из типичных сценариев перехода от порядка к хаосу, от простого периодического режима к сложному апериодическому при бесконечном удвоении периода.

Последовательность Фейгенбаума имеет самоподобную, фрактальную структуру – увеличение какой-либо области выявляет подобие выделенного участка всей структуре.
Анализ механизмов перехода от порядка к хаосу выявил универсальность относительно немногих сценариев перехода к хаосу. Вхождение системы в непредсказуемый режим описывается каскадом бифуркаций, следующих одна за другой. Каскад бифуркаций ведет последовательно к появлению выбора между двумя решениями, затем четырьмя и так далее, система начинает колебаться в хаотическом, турбулентном режиме последовательного удвоения количества возможных значений.

Применим показатели Ляпунова к исследованию устойчивости особых точек квадратического отображения. Для отображения $x_{n+1}=f(x_n)$ малому отклонению δx_o координаты точки x_o соответствует малое изменение координаты x_1 $\delta x_1=f'(x_o)\,\delta x_o$. Для n-ой итерации отображения

$$\delta x_n = \delta x_o \prod_{i=0,n-1} f'(x_i). \qquad (3)$$

Показатель Ляпунова для отображения выражается через это изменение по формуле $\Lambda=lim_{n\to\infty} L_n$, $L_n=1/n\ log|\delta x_n/\delta x_o|=1/n \sum_{i=0,n-1} ln\,|f'(x_i)|$. У хаотической траектории $|\delta x_n|$ растёт с увеличением n, поэтому для неё $\Lambda>0$. Для притягивающего цикла показатель

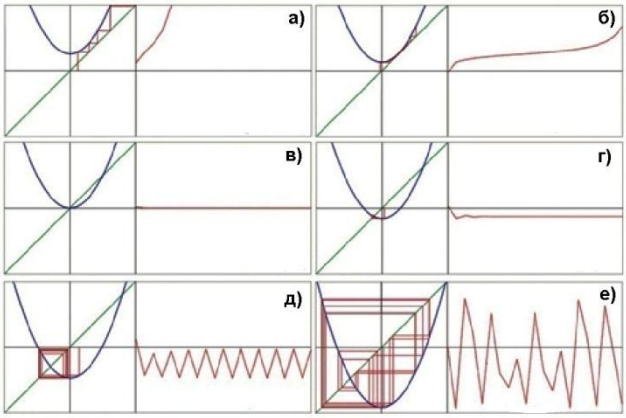


Рис. 4. Возникновение хаотических колебаний при опускании параболы: *а – C=0,5122, x_0=0,2341; б – C=0,2683, x_0=- 0,0488; в – C=0,0049, x_0=0,039; г – C=-0,3073, x_0=0,0683; д – C=-9,415, x_0=0,2829; е – C=-1,8195, x_0=0,085.*

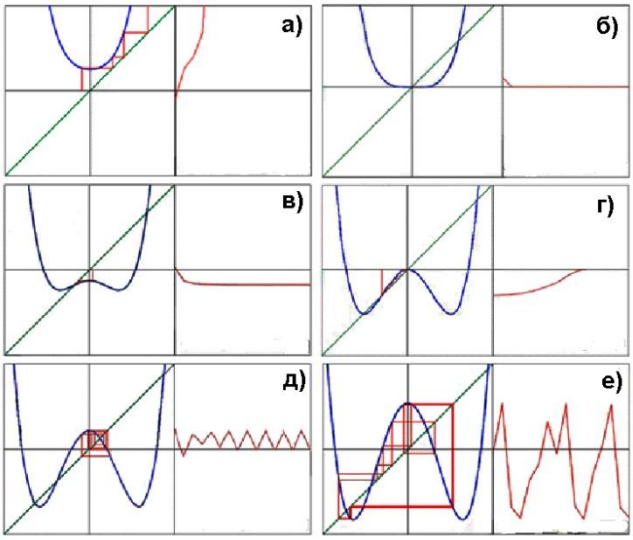


Рис. 5. Диаграммы второй итерации отображения (1): *а – C=0,5681, x_0=-0,1902; б - C=-0,0051, x_0=0,1871; в – C=-0,4713, x_0=0,0721; г – C=-1, x_0=-0,6; д – C=-1,3267, x_0=0,5029; е – C=-1,6516, x_0=-0,0852.*

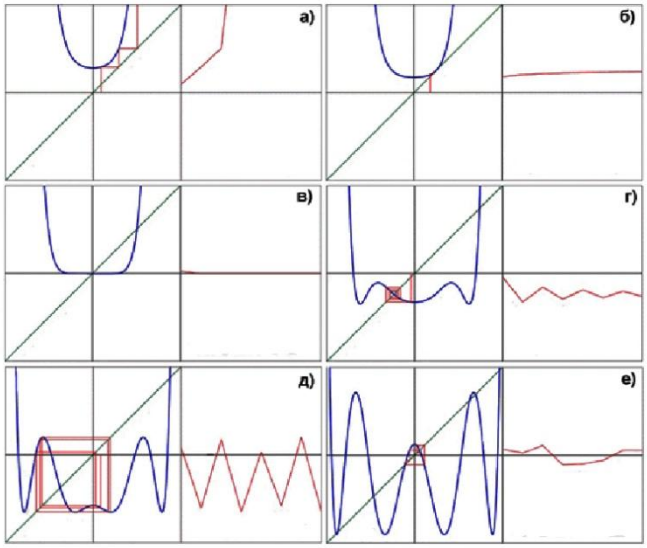


Рис. 6. Диаграммы третьей итерации отображения (1): *а – C=0,3442, x_0=0,1871; б – C=0,2507, x_0=0,3626; в – C=-0,0066, x_0=0,0585; г – C=-0,6967, x_0=-0,0819; д – C=-1,3049, x_0=0,1754; е – C=-1,7961, x_0=0,14084.*

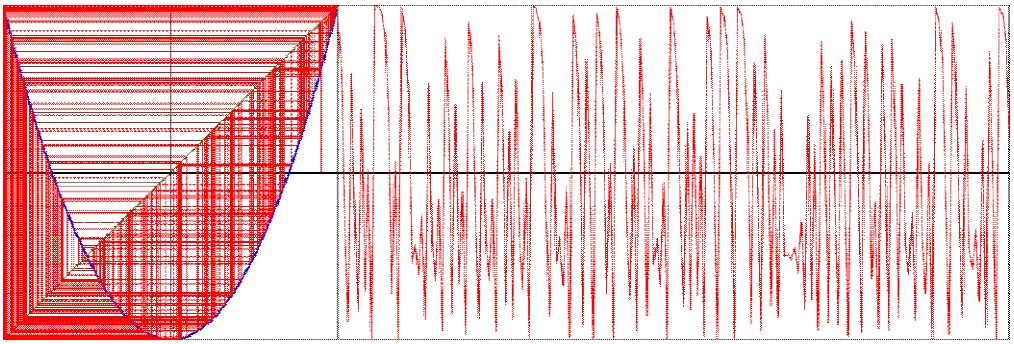


Рис. 7. Хаотическая траектория квадратичного отображения при C=-2

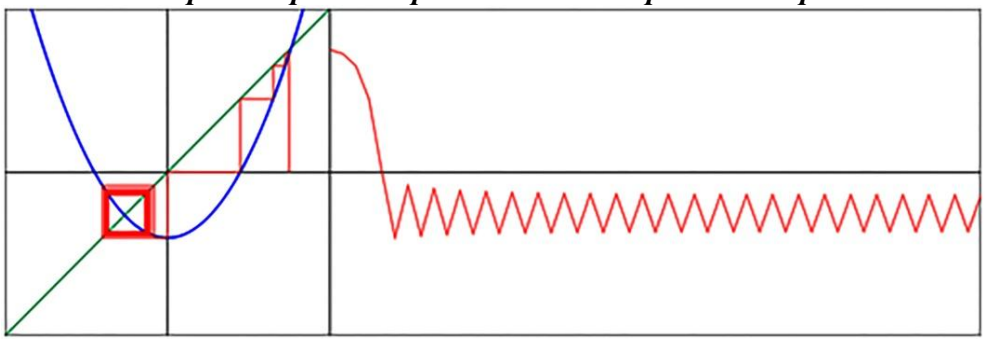


Рис. 8. Возникновение устойчивой орбиты при касательной бифуркации.

В точке C=1/4 парабола касается диагонали, а при C<1/4 они пересекаются в двух точках, соответствующих устойчивой и неустойчивой неподвижным точкам. Это явление называется *касательной бифуркацией*. Устойчивая орбита с периодом 3 также рождается в касательной бифуркации при C=-1.75 и далее, при уменьшении показателя Ляпунова L отрицательный. При C>1/4 итерации квадратичного отображения расходятся. параметра, повторяет весь каскад бифуркаций квадратичного отображения.

Рассмотрим бифуркации удвоения периода.

При C<-3/4 производная в левой неподвижной точке $f'(x_1)=m<-1$ и точка теряет устойчивость. В окрестности C=-3/4, после первой итерации $\delta x'=m\delta x\sim-\delta x$ меняет знак, а после второй итерации снова $\delta x''=m^2\delta x\sim\delta x$. Поэтому у отображения появляется притягивающая периодическая орбита с периодом 2 $x_3\rightarrow x_4\rightarrow x_3$ ... Это явление называется *бифуркацией удвоения периода*.

У второй итерации квадратичного отображения $f^{o2}(x)$ при этом появляются две притягивающие неподвижные точки x_3, x_4 (соответствующие устойчивому циклу) и неустойчивая x_1 (между ними). Отметим, что в окрестности нуля $f^{o2}(x)$ похожа на параболу и при дальнейшем уменьшении c также испытывает бифуркацию удвоения периода после которой у квадратичного отображения появляется устойчивый цикл с периодом 4 и т.д. То, что устойчивые орбиты с разными периодами испытывают подобные бифуркации, объясняется теорией перенормировок (*renormalization theory*). Заметим, что неустойчивые орбиты уже никогда больше не исчезают.

Рассмотрим теперь бифуркационную диаграмму (рис. 9а).

Будем строить итерации f_c: $x_1=0\rightarrow x_2\rightarrow x_3\rightarrow\ldots\rightarrow x_{Max}$ для вещественных C на плоскости (x, C). Цвета (от синего к красному) показывают, как часто орбита попадает в данную точку (переходный процесс показывает, как быстро итерации сходятся). По итерационной диаграмма рис. 9б можно проследить за орбитой точки x=0 при соответствующем значении C.

Координаты центра изображения x,c и $\Delta x,\Delta c$ отображаются в текстовом поле. Синяя вертикальная линия проходит через начальную точку x=0.

Верхняя часть диаграммы рис. 10 начинается с касательной бифуркации при C=1/4. При $-3/4\le C\le 1/4$ существует единственная неподвижная притягивающая точка. В окрестности C=-3/4 видна точка ветвления бифуркации удвоения периода, после чего

неподвижная точка теряет устойчивость и появляется притягивающая орбита с периодом 2. Далее после новой бифуркации удвоения периода возникает орбита с периодом 4 и т.д. Каскад бифуркаций удвоения периода заканчивается при C=-1.401 после чего возникает область *хаотической динамики*, которая заканчивается *кризисом* при C=-2. В области хаотической динамики видны узкие горизонтальные белые полосы *окон*

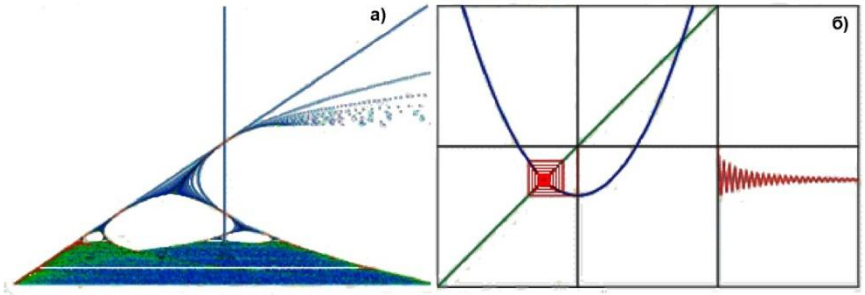


Рис. 9. Итерационная диаграмма отображения (1): C=-0,7, x_0=0.

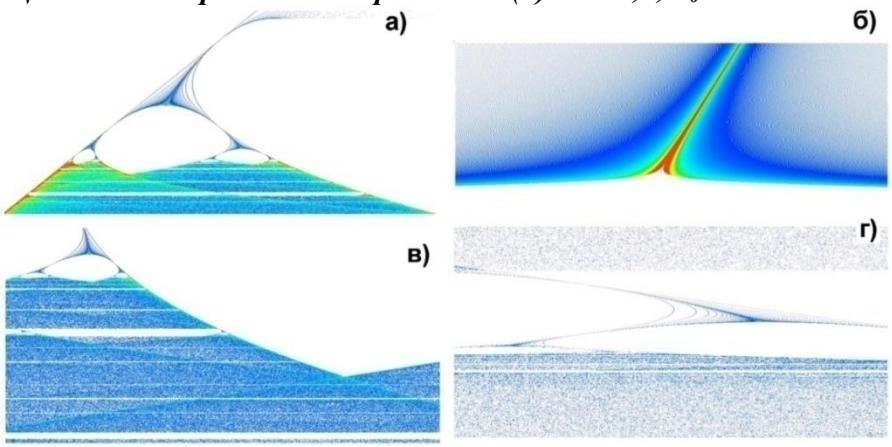
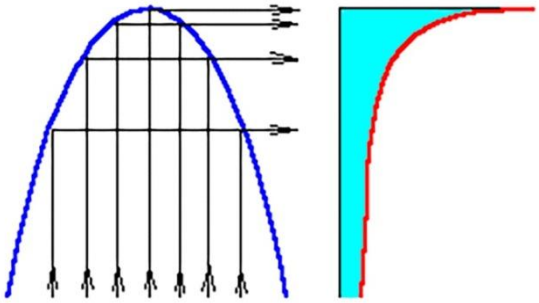


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма отображения (1) в различных масштабах.

регулярной динамики. Самая большая полоса внизу соответствует окну с периодом 3.

В области изменения параметра r>3 наблюдается каскад удвоения периода. r>3,5699456... – поведение хаотическое, каскад удвоения периода заканчивается. Малые изменения начальных условий приводят к несопоставимым отличиям дальнейшего поведения системы.



Можно найти каустики бифуркационной диаграммы.

Рис. 11. Построение распределения точек хаотических орбит.

. Рис. 11 поясняет, что каустики (см. далее) в распределении точек хаотических орбит генерируются экстремумами отображения. Поэтому особенности (выделяемые красным цветом) на диаграмме появляются на образах критической точки $f_c^{\,on}(0)$. Обозначая $g_n(C)=f_c^{\,on}(0)$, получим $g_o(C)=0$, $g_1(C)=C$, $g_2(C)=C^2+C$, ... Кривые $g_{0,1,\ldots,6}(C)$ показаны на Fig. 12.

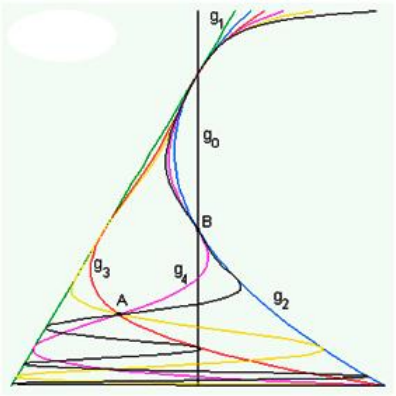


Рис. 12. Каустики отображения (1).

Отметим, что аттрактор квадратичного отображения заключен между кривыми $g_1(c)$ и $g_2(c)$. Точка пересечения каустики с вертикальной прямой x=0 на диаграмме соответствует окну периодической динамики.

20.2 Отображение $x_{n+1}=a-x_n^2$.

Логистическое отображение

$$x_{n+1}=a-x_n^2 \qquad (4)$$

зависит от одного параметра a, и является простейшим одномерным отображением, проявляющим сингулярность. Отображения с одной критической точкой называются унимодальными.

Унимодальное отображение - гладкое отображение на себя при условии, что оно имеет единственную критическую точку (ноль производной).

Все унимодальные отображения демонстрируют похожее динамическое поведение. Основных типов динамических режимов два: 1) стационарные или периодические режимы, 2) хаотические режимы. В первом случае итерации в конечном итоге посещают только конечный набор разных значений, всегда повторяющиеся в фиксированном порядке. В случае (2) состояние системы никогда не повторяется точно и, по-видимому, эволюционирует неупорядоченным образом.

Бифуркационная диаграмма ограничена диапазоном $a_0<a<a_R$. Между a_0=-1/4 и a_1 =3/4 предельный набор состоит из одного значения. Это соответствует стационарному режиму, который есть периодическая орбита периода-1. При a=a_1 происходит бифуркация, рождающая периодическую орбиту периода-2: итерации колеблются между двумя значениями – бифуркация удвоения периода. При $a=a_2$=5/4 существует еще одна бифуркация удвоения периода, где орбита периода-2 уступает место орбите периода-4.

Бифуркации удвоения периода, возникающие при $a=a_1$ и $a=a_2$, являются первыми двумя членами бесконечной серии – каскада удвоения периода, в котором для каждого целого n создается орбита периода 2^n. Бифуркация при $a=a_3$, приводящая к орбите периода-8, легко видна на бифуркационной диаграмме на рис. 13, та, что при $a=a_4$ едва заметна, а следующие совершенно неразличимы для невооруженного глаза. Это связано с тем, что значения параметра a, при которых создается орбита периода 2^n, геометрически сходятся к точке накопления a_∞=1.401155189... с коэффициентом сходимости, существенно превышающим 1: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n+1}-a_n}=\delta\approx 4{,}6692016091...$

Постоянная δ, обладает замечательным свойством: периоды удвоения каскадов, наблюдаемые в чрезвычайно большом классе систем, имеют скорость сходимости, определяемую δ. В точке накопления a_∞ период решения становится бесконечным. На рис. 13 справа от этой точки система переходит в хаотические режимы, что видно по обилию тёмных областей в этой части бифуркационной диаграммы, которые указывают на то, что система посещает много разных состояний. Каскад удвоения периода - один из наиболее известных путей хаоса и может наблюдаться во многих низкоразмерных системах.

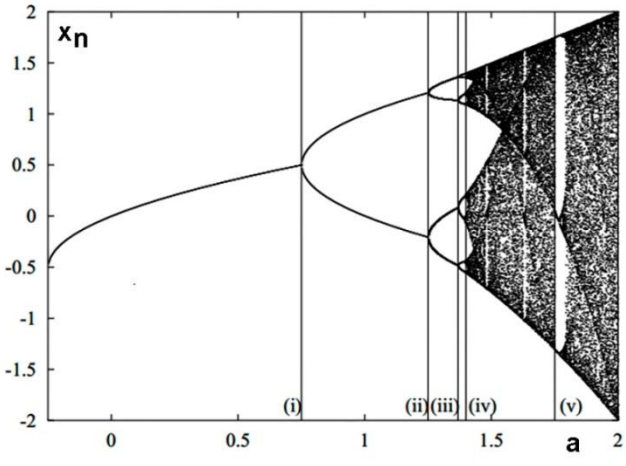


Рис. 13: Бифуркационная диаграмма отображения (4): *рассчитана для нескольких значений параметров от a=-0.25 до a=2.0; проведено 50 последовательных итераций отображения с целью вымираня переходных процессов. Вертикальные линии отмечают создание (i) орбиты периода-2; (ii) орбиты периода-4; (iii) орбиты периода-8 и (iv) точка накопления каскада удвоения периода; (v) начальная точка окна периода-3.*

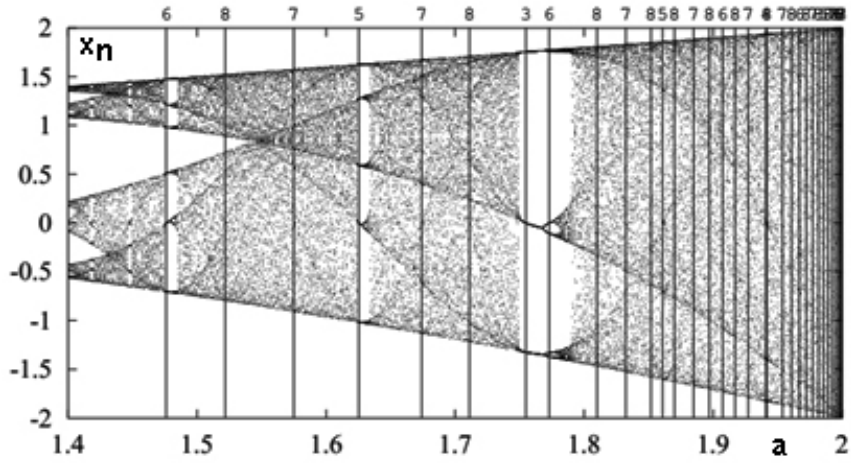


Рис. 14: Увеличенный вид хаотической зоны бифуркационной диаграммы рис. 13. *Внутри периодических окон периода до 8 вертикальные линии указывают значения параметров, где соответствующие орбиты наиболее стабильны (период указан над линией).*

В хаотической области есть относительно большое периодическое окно, соответствующее области устойчивости орбиты периода-3, которое начинается с a=7/4, внутри хаотической зоны. Периодические окна и хаотические области произвольно часто чередуются; между любыми двумя периодическими окнами бесконечно много периодических окон. Периодические окна видны невооруженным глазом только у очень низких периодов. У более высоких периодов (1) периодическое окно слишком узкое по сравнению с масштабом графика, и (2) количество выборок достаточно велико, чтобы окно не могло отличаться от хаотических режимов.

Конечно, было бы полезно определить для каждого периодического решения диапазон значений параметров, по которым он устойчив. Увы! Эта задача недостижима, но всё же простые топологические методы позволяют классифицировать разные периодические режимы и ответить на такие вопросы, как продолжается ли последовательность различных динамических режимов, возникающих при увеличении параметра a, возможно диагностика сложности хаоса и др.

Поиск неподвижных точек просто сводится к решению квадратичного уравнения

$$x=a-x^2 \qquad (5)$$

который имеет два решения:

$$x_-(a)=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ x_+(a)=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \qquad (6)$$

Эти выражения 2.4 имеют смысл только при $a>a_0$=-1/4. Ниже этого значения все орбиты уходят в бесконечность. Бесконечно удаленную точку x_∞, можно формально рассматривать как другую неподвижную точку системы, хотя и нефизическую.

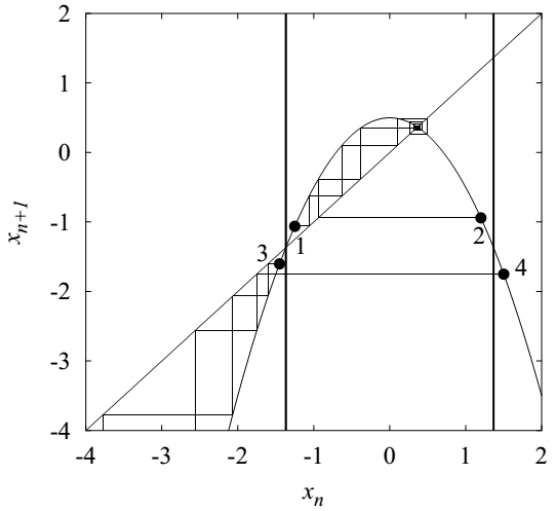


Рис. 14: Бассейн притяжения неподвижной точки x_+ расположен между левой неподвижной точкой x_- и ее прообразом, обозначенной двумя вертикальными линиями. *Орбиты, помеченные 1 и 2, находятся внутри бассейна и сходятся к x_+. Орбиты, помеченные 3 и 4, находятся за пределами бассейна и уходят в бесконечность (т. е. сходятся к бесконечной точке x_∞).*

Важным качественным изменением, происходящим при $a=a_0$, является повсеместное явление низкоразмерной нелинейной динамики,

касательной или седлоузловой бифуркации: две неподвижные точки (6) становятся одновременно вещественными и вырождаются: $x_-(a_0)=x_+(a_0)=-1/2$. Два обозначения указывают на два разных (но связанных) свойства этой бифуркации. Эти две бифуркационные неподвижные точки имеют разные свойства устойчивости. Если значения a несколько выше a_0, то орбиты, расположенные вблизи x_+, сходятся к нему, тогда как те, которые начинаются в окрестности x, оставляют его либо сходящимся к x_+, либо уходящим на бесконечность, в зависимости от того, расположены они справа или слева от x_-. Неподвижная точка x_+ (а также x_∞) называется устойчивой, а x_- неустойчивой. Они называются узлом и седлом соответственно. Так как траектории в окрестностях этих точек сходятся к ним, x_+ и x_∞ являются притягивающими множествами или аттракторами. Множества точек, орбиты которых сходятся к аттрактору системы, называются бассейном притяжения этой точки. Из рис. 14 видно, что неустойчивая неподвижная точка x_- находится на границе между бассейнами притяжения двух устойчивых неподвижных точек x_+ и x_∞. Другая граничная точка – прообраз $f^1(x_-)$ значения x_-. Устойчивость неподвижной точки зависит от производной отображения в неподвижной точке.

Как известно, неподвижная точка устойчива (соответственно, неустойчива), когда абсолютное значение ее мультипликатора меньше (соответственно больше), чем единица. Мультиплкаторы μ ± двух неподвижных точек отображения (4) задаются формулами

$$\mu_- = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_-} = -2x_- = 1+\sqrt{1+4a} \qquad (7а)$$

$$\mu_+ = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_+} = -2x_+ = 1-\sqrt{1+4a} \qquad (7б)$$

Ур.7 показывает, что x_- безусловно неустойчиво по всей своей области существования и, следовательно, в целом не наблюдается как стационарный режим, тогда как x_+ стабилен для параметров a чуть выше a_0=-1/4. Поэтому на бифуркационной диаграмме, показанной на рис. 13, можно наблюдать только x_+. Точнее, x_+ устойчиво для $a\in[a_0, a_1]$, где a_1=3/4 таково, что μ_+=-1. Это согласуется с бифуркационной диаграммой, изображенной на рис. 13. Заметим, что при $a_0=\in[a_0, a_1]$ множитель $\mu_+=0$ и, следовательно, возмущения затухают быстрее, чем по экспоненциальной зависимости: тогда неподвижная точка называется суперстабильной. При бифуркации седло-узел обе неподвижные точки вырождены, а их множитель равен +1. Это фундаментальное свойство связано с тем, что в точке бифуркации график отображения (4) касается диагонали (рис. 15), поэтому эта бифуркация также известна как касательная бифуркация. Касание двух гладких кривых (графика f и диагонали) является общим в точке множественного пересечения. Это пример структурно неустойчивой ситуации: произвольно малое возмущение f приводит к двум различным пересечениям или вообще не пересекает (альтернативно, двум действительным или двум комплексным корням).

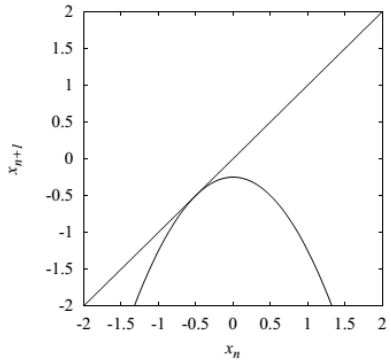


Рис. 15: График отображения (2) на начальной стадии бифуркаций седло-узел.

Периода-1 орбита x_+ существует для любого $a>a_0$. Следовательно, она не исчезает при бифуркации удвоения периода, a просто становится неустойчивой. Она присутствует во всех динамических режимах, наблюдаемых после потери устойчивости, в том числе в хаотических режимах правой части бифуркационной диаграммы рис. 13. Это справедливо для всех периодических решений квадратичного отображения. Поэтому периодические орбиты играют важную роль в динамике даже после того, как они станут неустойчивыми.

Так как орбиту периода-2 можно рассматривать как неподвижную точку второй итерации отображения, то можно определить её диапазон стабильности. Две периодические точки $\{x_1, x_2\}$ являются решениями квартирного уравнения

$$x = f\big(f(x)\big) = a - (a - x^2)^2 \qquad (8)$$

Для нахождения x_1 и x_2 воспользуемся тем, что фиксированные точки x_+ и x_- являются решениями Ур.8. Решение квадратичного уравнения

$$p(x) = \frac{f(f(x))-x}{f(x)-x} = 1 - a - x + x^2 = 0 \qquad (9)$$

есть

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{-3+4a}}{2};\ \ x_2 = \frac{1+\sqrt{-3+4a}}{2} \qquad (10)$$

Орбита периода 2 (x_1, x_2) появляется при $a=a_1=3/4$ и существует для каждого $a>a_1$. Используя правило цепочки для производных, получим множитель фиксированной точки x_1 функции f_2 как

$$\mu_{1,2} = \frac{\mathrm{d}f^2(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_1} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_2} \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_1} = 4x_1x_2 = 4(1-a) \qquad (11)$$

Заметим, что x_1 и x_2, рассматриваемые как неподвижные точки f_2, имеют один и тот же множитель, который определяется как множитель орбиты (x_1, x_2). В точке бифуркации $a=a_1$ имеем $\mu_{1,2}=1$, сигнатура двух периодических точек x_1 и x_2 вырождается при бифуркации удвоения периода. Однако структура этой бифуркации не полностью аналогична структуре касательной бифуркации, рассмотренной ранее. Действительно, две периодические точки x_1 и x_2 также вырождены с неподвижной точкой x_+. Таким образом, бифуркация удвоения периода фиксированной точки x_+ является ситуацией, когда вторая итерация f_2 имеет три вырожденные неподвижные точки. Сигнатура этого тройного вырождения соответствует особой форме более высокого порядка чем сингулярность складчатости, упомянутой при обсуждении касательной бифуркации. Заметим, что x_+ имеет мультипликатор -1 как фиксированную точку f при бифуркации и, следовательно, существует по обе стороны от бифуркации: он просто становится неустойчивым при $a=a_1$. Напротив, x_1 и x_2 имеют мультипликатор 1 для первых итераций f, при которых они являются неподвижными точками, и, следовательно, существуют только с одной стороны бифуркации. Орбита периода-2 устойчива только в конечном диапазоне параметров. Другой конец области устойчивости имеет вид $a=a_2=5/4$, где $\mu_{1,2}=-1$. При этом значении параметра происходит новая бифуркация удвоения периода, где орбита периода-2 теряет устойчивость и рождает орбиту периода-4. Как показано на рис. 13, удвоение периода происходит неоднократно, пока не будет создана орбита бесконечного периода.

20.3 Подобие окон периодической динамики

Общая особенность для хаотических динамических систем состоит в том, что при изменения параметров рождается устойчивая и неустойчивая орбиты с периодом n (касательная бифуркация). Далее происходит переход к хаосу через каскад удвоения периода. Все заканчивается кризисом, при котором неустойчивая орбита с периодом n рожденная в исходной касательной бифуркации сталкивается с хаотическим аттрактором. Область параметров между касательной бифуркацией и кризисом называется окном периодической динамики с периодом n. Заметим, что в этом случае центральная часть рисунка подобна всей бифуркационной диаграмме (рис. 16).

Так, при C=-1.75 в окне с периодом 3 в результате тангенциальной бифуркации отображения f^{o3} возникают устойчивая и неустойчивая орбиты с периодом 3 (в верхней части окна). Устойчивая орбита с периодом 3 показана ниже налево. Если задать $N=3$ (рис. 17б), то мы получим 8 пересечений (неподвижных точек отображения f^{o3}). Два из них – неустойчивые неподвижные точки. Остальные шесть пересечений принадлежат устойчивой и неустойчивой орбитам с периодом 3.

На рис. 17а периодическая орбита проходит через два "линейных" (по краям) и один квадратичный участок параболы (в центре). Поэтому в окрестности $x=0$ отображение f^{o3} с точностью до растяжений совпадет с квадратичным (это преобразование называется

перенормировкой отображения) и при изменении параметра C повторяет бифуркации квадратичного отображения. Это и объясняет подобие бифуркационных диаграмм f^{on}.

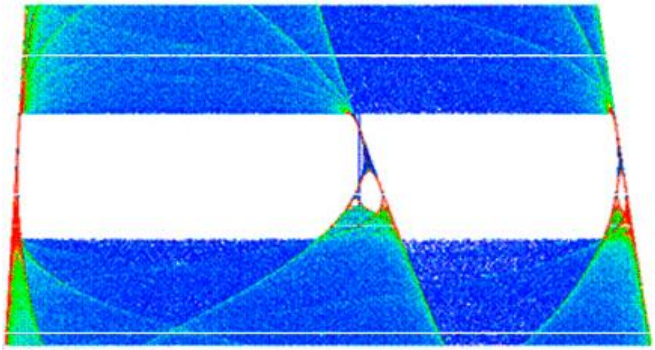


Рис. 16. Участок бифуркационной диаграммы отображения при большом увеличении.

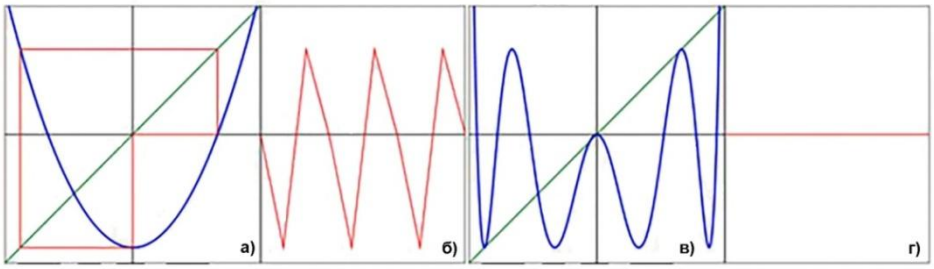


Рис. 17. Итерационная диаграмма при параметрах C=-1,755, x_0=0: *а – первая итерация; б – третья итерация.*

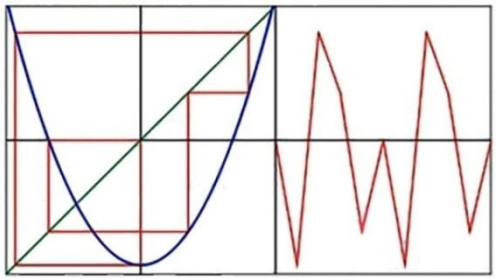


Рис. 18. Итерационная диаграмма при C=-1,86071, x_0=0.

20.4 Порядок Шарковского

Унимодальные отображения, в частности, квадратичное, имеют области «хаоса» ($r>r_c$) на соответствующей бифуркационной диаграмме «окна периодичности» (окна прозрачности, окно Шарковского) – узкие интервалы значений параметра r, в которых существуют регулярные движения. Им соответствуют переходы в порядке Шарковского. В каждой из таких областей (их называют окнами прозрачности или окнами Шарковского) существуют циклы разных периодов наиболее широкое окно соответствует циклу с периодом 3. Например, самым большим окном логистического отображение является окно цикла периода 3 и возникающего из него циклов $3\cdot 2^n$ (область регулярного движения ограничена интервалом $3{,}82284<r<3{,}8495$). Этот цикл возникает в результате касательной бифуркации и с ростом параметра r претерпевает последовательность бифуркаций удвоения периода. Число 3 — наибольшее в смысле упорядочения, поэтому наличие цикла периода 3 влечёт за собой наличие цикла с любым периодом. Часто этот частный случай сокращённо формулируют как «период 3 влечёт хаос». В случае наличия точки периода 3 можно утверждать «хаотичность» системы и в других смыслах, например её энтропия положительна.

Порядок Шарковского — упорядочение натуральных чисел, связанное с исследованием периодических точек динамических систем на отрезке или на вещественной прямой. Подобная диаграмма характерна для всех систем с каскадом удвоений периодов, приводящим к хаосу.

Шарковский установил, что если f обладает точкой (наименьшего возможного) периода a и $b<a$, то f обладает точкой (наименьшего возможного) периода b.

Теорема Шарковского устанавливает связь между хаотическим движением и циклами отображения.

Теорема Шарковского: если непрерывное отображение одномерного интервала в себя имеет цикл периода m, то оно имеет также и циклы со всевозможными периодами k, предшествующими числу m, в перечне всех целых чисел, выписанных в порядке Шарковского.

Следствие теоремы Шарковского: Пусть f – непрерывная функция. Если f имеет периодическую точку периода-3, она имеет периодические точки всех других периодов, т.е. если унимодальное отображение имеет цикл периода 3, то оно имеет бесконечное множество циклов всех остальных периодов и бесконечное множество хаотических траекторий.

Теорема Шарковского утверждает, что таким образом задаётся полный порядок на множестве натуральных чисел. Двигаясь вспять (т.е. в сторону уменьшения) по параметру r, можно наблюдать окна периодичности с периодами, равными соответственно

$3\to5\to7\to11\to13\to17\to\ldots\to3*2\to5*2\to7*2\to11*2\to13*2\to17*2\to\ldots\to3*2^2\to5*2^2\to7*2^2\to11*2^2$
$\to 13*2^2\to17*2\to\ldots\to2^n(2n-1)\to\ldots\to2^5\to2^4\to2^3\to2^2\to 2\to 1$ (13)

(стрелка $\to$ означает - влечёт за собой: a$\to$b означает: a влечет за собой b, или b следует за a).

В верхней строке представлены в порядке возрастания все простые числа, кроме 2, во второй строке – произведения простых чисел на 2, в третьей – произведения простых чисел на 2^2, в k-й строке сверху – произведения простых чисел на 2^k. Наконец, в последней (нижней) строке представлены чистые степени двойки.

20.5 Универсальность Фейгенбаума

Обычно в теории бифуркаций рассматривается локальное поведение семейства в окрестности бифуркационного параметра. Свойство универсальности же связано с поведением системы в окрестности того значения параметра, который является предельный точкой множества бифуркационных значений параметра.

Универсальность Фейгенбаума (универсальность Фейгенбаума-Кулле- Трессера) – эффект в теории бифуркации, заключающийся в том, что определённые числовые характеристики каскада бифуркации удвоения периодов в однопараметрическом семействе унимодальных отображений при переходе от регулярного поведения к хаотическому оказываются не зависящими от выбора конкретного семейства (и, тем самым, являются универсальными константами). Такими характеристиками оказываются, в частности, предел отношений соседних отрезков параметров между двумя бифуркациями удвоения периода (названный δ) и хаусдорфова размерность аттрактора в конечной точке каскада.

Универсальность Фейгенбаума утверждает, что экспоненциальная скорость сходимости бифуркационных значений к предельному одинакова для всех однопараметрических семейств унимодальных отображений отрезков в себя.

Принцип универсальности утверждает, что удивительно похожие диаграммы возникают из любой гладкой, одномерной, немонотонной функции при отображении на себя. Круг, эллипс, синус или любая другая функция с локальным максимумом приводят к бифуркационной диаграмме с периодами удвоения.

Универсальность Фейгенбаума была открыта при изучении перехода от регулярного поведения к хаотичному при исследовании отображений типа $x\to rx(1-x)$ и $x\to\mu\sin\pi x$, но это явление охватывает не только квадратичные, но и все унимодальные (одногорбые) отображения, удовлетворяющие условию

$S_f<0$, где $S_f=f'''/f'-2/3(f''/f')^2$- производная Шварца (14)

По мере роста r значение r_n приближается к предельному значению r_c асимптотически, как геометрическая прогрессия:

$$r_n-r_c=A\delta^{-n} \quad (15)$$

где $A=\lim_{n\to\infty} r_n$ – предел, к которому стремятся бифуркационные значения управляющего параметра. Отображение имеет инвариантное канторово множество и бесконечное

количество отталкивающих периодических орбит периодов 2^n. Значение параметра $r=A$ представляет собой точку перехода от регулярного движения к хаотическому (стохастическому).

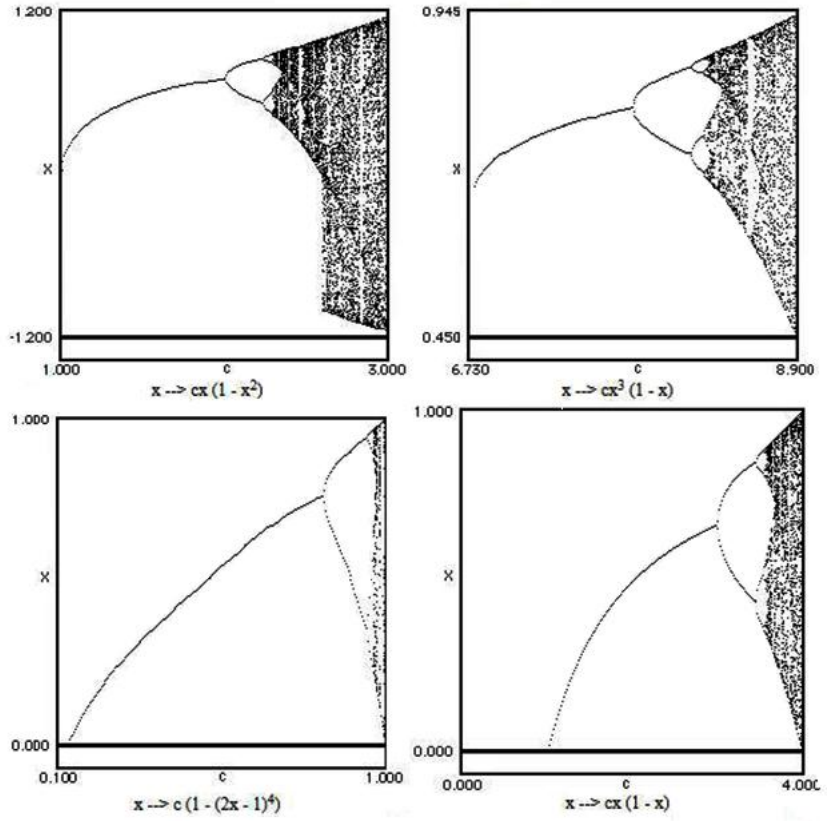


Рис. 19. Бифуркационные диаграммы некоторых отображений.

Постоянная δ, как и a, является универсальной, т.е. δ не зависит от детальных свойств $f(x)$, а зависит только от порядка отображения. Напротив, постоянная A зависит от детальной структуры функции $f(x)$. Величину δ можно рассчитать по формуле:

$$\delta = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k}\right), \qquad (16)$$

где r_k – дискретное значение r при k-ом периоде удвоения; $(r_{k+1}-r_k)$ – расстояние от одной точки флип-бифуркации (*flip* – щелчок, кувырок) до следующей в единицах r, δ показывает, насколько ответвление n длиннее ответвления n+1.

Последующие бифуркации разделены расстояниями геометрически убывающими по степенному закону с показателем d. Бифуркационные значения параметра r_k, k=1, 2,... при $k\to\infty$ сходятся к некоторому конечному пределу δ. Универсальность проявляется не только в указанном свойстве, но и структуре и размерности аттрактора системы и в поведении итераций отображений в окрестности предела бифуркационных значений параметра (зависимость которого предполагается аналитической.

Константа δ≈4.67... называется универсальной **постоянной Фейгенбаума**. Она является одинаковой для любых систем, демонстрирующих последовательность бифуркаций удвоения периода; она применима ко всем одномодальным функциям, т.е. к функциям, имеющим единственный максимум (одна производная равна нулю); используется для прогнозирования достижения области хаоса (характеризует скорость перехода динамических систем от порядка к детерминированному хаосу). Расстояние междуточками бифуркации сокращается примерно в 5 раз при каждой последующей бифуркации, поэтому эта последовательность не может быть бесконечной: ряд сходится к некоторой точке, точке накопления r_∞≈3.57. За этой точкой следует хаос.

Постоянная Фейгенбауэра (1975 г.) – универсальная постоянная, характеризующая бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода при переходе к детерминированному хаосу (сценарий Фейгенбауэра).

Константа Фейгенбаума (аттрактор Фейгенбауэра) равна δи получается как сходящееся число при решении бесконечного числа итераций уравнений: $x_{n+1}=\alpha x_n(1-x_n)$ и $x_{n+1}=\alpha\sin(x_n)$ Физический смысл – скорость перехода к беспорядку систем, испытывающих удвоение периода. Характеризует большое количество динамических систем, таких, как турбулентность, рост популяций, осцилляция и пр.

Расчёт δ на примере логистического отображения вида $f(x)=rx(1-x)$:

n	Период	Параметр бифуркации (r_n)	Отношение $\frac{r_{n-1}-r_{n-2}}{r_n-r_{n-1}}$
1	2	3	—
2	4	3.4494897	—
3	8	3.5440903	4.7514
4	16	3.5644073	4.6562
5	32	3.5687594	4.6683
6	64	3.5696916	4.6686
7	128	3.5698913	4.6692
8	256	3.5699340	4.6694

Эта же константа встречается и в фрактале Мандельброта $f(z)=z^2+c$. Константа Фейгенбаума – это отношение диаметров последовательных окружностей на вещественной оси в комплексной плоскости.

n	Период $=2n$	Параметр бифуркации (c_n)	Отношение= $\frac{c_{n-1}-c_{n-2}}{c_n-c_{n-1}}$
1	2	−0.75	—
2	4	−1.25	—
3	8	−1.3680989	4.2337
4	16	−1.3940462	4.5515
5	32	−1.3996312	4.6458
6	64	−1.4008287	4.6639
7	128	−1.4010853	4.6682
8	256	−1.4011402	4.6689
9	512	−1.401151982029	
10	1024	−1.401154502237	
∞		−1.4011551890…	

Параметр бифуркации является корневой точкой компонента периода 2^n. Этот ряд сходится к точке Фейгенбаума c=-1.401155 ..... Отношение в последнем столбце сходится к первой константе Фейгенбаума.

При увеличении параметра r он, достигает при $r=R_0=2$ уровня $x_2^*=1/2$ (рис. 20). При дальнейшем росте r неподвижная точка x_2^* при $r=r_1=3$ утрачивает устойчивость, и в окрестности ее появляются две неподвижные точки второй итерации (сателиты), образующие 2-цикл. Устойчивые в момент своего возникновения. Значение d является расстоянием от $x^*=1/2$ до ближайшего элемента аттрактора с периодом 2^n.

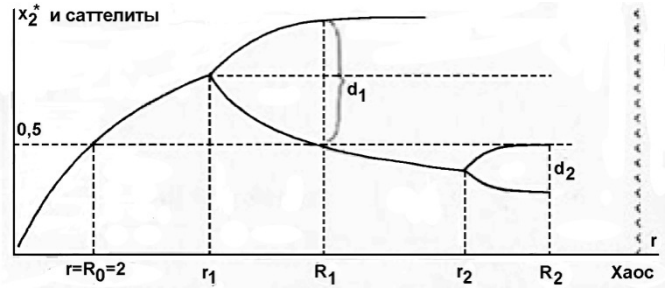


Рис. 20. Схематическое изображение каскада удвоений периодов Фейгенбауэра *(масштаб по оси параметра r не соблюдён).*

На рис. 20 представлен пример каскада удвоения периода. Здесь r_1 и r_2,... значения параметра, при которых точка x=0,5 является элементом цикла порядка два, четыре и т. д; d_1 и d_2 ... – расстояния между прямой x=0,5 и ближайшей точкой соответствующего цикла. Точки 2-цикла при некотором значении параметра $r=r_2$ одновременно теряют устойчивость, и в окрестности каждой возникает по паре новых точек, образующих 4-цикл. Траектория элементов циклов пересекают уровень y=1/2 при значении параметра $r=R_1$, R_2. Циклы, содержащие точки на уровне y=1/2, называются суперустойчивыми. В самом начале при значении r, близком к нулю, есть только неподвижная точка x_2*, т.е. 1-й цикл, состоящий из одной-единственной неподвижной точки x_2*. По миновании $r=r_1$ возникает 2-цикл, т.е. период удваивается. При $r>r_2$ каждый элемент 2-цикла превращается в 2-цикл, т.е. возникает 4-цикл (еще одно удвоение периода). Последовательность удвоений длин циклов при $r=r_i$ (i = 1, 2,...) называется каскадом удвоений периодов Фейгенбаума. После того как происходит бесконечное число удвоений периода в системе, описываемой унимодальным отображением, наступает сложное хаотическое состояние. Но хаос в данном случае – не синоним отсутствия всякого порядка. Это состояние наделено тонкой структурой. Для r=4 орбиты становятся полностью хаотическими. При r>4, все итерации уходят в бесконечность и система становится неинтересной.

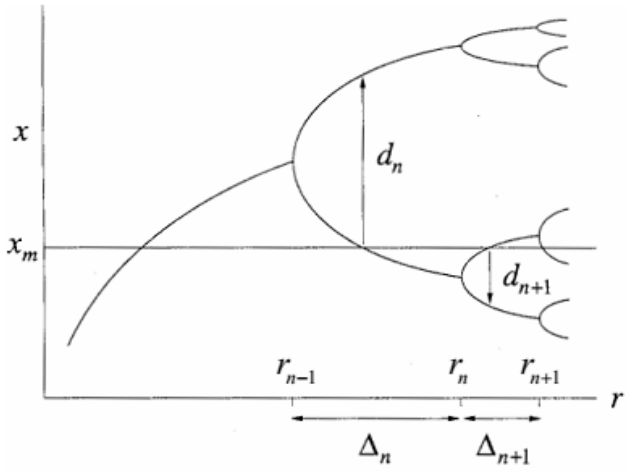


Рис. 21. Каскад удвоений при бифуркациях квадратичного отображения.

Бифуркации удвоения в несколько более общем виде представлены на рис. 21. Он демонстрирует, что при $n\to\infty$ $\Delta_n/\Delta_{n+1}\to\delta\approx4{,}67$, а $d_n/d_{n+1}\to\alpha$=-2,5029 при $n\to\infty$.

Мерой плотности состояний служит величина

$$d_n=x_n^*-1/2, \qquad (17)$$

где x_n* – значение неподвижной точки, ближайшей к неподвижной точке x*=1/2. Первые два значения dn показаны на рис. 20. Неподвижная точка, ближайшая к x=1/2, переходит с одной стороны прямой x=1/2 на другую.

Если одна из точек x* цикла длины 2^n есть точка суперстабильности, а d_n есть алгебраическое расстояние от x* до ближайшей к ней точки цикла, то для отображений с одним квадратичным максимумом отношение расстояний d_n при последовательных бифуркациях стремится к универсальному пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n+1}}=\alpha, \qquad (18)$$

где α=-2,5029... называется числом Фейгенбауэра α.

Здесь отрицательный знак показывает, что ближайшая точка в 2^n цикле попеременно выше и ниже x_m, т.е. d_n попеременно положителен и отрицателен.

Вторая константа Фейгенбаума α – отношение между шириной ветви и шириной одной из её подветок (кроме тех, которые ближайшие к изгибу). Не зависит от точной формы *f*.

Это число используется для описания многих динамических систем. Предполагается, что обе константы являются трансцендентными, хотя это ещё не доказано.

Обе константы Фейгенбаума считаются трансцендентными, хотя это и не доказано.

Период удваивания каскада появляется в широком диапазоне дискретных динамических систем, причём во всех случаях соответствующие отношения расстояний между точками бифуркации имеют одно и то же предельное значение.

20.6 Устойчивость циклов одномерных отображений

Численными характеристиками хаотического процесса являются показатели Ляпунова и информационная энтропия. Применим их к квадратичным отображениям.

Прежде всего отметим, что нелинейная система в хаотическом режиме является, тем не менее не полностью непредсказуемой. Белые полосы или «окна» на серой вуали хаотического будущего указывают на локальные состояния порядка с отрицательными показателями Ляпунова; в этом состоит смысл концепции движения к порядку через флуктуации. Положительное значение показателя Ляпунова означает, что орбиты разбегаются экспоненциально быстро, а система чувствительна к начальным условиям. В области $r_c<r<r_f=4$ (граница фенитности) показатель Ляпунова возрастает при увеличении r. Поскольку при $r<r_\infty$ показатель $\lambda<0$, то в этом интервале значений хаотичного поведения системы не ожидается. Отрицательные пики при $r>r_\infty$ соответствуют периодическим окнам.

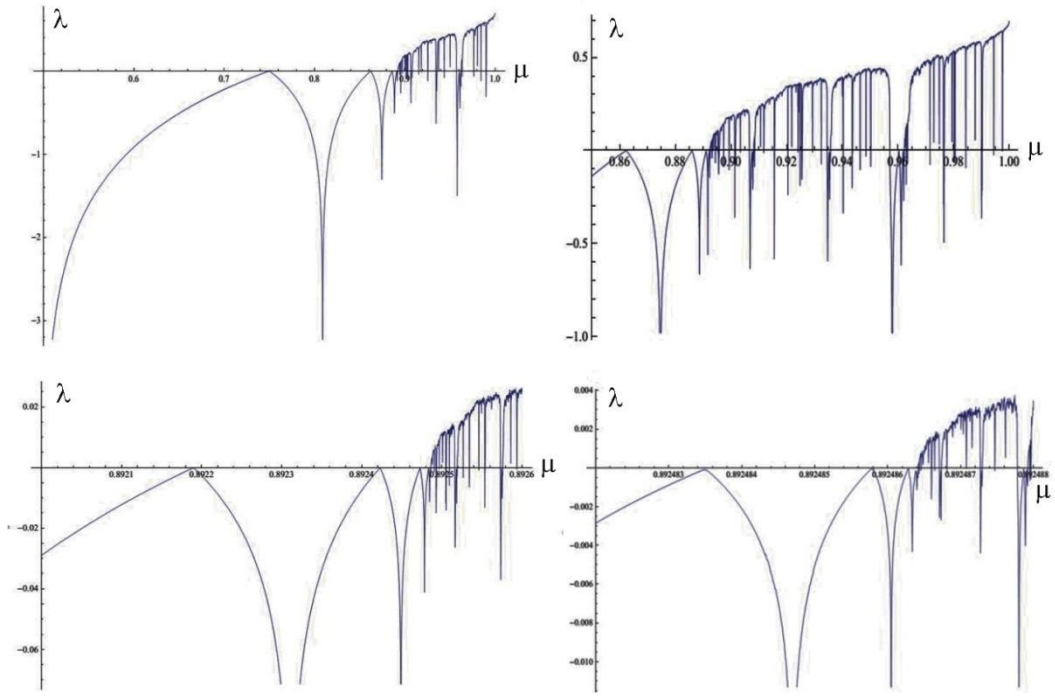


Рис. 22. Зависимость показателя Ляпунова от управляющего параметра μ=r/4.

Зависимость показателя Ляпунова от r для логистического отображения имеет вид

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)|\right\} \qquad (19)$$

Показатель λ (средняя скорость разбегания) количественно характеризует экспоненциальное разбегание соседних траекторий и чувствительность системы к начальным условиям.

Рассмотрим поведение графика $\lambda(r)$ при большом увеличении.

Представим отображение в виде:

$x_{n+1}=4\mu x(1-x_n)$. (20)

Здесь $4\mu=r$

Проведём две итерации логистического отображения, стартующих из двух значений x. расположенных очень близко друг другу. Пусть два стартующих значения x_0 и $x_0+\delta x_0$. При больших n их расхождение идёт экспоненциально

$$\left|\frac{\delta x_n}{\delta x_0}\right| = e^{\lambda_L n}(\text{large } n) \quad (21)$$

Экспонента определяется как

$$\lambda_L = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln|f'(x_i)| \quad (22)$$

При $\lambda>0$ соседние траектории расходятся друг от друга при больших n, что соответствует хаосу. Однако, если траектории сходятся к фиксированной точке или предельному циклу, они будут сближаться, если $\lambda<0$.

На рис.22 можно легко отличить области хаотического $\lambda>0$ от областей, которые стремятся к фиксированной точке или предельному циклу ($\lambda<0$). В некоторых точках (первая при $\mu=0,75$), где показатель Ляпунова достигает 0 и затем снова становится отрицательным. Это бифуркации удвоения периода. Именно в точке удвоения периода система находится на пределе хаоса, но затем, когда период удваивается, становится нехаотичной. Однако в конце периода удвоения режима, при $\mu\approx0,822$, λ пересекает ось и система переходит в хаотический режим. Для μ в диапазоне значений, превышающих точку, в которой λ сначала положительно, существует много областей, где показатель λ отрицателен (острова устойчивости), так что поведение равновесно или является предельным циклом. Рис. 22 наглядно демонстрирует, что при изменении масштаба, за исключением мелких деталей, не изменяется. Хаос ($\lambda>0$) возникает при значении μ, лежащем между 0,892486 и 0,892487. Скорость разбегания траекторий $|\delta x_n| = e^{\lambda_L n}|\delta x_0|$.

20.7 Топологическая энтропия

Помимо показателя Ляпунова, для анализа устойчивости отображения и для исследования процессов перехода порядок-беспорядок-порядок используется топологическая энтропия. Её, как меру сложности системы, применяют к характеристики логистического и синус-отображений карте, для описания вариабельности сердечного ритма, к интепрерации электроэнцефалограмм пациентов с эпилепсией и в других областях. Эта мера сложности является информационно-теоретической и называется топологической (перенормированной) энтропией. Исторически она происходит из *S*-теоремы Климонтовича (*S* обозначает самоорганизацию). Перенормированная энтропия зависит от изменения управляющего параметра и свидетельствует об относительной степени порядка в системе.

Напомним, что энтропия Шеннона вводится как

$$S(f_\nu(X)) = -\int f_\nu(X)\ln f_\nu(X)dX, \quad (23)$$

где $\nu=0$ или 1.

Не останавливаясь сейчас на свойствах топологической энтропии, отметим, что она задаётся как разность энтропий состояний 0 и 1.

$$\Delta\widetilde{S} = S(f_1(X) - S(f_0(X))), \quad (24)$$

Перенормированная энтропия выступает как мера сложности. На рис. 23а показано поведение энтропии в области периода 2, где параметр управления r лежит между 3 и 4. В этой области относительная степень порядка возрастает до точки накопления периода, т. е. $r^{(2)}_c\sim3.569$ поскольку система переходит из состояния равновесия в новое стационарное состояние в соответствии с процессом самоорганизации. Следуя самоорганизации системы в этой области значений r, относительная энтропия монотонно уменьшается. Точка накопления 2-периода движется до тех пор, пока не будет достигнута последнее

слияние полосы. Здесь степень упорядоченности уменьшается, т.к. имеет место слияние полос (в отличие от бифуркаций в предыдущей области). Энтропия немонотонно возрастает.

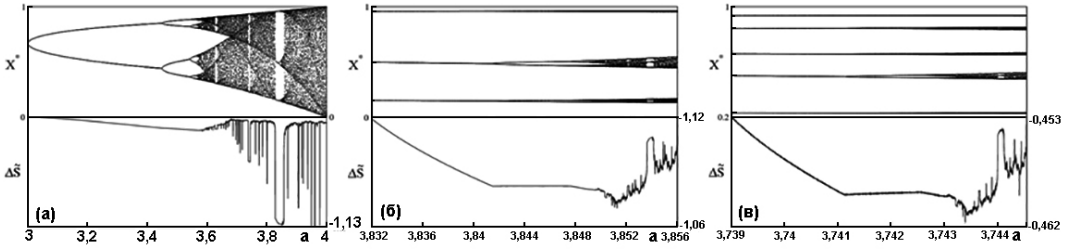


Рис. 23. Бифуркационная диаграмма (верхняя панель) и ренормированная энтропия (нижняя панель) для 2-периода (а), 3-периода (б) и 5-периода логистического отображения.

Открытая неравновесная динамическая система немонотонно приближается к стационарному состоянию через удвоение периода и отступает от стационарного состояния посредством слияния зон. Соответственно, относительная энтропия уменьшается до точки накопления и увеличивается после её прохода. Стоит отметить внезапные изменения в значениях перенормированной энтропии, которые сигнализируют о существовании окон порядка в хаотической области. На рис. 23в показано поведение энтропии в окне периода 5, которое является одним из автомодельных окон бифуркационной диаграмме логистического отображения. Из-за автомодельности поведение, подобное периоду 3, отражается энтропией: она уменьшается при приближении параметра r к $r^{(5)}_c$~3,743, а затем начинает увеличиваться в соответствии с уменьшением относительной степени порядка. Есть повороты в относительной степени порядка для каждой из трёх точек накопления периода, представляющих стационарное состояние неравновесной динамической системы, обладающей фрактальной структурой.

В логистическом отображении перенормированная энтропия изменяется в соответствии с изменением управляющего параметра, доказывая, что топологическая энтропия может служить надежной мерой сложности. Помимо точного определения точек накопления во всех этих окнах, перенормированная энтропия обнаруживает самоподобные окна в хаотическом режиме, демонстрируя резкие изменения ее значений. Перенормированная энтропия превосходит показатель Ляпунова как меру сложности, поскольку перенормированная энтропия может обнаруживать квазипериодические режимы, а также периодические режимы в точках бифуркации в отдельности, тогда как показатель Ляпунова равен нулю для обеих этих областей, следовательно, вообще не обнаруживает разницы.

20.8 Синус-отображение

Рассмотрим свойства отображения

$$x_{n+1}=\mu\sin(\pi x_n),\ 0\le\mu\le1,\ \ 0\le x\le1 \qquad (25)$$

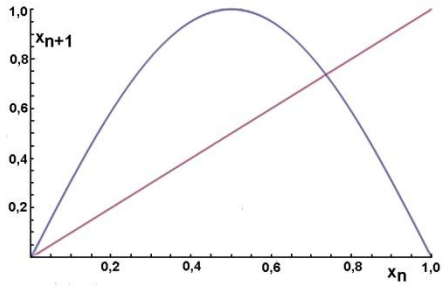


Рис. 24. Синус-отображение.

Производная Шварца

$$(Sf)(x)=-\pi^2\left(1+\frac{3}{2}tg^2(\pi x)\right)<0 \qquad (26)$$

предсказывает хаотическое поведение. И действительно, в этом отображении хаос наступает при μ=0,98.

При малых μ есть всего одна неподвижная точка. Она появляется, если $x>\mu\sin(\pi x)$ для всех x или эквивалентно, когда $\frac{d}{dx}\left(\mu\sin(\pi x)\right)<1$, т.е. $\mu<1/\pi$. Зависимость $x(\mu)$ представлена на рис. 25. Видно, что при $x=0$, $x_{n+1}=f\mu(x_n)\approx x_n$ так

что при x=0 неподвижная точка стабильна пока μ<1/π, маргинальна при μ=1/π и неустойчива при μ>1/π.

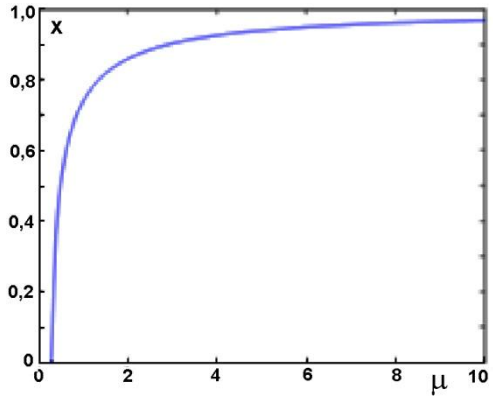


Рис. 25. График зависимости x(μ) от μ.

Разложение sin(πx) в ряд Тейлора в точке x=0 даёт $x=\frac{\sqrt{6}}{\pi}\delta$ и $\mu=\frac{1}{\pi}(1+\nu)$. Тогда $\delta_{n+1}\approx(1+\nu)(\delta_n-\delta_n^3)$, т.е. обычную форму субкритической бифуркации вил, которая всё же отличается от транскритической бифуркации при x=0 для логистического отображения, ибо синус-отображение имеет симметрию, что приводит к появлению дополнительной устойчивой неподвижной точки для отрицательного x. Условие устойчивости для второй неподвижной точки $|\pi\mu\cos(\pi x[\mu])|<1$ предсказывает существование области стабильности, которую можно найти численно. Условие устойчивости $\frac{1}{\pi}<\mu<c$, где $c\approx 0.7200$. Поскольку $f'_{0.72}(x[0.72]=-1)$, то можно найти период удвоения бифуркации в этой точке. Это означает, что можно получить устойчивый период орбиты 2, который затем подвергнет себя периоду удвоения. Можно рассчитать точку (μ, x), при которой n-кратная итерация отображения $f_\mu^n(x)$ есть устойчивая точка и одновременно $\left[f_\mu^n\right]'(x)=-1$. Неподвижная точка синус-отображения, при которой ненулевой x становится нестабильным: x=0,64574, μ=0,719962. Точки, которые становятся неустойчивыми при последующих итерациях приведены в табл.1.

Табл. 1. Неподвижные точки синус-отображения, теряющие устойчивость при последовательных итерациях.

n	μ	x
1	0.7200	0.6458
2	0.8333	0.8208
4	0.8586	0.8566
8	0.8641	0.8638
16	0.8653	0.8517

Табл. 2. Точки бифуркации, соответствующие локализации устойчивых неподвижных точек f_μ^n

n	Период	δ_n	d_n	α_n
1	2	1,80031	0,2777733	
2	4	4,04565	-0,107204	-2,59069
3	8	4,55592	0,042518	-2,52139
4	16	4,64516	-0,016962	-2,50668
9	512	4,66920	0,000173	-2,50291

Данные табл. 1 и 2 позволяют вычислить первую и вторую постоянные Фейгенбаума

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n} \qquad (27а)$$

и

$$\alpha_n=\frac{d_{n-1}}{d_n}. \qquad (27б)$$

Здесь d_n – наименьшее расстояние между точками в 2^n орбитой (уменьшается по геометрической прогрессии).

Например, для m=3 имеем $\delta\approx\frac{0.8641-0.8586}{0.8653-0.8641}\approx 4.6605$.

Как следует из таблицы значения a_n и d_n различны, однако параметры δ_n и α_n стремятся при $n\to\infty$ к постоянным значениям, причём к тем же, к каким стремится и логистическое отображение.

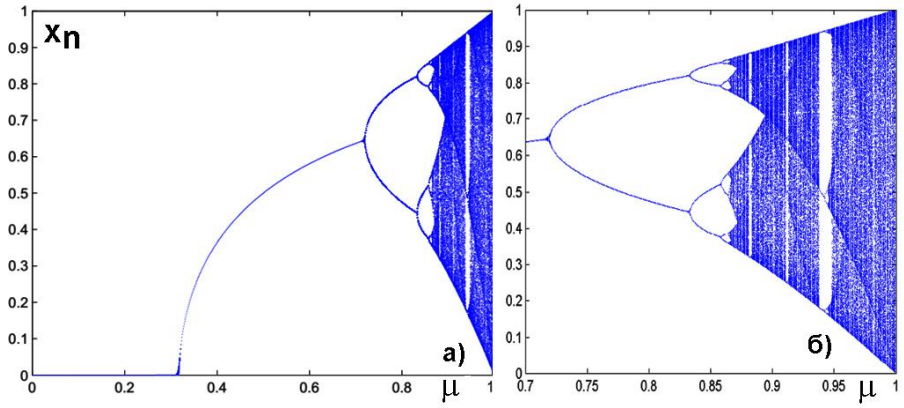
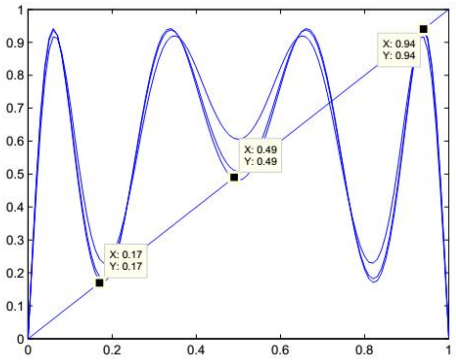


Рис. 26. Бифуркационная диаграмма синус-отображения: *а – расчёт δ, исходный масштаб,* $\mu \in [0,1]$*; б - увеличенный масштаб.*

Бифуркационная диаграмма синус-отображения аналогично по структуре диаграмме *f*: $x \to x^2+c$. Она включает переход к хаосу путём удвоения периодов, с окнами устойчивости для нечётных периодов. В квадратичном отображении бифуркационная диаграмма конечна и заканчивается значением параметра, выше которого все орбиты выходят на бесконечность. Однако в синус-отображение продолжается с резкими полосами в хаотическом режиме, раньше переходит в хаос. Эта область перемежается окнами с чётными периодами; наиболее известным из которых является 4-цикл, окна устойчивости шире, чем в логистическом отображении. Хаотический режим расширяется, а затем заканчивается на двух циклах, каждая сторона которых раздваивается. Картина является самоподобной.



Период удвоения бифуркации объясняет орбиты любого периода, кроме периода 3-орбиты. Решим уравнение $x = f_\mu^3(x)$ и $\left|\left[f_\mu^3\right]'(x)\right| = 1$ для нахождения периода 3-орбиты, которая стабильна только при $\mu \in [0.9378, 09425]$. Устойчивый период 3-орбиты также имеет соответствующую неустойчивую орбиту, которая видна на рис. 27.

Рис. 27. Точка, при которой генерируется период 3-орбиты (отмечены устойчивые точки).

Из бифуркационной диаграммы (рис.2.1) видно, что the sine отображение становится хаотичным при приближении *r* к 1. Для характеристики хаоса используется экспонента Ляпунова, которая для синус-отображения рассчитывается по формуле

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|\mu\pi \cos(\pi x_i)| \qquad (28)$$

Зависимость λ(μ) представлена на рис.28. Снова эта картинка очень похожа на логистическую.

Области, в которых граф находится над пунктирной линией (λ=0), являются точками, в которых карта становится хаотичной. Топологическую энтропию кусочно-монотонного отображения интервала *f* можно выразить так: $h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln e_n$, где e_n – число критических точек отображения f_n на отрезке. Топологическая энтропия синус-отображения при μ=1 задаётся $h_{top}(f_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(2^n - 1\right) = \ln 2$. Снова тоже значение, что и для максимума топологической энтропии для логистического отображения. В более общем виде отображение $\mu(x)=\mu\sin(x)$ представляется в виде двух функций $\pm\sin(\mu)$,

которые графически задаются $\psi(\pm\mu,\mu)$. Бифуркационная диаграмма предполагает, что массив пар кривых $C(n)=\{\psi_n(\pm x,x)|x\in R\}$ есть непрерывный ряд всей картины.

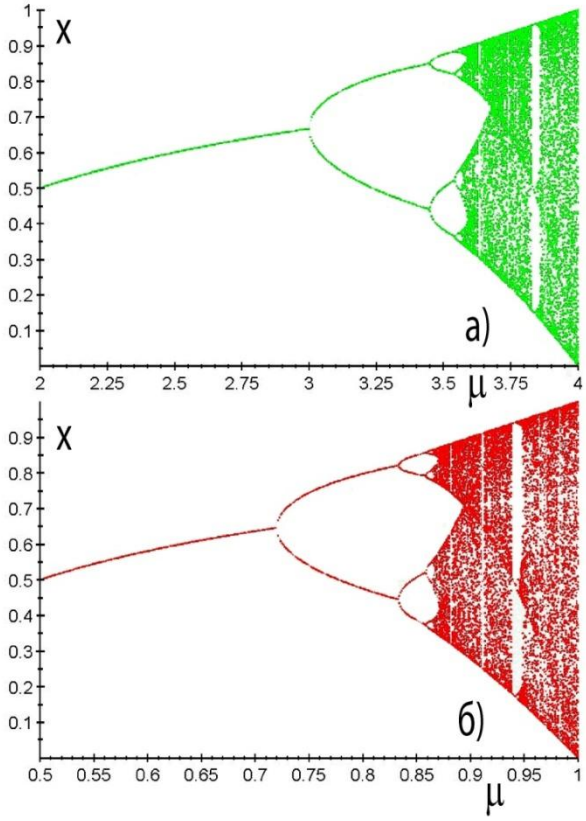


Рис. 28. Бифуркационные диаграммы: *а – $x_{n+1}=\mu\sin(\pi x_n)$; б – $x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$*

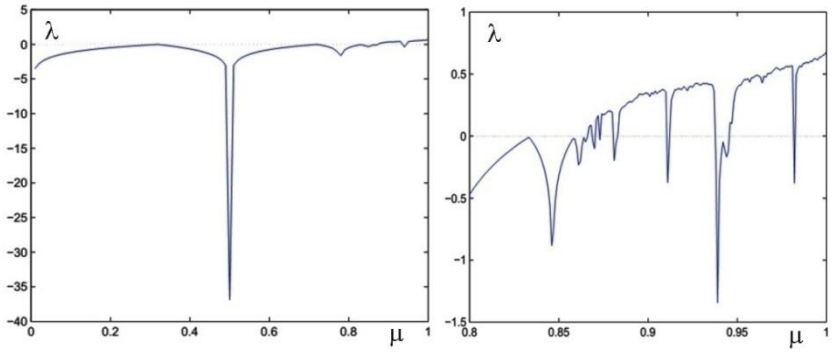


Рис.29. Показатели Ляпунова для синус-отображения: *а – исходный масштаб, б – увеличенный масштаб.*

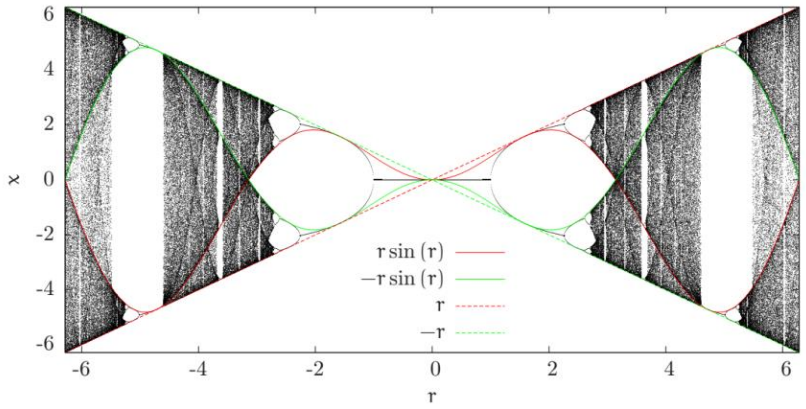


Рис.30. Полная бифуркационная диаграмма синус-отображения для $\mu\in[-2\pi,2\pi]$.

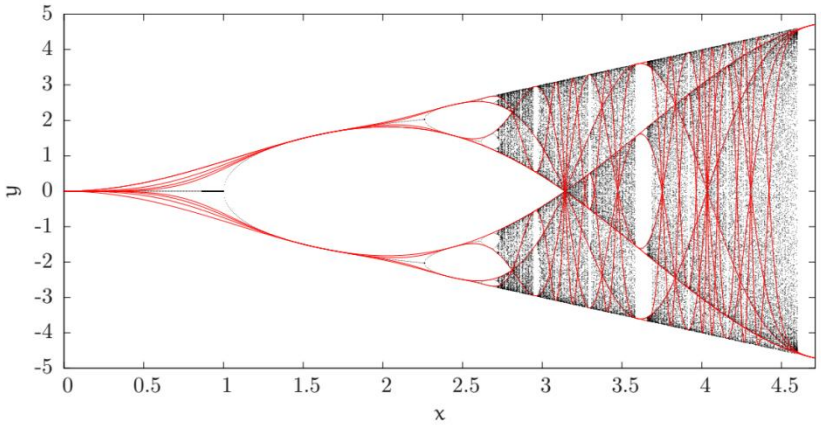


Рис.31. Пары кривых C(n) (n=1, 2, 3, 4), наложенные на бифуркационную диаграмму синус-отображения.

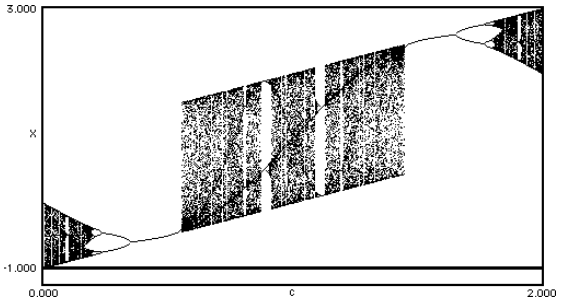


Рис. 32. Бифуркационная диаграмма f: x→sin (πx)+c.

Мы рассмотрели стандартное синус-отображение. Коротко остановимся на модифицированном синус-отображении f: $x \to \sin x + c$.

Этот вариант больше похож на квадратичное отображение т.к здесь управляющий параметр поднимает и опускает функцию без изменения ее формы. Как и ожидалось, бифуркационная диаграмму, почти идентичную диаграмме для квадратичного отображения.

Имеет место отклонение от поведения, характерного для квадратичного отображения, в широкой хаотической области. Здесь, как и в синус-отображении, хаотическая область имеет окна периодичности. (самые большие окна открыты с одной стороны.) Эта область заканчивается другой квадратичной бифуркационной диаграммой, повернутой на 180° к первой. Поведение диаграммы на интервале [2, 4] идентично поведению на [0, 2] только сдвинутым на две единицы выше. Интервал [0, 2] характерен для остальной части значений параметра и может использоваться как элементарная ячейка. Полная диаграмма проходит по диагонали через начало координат через пространство параметров от отрицательной бесконечности до положительной бесконечности. Ниже приведены некоторые более простые схемы бифуркации. Каждая гладкая и немонотонная функция проходит путь удвоения периода до хаоса и в хаотическом режиме всегда есть окна с нечетной периодичностью.

В более общем виде модифицированное синус-отбражение представляют в виде

$$x_{n+1}=\mu\sin(\pi x_n)+c, \qquad (29)$$

где значения x_n ограничены интервалом $[1/\alpha, 1-1/\alpha]$ с $2<\alpha<\infty$. В Ур.29 максимальная точка возникает при $x_n=0{,}5$, а ее значение $\mu+c$, а минимум имеет место при $x_n=1/\alpha$ и его значение $\mu\sin(\pi/\alpha)+c$. Таким образом $1-1/\alpha=\mu+c$

$$\frac{1}{\alpha} = \mu\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + p \qquad (30)$$

Решения этого уравнения

$$\mu = \frac{\alpha-2}{\alpha\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right]} \text{ и } c = \frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{2-\alpha}{\alpha\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right]} \qquad (31)$$

Подставив в Ур.29, получим

$$x_{n+1} = \frac{\alpha-2}{\alpha\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right]} \cdot [\sin(\pi x_n) - 1] + \frac{\alpha-1}{\alpha} \qquad (32)$$

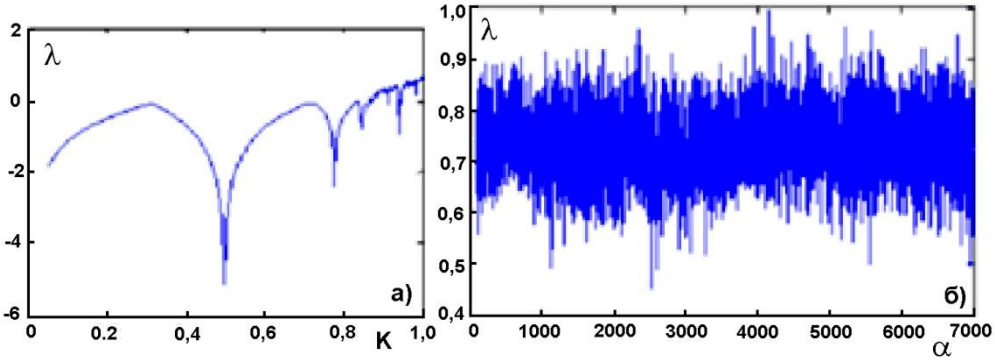


Рис. 33. Показатели Ляпунова: *а – стандартное, б – модифицированное синус-отображение.*

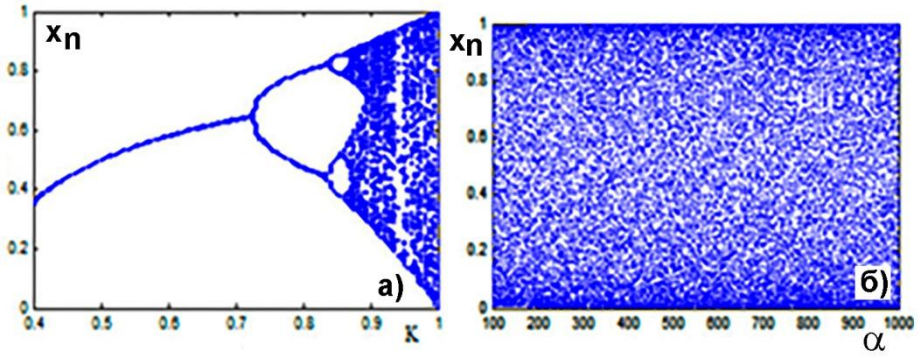


Рис. 34. Бифуркационные диаграммы: *а – стандартное, б – модифицированное синус-отображение.*

Показатель Ляпунова – критерий чувствительности к начальным условиям нелинейной динамической системы. Для дискретных во времени систем он имеет вид.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)| \qquad (33)$$

Положительное значение показателя Ляпунова указывает на то, что динамическая система хаотична. Можно показать, что показатели Ляпунова для модифицированного синус-отображения всегда положительны и равны или превышают значения для стандартного синус-отображения. Это показывает, что модифицированное отображение более хаотично.

На рис. 34 нет белых полос и вся площадь почти вся покрыта точками.

20.8 Хаос в кубических одномерных отображениях

Кубическое отображение

$x_{n+1}=a-bx_n+x_n^3$ (34)

Кубическое отображение - бимодальное одномерное отображение, представляет собой итерированную дискретную динамическую систему, которая демонстрирует хаотичное поведение.

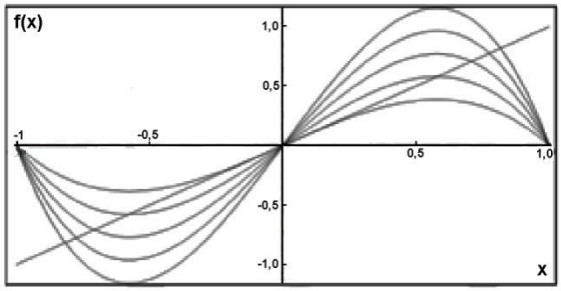
Отображение

$f(x)=mx(1-x^2)$ (35)

имеет две критические точки.

Отображение с двумя критическими точками в симметричном случае может описывать динамику численности некоторых генетических групп.

Замечание. Универсальность Фейгенбаума утверждает, что обычно нелинейные системы переходят к хаосу по маршрут удвоения периода. Это имеет место и в кубическом отображении, но в нём наряду с бифуркацией удвоения периода наблюдается бифуркация вил, обратная бифуркация (слияние хаотических зон) и касательная бифуркация.



Графики зависимости $f(x)$ при различных итерациях приведены на рис. 35.

Рис. 35. Зависимость f(x) для m=1,0, 1,5, 2,0, 3,0.

Рассмотрим кубическое отображение

$$f(x)=mx(1-x^2);\ f(x)=mx(1+x)(1-x) \qquad (36)$$

Если $-1\le x\le 0$ или $1\le x$, то $f(x)\le 0$, если $x\le -1$ или $0\le x\le 1$, то $f(x)\ge 0$. Точки максимума и минимума $1/\sqrt{3}$ и $-1/\sqrt{3}$; Значения максимума и минимума отображения $\frac{2m}{3\sqrt{3}}$ и $-\frac{2m}{3\sqrt{3}}$ соответственно. Когда $m=3$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$. В интервале $-1\le x\le 1$ и при $m\ge 0$, $\max f(x)\le\frac{2}{\sqrt{3}}$, т.е. $m\le 3$. Таким образом, кубическая функция $f(x)=mx(1-x^2)$ отображает [-1,1] в $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, где параметр m заключён в [0,3]. Фиксированные точки $f(x)$ задаются $f(x)=x$ и есть $0,\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}$. Теперь имеем $\frac{df}{dx}=m\left(1-x^2\right);\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}}=3-2m$.

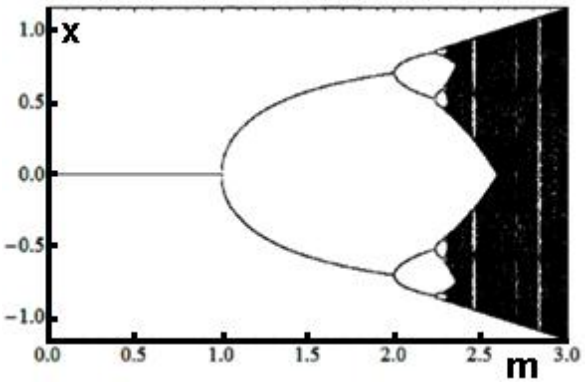


Рис. 35. Бифуркационная диаграмма кубического отображения.

Неподвижные точки: $x=0$ – аттрактор (стабилен) для $m<1$ и репеллер (нестабилен) для $m>0$. Производная $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}}=3-2m$. Неподвижные точки $x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}$ обе устойчивые точки для $1<m<2$ и неустойчивые точки для $2<m<3$.

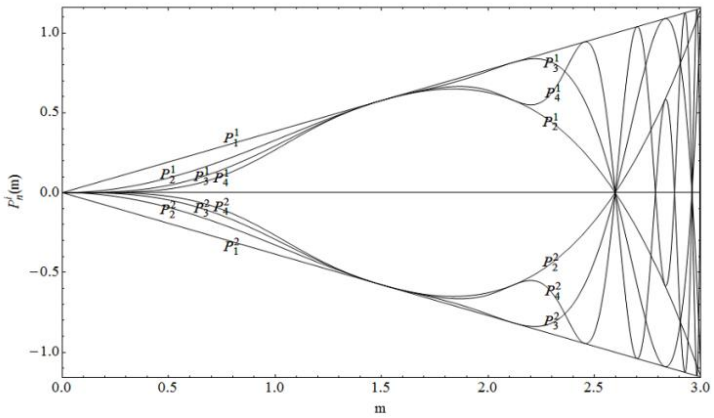
На рис. 35 показана бифуркационная диаграмма кубического отображения, из которой следует:

1) В наборе функций $\{P_n^i\}$, $n=0, 1, 2,...$, ($i=1$ или 2), где $P_0^i(m)=x_{ci}$ и $P_{n+1}^i(m)=f(P_n^i(m))$, критические значения $x_{c1}=1/\sqrt{3}$ есть $P_0^1(m)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $P_1^1(m)=\frac{2m}{2\sqrt{3}}$;

$$P_2^1(m)=\frac{2m^2\left(1-\frac{4m^2}{27}\right)}{3\sqrt{3}};\ P_3^1(m)=\frac{2m^3\left(1-\frac{4m^2}{27}\right)\left(1-\frac{4}{27}m^4\left(1-\frac{4m^2}{27}\right)^2\right)}{3\sqrt{3}}.$$

$$P_4^1(m)=\frac{2m^4\left(1-\frac{4m^2}{27}\right)\left(1-\frac{4}{27}m^4\left(1-\frac{4m^2}{27}\right)^2\right)\left(1-\frac{4}{27}m^6\left(1-\frac{4m^2}{27}\right)^2\left(1-\frac{4}{27}m^4\left(1-\frac{4m^2}{27}\right)^2\right)^2\right)}{3\sqrt{3}} \qquad (37)$$

и т.д



Аналогично те же полиномы с отрицательным знаком существуют для критического значения $x_{c2} = -1/\sqrt{3}$

Рис. 36: Скелет бифуркационной диаграммы для кубической карты.

(*ii*) В пределах периодической области (т. е. до значения параметра m=2,3) разного порядка изображения первой критической точки кубического отображения генерируют траектории, которые находятся выше горизонтальной линии и проходят через начало координат. Вторая критическая точка порождает траектории, лежащие ниже горизонтальной линии и проходящие через начало координат. Траектории смешиваются друг с другом, пересекая границы в хаотической области после пересечения точки Misiurewicz.

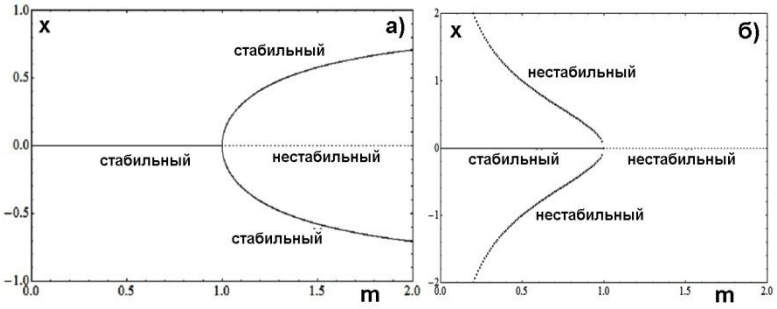


Рис. 37. Бифуркация вил: *а – суперкритическая, б – субкритическая.*

Рассмотрим изменение характера функции $f(x)$ (Ур. 35) при изменении m.

$\frac{df}{dx} = m(1-3x^2)$; $\frac{df}{dm} = x(1-x^2)$, $\frac{d^2f}{dx^2} = -6mx$; $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = m$. Для m=1,

$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = 1$, $\left.\frac{df}{dm}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$

Бифуркация типа вил происходит при x=0 для m=1. Для $0<m\le 1$ есть только одна ветвь притягивающуяся к неподвижной точке при x=0. После m=1 эта неподвижная точка теряет свою стабильность, распадаясь на две ветви, притягивающие неподвижные точки $\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}$. Как только знак кубического члена в Ур.1 изменяется на положительный, возникает субкритическая бифуркация вил (рис. 37).

В этом случае неподвижные точки 0 и $\pm\sqrt{\frac{1-m}{m}}$. Для $0<m\le 1$ одна ветвь аттрактор неподвижной точки x=0 и две новых точки ненулевые неустойчивые точки $\pm\sqrt{\frac{1-m}{m}}$ появляются. После m=1 неподвижная точка x=0 теряет стабильность и другие две неподвижные точки исчезают.

Бифуркационная диаграмма относительно двух критических точек симметрична. Найдя период удвоения бифуркации точки, рассмотрим одну критическую точку $1/\sqrt{3}$. Некоторые удвоения бифуркации точек происходят для других критических точек также.

$\frac{df}{dx} = m\left(1-3x^2\right)$, $\frac{df}{dm} = x(1-x)$, $\frac{d^2f}{dx^2} = -6mx$; $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}} = 3-2m$. Если m<2, то

неподвижные точки $x = \pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}$ неустойчивы. Область стабильности неподвижной точки

$x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}$ есть $1<m<2$. При $m=2$ $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}}=-1$, также $\left.\frac{df}{dm}\right|_{x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}}\neq 0$, $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}}\neq 0$.

Бифуркация удвоения периода происходит при $m=m_1=2$, который есть значение первого периода удвоения. Чтобы найти второе бифуркационное значение, рассмотрим вторую итерацию $f^2(x)$ отображения. Неподвижные точки $f^2(x)$ задаются $f^2(x)=x\Rightarrow m^4x^9-3m^4x^7+3m^4x^5-(m^4+m^2)x^3+m^2x=0$. Его решение

$$0,\ \pm\sqrt{\frac{m-1}{m}},\ \pm\sqrt{\frac{m+1}{m}},\ \sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{m^2-4}}{2m}},\ -\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{m^2-4}}{2m}} \qquad (38)$$

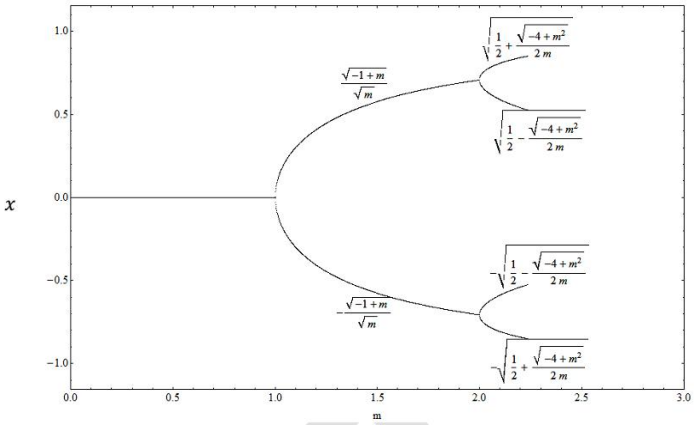


Рис. 38. Период удвоения бифуркации при 2.

Из приведённых 9 решений, первые 3 – неподвижные точки f, которые становятся нестабильными ниже $m=2$, а другие 6 решений – неподвижные точки $f^2(x)$. Но когда мы определяли кубическое отображение $f:[-1,1]\to\left[-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, то пренебрегли неподвижными точками $x=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m}}$.

Новые неподвижные точки $f^2(x)$ которые нас интересуют $x_{11}^1=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2m}}$, $x_{12}^{(1)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{m^2-4}}{2m}}$,

$$x_{11}^{(2)}=-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{m^2-4}}{2m}},\ x_{12}^{(2)}=-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2m}} \qquad (39)$$

Точки бифуркации	Периоды
$m_1=2$	2
$m_2=2.23606797749979025$	4
$m_3=2.28803175448284257$	8
$m_4=2.29922793965020444$	16
$m_5=2.30162891403708203$	32
$m_6=2.30214327158145782$	64
$m_7=2.30225343774212865$	128
$m_8=2.3022770322596422$	256
$m_9=2.30228208549649427$	512
$m_{10}=2.30228316774571073$	1024

При значениях параметра меньше $m=2$, траектории имеют тенденцию изменяться между двумя значениями $x_{11}^{(1)}$ и $x_{12}^{(1)}$ (верх рис. 39) и $x_{11}^{(2)}$ и $x_{12}^{(2)}$ (низ рис. 39).

Теперь, используя правило последовательного дифференцирования, рассмотрим производную второй итерационной функции.

$$\left.\frac{df^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x_{11}^{(1)}}=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{12}^{(1)}}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{11}^{(1)}}=\left.\frac{df^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x_{12}^{(1)}}\text{ и }\left.\frac{df^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x_{11}^{(2)}}=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{12}^{(2)}}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{11}^{(2)}}=\left.\frac{df^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x_{12}^{(2)}} \qquad (40)$$

где $f(x_{11}^{(1)})=x_{12}^{(1)}$ и $f(x_{12}^{(2)}=x_{11}^{(2)}$, и $f(x_{11}^{(2)})=x_{12}^{(2)}$ и $f(x_{12}^{(2)}=x_{11}^{(2)}$

Производная $f^{(2)}$ одинакова для обеих фиксированных точек $x_{11}^{(1)}$ и $x_{12}^{(1)}$ так же как $x_{11}^{(2)}$ и $x_{12}^{(2)}$ – верхняя и нижняя части двух циклов. Обе эти неподвижные точки или устойчивы или обе неустойчивы, и имеют одинаковую степень стабильности или нестабильности. При дальнейшем увеличении m, производная $f^{(2)}$ уменьшается и

неподвижная точка становится стабильной, причём наклон $f^{(2)}<1$ для этих фиксированных точек. 2-Цикл неподвижных точек остаётся стабильным до $m=m_2=2{,}23606797790250...$ где производная $f^{(2)}$ при двух циклах неподвижны точек равна -1. Следовательно для значения параметра несколько больше m_2, 2-цикла неподвижные точки становятся неустойчивыми. При значении параметра больше m_2 траектории располагаются в 4-цикле. Процесс удвоения циклов продолжает продуцировать циклы 2^3, 2^4..., пока не будет достигнута предельная точка $m=m_\infty$ (аккумулирующая точка удвоения периода). В этой точке периодичность 2^∞ и итерации отображения становятся апериодическими. Этот путь в хаос через удвоение периода называется сценарием Фельгенбаума. Для расчёта периодических точек f^4, необходимо решить 9 одностепенных уравнений типа $f^4(x)=x$. Что даст оставшиеся точки бифуркации:

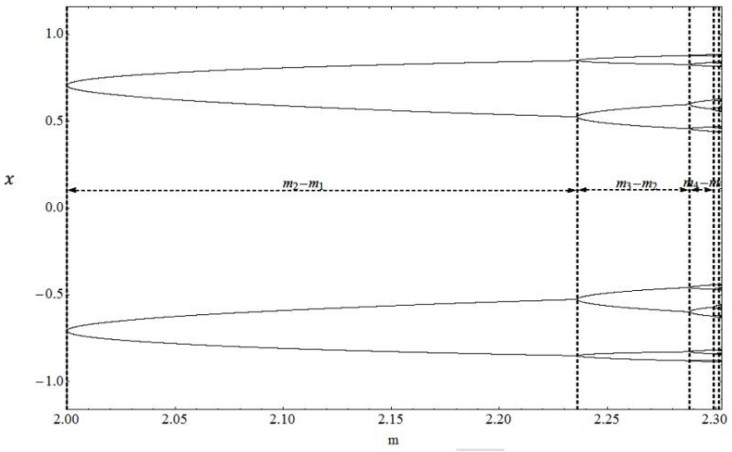


Рис. 39. Расстояние между успешными бифуркациями на бифуркационной диаграмме.

Основываясь на этих бифуркационных можно мы рассчитать константу Фейгенбаума δ, которая есть отношение длины между тремя успешными точками бифуркации сходимости в направлении m-оси. Тогда $\delta=\lim_{k\to\infty}\delta_k=4{,}6692016091029...$ Природа δ универсальна, одна и та же для многих отображений. Пусть $\{m_n\}$-последовательность точек бифуркации. Если m_1, m_2 известны, то используя δ, то $m_3=\frac{m_2-m_1}{\delta}+m_2$, и $m_4=(m_2-m_1)\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)+m_2$, повторяя этот аргумент получим $m_{\infty,n}=\frac{m_n-m_{n-1}}{\delta-1}+m_2$. Рассмотрим последовательность $\{m_\infty,n\}$, $m_{\infty,n}=\frac{m_n-m_{n-1}}{\delta-1}+m_n$, где m_n – экспериментальное значение точки бифуркации, Здесь $\lim_{n\to\infty}m_{\infty,n}=m_\infty$.

$$\delta_1=\frac{m_2-m_1}{m_3-m_2}=4.542933389479799\ldots,\quad \delta_2=\frac{m_2-m_2}{m_4-3}=4.64120337856012361\ldots,$$
$$\delta_3=\frac{m_4-m_3}{m_5-m_4}=4.6631839258902891\ldots,\quad \delta_4=\frac{m_5-m_4}{m_6-m_5}=4.667909342695353\ldots,$$
$$\delta_5=\frac{m_6-m_5}{m_7-m_6}=4.66892502419740\ldots,\quad \delta_6=\frac{m_7-m_6}{m_8-m_7}=4.66914233815390\ldots$$

Последовательность аккумулирующих точек была рассчитана для некоторых значений n.

$$m_{\infty,1}=2.30040567344817444\ldots,\quad m_{\infty,6}=2.3022834623012582211\ldots,$$
$$m_{\infty,2}=2.302193902688090932\ldots,\quad m_{\infty,7}=2.3022834626823954807\ldots,$$
$$m_{\infty,3}=2.3022793351198851045\ldots,\quad m_{\infty,8}=2.3022834626998726653\ldots,$$
$$m_{\infty,4}=2.322832728438919278\ldots,\quad m_{\infty,9}=2.3022834627006714427\ldots,$$
$$m_{\infty,5}=2.3022834539969183689\ldots,\quad m_{\infty,10}=2.3022834627007119534\ldots$$

Последовательность сходится к значению 2.3022834627007 – точке аккумулирования.

Фейгенбаум открыл другое универсальное число α для периода удвоения каскада. Оно определяется как отношение измеренной ширины одной вилки к таковой к

следующей генерации. Кубическое отображение имеет две критические точки, но для нахождения α достаточно рассмотреть итерации от одной критической точки $x_c = 1/\sqrt{3}$. Пусть x_m – максимум f, а d_n – расстояние от x_m до ближайшей точки в 2^n-цикле. Оттношение $\frac{d_n}{d_{n+1}}$ стремится к α при $n \to \infty$.

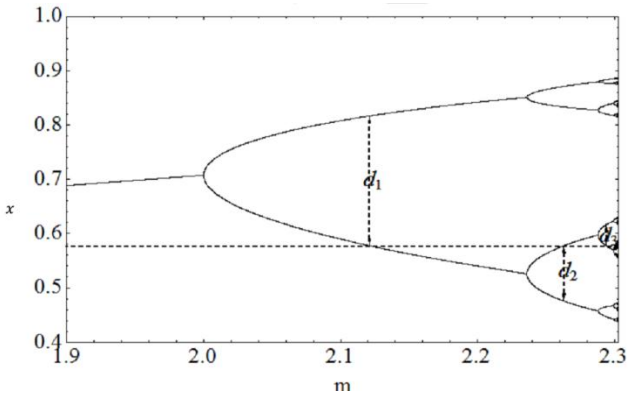


Рис. 40. Часть бифуркационной диаграммы кубического отображения (d_i – расстояние от x_m до ближайшей точки 2^n-цикла.

Суперстабильный цикл периода 2^n содержит одну критическую точку $x_c = 1/\sqrt{3}$ в которой $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$. d_n – расстояние между x_c и его ближайшим элементом. Элемент, ближайший к $x_c = 1/\sqrt{3}$ есть $(2^{n-1})^{\text{тая}}$ итерация $x = 1/\sqrt{3}$ и $d_n = f^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}, n = 1,2,3...$ Для нахождения $d_n = f^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ сначала находят суперпритягивающую точку периода 2-цикла. Если $\{x_1,x_2\}$ – 2-цикл для, то $x_1=mx_2(1-x_2^2)$ и $x_2=mx_1(1-x_1^2)$;

$$x_1x_2=m^2x_1x_2(1-x_1^2)(1-x_2^2) \Rightarrow m^2(1-x_1^2)(1-x_2^2)=1. \quad (41)$$

Если x_1 - супперпритягательная точка 2-цикла то

$$(f^2)'(x_1)=f'(x_1)f'(x_2)=0;\ m^2(1-3x_1^2)(1-3x_2^2)=0 \quad (42)$$

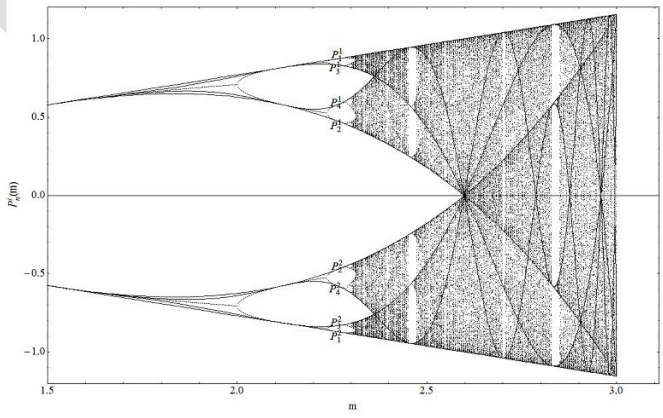


Рис. 41. Локализация первых четырёх изображений критических точек построенные на бифуркационной диаграмме.

Здесь или $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *или* $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пусть $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $x_2 = f(x_1) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2m}{3\sqrt{3}}$.и $m^2\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{4m^2}{27}\right) = 1 \Rightarrow 8m^4 - 54m^2 + 81 = 0$ Так как f – суперпритягивающая неподвижная точка, когда m=3/2, то (m-3/2) есть фактор его 4-ой степени полинома $\left(m-\frac{3}{2}\right)\left(8m^3+12m^2-36m-54=0\right) \Rightarrow 8\left(m-\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(m-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0$

Это даёт $m = \frac{3}{\sqrt{2}}$, что означает что притягивающая точка для периода 2-цикла находится при $m = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Другие суперпритягивающие неподвижные точки для других периодов 4,8,16,... приведены ниже.

Рассмотрим теперь обратную (реверсную) бифуркацию. Из диаграммы бифуркации видно, что вблизи m=2,598076211353316 ... одна хаотическая полоса распадается на две хаотические полосы, когда мы уменьшаем значение параметра m, возвращаясь от более высоких к более низким значениям m. Это явление известно как обратная бифуркация или

бифуркация расщепления полосы. Точки, в которых одна хаотическая группа распадается на две хаотические полосы, называют первой точкой *Misiurewicz*. Бесконечное число точек *Misiurewicz* находится между первой точкой *Misiurewicz* и точкой накопления.

Табл.3. Суперпритягивающие неподвижные точки для разных периодов.

N	Параметр суперстабильности	$f^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$d_n = f^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{d_n}{d_{n+1}}$
1	$\frac{3}{\sqrt{2}}$ (2-cycle)	0.816496580927726…	0.239146311738100	
2	2.262989654536347…	0.475661486138297…	0.101688783051419	2.351747209101475..
3	2.293843313498357…	0.616087713797483…	0.038737444607857	2.6250772109731204
4	2.300474702160290…	0.561651419791644…	0.015698849397982	2.4675339972900487
5	2.301896029336061…	0.583580991803322…	0.006230722613696	2.5195872728267075

Тогда $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2{,}502...$ Природа α универсальна, одинакова для многих отображений.

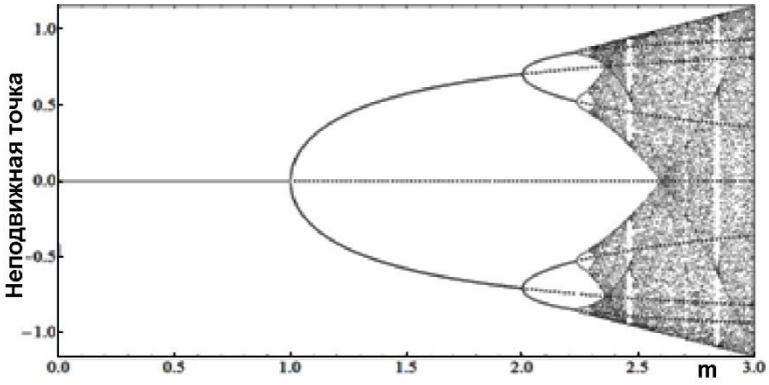


Рис. 42. Точки Misiurewicz для каждого периода бифуркации удвоения существует.

Первая *Misiurewicz* точка есть точка пересечения $P_2^1(m)=f^2(x_{c1})$ и $P_2^2(m)=f^2(x_{c2})$, через которую проходят все последующие высокие итерации. Первую точку *Misiurewicz* находят решая уравнение $P_2^1(m)$-$P_2^2(m)=0$. Между m_∞ и первой точкой *Misiurewicz* находится большое число отдельных полос которые сливаются вместе при изменении параметра и наконец становятся отдельной полосой. Эта полоса слияния процесса имеет место только когда нестабильная неподвижная точка попадает в аттрактор. Полоса снижает порядок 2^n до 2^{n-1} с n=1,2,3... имет место только когда точки ударяют хаотический или аттрактор или полосу порядка 2^n.

Табл. 4. Последовательности $\{A_\infty,n\}$, $A_{\infty,n} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\delta - 1} + b_n$ (b_n – точки *Misiurewicz)*

Число хаотических полос	Misiurewicz точки (b_i)	δ
Рождение первой 2 хаотической полосы	2.598076211353316 …	
4	2.36089376909657 …	
8	2.31481486770317 …	5.14731113556276 …
16	2.30496442400152 …	4.677850337409934 …
32	2.30285753144270 …	4.675342204998857 …
64	2.30240640536247 …	4.670296511669055 …
128	2.30230979301224 …	4.66944525368657 …
256	2.30228910183607 …	4.669253668106445 …
512	2.3022846704303 …	4.669212715928854 …
1024	2.30228351809746 …	4.669203987325653 …

На рис. 42 пунктир означает нестабильные линии, показывающие неустойчивые орбиты, созданные при каждой бифуркации. Справа от точки аккумуляции находится зона, сформированная хаотическими полосами), она существенно отличает от зоны слева от неё, но и имеет много общего, что в левой зоне. В правом экстремуме для m=3 есть только одна зона распространяющаяся на весь интервал от 0 до 1. Это – 1-хаотическая полоса. При уменьшении m полоса сужается. При $m=b_1$ (первая точка Misiurewicz) две полосы раскалываются на четыре пары, что составляет 2 (=2^1) хаотические полосы. При $m=b_2$ (указана) две полосы раскалываются на четыре пары которые составляют 4(=2^2) хаотические зоны и т.д. Период удвоения каскада хаотических полос завершается при

точке аккумулирования $m_\infty=b_\infty$=3,56994567...Этот регион назван хаотическим регионом *C*, *a* b_i – точки *Misiurewicz.*

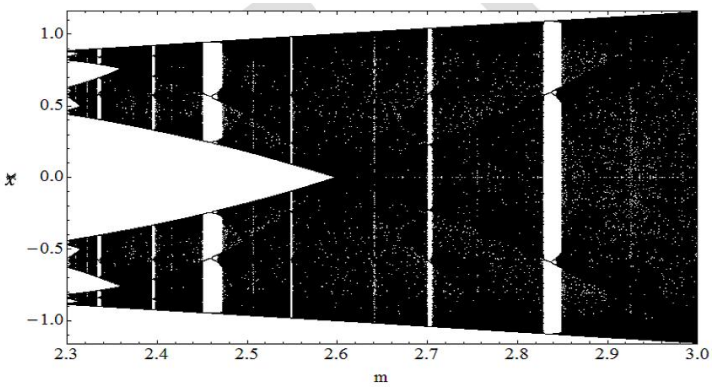


Рис. 43. Бифуркационная диаграмма кубического отображения для 2,3≤m≤3

Интересно отметить, что приведенная выше последовательность также сходится к значению 2.302283462700 ..., т.е. стандартной точке накопления.

Бифуркацию седло-узел часто называют касательной бифуркацией одномерного отображения. Эта бифуркация – одновременное появление устойчивой (узел) и неустойчивой (седло) неподвижных точек, когда параметр проходит через критическое значение, например m_t. При изменении m происходит слияние устойчивой и неустойчивой точек, после чего они исчезают. Касательные бифуркации (седло-узел) ответственны за создание периодических окон, которые отмечены белыми пространствами (регулярное поведение) внутри хаотической области. Установим значение параметра, при котом начинается тангенциальная бифуркация.

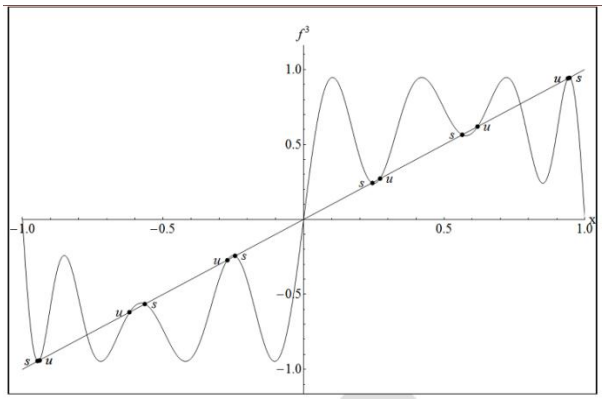


Рис. 44. Для m=2,46 f имеет 6 цикл. *Чёрные точки s – аттракторы 6-цикла,а чёрные точки и указывают нестабильный 6-цикл.*

При касательной бифуркации $\frac{df^{(n)}(x^*)}{dx}=1$, где *x** – неподвижная точка n-ой итерации отображения, т.е функции $f_{mt}^{(n)}(x)$ – касательная к диагональной линии, т.е. *y=x*.

Бифуркационная диаграмма демонстрирует вхождение периодического окна внутрь хаотического региона. Из бифуркационной диаграммы рис. 43 видно, что первое наиболее заметное периодическое окно в кубическом отображении есть окно периода 6, которое возникло благодаря касательной бифуркаци. Если отбражение бимодально, то периода 6 окно отражается периода 3 окнами как две полосы. Третья иттерация отображения $f^3(x)$ кубического отображения есть ключ к нахождению параметра значения где рождается периода 6 цикл. Любая точка *p*' в периода 6 цикле удовлетворяет $p=f^3(p)$. Так как f^3(x) есть 27-кратный полином, который нельзя решить точно для неподвижных точек, то это делается численно. Из 27 решений уравнения 12 реальны: они отмечены буками *s* и *u* на рис. 44: 6 – в верху, 6 – внизу).

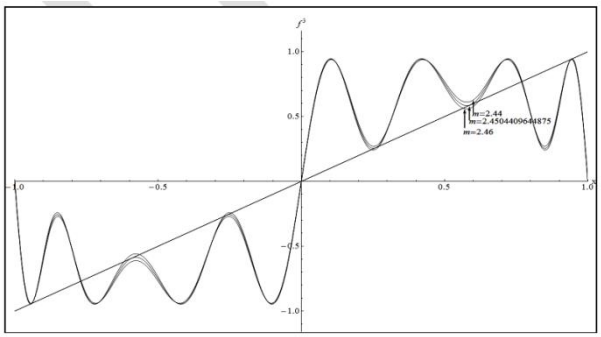


Рис.45. Касательная бифуркация в логистическом отображении.

При *m*=2,44 кривая удаляется по диагонали, поэтому некоторое промежуточное значение между *m*=2,44 и *m*=2,46 кривой $f^3(x)$ должно стать касательной к диагонали. При критическом значении $m=m_t$ стабильный и нестабильный циклы периода 3 сливаются и аннигилируют в касательной бифуркации. Касательная бифуркация происходит при $m=m_t$=2,450440964487875... Период 6 появляется при $m=m_t$, при котором

f^3 прикасается к диагонали в 6-цикле $\{x_1', x_2', x_3', x_4', x_5' x_6'\}$, где 3-цикл на верху и 3-цикл внизу.

При m_t=2,450440964487875..., $\left.\frac{df^3}{dx}\right|_{x=x_i'} = 1$ и $\left.\frac{d^2 f^3}{dx^2}\right|_{x=x_i'} \neq 0$ При дальнейшем увеличении m имеет место ряд бифуркаций удвоения периода, что приводит систему в хаотический режим, в котором содержится бесконечное число окон, и бифуркации седло-узел происходят бесконечное число раз.

Показатели Ляпунова играют важную роль в описании поведения динамической системы. Это – метод количественного определения хаотического поведения. В нелинейной системе хаотическое поведение порождает некую случайность и потерю информации, которая объясняет её сложное поведение. Показатель измеряет среднюю скорость расхождения или сходимость орбит, начиная с ближайших исходных точек.

Рассмотрим в $x_n=f(x_{n-1})$ n-итераций от двух близко расположенных начальных точек x0 и x0+ε. Тогда $\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} \equiv \left|f^{(n)}(x_0+\varepsilon) - f^{(n)}(x_0)\right|$, т.е. $\lambda(x_0) = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{f^{(n)}(x_0+\varepsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon}\right|$, где λ – показатель Ляпунова. Переходя к пределу ε→0 и применяя правило последовательного дифференцирования, получим

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{n}\left(|f'|(x)|f'(x_1)|...f'(x_{n-1}) = \frac{1}{n}\left(\ln|f'(x_0)| + \ln|f'(x_1)| + ... + \ln|f'(x_{n-1})|\right)\right. \quad (43)$$

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)| \quad (44)$$

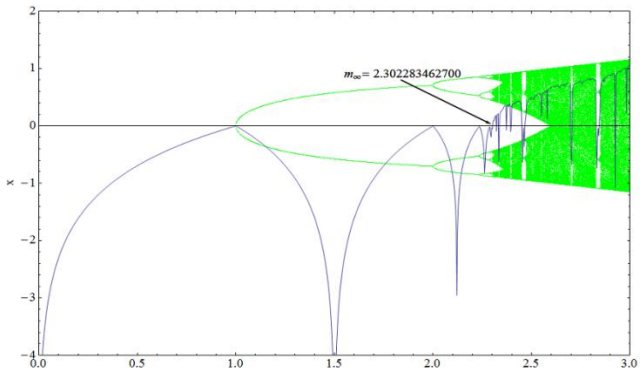


Рис. 46. Соответствие показателя Ляпунова бифуркацтонной диаграмме.

Переходя к пределу $n\to\infty$ получим выражение для показателя Ляпунова

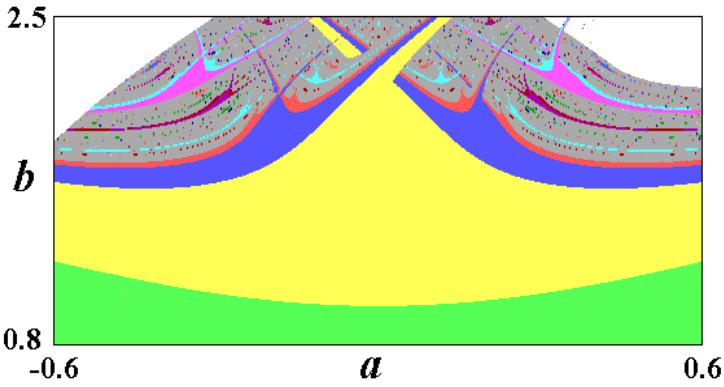
$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\frac{df^n(x_0)}{dx}\right| \quad (45)$$

Если λ<0, то $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0+\varepsilon)$, а если λ>0, то $\left|f^{(n)}(x_0+\varepsilon) - f^{(n)}(x_0)\right|$ расходится к бесконечности с экспоненциальным ростом, что соответствует хаосу. Таким образом, положительный показатель Ляпунова является признаком хаоса. Показатели Ляпунова совпадают с бифуркационной диаграммой.

Для кубического отображения период удвоения периода орбит заканчивается в точке в точке аккумулирования m_∞=2,3022834627 – точке, соответствующей орбите периода 2^∞. Показатель Ляпунова при точке аккумулирования не положителен, что говорит о там, что аттрактор периодический. Для значения $m>m_\infty$ экспонента положительна, отражая хаотическое поведение соответствующих аттракторов. Снова Для $m<m_\infty$ показатель Ляпунова отрицателен за исключением точек бифуркации (в них λ=0).

Табл. 5 Значения показателя Ляпунова от параметра m (начиная с точки $1/\sqrt{3}$).

Параметр	λ	Параметр	λ
0.5	-0.693147805583	2.1	-0.857399525285
0.8	-0.223143551315	2.2	-0.192831460238
0.9	-0.105360515658	2.3	-0.058822686446
1.0	0	2.4	0.342820715172
1.4	-1.609437912380	2.6	0.682152545304
1.6	-1.609437912380	2.7	-0.435105388448
1.8	-0.510825623749	2.8	0.806709328816
2.0	0	2.9	0.877972539295



Кубическое отображение – простейший представителем бимодальных отображений, демонстрирующих структуры типа «перекрестка» (*crossroad area*) и сложную структуру границы хаоса, ассоциирующейся с накоплением удвоений периода. Граница хаоса содержит куски фейгенбаумовских критических линий, три критические точки на их концах, а также бесконечное множество критических точек коразмерности два (точки МакКая и Ван-Зейтца).

Рис. 47. Зависимость параметра b от параметра a в кубическом отображении.

21. ХАОС В НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

В предыдущей главе мы рассмотрели процессы возникновения хаоса в одномерных нелинейных отображениях, где нелинейность задаётся квадратичным (одномодальное отображение) или кубическим (бимодальное отображение) отображением первого порядка. Намного большим разнообразием обладают хаотические процессы в двумерных и трёхмерных отображениях, второго и более высокого порядков, содержащие нелинейные члены со степенями 3 и выше.

Двумерные отображения появляются, как правило, при рассмотрении сечения Пуанкаре неавтономного осциллятора (т.е. находящегося под действием внешнего периодического воздействия) с некоторой нелинейностью. В отличие от одномерных отображений с хаотической динамикой двумерные отображения могут обладать свойством обратимости; отображение всегда имеет однозначно определенное обратное отображение (может быть проитерировано в обратном времени произвольное количество раз). Напомним, что одномерного логистического отображения данное свойство не выполняется, т.к. любому x_{n+1} из области значений соответствует два варианта x_n

В общем виде линейные отображения на плоскости описываются системой уравнений

$$x_{n+1}=a_{11}x_n+a_{12}y_n \qquad (1а)$$

$$y_{n+1}=a_{21}x_n+a_{22}y_n \qquad (1б)$$

с заданной начальной точки (x_0, y_0)

В данной главе мы ограничимся некоторыми простыми примерами.

21.1 Отображение Эно (*Henon map*)

Если эволюция физической системы описывается несколькими переменными, то возникает проблема решения отображений высоких порядков. Примером является отображение Эно (Хенон, Энон, *Michel Henon* – французский астрофизик, 1976), которое Эно рассматривал как абстрактный пример динамической системы, обладающей странным аттрактором. Однако оказалось, что это отображение способно описывать динамику ряда физических систем, например, диссипативный осциллятор и ротатор под импульсным периодическим воздействием, а так же динамику частицы в вязкой среде под действием импульсных толчков, интенсивность которых зависит от координаты (периодически возбуждаемый ротатор при нулевом затухании и малых амплитудах). Это же отображение привлекается к расчёту численности популяции в экосистеме. Так, если при выводе логистического уравнения (одномерного отображения) предполагалось, что численность популяции в (n+1)-ый год зависит лишь от численности в n-ый год, то отображение Эно, память о системе распространена глубже: учитывается, что численность особей в (n+1)-ый год зависит и от численности в (n-1)-ом году. Эта зависимость довольно слабая, поэтому полагают, что она линейна.

Замечание. Эно развивал идеи Лоренца, который открыл первый странный аттрактор в 1963 году. Это аттрактор вызвал большой интерес и многочисленные исследования, которые весьма сложны, поскольку система Лоренца включает 3 уравнения. Эно существенно упростил ситуацию, поскольку в его системе всего 2 очень простых уравнения. Поэтому моделирование потоков вблизи бифуркаций седло- узел и изучение динамики перехода к детерминированному хаосу путём растяжения и складывания сейчас предпочитают изучать именно на отображении Эно.

Отображение Эно (представляющее целый класс двумерных отображений с квадратичным максимумом) приводит к обычному каскаду удвоения периода, но постоянные Фейгенбаума в этом случае больше, чем для одномерных отображений.

Отображение Эно описывает, в частности, простую механическую систему (рис.1):

Двумерное квадратичное обратимое отображение (дискретное время) Эно было записано сначала в виде:

$x_{n+1}=1-\alpha x_n^2+y_n$, (2а)

$y_{n+1}=\beta x_n$. (2б)

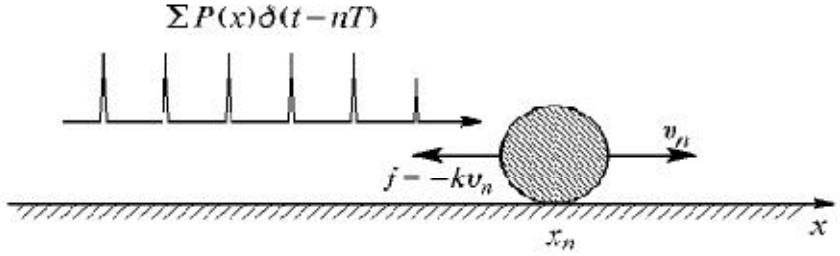


***Рис. 1. Простая динамическая система, динамику которой способно описать отображение Эно**. Вдоль оси x способна двигаться частица массы m; её движению препятствует сила трения, пропорциональная скорости, f=-kv. На частицу действуют с периодом T импульсные толчки, интенсивность которых зависит от координаты частицы в момент толчка, т.е. передаваемый импульс даётся функцией P(x).*

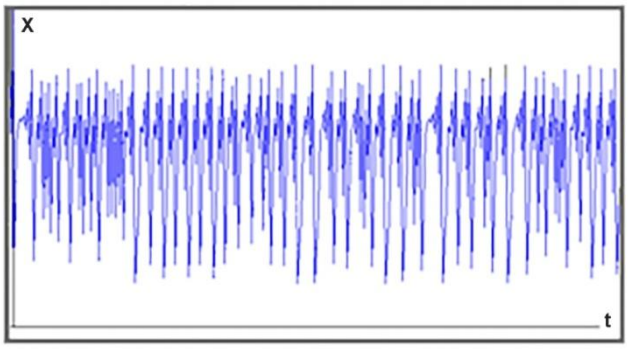


Рис. 2. Колебания в системе Эно.

<u>Замечание.</u> В настоящее время отображение Эно часто записывают в виде

$x_{n+1}=1-ax_n^2-y_n$,

$y_{n+1}=bx_n$.

что приводит к изрядной путанице в знаке y_n. Важно понимать, что оба выражения идентичны, если $b=-\beta$.

Под отображением Эно иногда имеют ввиду

$x_{n+1}=-k+x_n^2+y_n$,

$y_{n+1}=-bx_n$.

Здесь $\alpha=1$ и появился новый параметр $-k$. Мы такой формой заниматься не будем, хотя она по-своему интересна.

Обобщение отображения Эно имеет вид

$x_{n+1}=1-ax_n^2+y_n$,

$y_{n+1}=bx_n^k$.

в котором наблюдается несколько форм бифуркаций. Им мы тоже заниматься не будем.

Отображение Эно можно задавать в три стадии:

H: $(x,y)\to(y,y)\to(y,\ 1-\alpha y^2)\to(y,\ 1-\alpha y^2+\beta x$, (3)

где x и y – динамические переменные, α и β - параметры отображения.

Это простое уравнение приводит к весьма сложной динамике, полное описание которой составит толстый том.

Отображение Эно способно к хаотической динамике. Оно рассматривается как упрощённая модель применения сечения Пуанкаре к аттрактору Лоренца. Для классического отображения начальная точка плоскости будет либо приближаться к множеству точек, известных как странный аттрактор Эно, либо расходиться в бесконечность. Аттрактор Эно является фрактальным, гладким в одном направлении и канторовом множеством в другом в другом. Корреляционный размер 1,25±0,02, а размерность Хаусдорфа 1.261±0.003.

<u>Замечание</u>. Аттрактор Эно, возникающий в интервале $(\alpha,\ \beta)=(1.4,\ 0.3)$ часто относят к странным аттракторам. Однако до сих строгих доказательств не получено. Фрактальность и

хаос не обязательно свидетельствует о странности. Есть мнение, что аттрактор Эно в сущности апериодический рекуррентный аттрактор. Возможно, аттрактор Эно - результат нескольких длительных притягивающих устойчивых циклов.

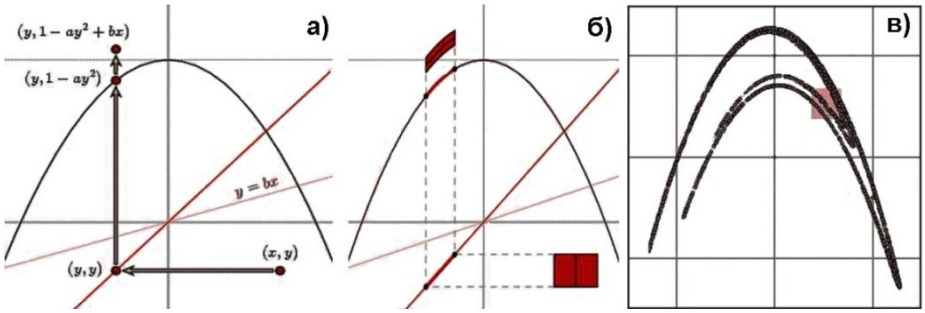
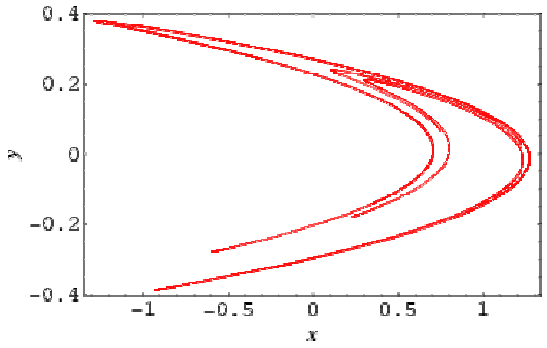


Рис. 3. Этапы построения H(x, y) из (x, y) начиная с α=1,4 и β=0,3.

При β=0 отображение Эно переходит в логистическое квадратичное отображение, так что эти отображения должны иметь некоторые общие свойства. Однако в отличие от логистического, отображение Эно обратимо; существует единственное значение для x_n и y_n, соответствующее каждому x_{n+1} и y_{n+1}.

При |β|<1 отображение Эно представляет собой диссипативную структуру (энергия системы рассеивается). Если у логистического отображения, как и любого другого одномерного отображение аттрактор не имеет фрактальных свойств (хотя бифуркационная диаграмма фрактальна), то аттрактор двумерного отображения Эно фрактален.



При β→1 – это отображение, сохраняющее площадь, т.е. консервативная система.

Рис. 4. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Эно (1): *аттрактор при α=1,4 и β=0,3. Результат повторной итерации. Этот граф больше, чем линия, но меньше поверхности. То, что похоже на одну строку, – это пара строк, каждая из которых, в свою очередь, представляет собой еще одну пару строк и т. д.*

Обобщение отображения Эно на большие размерности приводит к отображения подковы (Смейла) и пекаря.

Отображение Эно зависит от двух параметров: α и β. При значениях α=1,4 и β=0,3, отображение хаотично. Для других значений α и β отображение может быть хаотичным, прерывистым или сходиться к периодической орбите. Показатель Ляпунова λ=0,42. При α =1,25 отображение Эно имеет устойчивую периодическую орбиту – аттрактор, структура которого, видимо, состоит из неустойчивых периодических орбит внутри аттрактора.

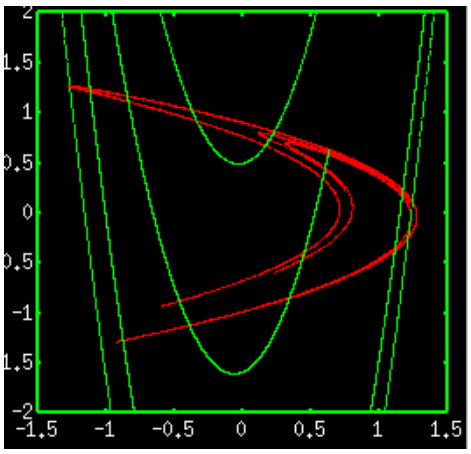


Рис. 5. Аттрактор отображения Эно для α=1,4 и β=0,3*. Аттрактор с фрактальной структурой – красные кривые), устойчивый многообразие неподвижной точки на аттракторе – зеленые кривые. Аттрактор и устойчивое многообразие пересекаются бесконечно и образуют бесконечно тонкую сеть. Поскольку есть точки касания между аттрактором и устойчивым многообразием, то отображение Эно – негиперболическая динамическая система.*

На рис. 3а представлен результат первых двух этапов построения $H(x, y)$: это точка на параболе $y=1-ax^2$; если β мало, конечный результат находится не далеко от этой точки. Образ прямоугольника строится аналогично (рис. 3б).

При α=1,4 и β=0,3 при итерациях $H(x,y)$ заданная начальная точка либо уходит в бесконечность, либо приблизится к довольно нечетной кривой – аттрактору. Кривую можно увидеть только при наличии большого количество точек в траектории, проходящей через начало координат (0,0). Аттрактор притягивает точки (но не все), устойчив и имеет сложную структуру. Он представляет собой набор очень тонких кривых, располагающихся в нескольких слоях. Сечение нескольких слоев выглядит как множество Кантора, причём каждый слой похож на параболу, вложенную в другие слои.

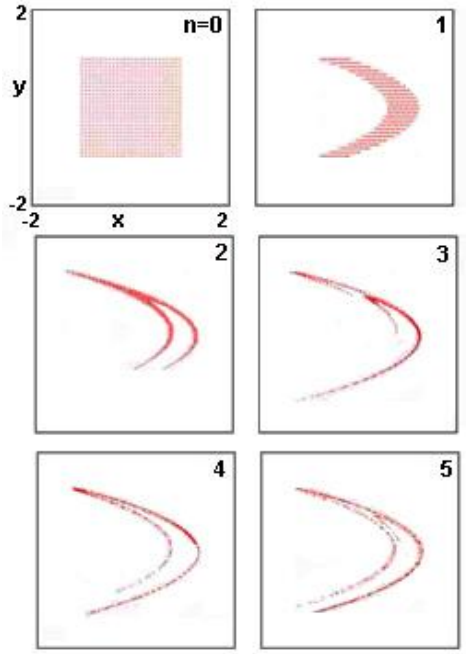


Рис. 6. Притяжение изображающих точек к аттракторам.

Облако изображающих точек "конденсируется" на некоторые предельные объекты – аттракторы динамической системы (рис. 6). Процесс "конденсации" изображающих точек на аттрактор занимает некоторое время. В конце концов они притягиваются к некоторой сложной слоистой структуре. Аттрактор Эно состоит из отдельных "нитей" и областей пустого пространства, причем каждая нить в свою очередь имеет аналогичную тонкую структуру, т.е. аттрактор обладает фрактальными свойствами (самоподобен).

Динамику отображения (2) анализируют на *фазовой плоскости* двух переменных (x, y), задавая значения двух управляющих параметров α и β. Параметр β характеризует степень диссипативности отображения (2), $0<\beta<1$. Обычно его фиксируют на уровне β=0.3. Параметр α отвечает за нелинейность.

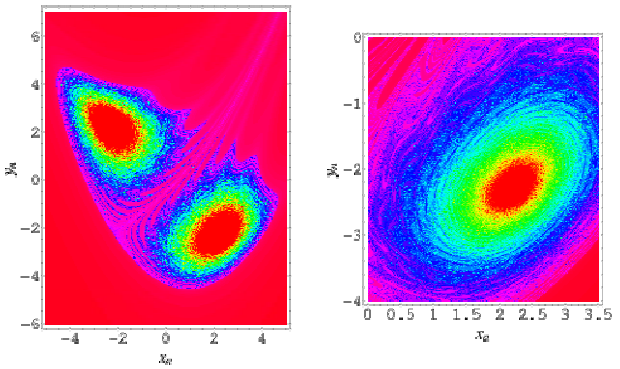


Рис. 7. Две области пространства для отображения Эно при α=0,2 и β=1,01 , цвет которых отражает число итераций.

Неподвижные точки отображения Эно находятся из условийя

$$x^*=1-\alpha x^{*2}+y^*, \qquad (4а)$$

$$y^*=\beta x^*. \qquad (4б)$$

$0\le\alpha\le2$, $|\beta|<1$

Тогда

$$\alpha x^{*2}+(1-\beta)x^*-1=0 \qquad (5)$$

Это уравнение имеет два решения, которые и определяют координаты неподвижных точек отображения (2):

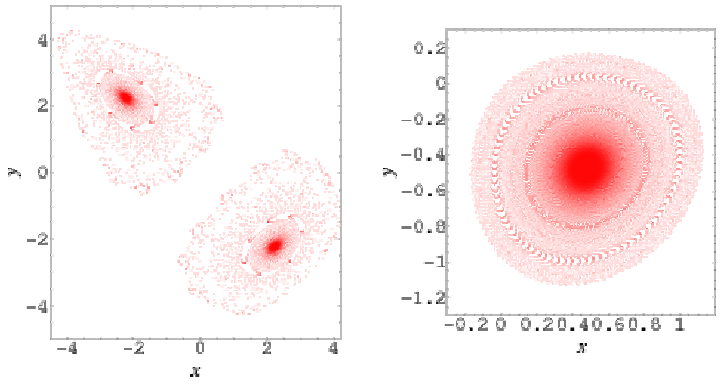


Рис. 8. Эволюция точки (0,0) *для параметров (0,2, 0,9991) (слева) и (0,2, -0.9999) (справа).*

$$x_1^*=\frac{-(1-\beta)+\sqrt{(1-\beta)^2+4\alpha}}{2\alpha}, \quad y_1^*=\beta x_1^*,$$

$$x_2^* = \frac{-(1-\beta)-\sqrt{(1-\beta)^2+4\alpha}}{2\alpha}, \quad y_2^* = \beta x_2^*.$$

Выражения, определяющие координату x^*, являются действительными числами при $\alpha \geq -\frac{(1-\beta)^2}{4}$ (т.е. при $\sqrt{(1-\beta)^2+4\alpha} > 0$). Точка, знак радикала у которой положителен (т.е. x_1*) всегда стабильна, а точка с отрицательным радикалом всегда неустойчива. Точки x* могут быть либо притягивающими, либо седловыми. Это определяется значениями параметров α и β.

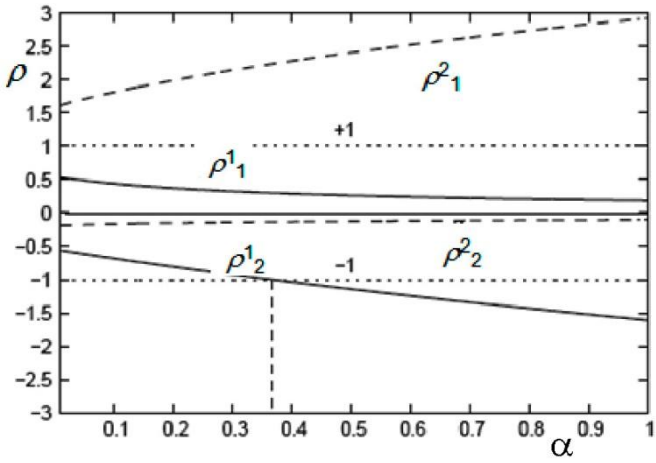


Рис. 9. Зависимость собственных значений неподвижных точек отображения Эно от параметра α *(здесь β=0,3).*

Если α=1,4, а β=0,3 то отображение Эно проявляет хаотическое поведение и стремится к странному аттрактору. При этих значениях параметров первая точка равновесия имеет координаты x_1*=-1,13135, y_1=-0,339406, а вторая – координаты x_2*=0,631354 и y_2=0,189406. Собственное значение для первой неподвижной точки {2,25982, -1,09203}, а для второй {-2,92374, -0,844054}. От сюда следует, что первая точка – это седло, а вторая –устойчивая точка.

При выполнении условия $\alpha = \frac{-(1-\beta)^2}{4}$ в отображении (2) появляются две неподвижные точки (как и у логистического отображения): устойчивая и неустойчивая. Это результат касательной (т.е. седло-узловой) бифуркации. Две неподвижные точки существуют при условии $\alpha > \frac{-(1-\beta)^2}{4}$. 2-цикл возможен при $\alpha > \frac{3(1-\beta)^2}{4}$. При $\alpha > \frac{3(1-\beta)^2}{4}$ происходит бифуркация удвоения периода. Если β=0, то α=3/4=0,75 - это значение, при котором неподвижная точка теряет устойчивость (бифуркация седло-узел) и рождается 2-цикл. Первая и вторая итерации отображения Эно проявляют бифуркацию Хопфа при α=-0,982051 и α=2,48205, если β=-1.

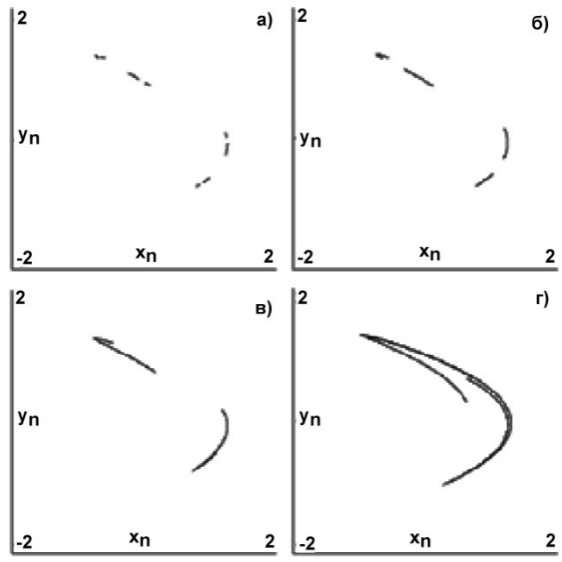


Рис. 10: Фазовые портреты хаотических аттракторов в системе Эно при последовательных бифуркациях связанности *при β=0.3 для α=1.06 (а), α=1.07 (б), α=1.086 (в), a=1.16 (г)***.**

Собственные значения или мультипликаторы неподвижных точек находятся из решения характеристического уравнения

$$\det\begin{bmatrix} -2\alpha x^* - \rho & 1 \\ \beta & -\rho \end{bmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Собственные числа для каждой из двух неподвижных точек

$$\rho_{1,2} = -\alpha x^* \pm \sqrt{\alpha x^{*2} + \beta} \qquad (7)$$

При $\alpha \to 0$ неподвижные точки «уходят» на бесконечность. Зафиксируем параметр $\beta=0.3$ и проанализируем характер устойчивости неподвижных точек при изменении параметра $\alpha>0$. При $\alpha \to 0$ неподвижные точки разбегаются в бесконечность, при этом значения собственных чисел стремятся к $\pm\sqrt{\beta}$ для x_1* и $\frac{1-\beta}{2} \pm \sqrt{\beta}$ для x_2*.

Точка с координатами (x_2*, y_2*) является седлом для любых α, так как один из ее мультипликаторов всегда положителен и больше 1, а второй − отрицателен и близок к 0. Это означает, что по первому направлению траектория монотонно расходится, а по другому направлению отклонение убывает, меняя знак на каждой итерации.

Мультипликаторы другой неподвижной точки с координатами (x_1*, y_1*) по модулю меньше единицы, что соответствует устойчивому узлу. Эта точка устойчива до $\alpha=0.3675$ когда один из мультипликаторов данной точки достигает значения −1, что соответствует бифуркации удвоения периода и рождению цикла периода 2. По другому направлению точка всегда устойчива, т.к. собственное значение меньше 1. При дальнейшем увеличении параметра α цикл периода 2 становится неустойчивым и рождается цикл периода 4 и т.д.

В отображении Эно реализуется каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Формирование единого (односвязанного) хаотического аттрактора происходит через последовательность бифуркаций связанности.

Отображение Эно – простейшее отображение, фиксирующее динамику растяжения и складывания хаотических систем. Параметр α контролирует величину растяжения, а параметр β – толщину складывания. Аттрактор имеет заметную толщину, что позволяет заметить чёткую поперечную фрактальную структуру.

Отображение Эно можно представить как композицию трех преобразований: T_1 – искривление, сохраняющее площадь, T_2 – сжатие в направлении оси OX, T_3 – преобразование плоскости в себя поворотом на 90°. $T=T_1 \circ T_2 \circ T_3$

Рассмотрим, как на фазовой плоскости происходит формирование аттрактора Эно. В данном случае аттрактор – геометрический объект, получаемый путем ряда геометрических трансформаций, задаваемых отображением Эно. Данное геометрическое преобразование можно проанализировать, разбив его на три этапа.

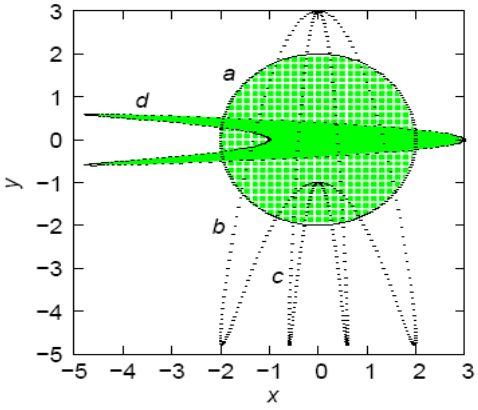


Рис. 11. Преобразование круга трансформациями Эно.

Обозначим исходное отображение плоскости на плоскость как T: $R^2 \to R^2$ и представим T в виде трех последовательных трансформаций: $T=T_1 \circ T_2 \circ T_3$. Первая трансформация, T_1, отображает точку (x, y) в ее образ (x, $1-\mu x^2+y$) и представляет собой искривление, сохраняющее площадь. Вторая трансформация, T_2, отображает (x, y) в (βx, y) и соответствует сжатию по x-направлению. Наконец, третья трансформация, T_3, переводит (x, y) в (y, x) и отображает участок поверхности в себя с поворотом на 90 градусов.

Изменение площади, или фазового объема, определяется якобианом

$$J = \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = \begin{bmatrix} -2\alpha x_n & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \qquad (8а)$$

$$\det J = -\beta \qquad (8б)$$

Рассмотрим важный частный случай $\beta=-1$. Если модуль определителя $\det J=1$ и $x_2^*=1/x_1$, то отображение при итерациях сохраняет площадь (консервативная система). Здесь имеют место две неподвижные точки. 1) гиперболическая точка. Величины x*

действительные, $x_1>1$, следовательно, $x_2^*=1/x_1<1$, т.е. неподвижная точка неустойчива, т.к. все траектории, не заключённые в устойчивую трубу вдоль собственного вектора e_2, уходят от (x^*, y^*), а для достижения неподвижной точки вдоль e_2 требуется бесконечное число итераций и неподвижная точка устойчива, так как каждая точка, попав в её окрестность, остаётся в ней и никогда не покидает её (рис.).

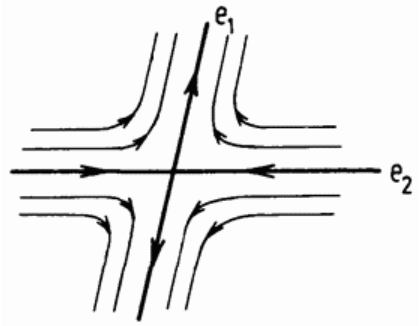


Рис. 12. Траектории вблизи гиперболической (седловой) неподвижной точки с собственными векторами e_1 и e_2.

2) Эллиптическая неподвижная точка. Она устойчива, так как каждая точка, попав в ее окрестность, остается в ней и никогда не покидает её (рис. 13)

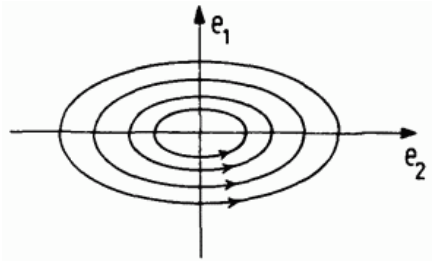


Рис. 13. Траектории вблизи эллиптической неподвижной точки.

На рис. 14 показаны орбиты отображения Эно вблизи устойчивой неподвижной точки и после первой бифуркации.

При $\beta\neq0$ в отображении Эно может возникать интересный репеллер: прямоугольная площадь изгибается в подкову Смейла. Если $\beta=-1$ и значение параметра α велико, то согласно (5) скорость сжатия равна 1, что означает что площадь при трансформации остается постоянной, но её форма меняется: она сильно растягивается. В результате возникает сложенная подкова.

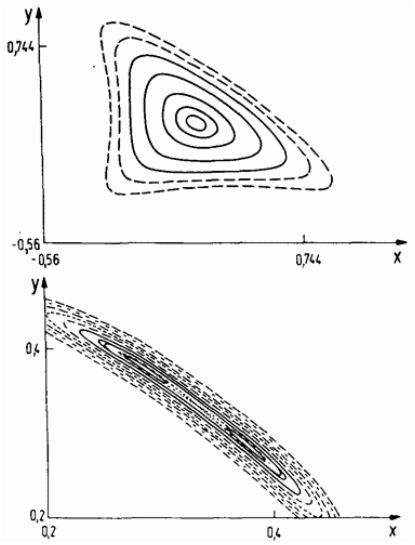


Рис. 14. Орбиты для отображения Хенона: а) при α=0,95 б) при α=3,02.

В случае $|J|<1$ отображение является в среднем сжимающим, т.е. диссипативным. Только в этом случае можно говорить о наличии у него регулярных или хаотических аттракторов. Предел $\beta=0$ соответствует предельно сильному сжатию по x-направлению. В этом случае, отображение Эно сводится к одномерному логистическому отображению.

При последовательной итерации отображения Эно повторяющиеся изгибы, сжатия и повороты приводят к формированию на плоскости подковообразного, очень сложно устроенного множества – хаотического аттрактора.

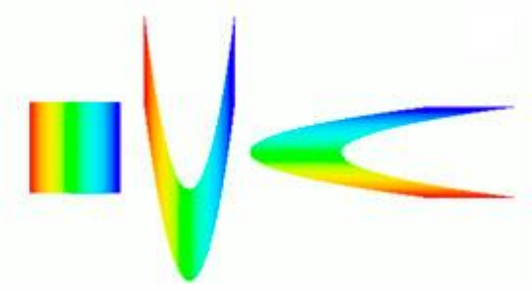


Рис. 15. Подкова Смейла, возникающая при деформации отображения Эно.

В отображении Эно фазовый объём может и уменьшается: при $|\beta|<1$ имеет место сжимающее отображение. Сжатие множества начальных точек, занимающих некоторую область в плоскости xy, при каждой итерации одинаково (при каждой следующей итерации площадь уменьшается на 30%). Все ограниченные притягивающие орбиты лежат в интервале $|b|<1$ и аттрактор обладает нулевой площадью. Отображение можно представить как последовательность трех простых операций: однородного сжатия в b раз в направлении оси y (слева сжатие

опущено, т.е. b=1) $x'=x,\ y'=by$, деформации в этом же направлении $x'=x,\ y'=a+x^2+y$ и отражении относительно диагонали $y=x$: $x'=y,\ y'=x$.

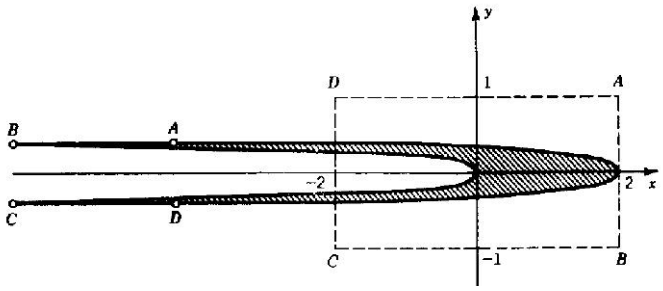


Рис. 16. Преобразование прямоугольной области начальных условий под действием системы разностных уравнений второго порядка, называемой отображений Эно, состоящее в вытягивании, сжатии и складывании, которые приводят к хаотическому поведению (α=1,4, β=0,3).

Рис. 15 демонстрирует, как отображение Эно f^N переводит квадратную область с вершинами ($\pm 3.9,\ \pm 3.9$) в покову Смэйла. После второй итерации получается двойная подкова. Обратное отображение (при $N<0$) переводит квадрат в вертикальную подкову. Точки инвариантного множества (которые не уходят на бесконечность и всегда остаются внутри квадрата) лежат в пересечении двух трансверсальных подков. При каждой последующей итерации внутри любой области пересечения возникает четыре новых пересечения. При $N \to \infty$ образуется фрактальный канторов репеллер.

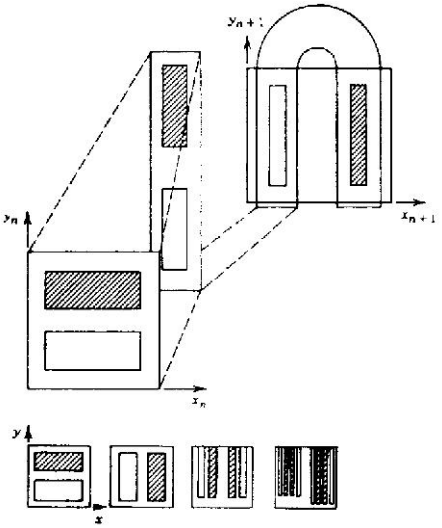
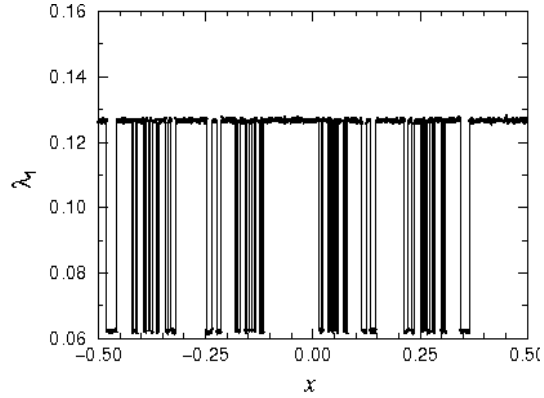


Рис. 17. Отображение подкова Смейла: вытягивание, сжатие и складывание после большого числа итераций отображения приводят к фрактальной структуре.

При $|\beta|<1$ отображение уменьшает площади в плоскости $x,\ y$. Кроме того, оно вытягивает и изгибает области на фазовой плоскости (рис. 16). В результате этого растяжения, сжатия и изгиба или складывания областей фазового пространства получаются области, напоминающие подкову. Последовательные итерации таких отображений типа подковы приводят к появлению в фазовом пространстве сложных орбит, потере информации о начальных условиях и хаотическому поведению.



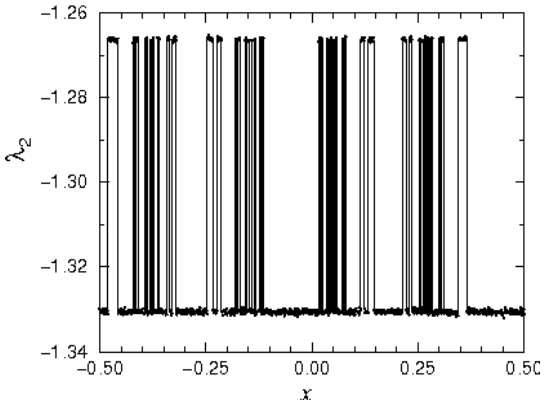


Рис.18. Самоподобие хаотического аттрактора Эно.

Простые отображения способны моделировать сложные движения (рис. 17). После итерации использованного отображения прямоугольная область растягивается в вертикальном направлении и сжимается в горизонтальном и складывания можно получить критерий возникновения хаотических колебаний динамической системы, при которых предсказание будущей эволюции становится чувствительным к начальным условиям.

Общая форма аттрактора повторяет результат преобразования, рассмотренный выше. Однако бесконечное число сжатий и отображений в себя участка плоскости порождает фрактальную структуру. Выделенный

фрагмент на рис. 18 представляет собой набор точек, лежащих на практически параллельных отрезках прямых линий. Можно различить структуру из 3, 2, и 1 линий. Однако, если увеличить в 10 раз выделенный прямоугольником участок, то его структура оказывается геометрически подобна объекту в целом! Увеличение позволяет увидеть мелкие детали и, оказывается, что рассматриваемые участок фазового портрета повторяет сам себя при подходящем масштабировании. Хаотический аттрактор Эно обладает свойством масштабной инвариантности, что является геометрическим проявлением свойства самоподобия.

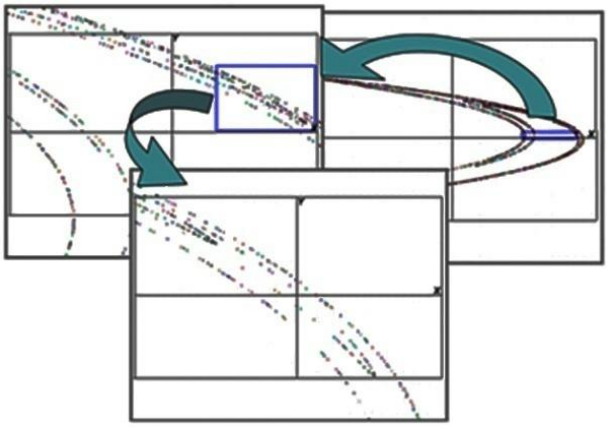


Рис. 19. Хаотические и регулярные режимы в хаотическом режиме отображения Эно.

Отображение Эно обладает самоподобием, для него фрактальная размерностью, которая является промежуточной размерностями 1 и 2. Следует учесть отличие странного аттрактора, имеющего нецелую размерность, от хаотического аттрактора, проявляющего чувствительность к начальным условиям. Некоторые фракталы абсолютно самоподобны, т.е. при любой степени увеличения они выглядят одинаково. Аттрактор Эно относится к фрактальным структурам, в котором нельзя найти какой-то участок, который при увеличении масштаба будет выглядеть как миниатюрная карта всего отображения. Отображение Эно самоподобно в статистическом смысле, т.е. увеличенная часть объекта имеет такое же количество деталей, как и целое (о точной копии речи не идёт).

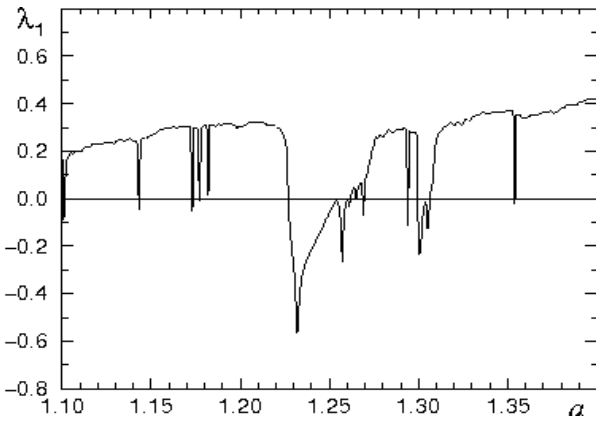


Рис. 20. Зависимость старшего показателя Ляпунова от параметра α.

Рассмотрим фазовые портреты притягивающих множеств отображения Эно и бассейны их притяжения.

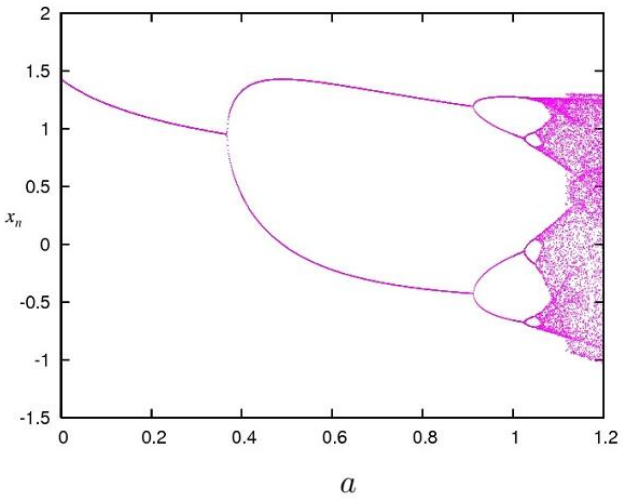
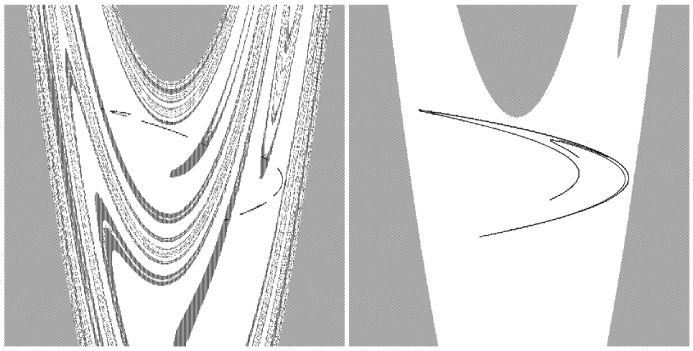


Рис. 21. Бифуркационная диаграмма для отображения Эно (1) при β=0.3: *рождение устойчивого 2-цикла из неподвижной точки и весь каскад бифуркаций удвоения периода, хаос и окна непериодичности в хаосе. Бифуркационное дерево иногда скачком "разбухает" – кризис.*

При определенных значениях управляющих параметров отображение Эно может демонстрировать свойство мультистабильности – режим сосуществования двух притягивающих подмножеств на фазовой плоскости. Если менять начальные условия, то наблюдается чередование двух хаотических режимов. Это подтверждает расчет старшего ляпуновского показателя в зависимости от изменения начальной координаты x при фиксированном y. Максимальный показатель случайным образом «скачет» между двумя положительными

значениями, свидетельствуя о переходах системы с одного хаотического аттрактора на другой.



а *б*

Рис. 22. Аттракторы, реализующиеся в системе Эно, и структура бассейнов их притяжения на фазовой плоскости (x_n, y_n) при β=0.3 для α=1.078 (а) и для α=1.32 (б).

Если сравнить эти результаты с видом структуры бассейнов притяжения, то становится понятно, что изменение начальных условий приводит к пересечению границ соответствующих бассейнов. Подобно логистическому отображению, в закритической области значений управляющего параметра (в области существования хаотического аттрактора) в отображении Эно также наблюдается чередующуюся картина смены регулярных и хаотических режимов – «окна периодичности».

Первая итерация отображения Эно при достижении параметра α значения вблизи α=0,2 претерпевает бифуркацию удвоения периода и начинает переход к хаосу (стабильная ветвь на рис. 21). При α=0,2 имеют место две неподвижные точки (1,08945, 0,326836) и (-4,58945, -1,376836) при собственных значениях {0,371580, -0,80736213} и {1,986779, -0,1509981} соответственно. Первая равновесная точка – стабильный сток, а вторая – седло. Для тех же значений параметров вторая итерация отображения Эно имеет четыре неподвижные точки, для из которых комплексно сопряжённые. Комплексно сопряженные точки есть сёдла, третья – стабильны сток (аттрактор), а четвёртая – седло.

О наличии областей с периодическими колебаниями свидетельствует и вид зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра α. На графике рис. 20 видно наличие как положительных, так и отрицательных значений ляпуновского показателя, что свидетельствует о нерегулярном чередовании хаотических и периодических аттракторов в системе при вариации параметра.

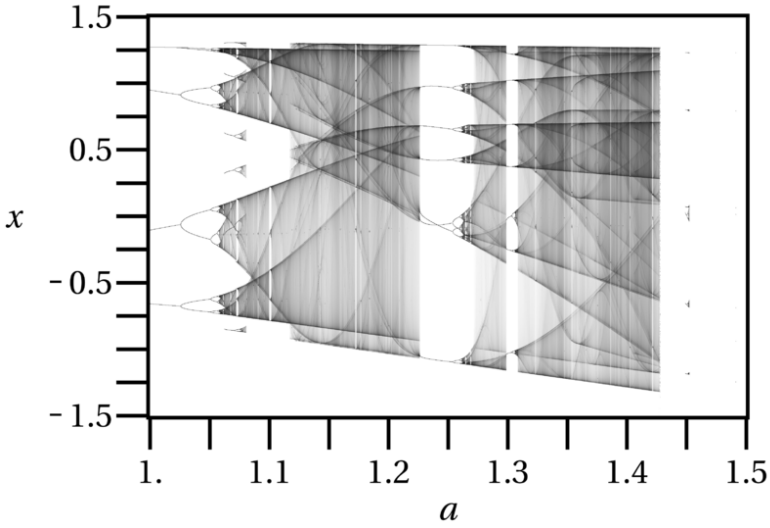
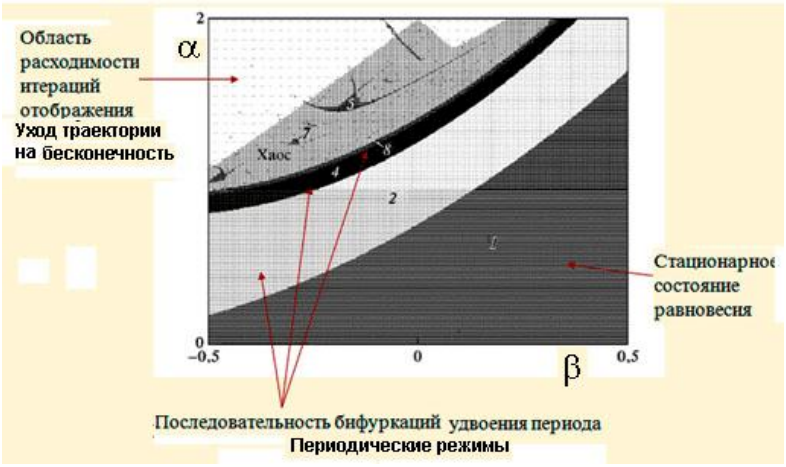


Рис. 23. Фазовая диаграмма отображения Эно при β=0,3. *Более высокая плотность (более тёмная) указывает на увеличенную вероятность того, что переменная x получит это значение для данного значения a. Сателлитные зоны хаоса и периодичности вокруг a=1,075 - они могут возникать в зависимости от начальных условий для x и y.*

В отображении Эно, как и в логистическом отображении, реализуется сценарий перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода цикла (сценарий Фейгенбаума). Скорость сходимости бифуркационных значений параметра *a* определяется универсальной константой Фейгенбаума δ = 4.669201... На рис. 21 приведена бифуркационная диаграмма для отображения (2) при β=0.3, которая демонстрирует весь каскад бифуркаций удвоения периода, хаос и окна периодичности в хаосе.

При определенных фиксированных значениях параметров α и β отображение (1) демонстрирует свойство *мультистабильности* – одновременное сосуществование двух и более притягивающих подмножеств на фазовой плоскости. На рис. 22*а* показаны фазовые портреты двух притягивающих подмножеств и их бассейны притяжения при фиксированных α=1.078 и β=0.3. Область белого цвета соответствует бассейну притяжения хаотического аттрактора в виде 4-х частей или лент; область серого цвета является бассейном притяжения 6-ленточного хаотического аттрактора.

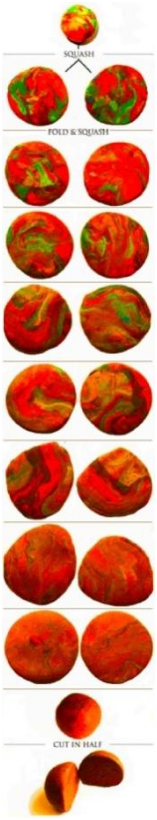


Из рис. 22 видно, что области притяжения двух сосуществующих хаотических множеств и их границы довольно сложные и, следовательно, реализация в системе того или иного режима будет строго зависеть от точности задания начальных условий.

Рис. 24. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Эно.

Бассейн притяжения хаотического аттрактора при α=1.32 выглядит однородным, что свидетельствует о наличии лишь одного аттрактора в системе (2). Однако известно, что в системе сосуществуют устойчивые циклы больших периодов с очень узкими бассейнами притяжения, которые в численном счёте не регистрируются. За критической точкой перехода к хаосу (приблизительно α=1.059 при β=0.3) в системе Эно наблюдается каскад бифуркаций связанности.

Бифуркация *связанности* представляет собой объединение частей (лент) хаотического аттрактора, посещаемых изображающей точкой в определенном порядке. Для двумерного отображения бифуркация связанности выглядит как объединение соседних интервалов (отрезков), заполненных точками хаотической последовательности. На рис. 24 показаны фазовые портреты хаотических аттракторов в отображении Эно при последовательных бифуркациях связанности. При α=1.06 в отображении (1) наблюдается 8-ленточный хаотический аттрактор (или восьмисвязанный хаотический аттрактор).



В результате бифуркации связанности, которая происходит при α=1.069, соседние отрезки восьмисвязанного хаотического аттрактора сливаются и образуют четырехсвязанный аттрактор. При последующем увеличении параметра *a* реализуются еще 2 бифуркации связанности, в результате которых четырехсвязанный хаотический аттрактор преобразуется в двухсвязанный, который в свою очередь переходит в объединенный развитой хаотический аттрактор Эно.

21.2 Отображение подковы и отображение пекаря

Отображение пекаря – нелинейное отображение единичного квадрата на себя, которое демонстрирует хаотическое поведение. Название «отображение пекаря» происходит из-за его сходства с замешиванием теста: тесто разрезают пополам, а две половины укладывают друг на друга и сжимают.

Рис. 25. Модель эволюции системы в отображении пекаря.

Преобразование пекаря – простая модель, включающая все особенности хаоса. В рамках эргодической теории оно предложно Э. Хопфом

в 1937 году. Это отображение определяют геометрически (как отображение подкова и отображение кот Арнольда). В отличие от других простых хаотических моделей гамильтоновых систем (т.е. систем, сохраняющих фазовый объём при итерациях, все классические структуры отображения пекаря могут быть описаны аналитически. Квантовая версия отображения пекаря позволяет установить связь классической механики с квантовой механиками в полуклассическом пределе, где динамика хаотична (квантовый хаос). Относительная простота классического описания, обеспечиваемая символической динамикой, и гибкая схема квантования, позволяют провести аналитические решения проблем квазиклассического описания хаотических систем, таких как коммутативность квантование с распространённым временем и сравнить классические и квантовые инвариантные структуры. Эта схема является достаточно общей: она применима к большинству кусочно-линейных отображений, в том числе – к недиссипативному отображению подкова.

Подкова Смейла – предложенный Стивом Смейлом (1958) при изучении поведения орбит осциллятора Ван дер Поля пример динамической системы, имеющей бесконечное число периодических точек (и хаотическую динамику), причём это свойство не разрушается при малых возмущениях системы. Действие отображения определяется геометрически: квадрат скручивается, затем растягивается в длинную полосу и складыванием её в форму подковы.

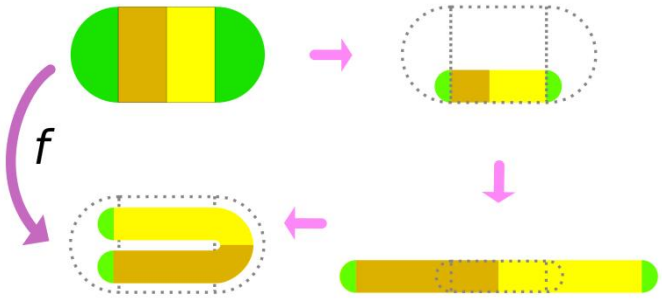


Рис. 26. Преобразование подкова.

Отображение пекаря есть двусторонний оператор сдвига (некий аналог сдвига Бернулли). Отображение пекаря топологически сопряжено с отображением подкова. Цепочка связанных карт пекаря используется для моделирования детерминированной диффузии. Как и во многих детерминированных динамических системах, отображение пекаря исследуется по его действию на пространство функций, определенных на единичном квадрате. Оператор пекаря определяет оператор на пространстве функций, известный как оператор переноса отображения. Отображение пекаря – точно решаемая модель детерминированного хаоса, так как собственные функции и собственные значения оператора переноса явно определены.

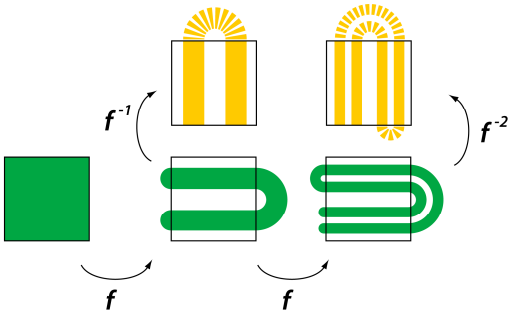


Рис. 27. Варианты отображения подкова.

Преобразование сложения действует на единичный квадрат, как

$$S_{baker-folded}(x,y)=\begin{cases}(2x,\ y/2) & for\ 0\le x<1/2\\ (2-2x,\ 1-y/2) & for\ 1/2\le x<1\end{cases} \qquad (9)$$

Когда верхняя часть не складывается, карта может быть записана как

$$S_{baker-unfolded}(x,y)=\left(2x-|2x|,\ \frac{y+|2x|}{2}\right) \qquad (10)$$

Сложенное отображение пекаря представляет собой двумерный аналог отображения тент

$$S_{tent}(x)=\begin{cases}2x & for\ 0\le x<1/2\\ 2(1-x) & for\ 1/2\le x<1\end{cases} \qquad (11)$$

Отображение пекаря топологически сопряжено с отображением Бернулли. В отличие от отображения тент, отображение пекаря обратимо; оно сохраняет двумерную меру Лебега. Отображение сильно топологически перемешено. Отображение пекаря можно понимать как операцию двустороннего сдвига по символической динамике одномерной решётки.

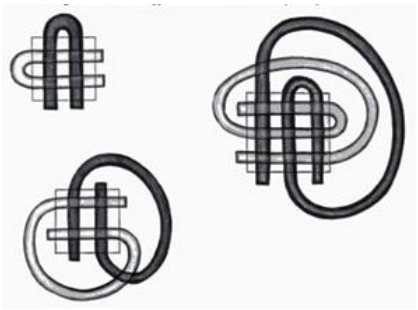


Рис. 28. Различные типы подковы с соответствующими инверсиями.

Преобразование отображает точки единичного квадрата на единичный квадрат с сохранением меры. Сожмём квадрат по оси y вдвое, а по оси x растянем его вдвое. Разрежем образовавшийся прямоугольник на две равные части вдоль оси y (отметим одну половину чёрным цветом, другую – белым) и положим правую часть под левой. Получится снова квадрат, с которым надо повторить указанные операции и т.д. При большом числе итераций это распределение принимает вид набора тонких и длинных чередующихся тёмных и светлых полосок. При многократном повторении процедуры в конце концов получаем кусок теста, который выглядит однородным. Взяв для пробы небольшой кусочек, мы обнаружим в нём присутствующие в равных долях темную и светлую составляющие. Основное процесс, задействованный при эволюции отображения пекаря, называется перемешиванием.

Преобразование пекаря обладает свойствами перемешивания и локальной неустойчивости. Если выбрать координаты некоторой точки в квадрате, как начальные и рассмотреть траекторию этой точки, т.е. последовательность её отображений, то координаты точек, порождаемых преобразованием пекаря, образуют последовательность случайных чисел.

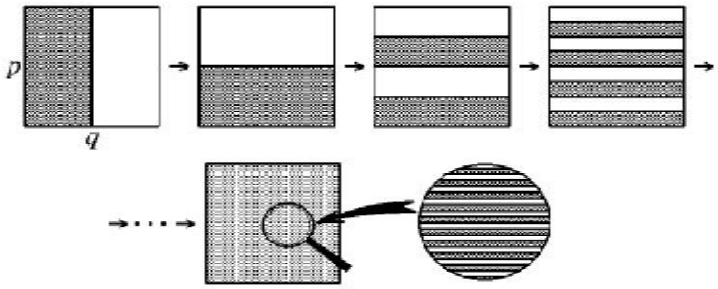


Рис. 29. Последовательные этапы преобразования пекаря

Отображение пекаря строится на основе динамики типа сдвига Бернулли на множестве последовательностей бесконечных в обе стороны. Соответственно, динамика нового отображения будет описываться двумя переменными.

$$\begin{cases}x'=2x\\ y'=\dfrac{y}{2}\end{cases} \quad для \quad x<\frac{1}{2}, \quad \begin{cases}x'=2x-1\\ y'=\dfrac{1+y}{2}\end{cases} \quad для\ x>\frac{1}{2}. \qquad (12а)$$

или

$$(x_{n+1},y_{n+1})=\begin{cases}(2x_n,\,0{,}5y_n) & 0\le x_n\le 0{,}5\\ (2x_n-1,\,0{,}5y_n+0{,}5) & 0{,}5<x_n\le 1\end{cases} \qquad (12б)$$

или

$$x_{n+1}=\begin{cases}\lambda_a x_n & при\ y<1/2\\ \dfrac{1}{2}+\lambda_b x_n & при\ y>1/2\end{cases} \qquad (12в)$$

$$y_{n+1}=\begin{cases}2y_n & при\ y<1/2,\\ 2\left(y-\dfrac{1}{2}\right) & при\ y>1/2\end{cases} \qquad (12г)$$

или

$$S(x,y)=\begin{cases}\left(2x,\dfrac{1}{2}y\right)\bmod 1, & если\ 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ \left(2x,\dfrac{1}{2}(y+1)\right)\bmod 1, & если\ \dfrac{1}{2}\le x<1\end{cases} \qquad (12д)$$

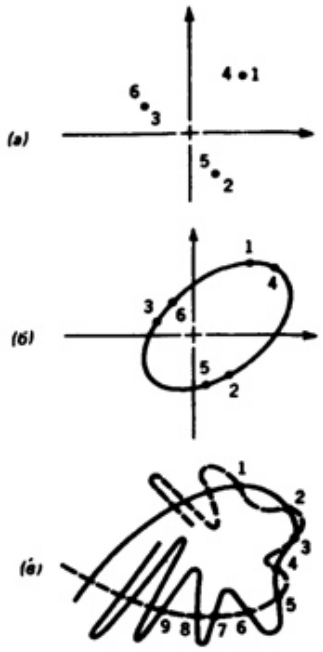


Рис. 30. а – периодическая траектория в сечении Пуанкаре, *б – квазипериодическая траектори/я, в - гомоклиническая траектория (неустойчивые много.образия седловой точки закручиваются вокруг особой точки наподобие вихря).*

Преобразование пекаря можно рассматривать как обобщение преобразования Бернулли. Матрица Якоби имеет вид

$$J=\begin{bmatrix}S_1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \qquad (13)$$

где $S_1=\lambda_a$ при $y<1/2$ и $S_1=\lambda_b$ при $y>1/2$. При итерациях отображения собственные значения переходят в

$$j_1(n)=2^n,\quad j_2(n)=\lambda_a^k\lambda_b^l,\quad k+l=n, \qquad (14)$$

где k число итераций в левой полуплоскости, а l – число итераций в правой полуплоскости. По определению показателя Ляпунова

$$\lambda_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_2 2^n,$$
$$\lambda_2=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{k}{n}\log_2\lambda_a+\frac{l}{n}\log_2\lambda_b\right\} \qquad (15)$$

Зная эти два показателя Ляпунова ($\lambda_1=1$, $\lambda_2=0{,}5\log_2\lambda_a\lambda_b<0$), можно вычислить для показателя пекаря фрактальную размерность.

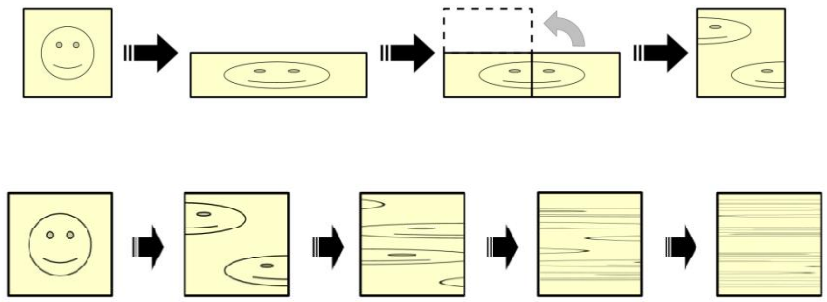


Рис. 31. Изменение отображения пекарь при последовательных итерациях.

Отображение пекаря полностью обратимо; фазовая площадь не меняется (консервативная система). Если взять некоторую область на плоскости (x,y) подвергнуть каждую её точку действия отображения пекаря, то она перейдёт в некоторую другую по форме область, но площадь новой области останется той же самой.

Уже небольшое число итераций приводит к полному перемешиванию: траектории перемешаются равномерно по всему квадрату. После итераций складывания и растяжения порождают фракталоподобную структуру, и точная информация о начальных условиях

утрачивается. Для установления соответствия между начальным и последующим состояниями системы требуется все большая точность. При конечной точности постановки задачи предсказание становится невозможным. После перемешивания бессмысленно говорить о координате частицы, но можно вычислить вероятность её нахождения в данной точке (для данного отображения все точки квадрата будут равновероятны).

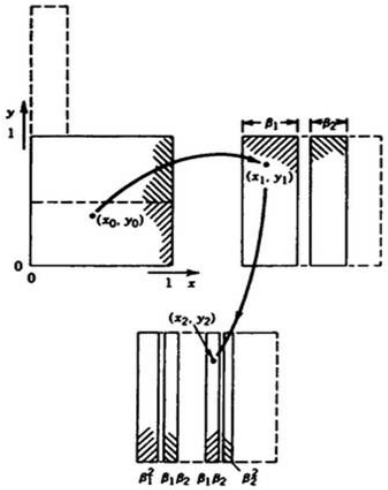


Рис. 32. Изменение координат точки при итерациях.

Для отображения подкова существует бесконечное число периодических орбит; существуют периодические орбиты сколь угодно длительного периода; число периодических орбит растет экспоненциально с периодом; и вблизи любой точки фрактального инвариантного множества существует точка периодической орбиты.

Выражено неупорядоченный характер этого простого преобразования проявляется, если представить итерации (x_n,y_n) в двоичной системе, т. е. в виде последовательностей из нулей и единиц. Простые примеры двоичных чисел: 1/16=0,0001000... 1/8=0,001000... , 1/4=0,01000.. и т.д. Более сложные числа, в частности иррациональные, представляются в виде бесконечных неповторяющихся последовательностей из нулей и единиц. Но в любом случае двоичное представление обладает важным свойством: удвоению числа соответствует перемещение двоичной точки на одну позицию вправо, а делению пополам – на одну позицию влево. Это свойство идеально подходит для описания преобразования пекаря.

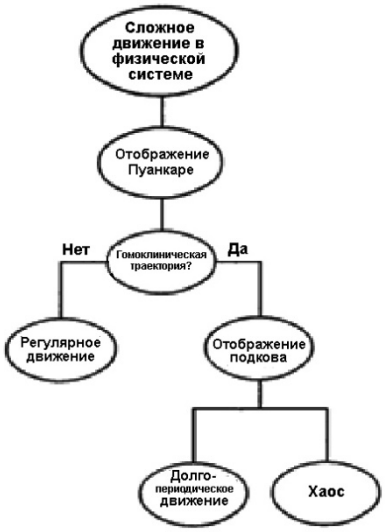


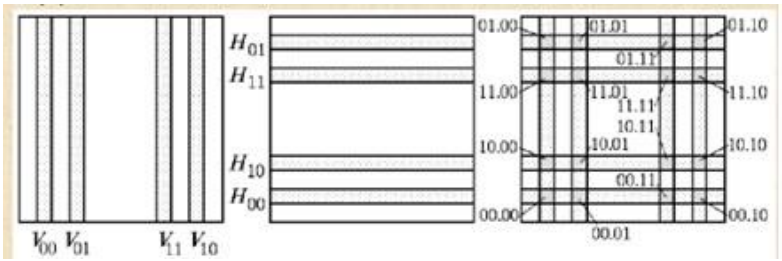
Рис. 33. Блок схема, показывающая взаимосвязь между гомоклинической орбитой (т.е. траекторией, которая выходит и входит в одно и то же положение равновесия), отображениями типа подковы и хаосом в физических системах

Начальное условие $X_0=(x_0,y_0)$ представляется последовательностями

$$x_0=0.\ a_1a_2a_3...a_i..., \qquad (16а)$$

$$y_0=0.\ b_1b_2b_3...b_i..., \qquad (16б)$$

где a_i и b_i либо нули, либо единицы. Положение этой точки в единичном квадрате удобно представить одной последовательностью, состыковав обращенную



последовательность для x_0 с последовательностью (отбрасывая нули, стоящие в разряде единиц):

$$X_0=...b_i...b_3b_2b_1.a_1a_2a_3...a_i.... \qquad (17а)$$

Рис. 34. Эволюция отображения пекаря: *слева – множество точек, которые останутся в S на следующих двух шагах; посередине – множество точек, принадлежащих S на предыдущих двух шагах; справа - пересечение этих множеств (4 шага).*

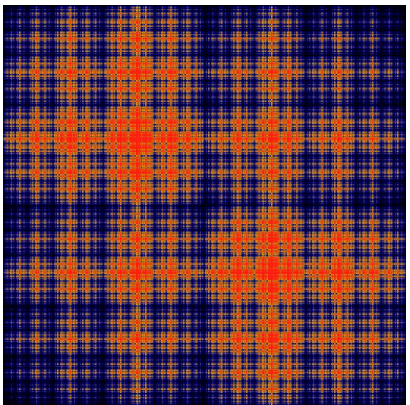


Рис. 35. Пример инвариантной меры.

Учитывая, что (прямой) итерации отображения соответствует удвоение по x и уменьшение вдвое по y, x_1 можно получить простым переносом десятичной точки в (17а) на одну позицию вправо:

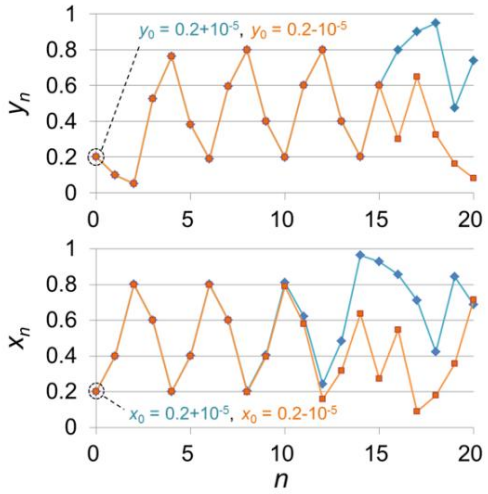
$$X_i=...b_i...b_3b_2b_1a_1.a_2a_3...a_i... \qquad (17б)$$

То же самое можно проделать для последовательных X_i. Этот процесс известен как сдвиг Бернулли.



Рис. 36. Результат пяти итераций отображения пекаря.

В случае типичных иррациональных начальных условий (x_0,y_0) соответствующее двоичное представление (16а) является бесконечной неповторяющейся последовательностью нулей и единиц, и, следовательно, двоичная бесконечная последовательность будет столь же случайной, как и последовательность, получаемая при (честном) бросании монеты (орёл – 1, решка – 0). Таким образом, полностью детерминистическая динамическая система задаёт движение, которое оказывается полностью случайным! Такая система известна как система Бернулли и представляет собой предельный случай неупорядоченности.



Пересечение вертикальных и горизонтальных полос образует канторову решетку, которая является инвариантным множеством отображения.

Рис.37 . Траектории трансформации пекаря на каждом шаге эволюции во времени.

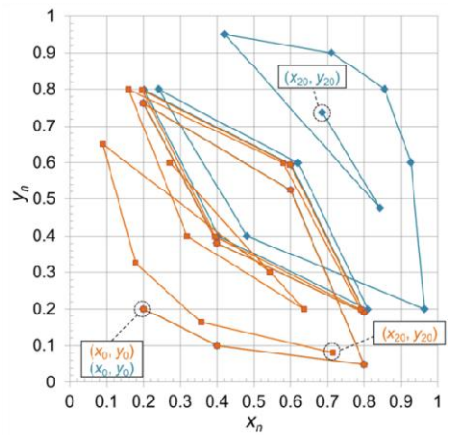


Рис. 38. Траектории трансформации пекаря на фазовой плоскости. Демонстрация чувствительности к начальным условиям хаоса. *Начальные координаты (x0, y0) голубых траекторий:* $(0.2 + 10^{-5}, 0.2 + 10^{-5})$, а оранжевых траекторий $(0.2 - 10^{-5}, 0.2 - 10^{-5})$.

21.3 Отображение «кот Арнольда» (*Arnold's cat map*)

Дискретное отображение кот Арнольда (1960) интересно тем, что при применении его простых итераций к любому изображению, это изображение разваливается на беспорядочное нагромождение точек, но при дальнейших итерациях вновь появляется изображение, очень близкое (хотя и не точное) к исходному (перед этим оно иногда появляется вверх ногами). И такие переходы изображение-хаос-изображение-хаос возможны бесчисленное число раз.



Рис. 39 . Двумерное и трехмерное преобразование пекаря.

Отображение обратимо. В теории динамических систем отображение кот Арнольда относится к диффеоморфизмам Аносова, т.е. к классу отображений с хаотической динамикой, причём с такой, что устойчива относительно малых возмущений. Отображение демонстрирует хаотическую динамику в смысле аксиоматики гиперболической теории Аносова. Отображение кот Арнольда полностью соответствует теореме Пуанкаре о возвращении (эта теорема — одна из базовых теорем эргодической теории). Её суть в том, что при сохраняющем меру отображении пространства на себя почти каждая точка вернётся в свою начальную окрестность.

Двумерное отображение «кот Арнольда» задаётся системой уравнений:

$p'=p+q \ (mod 1)$ (18а)

$q'=p+2q \ (mod 1)$ (18б)

Штрих отмечает значения динамических переменных, относящиеся к следующему шагу дискретного времени. Операция *mod* 1 обозначает, что берется только дробная часть числа (имеем тор, поэтому величина, большая единицы, означает, что точка просто "провернулась", т.е. есть центр квадрата (0,5;0,5) на следующем шаге перейдет в точку (0;0,5), а не (1;1,5). Результат: кот рвется, а потом собирается.

В исходном виде отображение кота Арнольда – отображение тора (поверхности бублика) на себя. Положение точки на бублике задаётся двумя координатами - широтой и долготой. Фазовое пространство системы Арнольда интерпретируется как поверхность тора, на котором одна переменная задаёт координату по параллели, а другая по меридиане тора, причём обе определены на интервале от 0 до 1. Для графических иллюстраций удобнее использовать единичный квадрат, считая, что расположенные напротив друг друга его стороны отожествляются (оператор *mod*1 – сдвиг в исходную область).

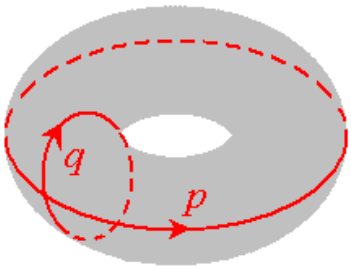


Рис. 40. Положение точки на торе.

Геометрически первый шаг процедуры состоит в линейном преобразовании координат, а второй – в переносе элементов картинки, удалившихся за рамки единичного квадрата, обратно в него (взятие модуля). При итерациях этого отображения закрашенная область (изображение кота) вытягивается вдоль одного направления на каждом шаге и сжимается вдоль второго направления. После достаточно большого числа итераций изображение кота превращается в чрезвычайно узкую полосу, вытянутую вдоль одного направления. В результате картина выглядит как набор большого числа узких чередующихся чёрных и белых полосок, в которые превратились, соответственно, множество точек, принадлежащих изображению кота, и дополнение этого множества: черная и белая «жидкости» оказываются хорошо перемешанными.

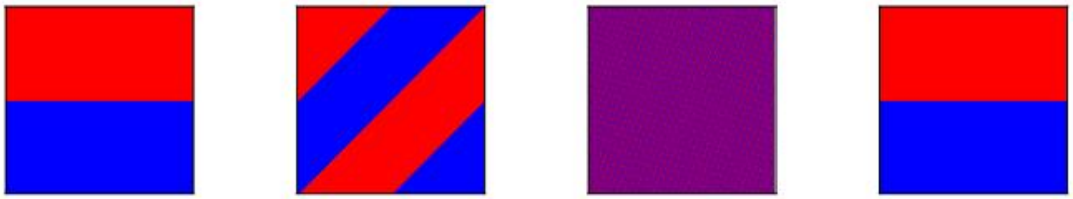


Рис. 41. Два цвета и их смешивание после 1, 25 и 306 итераций отображения кот Арнольда.

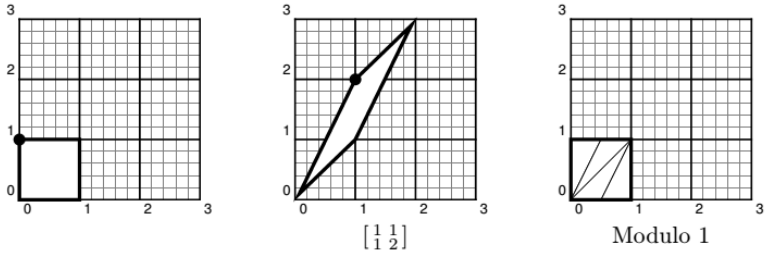


Рис. 42. Влияние отображения кот Арнольда на единичный квадрат.

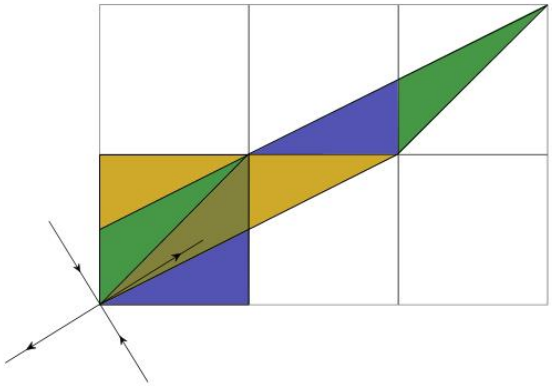
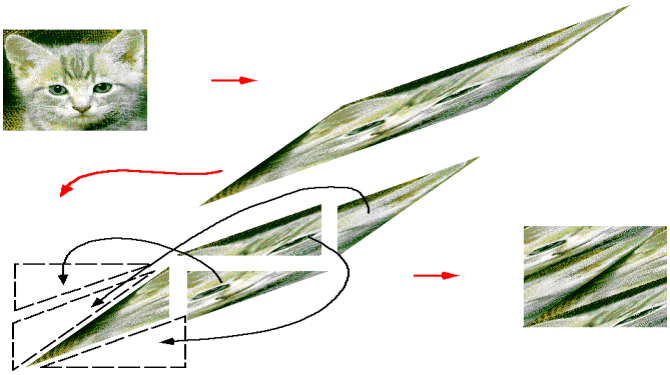


Рис. 43. Линейное отображение растягивает единичный квадрат и его части переставляются при выполнении операции по модулю. *Линии со стрелками показывают направление сжимающихся и расширяющихся собственных пространств.*

Геометрически, первый шаг процедуры состоит в линейном преобразовании координат

$$\begin{pmatrix} p' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix} \qquad (19)$$

а второй – в переносе элементов картинки, удалившихся за рамки единичного квадрата, обратно в него (операция взятия модуля).



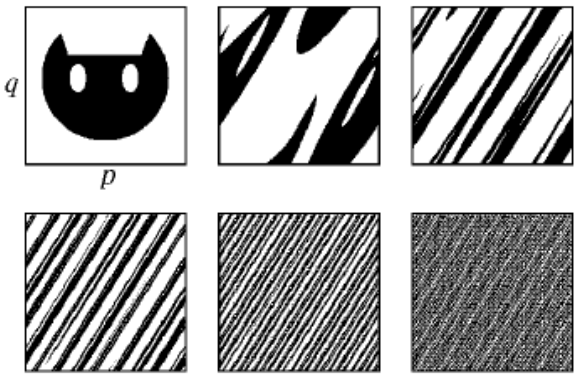


Рис. 44. Растяжение и перекладывание фрагментов, порождающие кота Арнольда.

Благодаря периодичности по x и p, фазовое пространство отображения можно мыслить как поверхность тора. Движение частицы консервативно, т.е. мы имеем дело с гамильтоновой системой. Математически это выражается в том, что детерминант матрицы, задающей отображение кота Арнольда, равен 1, и оно сохраняет меру (площадь) любой области, например, изображения кота. По терминологии классической механики, это каноническое преобразование.

Рис. 45. Динамика отображение кота Арнольда в течение пяти шагов итерации.

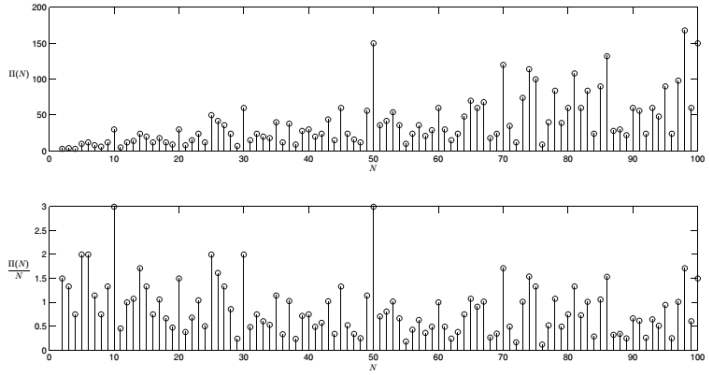


Рис. 46. Минимальные периоды отображения кота Арнольда, П(N), и отношение П(N)/N

Для динамической системы любая точка, в которой скорость изменения равна нулю, называется неподвижной точкой или тривиальной точкой. Для системы с дискретным временем это будут все точки с длиной орбиты 1. Точки с длиной орбиты больше 1 считаются нетривиальными. Для дискретного отображения Г точка с координатами (0,0) является тривиальной точкой. Все остальные точки с целыми ординатами нетривиальны, так как они являются периодическими и имеют длину орбиты больше 1. Орбита с длиной 12 точки (1,1) для карты кота Арнольда с N = 6, состоящая из координат (1, 1), (2, 3), (5, 2), (1, 3), (4, 1), (5, 0), (5, 5), (4, 3), (1 , 4), (5, 3), (2, 5), (1, 0), изображена на рис. 47.

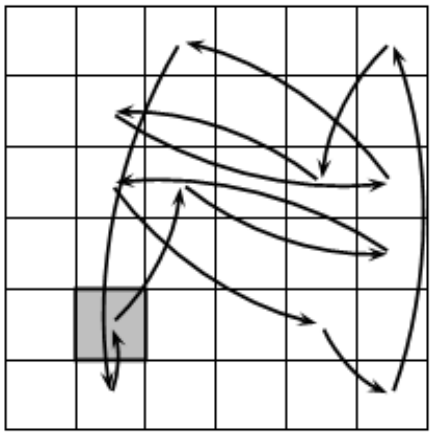


Рис. 47. Орбита точки (1,1) для отображения кот Арнольда с N=6. *Так как (0,0) – тривиальная точка с длиной орбиты 1, и верхняя граница периода отображения вида 3N, для всех N>3 ни одна точка не может иметь орбиту, которая включает в себя все N^2-1 нетривиальные точки.*

Фазовое пространство данного отображения может быть представлено квадратом, и процесс растяжения и складывания становится более понятным и явным, если поместить картинку кота в квадрат.

$x_{n+1}=x_n+y_n,$ (20а)

$y_{n+1}=x_n+2y_n, mod 1$ (20б)

Традиционно трансформацию записывают в виде:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где x_{n+1} и y_{n+1} вычисляются по модулю 1.

Отображение также известно как торов аутоморфизм, т.к. T^2 есть 2-мерный тор, определённый как $T^2=R^2/Z^2=R/ZxR/Z$. При рассмотрении T^2 как факторпространства R^2/Z^2, преобразование кот Арнольда Г: $T^2 \to T^2$ задаётся формулой:

$\Gamma: (x,y) \to (2x+y, x+y) = mod 1$ (22)

В матричной форме

$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1. \quad (23)$$

При итерирование отображения кот Арнольда реализуются следующие операции.

1. Сдвиг в x-направлении на фактор 1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$$

2. Сдвиг в *y*-направлении на фактор 1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ x+y \end{bmatrix}$$

3. Оценка по модулю

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod n$$

Если $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ рассматривать как *nxn* матрицу некоторого изображения, то преобразование Арнольда $\Gamma \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix} \bmod n$, где mod есть операция вычисления по модулю (При вычислении операция по модулю находит остаток после деления одного числа на другой (иногда называемый *модулем*), например, 3,142mod1=0,142 или 150mod100=50 или $\begin{bmatrix} 123 \\ 154 \end{bmatrix} \bmod 100 = \begin{bmatrix} 23 \\ 54 \end{bmatrix}$). Так как знаки обоих аргументов одинаковы, то модуль – просто остаток длинного деления $\begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$ на *n*.

Отображение Г обратимо, поскольку матрица имеет определитель 1, и поэтому его инверсия целочисленная, фазовое пространство сохраняется, Г имеет единственную гиперболическую неподвижную точку (вершины квадрата). Линейное преобразование, определяющее отображение, является гиперболическим: его собственные значения являются иррациональными числами, одно больше, а другое меньше 1 (по абсолютной величине), поэтому они связаны соответственно с расширяющимся и сжимающимся собственным пространством. Они также являются устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Собственное пространство ортогонально, т.к. матрица симметрична. Так как собственные векторы имеют рационально независимые компоненты, то и собственные пространства плотно покрывают тор. Отображение кота Арнольда – широко известный пример гиперболического торического автоморфизма, который является автоморфизмом тора, заданного квадратной унимодулярной матрицей, не имеющей собственных значений абсолютной величины 1. Множество точек с периодической орбитой плотно на торе. Точка препериодическая тогда и только тогда, когда её координаты рациональны. Г топологически транзитивна (т. е. существует точка, орбита которой плотная, это происходит, например, для любых точек на расширяющемся собственном пространстве). Число точек с периодом n равно $|\lambda_1^n+\lambda_2^n-2|$ (где λ_1 и λ_2 – собственные значения матрицы). Например, первые несколько членов этого ряда: 1, 5, 16, 45, 121, 320, 841, 2205 ... (Это же справедливо для любого унимодулярного гиперболического торического автоморфизма при замене собственных значений.) Г является эргодическим и перемешивающим. Г – диффеоморфизм Аносова и структурно устойчив. То есть, с единицей, равной ширине квадратного изображения, изображение сдвигается на единицу вверх, затем на две единицы вправо, а всё, что лежит за пределами этого квадрата, сдвигается назад на единицу, пока оно не окажется внутри квадрата.

В ходе временной эволюции системы происходит растяжение кота, разрезание и помещение обратно в квадрат. Обычно любые 2 точки, расположенные вначале вблизи друг друга, быстро становятся разделенными друг от друга после повторяющихся применений отображения. Таким образом, отображение «кота» Арнольда представляет собой преобразование, которое растягивает изображение, состоящее из $n \times n$ пикселов, и

эффективно сворачивает растянутые части для восстановления первоначальных размеров. Например, после некоторого числа итераций восстанавливается первоначальное изображение, подвергнутое преобразованию. Говорят, что преобразование Arnold cat map является периодическим с данным числом итераций.

Отображение кота Арнольда относится к классу консервативных систем. Оно является негамильтоновым, неаналитическим и перемешивающим. Однако оно сохраняет площадь, так как определитель равен 1: при действии отображения любая область (например, голова кота) сохраняет площадь.

Характеристические экспоненты Ляпунова задаются в виде

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 1 \\ 1 & 2-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 3\mu + 1 = 0, \qquad (24)$$

решение которого $\mu_{\pm} = 0{,}5\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$.

Собственные векторы рассчитываются путем включения $\mu_{\pm}$ в матричное уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\mu_{\pm} & 1 \\ 1 & 2-\mu_{\pm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (25)$$

Отсюда $\mu_1 = \left(3+\sqrt{5}\right)/2 = 2{,}618034$ и $\mu_2 = \left(3-\sqrt{5}\right)/2 = 0{,}381866$. Детерминант характеристического полинома D=5.

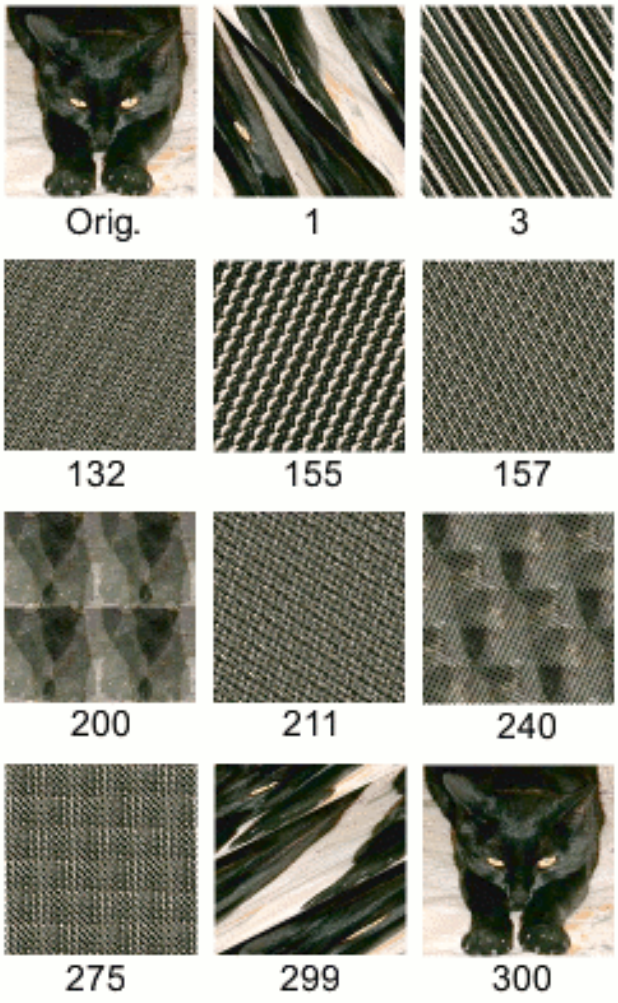


Рис. 48. Возвращение кота Арнольда. *Берется двумерный квадрат (с котом), потом он пошагово преобразуется (продолжая оставаться квадратом) по очень простым правилам. В итоге картинка приходит в полностью хаотическое состояние - кот разорван на кусочки, равномерно заполняющие квадрат. Но если не остановиться и продолжить то же преобразование - и в итоге получим обратно кота. (Цифры под картинкой – количество повторных совершений преобразования).*

При итерациях закрашенная область изображения кота вытягивается вдоль направления первого (неустойчивого) собственного вектора на каждом шаге в $\lambda_1 = \dfrac{\ln\left(3+\sqrt{5}\right)}{2} \approx 0{,}9624$ раз (первый показатель Ляпунова) и сжимается вдоль второго (устойчивого) собственного направления в $\lambda_2 = \dfrac{\ln\left(3-\sqrt{5}\right)}{2} \approx -0{,}9624$ раз (второй показатель Ляпунова). Отображение кота Арнольда принадлежит к гиперболическому типу, поскольку его собственные числа $(3+5^{1/2})/2$ и $(3-5^{1/2})/2$ (ни параболическое, ни эллиптическое отображения свойством перемешивания не обладают). один из показателей Ляпунова положителен: известный признак наличия неустойчивости фазовых траекторий по отношению к возмущению начальных условий и главный атрибут динамического хаоса.

После достаточно большого числа итераций изображение кота трансформируется в чрезвычайно узкою полосу, вытянутую вдоль неустойчивого собственного вектора. В целом картина выглядит как набор большого числа узких чередующихся чёрных и белых полосок, в которые превратились, собственно, множество точек, принадлежащих изображению кота, причём чёрные и белые полосы оказываются хорошо перемешанными.

Наблюдая за динамикой перемешивания полос, иногда можно заметить сложные, длительные хаотические режимы, скрытый порядок которых невозможно выявить без знания его алгоритма. Сложность процесса иллюстрирует эффект "возвращение кота" (рис. 48). Процесс перемешивание может быть строго детерминирован, но предсказать возвращение нет никакой возможности, кроме повторения процесса с самого начала. В этом смысле отображение ведёт себя подобно коту из известной притчи Киплинга – кот гуляет сам по себе.

Заметим, что несмотря на ограниченность пространства, деформация не ограничена по шкале масштабов, что обеспечивает бесконечное различение сценариев перемешивания, вследствие которого исходный образ в точности может не повториться никогда. Эту масштабную вложенность геометрически иллюстрирует объект, известный как "сапог Шварца".

Данное отображение является простой дискретной системой, которая растягивает и «складывает» траектории в фазовом пространстве. Это является одним из типичных свойств и особенностей хаотических процессов.

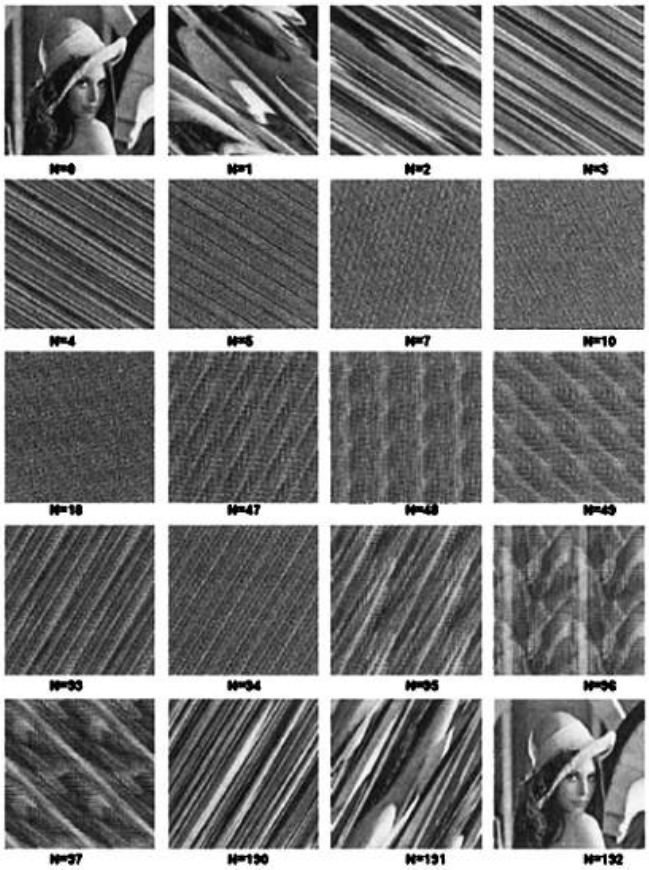


Рис. 49. Отображение кота Арнольда на примере фотографии Лины Седерберг *(*мисс Ноябрь журнала «Плейбой» 1972 г.). *Результатом многократного растяжения и складывания изображения (верхние ряды) будет однородное поле (центральные ряды). Однако на каком-то этапе некоторые точки будут располагаться вблизи исходных положений, и исходное изображение внезапно появится вновь (нижний ряд). Однако оно отличается от исходного (траектории динамических систем совпадают друг с другом, только, если являются периодическими, а здесь имеют место хаотические орбиты. Лицо Лины появляется и исчезает бесконечное число раз. Так проявляет себя детерминированный хаос.*

После достаточно большого числа итераций изображение кота превращается в чрезвычайно узкую полосу, вытянутую вдоль неустойчивого собственного направления, т.е. близкую к длинному отрезку линии, заданной уравнением $p=kx$, $k=(5^{1/2}-1)/2$. Из-за того, что угловой коэффициент иррационален, эта линия покрывает поверхность тора всюду плотно. Поэтому картина выглядит как набор большого числа узких чередующихся черных и белых полосок, в которые превратились, соответственно, множество точек, принадлежащих изображению кота, и дополнение этого множества. "черная" и "белая" жидкости оказываются хорошо перемешанными. Свойство перемешивания в его точной

математической формулировке строго доказывается для гиперболических отображений на торе и служит основанием для заключения о хаотической динамике этих систем.

Портрет Лины (рис. 49) демонстрирует теорему Пуанкаре о возвращении: если повторно применять одно и то же преобразование к системе, которая не может выйти за определенные границы, она бесконечное число раз будет возвращаться в состояние, близкое к оригиналу. Иными словами, рано или поздно все вернется на круги своя. Существование периодического решения означает, что если мы проткнули колесо велосипеда, то можно подождать и оно наполнится воздухом само по собой – так гласит теорема Пуанкаре. Увы! Ждать придётся дольше, чем существует Вселенная.

21.4 Отображение Икеды (*Ikeda map*)

К настоящему времени в нелинейной динамике сложились две независимые ветви: исследование консервативных и диссипативных систем. Практически все методы исследования диссипативных систем связаны с исследованием структуры аттрактора, в то время как в консервативных системах аттрактор отсутствует, и поэтому решение зависит от начальных условий, так что даже при одних и тех же значениях параметров система может демонстрировать разнообразное поведение. Однако в некоторых системах можно наблюдать переход от диссипативной к консервативной динамике при непрерывном изменении соответствующего параметра. При этом при приближении к консервативному случаю возникает поведение, демонстрирующее черты как консервативной, так и диссипативной динамики („почти консервативное“ поведение). Для динамики систем с очень слабой диссипацией характерно наличие чрезвычайно большого числа сосуществующих низкопериодических аттракторов и значительное увеличение длительности переходного процесса. Динамика такой системы оказывается также весьма чувствительной к шуму. Консервативные системы, являясь в негрубыми, переходят в класс слабо диссипативных при незначительном изменении параметра, отвечающего за диссипацию. Для исследования общих свойств слабо диссипативных систем удобно изучать такие системы, которые при непрерывном изменении параметров могут демонстрировать и диссипативный, и консервативный, и почти консервативный (слабо диссипативный) тип поведения. Примером такой системы является отображение Икеды.

Отображение Икеды (1980) как модель, объясняющая возникновения сложной динамики в нелинейной оптической системе (возбуждение лазером кольцевого оптического резонатора, содержащего среду с фазовой нелинейностью). Резонатор возбуждается лучом лазера через полупрозрачное зеркало. Нетривиальные колебательные режимы могут реализоваться благодаря интерференции монохроматического сигнала на входе и модулированного по фазе сигнала, прошедшего через нелинейную среду.

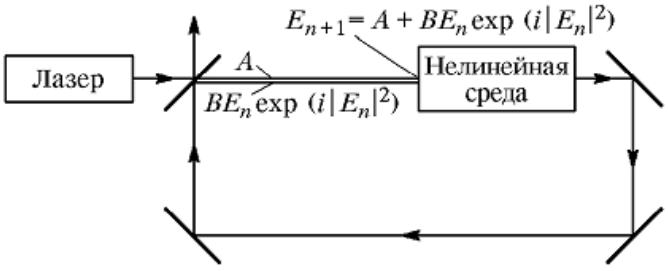


Рис. 50. Кольцевой резонатор, возбуждаемый внешним источником когеррентного излучения, – физическая система, для которой предложено отображение Икеды.

Отображение Икеды возникает при анализе неизохронного осциллятора, возбуждаемого периодическими импульсными толчками (осциллятор Дуффинга).

Отображение Икеды в комплексной записи

$$z_{n+1}=A+Bz_n\exp(i|z_n|^2+\psi) \qquad (26)$$

Соотношение (26) даёт выражение для амплитуды прошедшего через кольцевой резонатор излучения, при этом z имеет смысл безразмерной амплитуды излучения, B – безразмерной диссипации в среде, A – безразмерной интенсивности излучения лазера

(безразмерная амплитуда), ψ – безразмерный период воздействия. Параметр – параметр диссипации, характеризующий потерю резонатора, при Икеды становится консервативным (диссипация отсутствует), при $B<1$ – диссипативным (якобиан $J=B^2$), при $B \approx 1$ – слабо диссипативной, при $B=0$ диссипация бесконечно велика. На рис. показаны портреты хаотических аттракторов Икеды при различных значениях параметра A.

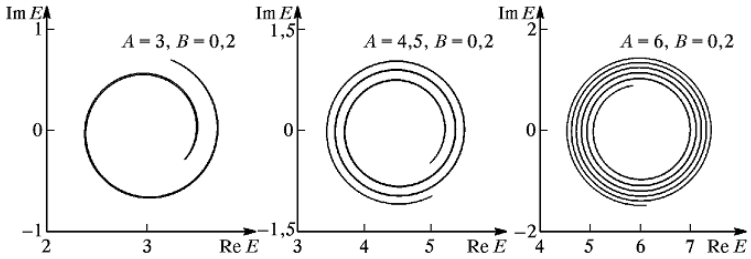


Рис. 51. Странный хаотический аттрактор в отображении Икеды при B=0, φ=0, нескольких различных значениях параметра интенсивности падающего излучения.

Это же отображение в действительной форме

$x_{n+1}=A+B[x_n\cos(x_n^2+y_n^2+\varphi)-y_n\sin(x_n^2+y_n^2+\varphi)]$, (27а)

$y_{n+1}=B[x_n\sin(x_n^2+y_n^2+\varphi)+y_n\cos(x_n^2+y_n^2+\varphi)]$ (27б)

Двумерным реальным примером приведенной выше формы является:

$x_{n+1}=1+u(x_n\cos t_n-y_n\sin t_n)$, (28а)

$y_{n+1}=u(x_n\sin t_n+y_n\cos t_n)$, (28б)

где u – параметр и $t_n = 0{,}4 - \dfrac{6}{1+x_n^2+y_n^2}$.

Для эта система имеет хаотический аттрактор.

При увеличении параметра A в системе Икеды происходит переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Для исследования динамики почти консервативной системы строят бифуркационные деревья (т. е. зависимости установившихся значений переменной x=Rez от параметра A) при различных значениях параметра диссипации B. При уменьшении диссипации количество сосуществующих низкопериодических аттракторов увеличивается. При этом их можно разделить на два типа. Аттракторы первого типа появляются при сравнительно небольших значениях параметра A и характеризуются большой длиной интервала по оси A, в котором они существуют. С увеличением A они приближаются к «основному» аттрактору, появляющемуся при A=0. Кроме того, они появляются при меньших значениях параметра B.

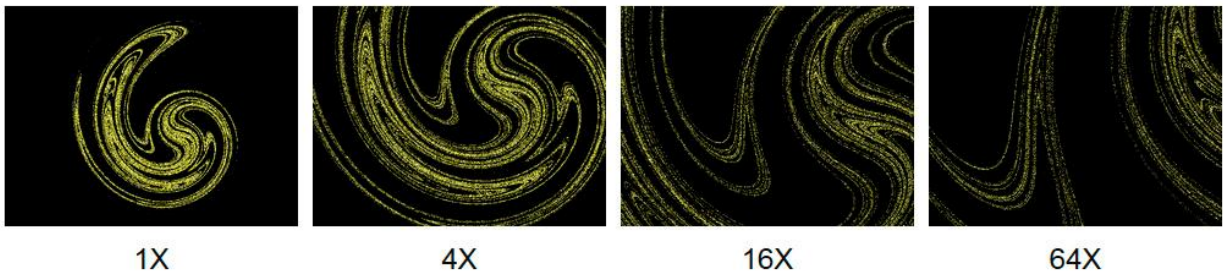
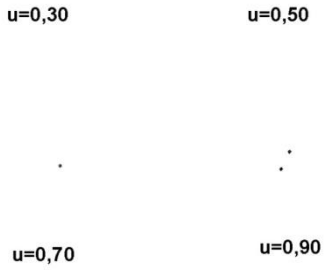


Рис. 52. Аттрактор Икеды при различном увеличении



Аттракторы второго типа появляются при больших значениях параметра A, характеризуются значительно более сложной динамикой, отвечающей сравнительно небольшим диапазонам управляющего параметра A, и, являются аттракторами периодов 2 и выше, так как на бифуркационной диаграмме для переменной $|z|^2$ изображающие их точки появляются парами или большим числом точек одновременно. При визуальном исследовании на бифуркационной диаграмме почти не наблюдается хаотических аттракторов, что связано, вероятно, с тем, что они имеют бассейны

притяжения с характерным размером меньше периода сетки начальных условий. Каскад удвоений периода для периодических аттракторов наблюдается, как правило, лишь до периода 2, что связано с тем, что в консервативном случае расстояния между точками двух последовательных удвоений периода уменьшаются значительно быстрее, чем в диссипативном.

Рис. 53. Эволюция аттрактора системы Икеда при изменении параметра 0,0 до 1,0. При росте и происходит бифуркация точек аттрактора.

В системе Икеды сосуществует большое число низкопериодических аттракторов, тем большее, чем меньше диссипация в системе, а также наблюдается весьма длительный переходный процесс. На начальных стадиях эволюции система со слабой диссипацией ведёт себя как консервативная, в частности демонстрирует непериодическое поведение, однако при длительной эволюции ее динамика становится Весьма интересным является вопрос об устойчивости возникающих в слабодиссипативном случае аттракторов к шумовому воздействию.

Влияние внешнего шума удобно рассматривать на модели:

$$z_{n+1} = A + Bz_n e^{i\left(|z_n|^2 + \Psi\right)} + \varepsilon\xi_n , \qquad (29)$$

где ξn – случайная вещественная величина, предполагавшаяся равномерно распределенной на симметричном относительно нуля отрезке.

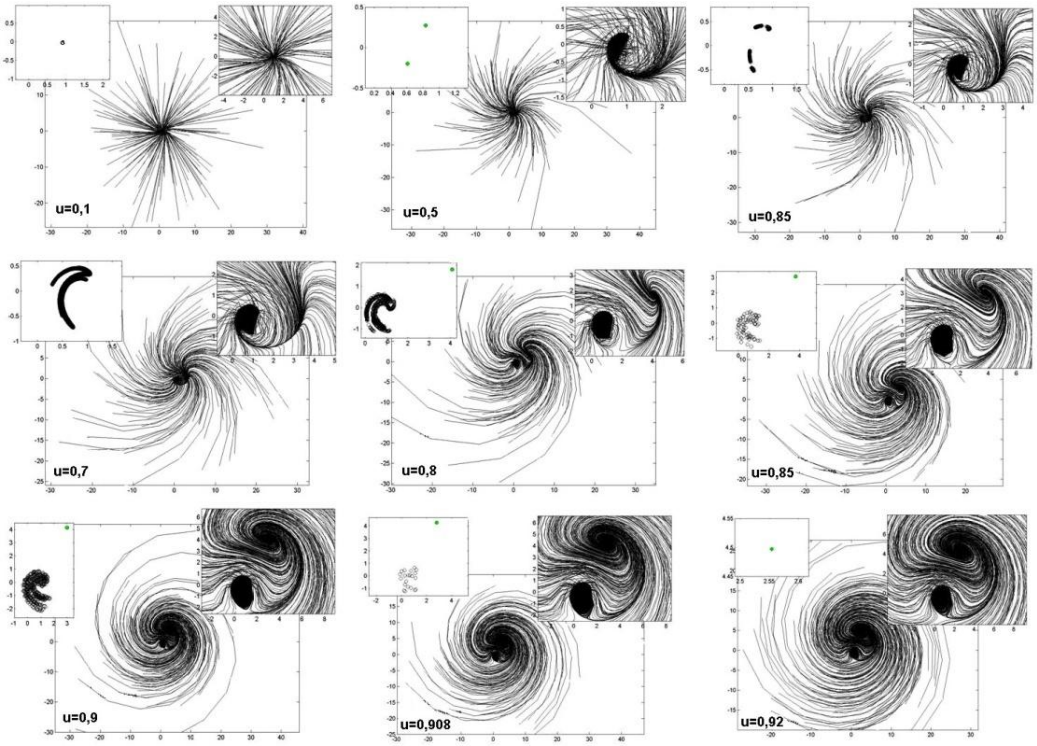


Рис. 54. Траектории 2000 случайных точек в отображении Икеды при и= 0.918.

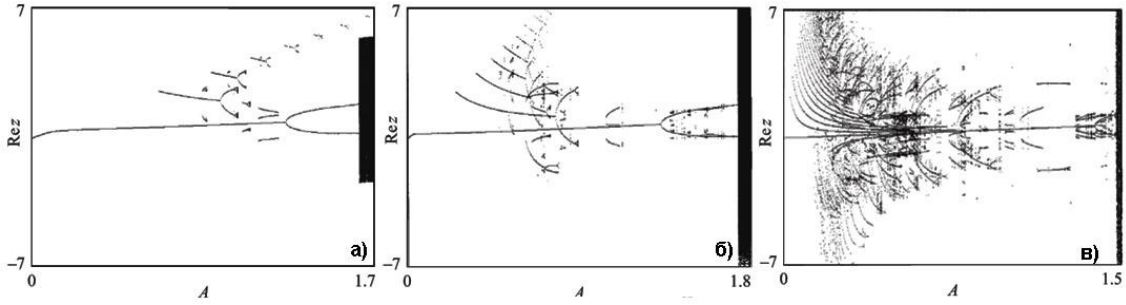


Рис. 55. Бифуркационные деревья системы (26), построенные для набора начальных условий при различных значениях параметра B: *а – B = 0.75; б – B = 0.9; в – B = 0.99. Значение параметра ψ зафиксировано: ψ = 0.*

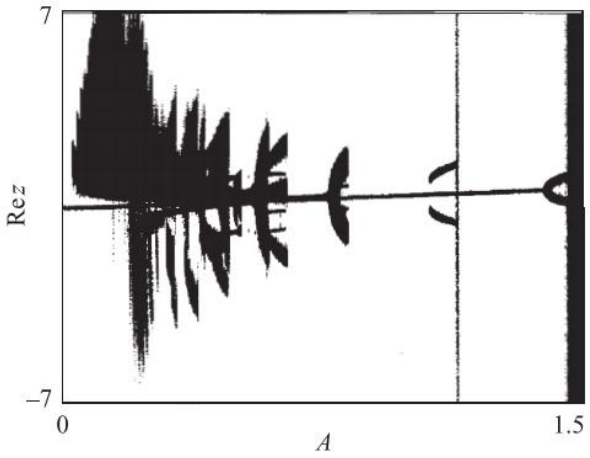


Рис. 56. Бифуркационные деревья системы (2), построенные для набора начальных условий. Амплитуда внешнего шума ε = 0.005, значения параметров B = 0.99, ψ = 0.

В рамках модели неавтономного нелинейного осциллятора шумовое воздействие может рассматриваться как случайная модуляция амплитуды импульсов. Под влиянием шума существенная часть аттракторов, в том числе большинство аттракторов второго типа, разрушается, что свидетельствует о малости их бассейнов притяжения, а длины интервалов по параметру *A*, в которых существуют остальные аттракторы, уменьшаются. Наблюдается резкое расширение некоторых аттракторов, исчезавших в автономной системе при некотором значении параметра *A*, непосредственно перед их исчезновением. Таким образом, при уменьшении диссипации в отображении Икеды наблюдается резкое увеличение числа сосуществующих низкопериодических аттракторов, а также длительности переходного процесса. В то же время большая часть этих аттракторов разрушается при воздействии´ на систему внешнего шума.

При изучении неавтономного осциллятора «естественными» параметрами являются амплитуда и период (частота) воздействия, т.е. интересна плоскость параметров (*A*, ψ). На рис. 55*а*, *б* показаны полученные численно карты динамических режимов для отображения (26) в случае большой (*B*=0.3) и малой (*B*=0.9) диссипации. Оттенками серого цвета показаны циклы различных периодов.

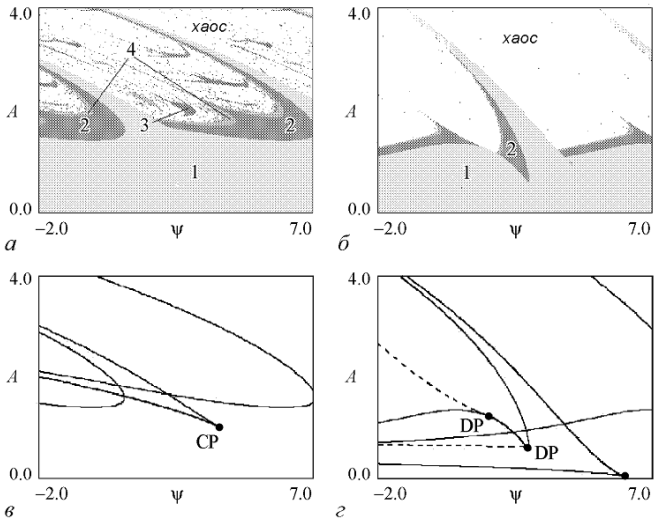


Рис. 57. Карты динамических режимов (а, б) и основные бифуркационные линии (в, г) на плоскости параметров (A, ψ) отображения (26) при изменении параметра диссипации*: B=0.3 (а, в); B=0.9 (б, г).*

На рис. 57 *в*, *г* представлены соответствующие основные бифуркационные линии. При малом *B* на рисунках четко видны характерные для любого осциллятора структуры «*crossroad area*», состоящие из точки сборки с отходящими от нее линиями складок и двух линий удвоения периода, одна из ветвей которых уходит вдоль «берега» складки. При увеличении параметра *B* области существования устойчивых периодических режимов прижимаются к оси *A*=0, в области хаоса становится заметно меньше периодических структур.

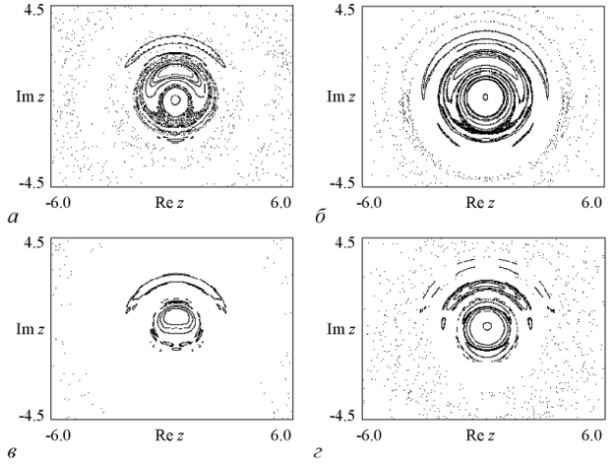


Рис. 58. Фазовые портреты отображения (26) в консервативном случае для следующих значений параметров: *A = 0.3, ψ = 3π/2 (а); A = 0.2, ψ = π (б); A = 0.4, ψ = 0 (в); A = 0.3, ψ = π/2 (г).*

Рис. 57 *в*, *г* демонстрируют метаморфозы бифуркационной системы «*crossroad area*» (область перекрёстка) при увеличении параметра *B*. На линии, соответствующей равенству минус единице одного из мультипликаторов (линии удвоения периода), появляется участок, на котором бифуркация удвоения периода становится субкритической, то есть эта линия становится линией жесткого перехода

Она отделена от участков линии, на которых бифуркация удвоения периода является суперкритической, точками типа «вырожденный флип» (*DP*). От них отходят линии касательной бифуркации (складки) для цикла периода 2 (штриховые линии на рис. 56*г*). Эти точки появляются на линии удвоения периода при значении *B*=0.627, а при дальнейшем уменьшении диссипации расходятся все дальше друг от друга. С увеличением параметра *B* структура «crossroad area» сильно деформируется. Так, одна из линий складок и точка сборки (СР) все больше приближаются к оси *A*=0, и в консервативном случае они будут находиться прямо на этой оси. Чем ближе *B* к 1, тем сложнее построить четкую карту. Например, при *B*>0.9 граница областей существования устойчивых периодических режимов и хаоса из-за яркого проявления мультистабильности имеет изрезанный вид, а процесс построения карты требует большего числа итераций и становится долгим из-за увеличения длительности переходного процесса.

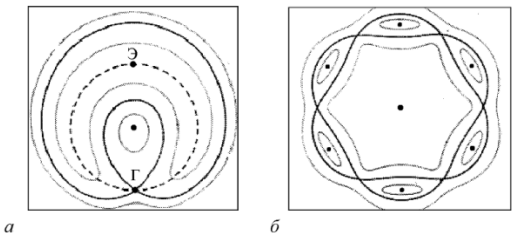


Рис. 59. Фазовые колебания при нелинейном резонансе первого (а) и высшего (б) порядков. Пунктир – невозмущенные колебания, тонкие кривые – фазовые колебания, жирная кривая – сепаратриса. Э – эллиптическая особая точка, Г – гиперболическая.

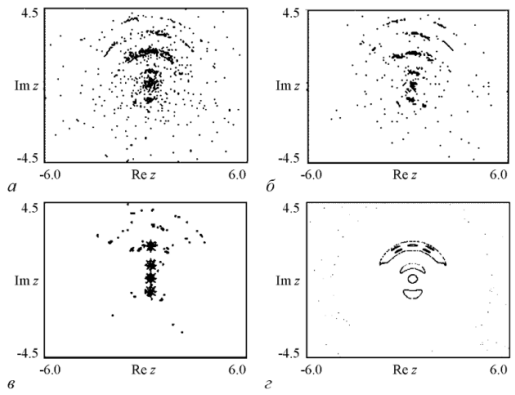


Рис. 60. Сравнение слабо диссипативного (а–в) и консервативного (г) случаев отображения (1). *Число пропущенных итераций: 200 (а); 370 (б); 660 (в). Значения параметров: A=0.5, ψ=3π/4.*

В консервативном случае основным инструментом служит построение фазовых портретов. Системы замкнутых траекторий соответствуют наличию особых точек типа центр (эллиптических точек), а «выемки» на них – наличию гиперболических особых точек (седел) снаружи. Фазовые портреты отображения (26) приведены на рис. 59. Их вид является типичным для фазовых портретов консервативного осциллятора под внешним воздействием: они представляют собой области, или «острова» периодичности, окруженные областями хаотического поведения системы – «хаотическим морем» При некоторых значениях параметров «хаотическое море» наблюдается не только снаружи, но и внутри «островов периодичности». На фазовых портретах хорошо видны структуры, соответствующие фазовым колебаниям при нелинейном резонансе (рис. 59).

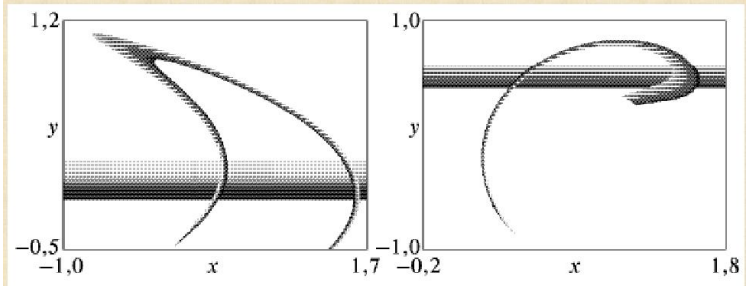
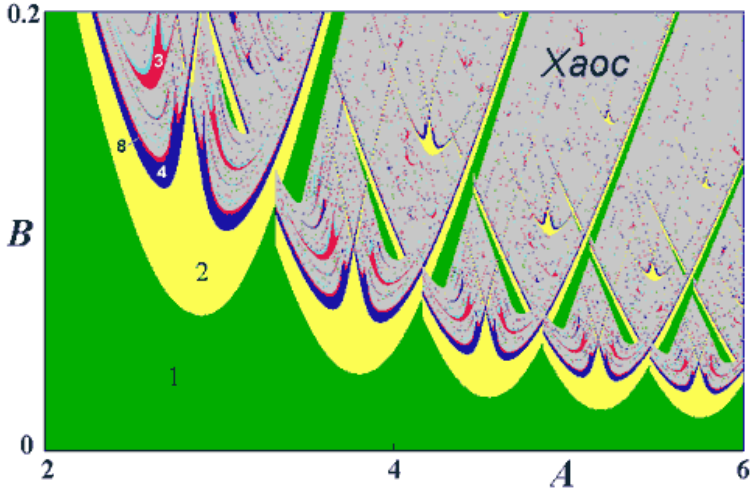


Рис. 61. Возникновение подковы при двукратной итерации в отображениях Эно (a=1,4, b=-0,7) и Икеды (A=1,4, B=0,7)



Для исследования системы в «почти консервативном» случае интересно рассмотреть облако изображающих точек при его конденсации на аттрактор на разных стадиях эволюции и сравнить его вид с видом фазовых портретов в консервативном случае (рис. 61).

Рис. 62. Фазовая диаграмма отображения Икеды

На представленных рисунках видно, что достаточно долго (в течение сотен итераций) облако изображающих точек примерно повторяет вид фазового портрета в консервативной системе, затем оно становится все менее четким, и в конечном итоге остаются «точечные» аттракторы. Хорошо видно, что аттракторы типа устойчивый фокус, отмеченные на рисунке звездочками, примерно повторяют положение особых точек типа центр в консервативном случае.

Среди большого множества аттракторов почти нет хаотических, что можно объяснить тем, что они имеют очень узкие бассейны притяжения с характерным размером меньше периода сетки начальных условий. Каскад удвоений периода для периодических аттракторов наблюдается лишь до цикла периода 2: в консервативном случае расстояния между последовательными точками бифуркаций удвоения периода уменьшаются гораздо быстрее, чем в диссипативном (соответствующая константа равна δH=8.7210972 существенно больше числа Фейгенбаума δ =4.6692016.). Отвечающие большим периодам участки бифуркационных деревьев не отображаются на бифуркационной диаграмме при выбранном разрешении.



Рис. 63. Часть плоскости параметров нелинейной системы, отвечающей области crossroad – перекресток

В отображении Икеды переход к хаосу происходит, как правило, через каскад удвоения периода. Однако глобальная структура хаоса устроена сложным и нетривиальным образом. В частности, имеются узкие полосы регулярной динамики, простирающиеся далеко в область, занятую хаосом. Основным блоком картины служит характерная конфигурация областей, показанная отдельно на рис. 63. К. Мира назвал её crossroad area – область перекрёстка. В этой области располагается точка сборки, к которой подходт, образуя характерное остриё, две линии складок. Складка здесь представляет собой геометрическое место точек бифуркации, отвечающих слиянию устойчивой и неустойчивой неподвижной орбиты одинакого периода. Эту бифуркацию называют седло-узловой или касательной бифуркацией (второй термин предпочтителен, когда говорят об одномерных отображениях, а первый – о системах с большой размерностью фазового пространства).

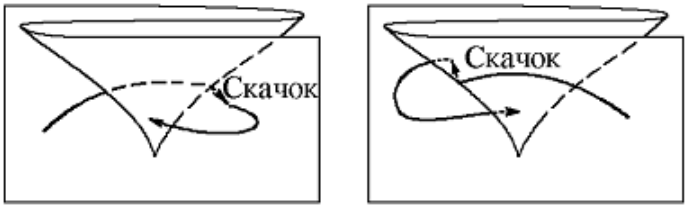


Рис. 64. Иллюстрация гистерезиса, наблюдаемого в окрестности точки сборки.

Линии складок можно рассматривать как края соответствующих листов карты. При обходе вокруг точки сборки система совершает перескок с одного листа на другой при пересечении определённой линии складки. В зависимости от направления обхода, скачок происходит на разных линиях, так что имеет место гистерезис (рис. 64). Между линиями складок находится область бистабильности, где при одних и тех же пааметрах в системе в зависимости от начальных условий может реальзоваться один из двух аттракторов. С каждым из них ассоциируется определённый лист карты динамических режимов, на котором имеется своя конфигурация областей, отвечающих метаморфозам этого аттрактора. В частности, на каждом листе представлены линии бифуркаций удвоения периода, области хаоса, а также вторичные сборки и вторичные перекрестки, организованные около этих сборок.

22. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ АТТРАКТОРЫ

22.1 Хаос в консервативных и диссипативных системах

Ещё недавно, разграничение динамических систем с точки зрения их возможного хаотического поведения проводилось довольно чётко.

1) **Консервативные** (гамильтоновы) **системы** (сохранение энергии, постоянство объёма фазового пространства при эволюции, подчинение теореме Лиувилля), в которых может наблюдаться полный статистический беспорядок, и в которых в поисках порядка не на что опереться (нет притягивающих областей в фазовом пространстве, нет аттракторов). Гамильтонова система с разделённым фазовым пространством в целом проявляет перемежающий динамический режим: вслед за хаотическим поведением в течение продолжительного времени наблюдается почти регулярная динамика. Примеры: рассеяние материальных частиц на шариках, рассеивающие бильярды (бильярд Синая), ротатор, испытывающий периодические толчки, паутина Арнольда, отображение пекарь, кот Арнольда и др.

2) **Диссипативные** (негамильтоновы) **системы** (рассеяние энергии, сильная неравновесность, неустойчивые состояния, сжатие элемента в фазовом пространстве: при итерациях отображения первоначальный объём, занимаемый облаком фазовых точек, уменьшается, в результате при $t\to\infty$), – системы, все фазовые траектории которых сходятся к некоторому подмножеству нулевого фазового объёма. В диссипативной системе существует притягивающее множество – аттрактор, соответствующий установившему динамическому режиму системы. Он может быть регулярным, нерегулярным, странным, хаотическим или диким, фрактальным или эвклидовым, даже квазиаттрактором, но важно, что он вообще есть, его наличие позволяет с грехом пополам, но за порядком всё же как-то следить. Поэтому диссипативная система может переходить в упорядоченное состояние в результате неустойчивости предыдущего неупорядоченного состояния. Первоначально устойчивая диссипативная структура в процессе своей эволюции достигает критического состояния, отвечающего порогу устойчивости структуры, начинает осциллировать, а возникающие в ней флуктуации приводят к самоорганизации новой, более устойчивой структуры на данном иерархическом уровне эволюции. В диссипативных системах на определенном для каждой системы удалении от состояния равновесия флуктуации вместо того, чтобы затухать (как в равновесных системах), наоборот усиливаются и завладевают всей системой, вынуждая ее эволюционировать к новому режиму. Величины флуктуаций резко увеличиваются вблизи точек бифуркации по сравнению с неравновесными состояниями, далекими от точек бифуркаций, и тем более по сравнению с равновесными состояниями. Гигантские флуктуации, чередуясь, создают впечатление хаоса, но на самом истинным хаосом (в смысле полного беспорядка) не являются. Диссипативная система дифференциальных уравнений может иметь как конечное, так и бесконечное число различных аттракторов. Все начальные точки в фазовом пространстве, кроме множества меры нуль, лежат в области притяжения одного из них.

Однако такая классификация начала размываться, поскольку было обнаружено, что в некоторых системах наблюдается переход от диссипативной к консервативной динамике при непрерывном изменении управляющего параметра, причём при приближении к консервативному случаю возникает поведение, демонстрирующее черты как консервативной, так и диссипативной динамики („почти консервативное“ поведение). Пример: отображение Икеды. Оказалось, что многие черты рождения хаоса у консервативных и динамических являются общими.

Следует помнить, что в нелинейной динамике рассматривается не классический (статистический) хаос, а детерминированный хаос. Такой хаос может быть ложным

хаосом. Примерами являются преображение Пуассона, кот Арнольда и т.п, когда исходный порядок вновь возникает из хаоса и снова исчезает в нём.

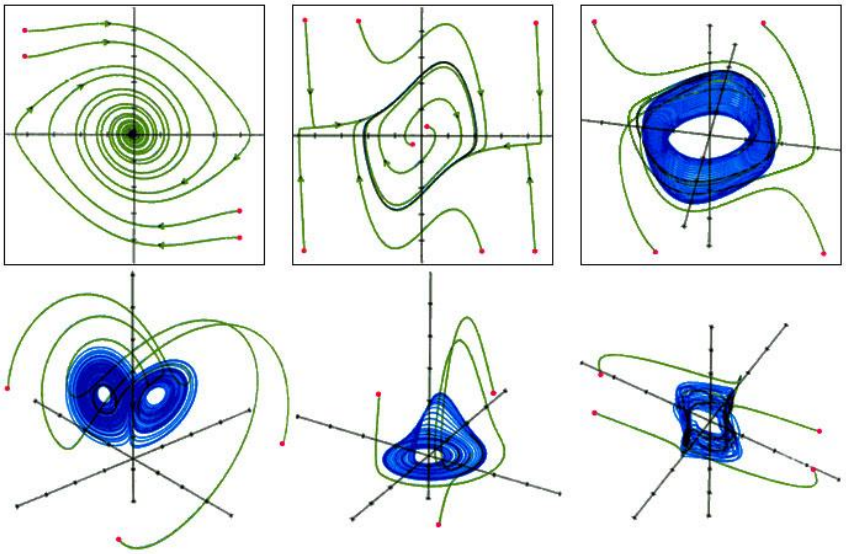


Рис. 1. Аттракторы – это геометрические структуры, характеризующие поведение в фазовом пространстве по прошествии длительного времени. Аттракторы показаны синим цветом, а начальные состояния — красным. Траектории, выйдя из начальных состояний, в конце концов приближаются к аттракторам. Самый простой тип аттрактора — неподвижная точка (*вверху слева*). Более сложный аттрактор — предельный цикл (*вверху в центре*), который имеет форму замкнутой петли в фазовом пространстве (устойчивые колебания). Сложному колебанию, или квазипериодическому движению, соответствует аттрактор в форме тора (*вверху справа*). Все три аттрактора предсказуемы: их поведение можно прогнозировать с любой точностью. Хаотические аттракторы соответствуют непредсказуемому движению и имеют более сложную геометрическую форму. Три примера хаотических аттракторов изображены в нижнем ряду; они получены (*слева направо*) Э. Лоренцем, О. Рёсслером и Р.Шоу) соответственно путём решения простых систем дифференциальных уравнений с трёхмерным фазовым пространством.

Динамический хаос, как и любой другой случайный процесс, требует статистического описания. Обычно рассчитываются вероятностные характеристики: стационарное распределение вероятности по аттрактору, корреляционные функции, спектры мощности и другие. Хаотические колебания системы с хаотическим аттрактором имеют разные статистические свойства и различную чувствительность к воздействию шума.

Физическое проявление детерминированного хаоса - поведение системы, при котором ее хаотические траектории становятся неотличимыми от некоторого случайного процесса. Это отображает соответствие между решениями стохастического и детерминированных уравнений. Однако динамика хаотических систем не является полностью случайной. В основе хаотичности лежит экспоненциальная неустойчивость. При этом, для того, чтобы система обладала хаотическим поведением (т.е. имела чувствительную зависимость от начальных условий), необходима только неустойчивость, фигурирующая в определении **гиперболичности**. Но вовсе не обязательно, чтобы эта неустойчивость была одинаковой для всех траекторий. Более того, для различных траекторий количество неустойчивых направлений может быть разным. Так устроены, например, аттракторы типа Лоренца, которые не разрушаются при малых возмущениях.

Среди гладких динамических систем гиперболическая динамика выделяется наличием расширяющихся и сплющивающих направлений производной. При итерации наличие этих направлений создает экспоненциальное разбегание орбит. Растяжение и сгибание (пример: подкова Смейла, которая содержит нетривиально гиперболическое множество) приводит к сложному поведению таких систем. Динамика во многих отношениях случайна, хотя эти системы полностью детерминированы. Теория

гиперболических динамических систем обеспечивает строгую математическую основу явления, известного как детерминированный хаос – появление хаотических движений в чисто детерминированных динамических системах. Причиной для этих движений является неустойчивость траекторий, выражаемая в терминах условий гиперболичности.

Гиперболическое множество - компактное инвариантное множество Λ диффеоморфизма f такое, что касательное пространство в каждом $x \in \Lambda$ допускает инвариантное расщепление, которое удовлетворяет условиям сжатия и расширения.

В диссипативных системах объём облака изображающих точек убывает и оно оседает на аттрактор (или на несколько аттракторов). Хаос имеет место при наличии повторяющихся преобразований, включающих растяжение и сплющивание облака изображающих точек, что обеспечивает перемешивающий характер динамики. Гиперболический хаос будет реализоваться, если такая эволюция во времени происходит совершенным образом, без разрывов и образования локальных уплотнений.

Для диссипативных систем характерны такие множества, как устойчивые и неустойчивые стационарные точки и предельные циклы, многомерные притягивающие торы, соответствующие устойчивому квазипериодическому поведению с несоизмеримыми частотами, математический образ хаотических колебаний – нерегулярный аттрактор и др.

Классификация аттракторов тесно связана с классификацией хаоса, поскольку оказалось, что хаос хаосу рознь.

Детерминированный хаос должен удовлетворять целому комплексу требований: экспоненциальная неустойчивость, выполнение условия транзитивности, наличие некоторой регулярности – плотности периодических орбит (циклов). Условие транзитивности можно заменить условием топологического перемешивания, которое является более сильным. Преобразование, заданное на компактном множестве, определятся как хаотическое, если оно обладает чувствительной зависимостью от начальных условий и имеет плотные циклы. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то хаос хаосом не считается, какой бы бардак не царил в системе.

Хаотическая (сложная) система – должна удовлетворяет критериям:

– система должна быть детерминированной: нет «случайных» или внешних факторов, влияющих на поведение системы;

– система должна быть чувствительной к начальным условиям: траектории, которые начинаются близко друг к другу, со временем должны разделиться со все большей скоростью;

– система должна быть «апериодической»: должны существовать траектории, которые не располагаются до фиксированных точек или фиксированных предельных циклов.

Периодическая динамическая система – система, в которой имеет место оседание на устойчивое состояние или последовательность состояний; в апериодической системе нет оседания на устойчивое состояние или на устойчивую последовательности состояний.

Хорошо изученным классом динамических систем с хаотическим поведением являются системы с гиперболическими хаотическими аттракторами. К гиперболическим множествам относятся также инвариантные множества в окрестности гомоклинических и гетероклинических траекторий. Такие траектории, открытые Пуанкаре при изучении задачи N тел, встречаются как в консервативных, так и диссипавтивных системах. С гомоклиническими и гетероклиническими сплетениями тесно связана подкова Смейла.

В качестве особого класса систем со структурно устойчивым хаосом выступают **системы Аносова**. В этих системах фазовое пространство целиком представляет собой гиперболическое инвариантное множество, и все траектории являются седловыми. Данное отображение является консервативной системой и, следовательно, аттракторов для него не существует. Примеры: отображение Фибоначчи и «кот Арнольда».

Диффеоморфизмы Аносова – класс отображений с хаотической динамикой, динамика которых устойчива относительно малых возмущений.

Диффеоморфизм – отображение определённого типа между гладкими многообразиями.

Свойство гиперболичности служит основой для построения теории У-систем Амосова.

Системы Аносова – специальный класс систем со структурно-устойчивым хаосом, у которых все фазовое пространство представляет собой гиперболическое инвариантное множество, составленное из траекторий седлового типа, причем типичная траектория посещает плотное во всем фазовом пространстве множество точек.

22.2 Регулярные и хаотические аттракторы

Глобальный аттрактор – наименьшее замкнутое подмножество, притягивающее большинство точек фазового пространства.

Важный класс систем со структурно-устойчивым хаосом – это диссипативные системы, у которых **гиперболическая хаотическая динамика** имеет место на вложенном в фазовое пространство притягивающем инвариантном множестве, представляющем собой *однородно гиперболический аттрактор.* Примеры: соленоид Смейла–Вильямса и аттрактор Плыкина, и в каком-то смысле аттрактор Белых и аттрактор Лози. Аттрактор Лоренца и аттрактор Эно не относятся к гиперболическому типу: аттрактор Лоренца является негрубым, а для аттрактора Эно доказаны транзитивность и чувствительная зависимость от начальных условий.

Гиперболический аттрактор - аттрактор, в котором все траектории, принадлежащие аттрактору, седловые. Это аттрактор с изолирующей окрестностью (устойчив по Ляпунову). Хаотическая природа динамики на таких аттракторах математически строго обоснована.

Однородно гиперболический аттрактор – притягивающий объект в фазовом пространстве диссипативной системы, составленный исключительно из седловых гиперболических траекторий. Фазовую траекторию называют гиперболической, если для каждой её точки в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых возмущений можно определить подпространство векторов, норма которых становится экспоненциально малой при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, норма которых становится экспоненциально малой при эволюции в обратном времени. На однородно гиперболическом аттракторе многообразия всех траекторий обязаны быть одной размерности. Устойчивые и неустойчивые многообразия не должны иметь касаний, а пересечения допускаются только под нулевым углом (трансверсально). Эти аттракторы обладают сильными хаотическими свойствами и допускают подробный математический анализ. Однородно гиперболический аттрактор груб и структурно устойчив: малые возмущения не могут привести к качественным перестройкам как самого аттрактора, так и поведения систем в целом. Динамические модели с гиперболическим типом аттрактора являются моделями структурно устойчивых систем с наиболее выраженными хаотическими свойствами.

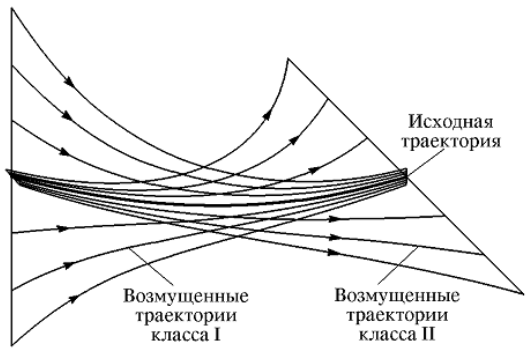


Рис. 2. Устройство окрестности гиперболической (седловой) траектории.

В гиперболическом аттракторе все его траектории седловые (рис. 2). Возьмем любую траекторию на аттракторе и рассмотрим всевозможные близкие к ней возмущенные траектории. В линейном приближении среди них выделяется класс траекторий (1), которые приближаются к исходной, причем в среднем по экспоненте, и класс траекторий (2), приближающихся к исходной в обратном времени,

тоже в среднем по экспоненте. Любой из множества возмущенных траекторий сопоставляется элемент линейного векторного пространства (касательное пространство), причем все множество исчерпывается всевозможными суперпозициями векторов, ассоциирующихся с возмущениями класса 1 и 2. Так должна быть устроена окрестность у **всех** принадлежащих аттрактору траекторий.

Диссипативная система может обладать как аттрактором, так и репеллером (регулярным или нерегулярным). В ходе её эволюции объём фазовой капли неограниченно уменьшается – капля сжимается к аттрактору. Однако сам аттрактор, имея нулевую меру в исходном фазовом пространстве, может оказаться нетривиальным множеством, движение на котором является стохастическим. Это значит, что: 1) на таком аттракторе движение является локально неустойчивым и для него может быть введена К-энтропия и 2) это движение обладает свойствами эргодичности и перемешивания.

Развитию теории динамического хаоса послужило открытие (Смейл, 1960) грубого бесконечного множества неблуждающих траекторий, означавшее возможность существования хаотических колебаний в диссипативных детерминированных системах. Теория динамического хаоса исследует механизм непредсказуемых (случайных) явлений. Такой хаос возникает, длится конечное время и затем исчезает. Именно на стадии хаоса (точнее, при выходе из него) возникает новая ценная информация. В этой стадии существует момент, когда генерация ценной информации наиболее эффективна. Промежуточная хаотическая стадия называется **перемешивающий слой**.

Хаос возможен как стационарный режим динамики диссипативных систем. Речь идёт о стационарности в статистическом смысле: постоянны лишь усредненные за достаточно большой интервал времени статистические характеристики динамики. Это двумерные и трёхмерные модельные отображения, в фазовом пространстве которых имеется притягивающее множество сложной структуры – **нерегулярный аттрактор** (ранее его называли странным хаотическим аттрактором, но теперь понятия странный аттрактор и хаотический аттрактор разошлись, поскольку странный аттрактор вполне может быть нехаотическим, а нерегулярный аттрактор может быть странным, нестранным, диким, фрактальным или нефрактальным).

Замечание. Если раньше понятия нерегулярный, странный, хаотический, стохастический и фрактальный аттракторы были синонимами, то теперь это - разные сущности, иногда – совершенно разные.

Напомним, что аттрактор – конечная стадия развития системы, когда её фазовая траектория перестает изменяться; это устойчивое состояние системы вдали от равновесия с пониженным уровнем энтропии. Это компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к этому множеству точек при времени, стремящемся к бесконечности. Если траектория прошла достаточно близко к аттрактору, то со временем она уже не покинет окрестность аттрактора и даже будет подходить к нему все ближе и ближе, т.е. будет наблюдаться эффект притяжения к аттрактору.

Как известно, существуют три классических типа движения: равновесие, периодическое движение (предельный цикл) и квазипериодическое движение. Эти состояния называются аттракторами, поскольку в присутствии какого-либо затухания переходные отклонения подавляются и система "притягивается" к одному из трёх перечисленных состояний. Аттракторы делят на регулярные и нерегулярные. Если понятие регулярного аттрактора относится к состоянию предельной иерархизации системы, то понятие странного аттрактора - к состоянию ее предельной деиерархизации.

Под аттракторами динамических систем с непрерывным (или дискретным) временем обычно понимают предельные множества траекторий, имеющие в фазовом пространстве область притяжения положительной **лебеговой меры**. К мере Синая-Рюэлля-Боуэна (инвариантной мере на аттракторе), к которой стремятся временные средние типичной начальной точки либо временные средние итераций меры Лебега.

***Мера множества** – неотрицательная величина, интерпретируемая как размер (объём) множества. Мера – это некоторая числовая функция, ставящая в соответствие каждому множеству некоторое неотрицательное число. Свойство аддитивности – мера объединения непересекающихся множеств равна сумме их мер. Для каждой функции меры подразумевается некоторое семейство множеств, для которых мера существует. Частным случаем меры является мера Лебега для подмножеств , обобщающая понятие объёма , площади или длины на случай множеств, более общих, чем просто ограниченные гладкой поверхностью. Мера Лебега – пример счётно-аддитивной меры*.

К регулярным (простым, гладким) аттракторам относится притягивающая неподвижная точка (точка равновесия), притягивающая периодическая траектория (предельный цикл), двумерные и многомерные торы. Известны аттракторы автономных и неавтономных динамических систем; глобальные и локальные. В качестве аттракторов могут выступать точки и линии. Есть примеры отображений, у которых аттрактор гладкая поверхность любой размерности, например, *k*-мерной сферой. В диссипативных системах при стремлении системы к аттрактору происходит сжатие фазового объёма в точку, если аттрактор – узел или фокус; в замкнутую траекторию, соответствующую устойчивому периодическому движению, если аттрактор – предельный цикл; в тор, соответствующий устойчивому квазипериодическому движению, если аттрактор – двумерный тор. Аттракторы в виде состояний равновесия, предельных циклов или *n*-мерных торов называют простыми или регулярными, подчеркивая тем самым, что движения на них отвечают сложившимся представлениям об устойчивом по Ляпунову детерминированном поведении динамической системы.

Существует, однако, класс движений (например, нелинейные колебания), который не сводится ни к одному из классических аттракторов. Здесь движения хаотичны в том смысле, что, если присутствует малая неопределённость начальных условий, то они непредсказуемы. Аттракторы отображений, отличные от устойчивых неподвижных точек, периодических орбит и замкнутых инвариантных кривых, т.е. содержащие почти периодические траектории, возвращаемость которых нерегулярна, называют **нерегулярными аттракторами**. В этом случае в качестве аттракторов выступают сложные множества. Эти аттракторы не являются поверхностями никакой размерности (в том числе нулевой и первой); они устроены «рваным», негладким образом.

Нерегулярные аттракторы – все аттракторы, обладающие свойствами странности или хаотичности.

Важным частным случаем нерегулярного аттрактора является **стохастический** (квазигиперболический) **аттрактор**. Пример: стохастический аттрактор Синая. Определение стохастический не ассоциируется с наличием в системе случайных внешних возмущений и шумов; оно заимствовано из теории вероятности и связано с инвариантной мерой.

На первый взгляд кажется, что существование в диссипативной системе аттрактора исключает возможность стохастической динамики в фазовом пространстве, поскольку с течением времени расстояние между точками фазовой траектории и точками множества аттрактора должно стремиться к нулю. Поэтому с течением времени траектория все больше приближается к точке или циклу, в структуре которых нет ничего случайного. Однако это не так. Существуют притягивающие множества, структура которых очень сложна. Динамика точки на такой структуре является случайной подобно тому, как это имеет место в консервативных системах. Такое притягивающее множество, на котором реализуется стохастическая динамика называется стохастическим аттрактором.

***Стохастический аттрактор** – инвариантное множество шкалы A в фазовом пространстве, обладающие следующими свойствами:*

1) Существует соседний U, A⊂U, такой, что если x∈U, то $\lim_{t\to+\infty} расстояние\left(x(t), A\right) = 0$.

2) Сдвиг любого начального распределения вероятностей P_0 на A сдвиг сходится к инвариантному распределению P на A при $t\to\infty$, независимо от P_0.

3) Распределение вероятности P подвержено смешению, т. е. функция автокорреляции стремится к нулю при $t\to\infty$.

Замечание. Условие 3) исключает существование устойчивых точек.

Всякое предельное множество является стохастическим аттрактором. Для такого аттрактора свойства растяжения и сжатия на неустойчивых и устойчивых многообразиях соответственно являются грубыми, однако геометрическая картина и степень растяжения и сжатия в различных точках аттрактора может различаться. Такой аттрактор не содержит устойчивые траектории, и они не могут там появиться при малых возмущениях системы.

Примерами стохастических аттракторов являются как гиперболические, так и аттракторы типа Лоренца; они могут быть описаны в рамках эргодической теории. Небольшое случайное возмущение не влияет на подобные аттракторы, т.к. динамическая стохастичность доминирует над белым шумом. Понятие стохастичности предполагает, что система совершает финитное движение, причём в конечной области фазового пространства имеется локальная неустойчивость, позволяющая ввести понятие энтропии Колмогорова-Синая. Если в консервативной системе вследствие эргодичности и перемешивания траектория заполняет все фазовое пространство, то в стохастической системе траектория притягивается к некоторому множеству, являющемуся аттрактором, которое не только есть часть фазового пространства, но и может иметь нулевую меру. Стохастический аттрактор обладает как правило фрактальной, т.е. негладкой, сильно изломанной и к тому же самоподобной структурой. Такие аттракторы имеют фрактальную размерность. Однако известны стохастические аттракторы, которые никакой фрактальностью не обладают.

Важным классом нерегулярных аттракторов является странные аттракторы.

Странный аттрактор (Д.Рюэль и Ф.Такенс, 1971) – сложно устроенное множество, к которому в фазовом пространстве диссоциативной динамической системе притягиваются почти все траетории из некоторой окрестности этого множества, а на самом множестве движение имеет экспоненциально неустойчивый характер. Фазовые траектории имеют сложную и запутанную структуру и представляют собой незамкнутые кривые Сочетание глобального сжатия с локальной неустойчивостью приводит к тому, что аттрактор перестаёт быть гладким; он расслаивается, и часто представляет собой в некотором сечении канторово множество. Примеры: аттрактор Лоренца, аттрактор Рёсслера, соленоид Смейла-Вильямса и др.

Замечание. Раньше в понятие странного аттрактора входили термины хаотический и фрактальный. Теперь этого нет.

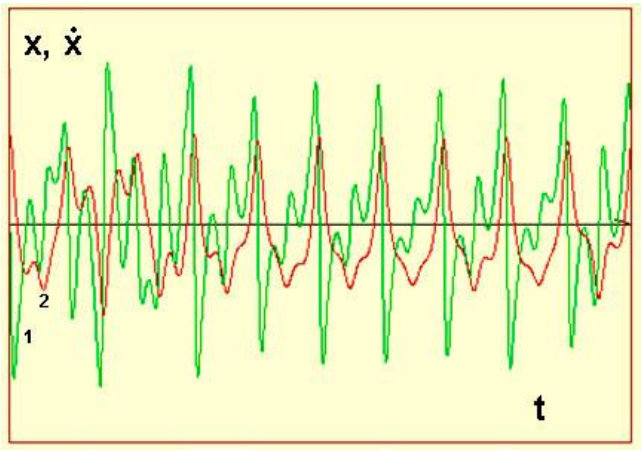


Рис. 3. Хаотические колебания частицы в системе со странным аттрактором: 1 – положения частицы; 2 – скорость частицы.

В осцилляторе со странным аттрактором происходят колебания, но никакой периодичности в них нет (рис. 3). Состояние частицы с положением x и скоростью $\dot{x}$ никогда не повторится. Поскольку расхождение траекторий растёт по экспоненте, то система весьма чувствительна к начальным условиям. Если аттрактор хаотичен, то при небольшом воздействии, система перейдёт в состояние кардинально отличное от предыдущего (рис. 4). Хаотический аттрактор хаотичен, но всё же он аттрактор - притягивает траектории. Точка в фазовом пространстве может блуждать случайным образом, но всё же осядет на аттракторе. Отличие от регулярного аттрактора

от странного состоит в том, что состояние после возмущения нельзя предсказать по состоянию до возмущения. Можно лишь ожидать, что точка окажется где-то на аттракторе, который занимает определённую область в фазовом пространстве.

Странный аттрактор заключают в себе ряд возможностей, при которых равновесие становится ограниченной областью с бесконечным множеством решений в пространстве. Часто структура странного аттрактора фрактальна. Траектория такого аттрактора в фазовом пространстве непериодическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима нарастают). Основным критерием хаотичности аттрактора является экспоненциальное нарастание во времени малых возмущений. Следствием этого является «перемешивание» в системе, непериодичность во времени любой из координат системы, сплошной спектр мощности и убывающая во времени автокорреляционная функция. Странный аттрактор – это динамическая особенность, которая приводит к апериодическому поведению. Это «мягкий» аттрактор предельного цикла, т.е. набор состояний, к которым система ограничена и притягательна. В отличие от предельного цикла странный аттрактор не является замкнутым циклом.

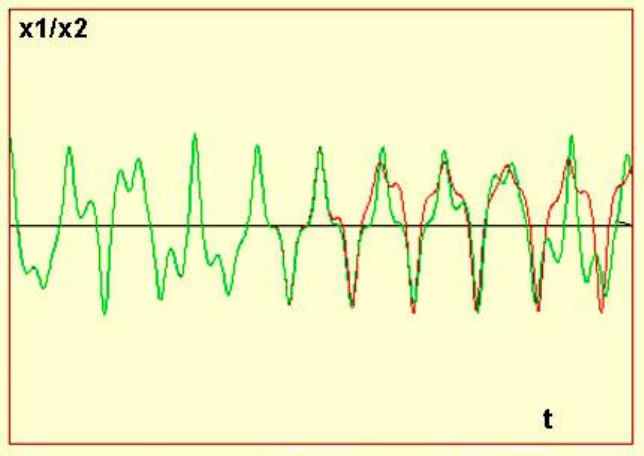


Рис. 4. Изменение колебаний при небольшом сбое.

Динамика на странных аттракторах часто бывает хаотической; прогнозирование траектории, попавшей в аттрактор, затруднено, поскольку малая неточность в начальных данных через некоторое время может привести к сильному расхождению прогноза с реальной траекторией. Непредсказуемость траектории в детерминированных динамических системах называют **динамическим хаосом**, отличая его от **стохастического хаоса**, возникающего в стохастических динамических системах. Траектории странного аттрактора устойчивы по одним и неустойчивы по другим локальным координатам, они чувствительны к малым начальным возмущениям, быстро нарастающим во времени. Поскольку странный аттрактор сохраняет свои свойства и при малых деформациях динамической системы, он служит математическим образом динамического хаоса, представляющего собой стохастические колебания реальных детерминированных систем, моделируемых дифференциальными уравнениями и отображениями.

Непериодические (в том числе - странные) аттракторы появляются в трёхмерном (и более высоком) пространстве состояний. Как и в случае регулярного, у странного аттрактора происходит сжатие фазового объёма диссипативной динамической системы, приводящее к тому, что фазовые траектории с течением времени стягиваются к предельному множеству – странному аттрактору – и, попав в область, занятую им, остаются в ней навсегда. При этом на самом аттракторе движение является неустойчивым. Поведение системы со странным аттрактором характеризуется сочетанием глобального сжатия фазового объёма с локальной неустойчивостью фазовых траекторий. Фазовые траектории странного аттрактора очень чувствительны к начальным данным. Сочетание сильной зависимости от начальных данных с приближённым их значением обусловливает невозможность точных долговременных прогнозов относительно эволюции систем со странным аттрактором. Разделение близлежащих орбит является основным механизмом, который делает невозможным точное предсказание будущего хода хаотических орбит, за исключением короткого пробега. С другой стороны, поскольку хаотический аттрактор - это ограниченный объект, разложение, характеризующее его орбиты, должно

сопровождаться «складывающимся» действием, которое не позволяет им уйти в бесконечность. Одновременное растяжение и складывание орбит - отличительная черта хаоса; она лежит в основе как сложности его динамики, так и «странности» ее геометрии.

Странные аттракторы имеют структурой орбиты более сложные, чем у периодических или квазипериодических систем. В отличие от регулярного, странный аттрактор не является многообразием (т. е. не является кривой или поверхностью); его геометрическое устройство очень сложно, а его структура может быть (а может и не быть) фрактальной. Тот факт, что все траектории, расположенные в окрестности странного аттрактора, притягиваются к нему при $t \to \infty$, связан с характером неустойчивостей составляющих его траекторий, которые неустойчивы по одним и устойчивы (притягивающи) по другим направлениям (т. е. являются седловыми). Траектории странного аттрактора описывают стационарные стохастические автоколебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счёт энергии внешнего источника. При состояниях системы, характеризуемых странным аттрактором, невозможно определить положение частиц (их поведение) в каждый данный момент, хотя они находятся в зоне аттрактора. Фазовый портрет странного аттрактора – это не точка и не предельный цикл, как это имело место для устойчивых, равновесных систем, а некоторая область, по которой происходят случайные блуждания. При наличии странных аттракторов, траектории системы совершают произвольные и не поддающиеся регулярному описанию блуждания внутри определенной области. Странный аттрактор привлекает хаос. Непредсказуемость траектории в детерминированных динамических системах называют **динамическим хаосом**, отличая его от **стохастического хаоса**, возникающего в стохастических динамических системах.

Свойства странного аттрактора связаны с чувствительной зависимостью от начальных условий (любые две первоначально близкие траектории на аттракторе в конце концов расходятся, причём расхождение траекторий (усредненное по коротким интервалам времени) возрастает со временем экспоненциально). Для него характерно обращение в нуль автокорреляционной функции, широкополосный спектр Фурье и внутренняя непредсказуемость системы. Малейшая ошибка или неточность в задании начального условия не позволяет определить, по какой траектории пойдет эволюция системы, и вынуждает ограничиться статистическим предсказанием долговременного будущего системы. Отсюда следует нетривиальный вывод о непредсказуемости поведения некоторых детерминированных потоков всего лишь с тремя степенями свободы!

Со странным аттрактором связана реализация нерегулярного (в смысле отсутствия периодичности) колебательного режима, который во многом сходен со стационарными случайными процессами. Случайное движение непредсказуемо либо предсказуемо с определенной вероятностью, т.е. траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом эксперименте. Пример - движение броуновской частицы. В случае странного аттрактора имеется строгая предсказуемость в смысле детерминированности закона эволюции. Решение уравнений (как и для регулярных аттракторов) подчиняется теореме единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных "шумоподобных" автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа динамическая стохастичность, детерминированный хаос и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуаций в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории.

Странные аттракторы подразделяют на **гиперболические** (структура не меняется во всех точках интервала параметра, характеризующего деформации динамической системы)**, квазигиперболические (**сингулярно-гиперболические, структура которых меняется только в точках бифуркаций, число которых счётное) и **квазистранные**

аттракторы (странные не на интервале, а на точечном множестве параметров, например, множестве Кантора). Если в реальных системах естествознания гиперболический тип аттракторов пока не обнаружен, то примером квазигиперболического аттрактора является аттрактор Лози. Если гиперболические и квазигиперболические (стохастические) аттракторы не чувствительны к начальным условиям, то квазиаттракторы, наоборот, проявляют высокую чувствительность к изменению начальных условий. Существуют режимы хаотических движений, порождающие **хаотические нестранные аттракторы** и **странные нехаотические аттракторы**.

Странные аттракторы обладают некоторой степенью гиперболичности, однако эта гиперболичность имеет иную форму, нежели равномерная гиперболичность. Хаотичность может быть обеспечена самыми разными критериями: гомоклиничностью, наличием положительного ляпуновского показателя, непрерывностью спектра, бифуркациями удвоения периода и т.д.

гиперболические странные аттракторы

Для **гиперболических странных аттракторов** построена теория динамического хаоса (Я.Г.Синай), включающая в себя положительность энтропии, существование инвариантной меры Синая– Боуэна– Рюэля, перемешивание и гауссово распределение отклонений от странного аттрактора. По этой теории динамический хаос ничем не отличается от случайных колебаний, происходящих в системах с шумом. К гиперболическим странным аттракторам относятся системы Аносова, биллиарды Синая– Бунимовича, аттракторы Смейла – Вильямса, аттрактор Плыкина и др. Для систем с хаотической динамикой гиперболического типа переход к статистическому описанию возможен уже в чисто детерминированном случае, т.е. в отсутствие шума. Это означает, что стационарное решение уравнения эволюции для плотности вероятности допускает наличие предела при $\Phi \to 0$, где Φ – интенсивность шума, и есть возможность получить решение для вероятностной меры в чисто детерминированном случае.

К странным аттракторам **сингулярно-гиперболического** типа относятся аттрактор Лоренца, структура которого меняется при бифуркациях гомоклинических петель седла, аттракторы Лози и Белых. Для них математическая теория хаоса построена. К странным аттрактором 2-го типа относятся также **дикие странные аттракторы**, траектории которых имеют неустойчивые многообразия разной размерности.

22.3 Квазиаттракторы

Квазипериодическое движение – движение, составленное из двух независимых колебаний. Траектория навивается на тор в фазовом пространстве, одна частота определяется временем оборота по малому кругу тора, другая – по большому кругу. Для комбинации более чем двух вращений аттракторами могут быть многомерные торы.

Несмотря на сложный характер, квазипериодическое движение предсказуемо. Хотя траектория может никогда не повторяться точно (если частоты несоизмеримы), движение остаётся регулярным. Траектории, начинающиеся поблизости одна от другой на торе, так и остаются поблизости одна от другой, и долгосрочный прогноз гарантирован.

К **квазиаттракторам** относятся аттракторы в системах с бифуркациями гомоклинических орбит и циклов (например, с бифуркациями Шильникова). Аттрактор имеет форму тора. Примеры: аттракторы Эно и Рёсслера.

Квазиаттрактор – аттрактор, содержащий устойчивые периодические орбиты при бифуркациях касания инвариантных многообразий седловых точек. Он не является стохастическим и эффекты, вызванные малым возмущением, должны быть введены в стохастический анализ квазиаттрактора.

Отличительной чертой квазиаттрактора является одновременное существование счетного множества различных хаотических и регулярных аттракторов в ограниченном объёме фазового пространства при фиксированных значениях параметров системы.

Например, в системе Эно имеет место чередующаяся картина смены регулярных и странных аттракторов. Если гиперболические и квазигиперболические аттракторы не чувствительны к начальным условиям, то квазиаттракторы, наоборот, проявляют высокую чувствительность к изменению начальных условий. Система с квазиаттрактором в течение некоторого времени система ведет себя подобно стохастической системе, после чего ее траектория притягивается к регулярному (не стохастическому) аттрактору. Время, в течение которого это происходит, может быть очень большим. За такое большое время наличие даже малых ошибок в вычислениях будет регулярно отбрасывать систему от простого аттрактора. Поэтому процесс редукции стохастической системы к регулярному движению может оказаться технически недостижимым.

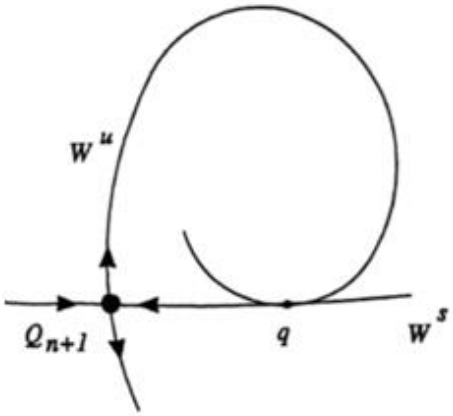


Рис. 5. Структурно неустойчивая гомоклиническая орбита.

Термин квазиатрактор (квазистакастический аттрактор) обозначает предельное множество (не обязательно переходное), охватывающее периодические орбиты разных топологических типов. Это множество может быть структурно устойчивым (в этом случае устойчивые периодические орбиты сосуществуют с гомоклинической структурой) или неустойчивыми из-за наличия гомоклинических касаний (рис. 5). Стабильные периодические орбиты в таком квазиаттракторе имеют большие периоды и очень узкие и извилистые бассейны. Поэтому при численном моделировании и в экспериментах стабильные периодические орбиты практически не наблюдаются, за исключением конечного числа окон устойчивости; в других отношениях квазиатракторы напоминают детерминированный хаос. Квазиатракторы встречаются в различных системах. Примеры: отображения Лоренца и Эно, системы со спиральным хаосом и др.

Квазигиперболические аттракторы в трехмерных дифференциальных системах, такие, как аттрактор Лоренца, аттрактор Шимицу-Мориока, относятся к аттракторам переключательного типа. Фазовая траектория хаотически переключается из окрестности одного седлового состояния равновесия к окрестности другого. Такие переключения сопровождаются случайными изменениями фазы даже в отсутствие шума. Если для аттрактора Лоренца шум практически не влияет на скорость релаксации, то в случае негиперболического аттрактора Лоренца шум оказывает сильное влияние на скорость установления вероятностной меры.

22.4 Хаотически аттракторы

Часто странные аттракторы возникают благодаря бифуркациям. Пути рождения стохастических автоколебаний при изменении управляющего параметра зависят от конкретных свойств исследуемой системы. Однако как и предельный цикл, который может родиться лишь несколькими типичными способами, так и странный аттрактор обладают сравнительно небольшим числом наиболее типичных возможностей возникновения. Один из них - сценарий Фейгенбаума – цепочка бифуркаций удвоения периода устойчивого предельного цикла.

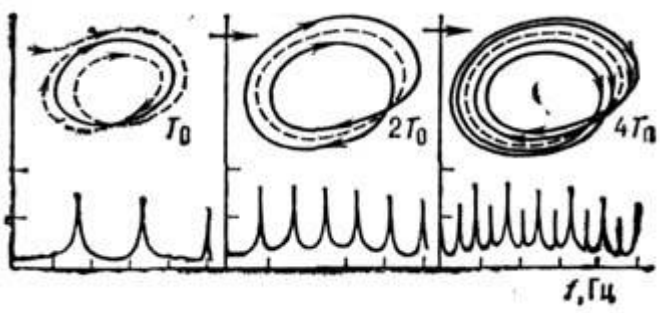


Рис. 6. «Обратные бифуркации» удвоения периода, иллюстрирующие разбухание аттрактора, возникшего по сценарию Фейгенбаума.

Во многих системах при прохождении управляющего

параметра (скажем, λ) через бифуркационное значение λ^* переход к стохастическим автоколебаниям внешне осуществляется как редкое нарушение регулярных колебаний «стохастическими всплесками». При этом длительность ламинарной (регулярной) фазы тем больше, чем меньше надкритичность $\lambda-\lambda^*>0$ С ростом же надкритичности длительность регулярной фазы сокращается. В момент бифуркации сливаются и исчезают отвечающий автоколебаниям устойчивый предельный цикл и седловая периодическая траектория. При малой надкритичности все траектории, стремившиеся ранее к устойчивому предельному циклу, долгое время сохраняют характер своего поведения, т. е. демонстрируют движение, близкое к периодическому. С течением времени $t \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda^*}}$ они «замечают», что старый аттрактор исчез, и, оставаясь рядом с сепаратрисой (также исчезнувшей) седлового предельного цикла, уходят в другую часть фазового пространства. Если в докритической области система была глобально устойчива (т. е. существовал только один притягивающий объект), то эти траектории через некоторое время вновь попадают в окрестность исчезнувшего предельного цикла. Если при этом в докритической области значений параметров сепаратриса седлового цикла была вложена в фазовое пространство достаточно сложным геометрическим образом (образовывала бесконечное число складок - «гофрировалась», содержала гетероклинические траектории других седловых циклов и т. п.), т. е. переходный процесс демонстрировал нерегулярное поведение, то время попадания в окрестность исчезнувшего цикла уже $\lambda>\lambda^*$ величина случайная. Далее повторяется ламинарная фаза, предшествующая новому, турбулентному, всплеску и т. д.

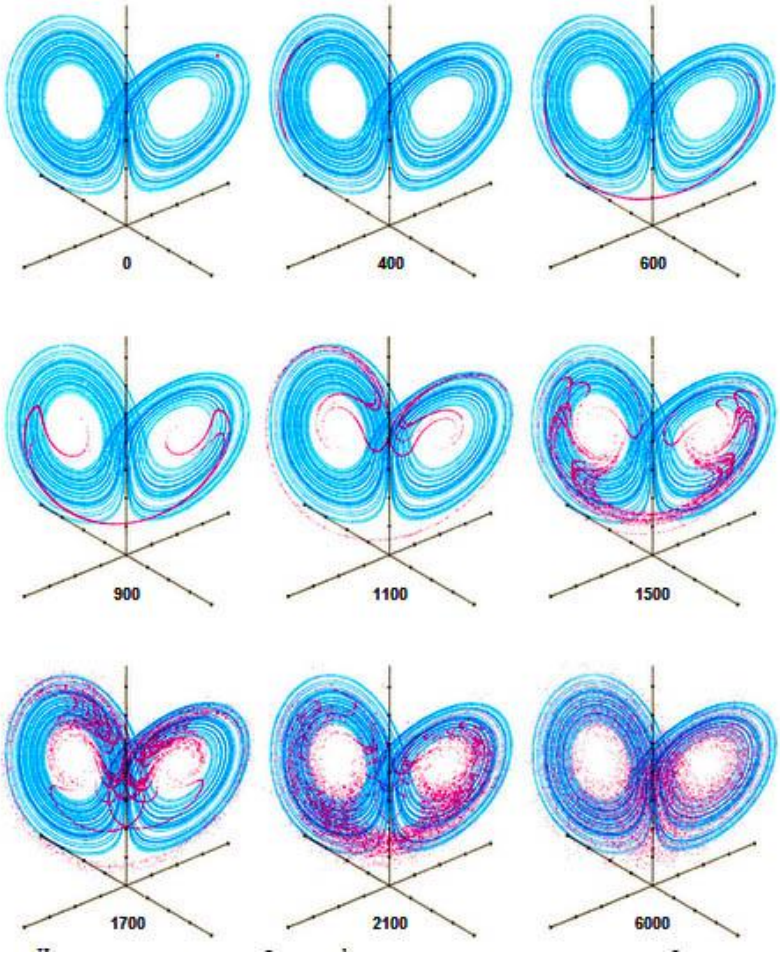


Рис. 7. Эволюция аттрактора Лоренца. Расходимость соседних траекторий является основной причиной того, что хаос ведёт к непредсказуемости. Идеальное измерение определяло бы точку в фазовом пространстве, но реальное измерение не бывает точным, порождая тем самым

облако неопределённости. Истинное состояние может оказаться где угодно внутри этого облака. Как показано здесь на примере аттрактора Лоренца, неопределённость начального измерения представлена 10 000 красных точек, расположенных так близко друг к другу, что они неразличимы. По мере того как каждая точка движется в соответствии с уравнениями, облако вытягивается в длинную тонкую нить, которая затем многократно свивается, пока красные точки не распространятся по всему аттрактору. Предсказание стало невозможным: конечное состояние может быть в любом месте аттрактора. Напротив, для регулярного аттрактора все конечные состояния неизменно остаются поблизости друг от друга. Числа под картинками указаны в единицах, равных 0,005 с.

Динамическая систем обладает странным аттрактором, если в ее фазовом пространстве имеется предельное множество, состоящее из хаотических траекторий. При этом хаотичность может быть обеспечена самыми разными критериями: гомоклиничностью, фрактальностью, наличием положительного ляпуновского показателя, непрерывностью спектра, бифуркациями удвоения периода и т.п. Существуют и странные нехаотические аттракторы, т.е. такие аттракторы, которые имеют фрактальную структуру, но система с таким аттрактором не обладает хаосом ни в каком смысле. Поэтому широкое использование понятия «странный аттрактор» оказывается не всегда оправданным.

Если неизвестна структура аттрактора хаотической системы, как это бывает при численных и экспериментальных исследованиях, правильнее было бы называть такие аттракторы хаотическими, акцентируя внимание именно на сложном движении траекторий. Это не препятствует тому, что хаотические аттракторы могут быть гиперболическими притягивающими множествами, иметь трансверсальную гомоклиническую траекторию и т.п.

Гиперболический хаос называют "идеальным" хаосом. Он характеризуется топологически однородной и устойчивой к возмущениям структурой. Однако странные хаотические аттракторы динамических систем, как правило, не являются грубыми гиперболическими. Близкие к гиперболическим (квазипараболические) аттракторы содержат неустойчивые орбиты типа петель сепаратрисы. Их рождение и исчезновение не влияет на такие характеристики хаоса, как фазовый портрет аттрактора, спектр мощности, показатели Ляпунова и др. Гиперболические и квазигиперболические системы в хаотическом режиме иметь инвариантные меры, не зависящие от начального распределения и полностью определяющие статистические свойства аттрактора.

22.5 Негиперболические хаотические аттракторы

Однако большинство хаотических аттракторов динамических систем являются негиперболическими. Проблема существования инвариантной меры на **негиперболическом хаотическом аттракторе** связана с серьезными трудностями, так как в общем случае невозможно ввести стационарное распределение вероятности, не зависящее от начального распределения. Негиперболический аттрактор является максимальным аттрактором динамической системы и включает в себя счётное множество регулярных и хаотических притягивающих подмножеств. Об инвариантной мере негиперболического аттрактора можно говорить лишь при условии воздействия внешнего шума. Негиперболические аттракторы резко меняют свои свойства под действием шума, в то время как гиперболические и квазигиперболические аттракторы устойчивы к шумовым возмущениям. Такие системы, как система Рёсслера, схема Чуа и осциллятор Анищенко-Астахова, являются типично негиперболическими, т.е. структурно неустойчивыми. Систему Лоренца можно считать исключением. В определенном диапазоне значений параметров аттрактор Лоренца оказывается почти гиперболическим. Устойчивые и неустойчивые многообразия траекторий аттрактора пересекаются трансверсально. Однако при вариации параметров система Лоренца демонстрирует бифуркационный переход к негиперболическому аттрактору. Вероятность гомоклинического касания строго равна нулю. Удаление от области, в которой существует аттрактор Лоренца, приводит к

появлению эффекта гомоклинического касания. Угол между многообразиями может обращаться в нуль.

Существует класс негиперболических аттракторов спирального типа, для которых шум оказывает сильное влияние на скорость процесса релаксации к стационарному распределению и время корреляции, но практически не влияет на величину положительного ляпуновского показателя. Скорость перемешивания на негиперболических аттракторах определяется не только и не столько экспоненциальной неустойчивостью, а зависит от сложной динамики мгновенной фазы хаотических колебаний. В режиме спирального хаоса шум существенно ускоряет процесс релаксации к стационарному распределению. Для хаотических аттракторов с нерегулярным поведением мгновенной фазы шум практически не влияет на скорость перемешивания. Это утверждение справедливо для негиперболических аттракторов винтового и переключательного типов, таких, как квазигиперболический аттрактор Лоренца.

Негиперболические аттракторы спирального типа могут возникать не только в конечномерных, но и в распределенных системах. Примером служит неоднородная среда, моделируемая уравнением Гинзбурга-Ландау. Характерной особенностью спиральных аттракторов является то. что они соответствуют сложному процессу нерегулярных автоколебаний, статистические характеристики которого можно описать, используя классическую модель узкополосного шума. Свойства спирального хаоса по сути дела оказываются близки к свойствам зашумленного предельного цикла (например, генератор Ван дер Поля при воздействии шума). Автокорреляционная функция и спектр мощности спирального аттрактора полностью определяются флуктуациями мгновенных амплитуды и фазы колебаний. Флуктуации амплитуды определяют скорость спада корреляций на малых временах и соответственно "шумовой" пьедестал в спектре мощности. Флуктуации фазы приводят к уширению спектральной линии базовой частоты в спектре и экспоненциальному спаду автокорреляционной функции, определяемому величиной эффективного коэффициента диффузии Коэффициент диффузии фазы в системе без шума определяется ее хаотической динамикой и не связан непосредственно с положительным ляпуновским показателем. В динамических системах со спиральным хаосом энтропия Колмогорова как количественная характеристика степени перемешивания определяется в основном скоростью роста дисперсии мгновенной фазы, а не положительным показателем Ляпунова.

Странные аттракторы в конечномерных системах можно разделить на три основных класса: грубые гиперболические, почти гиперболические (квазигиперболические) и негиперболические. Свойство грубой гиперболичности хаотического аттрактора означает, что все его траектории относятся к одному седловому типу, и их устойчивые и неустойчивые многообразия всюду транс-версальны, т.е. структура гиперболического аттрактора однородна в любой точке аттрактора. Кроме того, эти свойства сохраняются при малых возмущениях параметров системы. К грубым гиперболическим аттракторам относятся соленоид Смейла-Вильямса и аттрактор Плыкина; почти гиперболические аттракторы: аттрактор Лоренца и аттрактор Шимицу-Мориока в потоковых системах, аттрактор Лози и аттрактор Белыха в дискретных отображениях. Для этих систем характерно присутствие сингулярных фазовых траекторий. Например, аттрактор Лоренца характеризуется присутствием множества петель сепаратрисы седлового состояния равновесия; аттрактор Лози включает негрубые гомоклинические кривые без касаний устойчивых и неустойчивых многообразий. Эти особые траектории не приводят к рождению устойчивых движений; при вычислениях квазигиперболические аттракторы схожи с гиперболическими.

Непериодические аттракторы делятся на: **стохастические** и **хаотические**, в зависимости от того, связаны ли они со стохастическим или хаотическим поведением системы. Аттракторы с участием только конечного или бесконечного числа седловых циклов и их неустойчивых интегральных многообразий называются стохастическими.

Аттракторы с участием как седловых, так и устойчивых циклов с малыми областями притяжения называются хаотическими. Все фазовые траектории, образующие стохастический аттрактор, экспоненциально неустойчивы. **Хаотический аттрактор** должен удерживать хотя бы одну устойчивую траекторию. В частности, хаотические аттракторы могут состоять либо из одного стабильного предельного цикла с достаточно близкими спиралями, либо из счетного множества устойчивых предельных циклов с достаточно малыми областями притяжения (число циклов может быть бесконечным).

22.6 Фрактальные аттракторы

Динамика диссоциативных систем с типичными хаотическими аттракторами в определенном смысле аналогична динамике гамильтоновых систем, у которых, наряду со стохастическими слоями, существуют инвариантные торы Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ).

В диссипативных системах **хаотический аттрактор** возникает, если общее сокращение объемов происходит путем сокращения в некоторых направлениях, сопровождаемых (менее быстрыми) растяжениями в других. Странные аттракторы по своим характеристикам часто совпадают с хаотическим аттрактором.

Хаотический аттрактор – аттрактор, для которого приближение к его конечной точке в фазовом пространстве хаотично, а принадлежащие ему индивидуальные фазовые траектории экспоненциально неустойчивы.

Хаотическая динамика означает наличие перемешивания и, следовательно, положительность энтропии Колмогорова. Перемешивание ведёт к спаду автокорреляционных функций во времени до нуля. Состояния системы, отделенные достаточно большим интервалом времени, становятся статистически независимыми. Любая система с перемешиванием является эргодической. Для хаотических динамических систем расцепление корреляций во времени связано с экспоненциальной неустойчивостью хаотических траекторий и со свойством системы порождать положительную энтропию Колмогорова. Возможно автокорреляционные функции хаотических систем экспоненциально спадают со скоростью, определяемой энтропией Колмогорова, причём энтропия Колмогорова ограничена сверху суммой положительных ляпуновских показателей. Сложное поведение корреляционных функций определяется не только положительными показателями Ляпунова, но и закономерностями хаотической динамики системы.

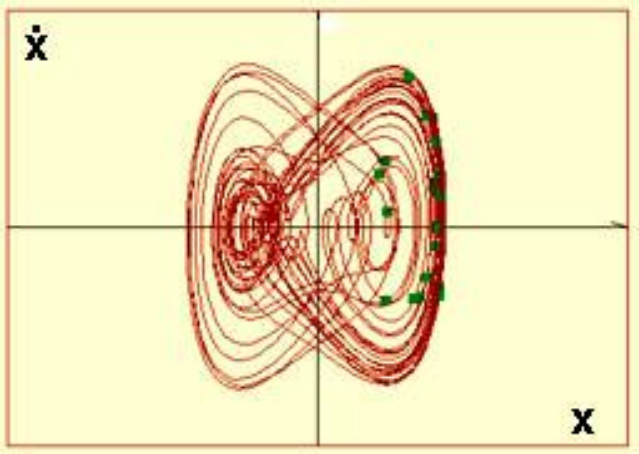


Рис. 8. Странный аттрактор как моток проволоки.

Хаотический аттрактор – притягивающее множество: система, стартуя с начального условия в соответствующем бассейне, в конечном итоге попадает в это множество. Он чувствителен к начальным условиям. Если система находится на аттракторе, соседние состояния расходятся друг от друга экспоненциально быстро. Следовательно, небольшие количества шума усиливаются и поведение системы становится непредсказуемой. Сами хаотические аттракторы вполне упорядочены (структурированы), часто имеют четко фиксированные геометрические структуры (неподвижные и неизменные), несмотря на то, что движущиеся внутри них траектории кажутся непредсказуемыми. Геометрическая форма хаотического аттрактора - это порядок, лежащий в основе кажущегося хаоса. Его функционирование напоминает замешивание теста. Локальное разделение траекторий соответствует растяжению теста, а

свойство глобального притяжения соответствует складыванию растянутого теста обратно на себя. Одним из результатов растягивающегося аспекта хаотических аттракторов является то, что они часто являются фракталами; т. е. их поперечное сечение обнаруживает сходную структуру во всех масштабах.

Траектории в фазовом пространстве можно представит как некоторый клубок бесконечного провода (или нити), занимающий конечное пространство. Провод бесконечно тонок. Провода никогда не пересекается сам с собой, одна часть не проходит сквозь другую, он не раздваивается и не расстраивается, места спайки или склеивания отсутствуют. Аттрактор - это область фазового пространства, где провода накапливаются. Если отдельный проводок попытаться отделить от мотка, то он через некоторое время вернется в аттрактор. Если в регулярном аттракторе фазовая траектория представляет собой несколько четко определенных петель, то в хаотическом аттракторе имеет место пучок из бесконечного числа петель, полностью перепутанных, но никогда не пересекающихся. Если бы существовали пересечения, то траектории были бы идентичны, так что будущее развитие совпадало с прошлым, что привело бы систему к повторному развитию, пусть даже с очень большим периодом. Существует различие между периодическим аттрактором с очень длинным периодом и хаотическим аттрактором.

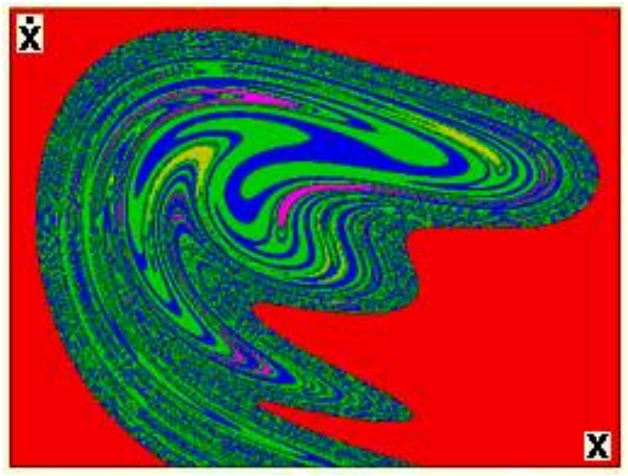


Рис. 9. Бассейны странного аттрактора.

Аттрактор не занимает все фазовое пространство. На сечении Пуанкаре фазовые выглядит как слои перемешиваемого теста (слои пластилина разных цветов). Если взять пучок параллельных проводов, вытянуть из в виде тонкой полосы и многократно из сгибать то получим картину типа рис. 8. Растяжение, сгибание и сплющивание приводит к смешению и чувствительности к начальным условиям. При рассмотрении сечения Пуанкаре видно, что области с высокой плотностью проводов, чередуются с областями, в которых никаких проводов нет. Граница между этими областями нерегулярна. Её нерегулярность состоит в том, что любая часть плоскости (x, x'), которая содержит пучок орбит, одновременно содержит часть границы, сколь бы малой она ни была. Её длина зависит от выбора единицы масштаба: если масштаб стремится к нулю, то длина границы бесконечна. Чем больше увеличения, тем больше деталей наблюдается.

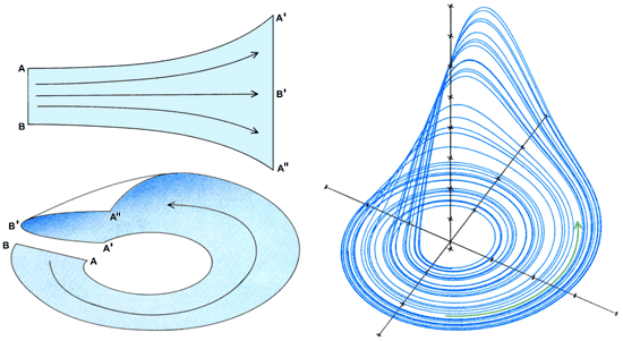


Рис. 10. Хаотический аттрактор – неровная поверхность со складками. Показаны этапы образования хаотического аттрактора на примере аттрактора Рёсслера (*справа*). Сначала близкие траектории на объекте расходятся экспоненциально (*вверху слева*); расстояние между соседними траекториями увеличивается примерно вдвое. Чтобы остаться в конечной области, объект складывается (*внизу слева*): поверхность сгибается и её края соединяются. Аттрактор Рёсслера наблюдался во многих системах, от потоков жидкости до химических реакций.

Области пространства, имеющие бесконечную границу, но конечную степень, в которую возводится единица масштаба при изменении длины провода, называются «фракталами». Фрактальная граница больше, чем линия, но меньше плоскости и имеет

размерность между одним и двумя. Если для сечения Пуанкаре можно вычислить показатель фрактала, то тогда имеет место не случайный, а детерминированный хаос (в котором можно как-то предсказать эволюцию системы).

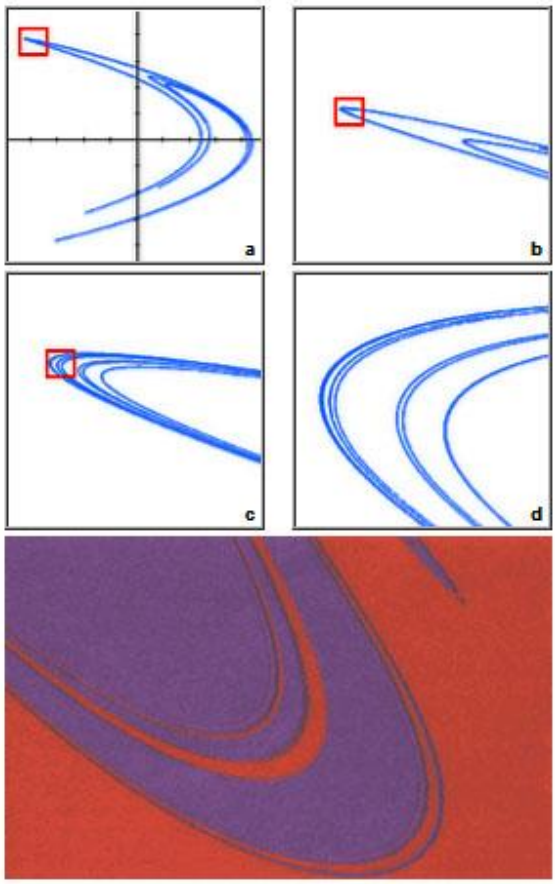


Рис. 11. Хаотические аттракторы являются фракталами: объектами, проявляющими по мере увеличения всё большее число деталей. *Хаос естественным образом порождает фракталы*. Для того чтобы движение оставалось в конечной области, близлежащие траектории, хоть они и расходятся, должны в конечном счёте изогнуться и пройти поблизости друг от друга. Это повторяется снова и снова, порождая складки внутри складок, и т.д. до бесконечности. В результате хаотические аттракторы имеют очень красивую микроскопическую структуру. Эно обнаружил простое правило, по которому растягивается и складывается плоскость, причём так, что каждая точка попадает на новое место. Взяв одну начальную точку, нанесём на график каждую последовательную точку, полученную из предыдущей по правилу Эно. Найденная в результате геометрическая фигура (*a*) даёт простой пример хаотического аттрактора. На рисунке *b* часть, обведённая рамкой, дана с увеличением в 10 раз. При последующих увеличениях (*c*, *d*) проявляется микроскопическая структура аттрактора. На нижнем рисунке изображена область притяжения аттрактора Эно.

Странный аттрактор связан с геометрическим объектом - фрактальным множеством. В трёхмерном фазовом пространстве фрактальное множество странного аттрактора выглядит как набор бесконечного числа слоев или параллельных плоскостей, причём расстояние между некоторыми из них приближаются к бесконечно малому.

Фрактальные аттракторы - хаотические аттракторы, хаусдорфова размерность которых отлична от топологической размерности и является дробной. Примеры: аттрактор Лоренца, соленоид Смейла-Вильямса, уравнения Навье - Стокса.

Замечание. Если фракталы рассматривать не в статике, а в динамике (в эволюции во времени), то динамическим аналогом фрактала будет хаос (конкретный фрактал - мгновенный снимок хаотического процесса). Хаос описывает состояние крайней непредсказуемости, возникающей в динамической системе, в то время как фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации.

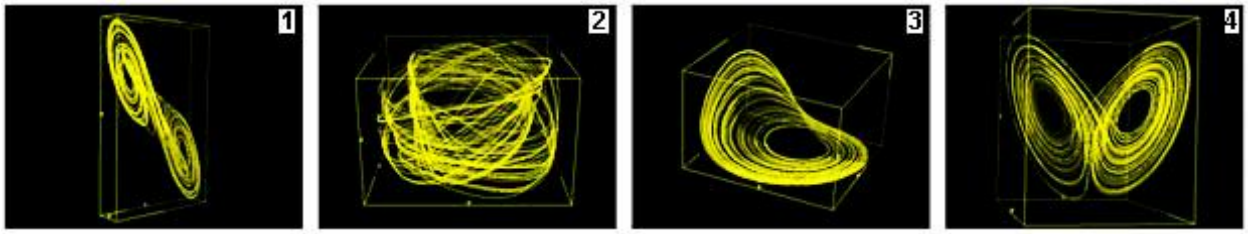


Рис. 12. Некоторые хаотические аттракторы: *1 – Чуа (ток электронов); 2 – Дуффинг (нелинейный осциллятор); 3 – Рёсслер (химическая кинетика); 4 – Лоренц (конвекция атмосферы).*

Объём, в котором ограничен странный аттрактор, не определяется четко. По мере приближения к поверхности аттрактора его объём всё больше и больше раскрывается,

вплоть до бесконечности. Фрактальная площадь поверхности бесконечна. Поэтому объем странного аттрактора не может быть детерминированно установлен.

Все разнообразие статистических свойств случайного сигнала, порождаемого динамической системой со странным аттрактором, может быть описано, если известно распределение вероятности состояний системы. Однако получить это распределение для конкретных систем чрезвычайно сложно. Это одна из причин, по которой для описания странного аттрактора и сопоставления его свойств со свойствами реального сигнала используют различного рода усреднённые характеристики.



Рис. 13. Примеры странных аттракторов.

22.7 Характеристика нерегулярных аттракторов

Геометрия фракталов применяется в нелинейной динамике для характеристики странных аттракторов и для измерения фрактальных границ в пространствах начальных данных и параметров. Аттрактор характеризуют размерностью. Фрактальную размерность никаким прибором измерить нельзя. Её и показатель Ляпунова находят, дискретизируя сигналы последовательностью равноотстоящих (по времени) точек и обрабатывая полученные данные на компьютере. Можно найти усредненную поточечную размерность, корреляционную размерность или размерность Ляпунова.

Размерность определяет количество информации, необходимое для задания координат точки, принадлежащей аттрактору, в рамках указанной точности. Она может зависеть только от метрических свойств аттрактора или от статистических свойств потока, обусловленных динамикой. Метрические размерности принимают одинаковую величину - фрактальную размерность аттрактора.

Известны разные виды фрактальной размерности: емкость d_c, поточечная размерность d_P, корреляционная размерность d_G, информационная размерность d_I. Информационная размерность и корреляционная размерность ограничивает емкость снизу, т.е. $d_G \le d_I \le d_c$. Для многих странных аттракторов все три размерности очень близки.

Фрактальная размерность странных аттракторов – дробная величина.

Наиболее часто используется фрактальная размерность (Колмогорова ёмкость фрактала):

$$d_f = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \qquad (1)$$

где ε>0, некоторый фиксированный параметр, $N(\varepsilon)$ – число n-мерных шаров диаметра ε (или кубиков с длиной ребра ε), покрывающих странный аттрактор динамической системы с n-мерным фазовым пространством.

Для «регулярных» геометрических объектов размер d_f не отличается от обычной евклидовой размерности, где d_f – целое число. Однако фрактальная размерность может быть как целым, так дробным числом (например, для множества Кантора (или канторской пыли) d_f=0,63. Определённая по Ур.1 размерность d_f не может превышать n, но может быть меньше n (n-мерные шары могут оказаться почти пустыми). Фрактальная размерность странного аттрактора даёт оценку эффективного числа степеней свободы, формирующих установившийся (после окончания всех переходных процессов) стохастичский. сигнал. Понятие фрактальной размерности полезно в геометрическом анализе динамических систем, поскольку оно может быть задумано как мера того, как траектории заполняют фазовое пространство под действием потока или отображения. Например, нецелое фрактальное измерение указывает на то, что траектории системы заполняют меньше чем целое подпространство фазового пространства. Например, размер аттрактора системы можно принять за индекс сложности, о чём свидетельствует существенный размер системы.

Табл. 1. Фрактальная размерность некоторых динамических систем.

Название системы	Величина размерности	Тип размерности
Отображение Энона (1.3.8) (a = 1,4; b = 0,3)	1,26 1,21 ± 0,001	Емкость Корреляционная размерность
Логистическое отображение (1.3.6) (λ = 3,5699456)	0,538 0,500 ± 0,005	Емкость Корреляционная размерность
Система Лоренца (1.3.9)	2,06 ± 0,01 2,05 ± 0,01	Емкость Корреляционная размерность
Потенциал с двумя ямами (6.3.7) (f = 0,16; ω = 0,8333)	2,14 (γ = 0,15) 2,61 (γ = 0,06)	Корреляционная размерность
Цепь Чуа	2,82	Показатель Ляпунова

Фазовые портреты нелинейных хаотических динамических систем часто представляют собой фракталы. Например, хаотический режим логистического отображения имеет фазовый портрет, подобный канторовому множеству на отрезке. Аттрактор Эно представляет собой канторово множество на плоскости при a=1,4, b=0,3 его фрактальная размерность d_f=1,25. Размерность аттрактора Лоренца в хаотическом режиме, рассчитанная по алгоритму корреляционной размерности, имеет значение d_c=2,06. Значение фрактальной размерности фазовых портретов динамических систем позволяет различить детерминированные, случайные (стохастические) и хаотические процессы.

Информационная размерность определяется следующим образом

$$d_I = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{\ln I(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right], \quad I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln p_i \qquad (2)$$

Здесь $I(\varepsilon)$ – количество информации, необходимое для определения состояния системы в пределах точности ε, $M(\varepsilon)$ – число кубиков со стороной ε, покрывающих аттрактор, p_i - вероятность посещения фазовой траекторией i-го кубика. Так как для малых ε, $I(\varepsilon)\approx d_f \ln(1/\varepsilon)$, то d_I характеризует скорость возрастания информации с уменьшением ε. Если аттрактор пространственно однородный, то $d_I=d_f$, в противном случае $d_I<d_f$.

Еще одним представителем класса вероятностных размерностей является корреляционная размерность d_C , определяемая соотношением

$$d_C = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2\right)}{\ln\varepsilon}\right] \qquad (3)$$

где p_i^2 – вероятность того, что пара точек аттрактора принадлежит i-му кубику. Корреляционную размерность можно представить в виде:

$$\mathrm{d}_C = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}\right]; \quad C(\varepsilon) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{i,j}^{m}\theta\left(\varepsilon - \rho\left(x_{i,}x_j\right)\right) \qquad (4)$$

где $\theta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \ge 0, \\ 0, & \alpha < 0, \end{cases}$ $\boldsymbol{x}_i$ – точки в фазовом пространстве; ρ – расстояние.

Размерность d_C определяется значением корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$, характеризующим относительное число пар точек $\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j$, удалённых на расстояния $r_{ij}=\rho(x_i, x_j)\le\varepsilon$. Все три размерности, рассмотренные выше, представляют собой частные случаи обобщенной размерности Реньи

$$d_q = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{\ln I_q(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right], \quad I_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \qquad (5)$$

Здесь I_q – информация Реньи порядка q.

$$d_0 = \lim_{1-0}\left[\frac{1}{1-0}\frac{\ln\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^0}{\ln(1/\varepsilon)}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right] = d_f \qquad (6)$$

$$d_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{\sum_{i=1} p_i \ln p_i}{\ln(1/\varepsilon)}\right] = d_I, \qquad (7)$$

$$d_2 = \lim_{1-0}\left[\frac{1}{1-2}\frac{\ln\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^0}{\ln(1/\varepsilon)}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right] = d_f \qquad (8)$$

Размерность d_q – монотонно убывающая функция ($q<q'$). Для целых q размерность d_q имеет физический смысл. Большие положительные значения q подчеркивают наиболее плотные области в фазовом пространстве, тогда как большие отрицательные значения подчеркивают наиболее редко посещаемые области. Таким образом, диапазон значений

размерностей d_q может рассматриваться как характеристика степени пространственной неоднородности аттракторов.

Произведем разбиение фазового пространства, включающего в себя аттрактор, на $M(\varepsilon)$ непересекающихся n-мерных кубиков с ребром ε. Проделаем m последовательных измерений, следя за фазовой траекторией и через равные промежутки времени отмечая кубики s_i, в которых побывала траектория. При каждом независимом испытании получим конкретную реализацию в виде последовательности кубиков $s_i,...,s_m$. Если известны вероятности $P(s_i,...,s_m)$ появления всех возможных последовательностей кубиков, то энтропия Колмогорова

$$K_1 = -\lim_{\tau\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m\tau}\sum_{s_1,\dots,s_m} P(s_1,...,s_m)\ln P(s_1,...,s_m)\right] \qquad (9)$$

Характерное время, на которое может быть предсказано поведение системы, обратно пропорционально энтропии Колмогорова. Если энтропия достигает нуля, то система становится полностью предсказуемой. Так будет в случае регулярных процессов. Для истинно случайных процессов энтропия неограниченно велика. Энтропия системы в режиме странного аттрактора положительна, но имеет конечное значение. Числовое значение энтропии является количественной характеристикой степени хаотичности системы. Можно ввести понятие обобщенной энтропии Реньи как динамического аналога обобщенной размерности Реньи

$$K_1 = -\lim_{\tau\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m\tau}\frac{1}{1-q}\ln\sum_{s_1,\dots,s_m} P(s_1,...,s_m)P^q(s_1,...,s_m)\right] \qquad (10)$$

Одно время было принято считать, что странные аттракторы обязательно имеют фрактальную структуру. Да, так бывает, но далеко не всегда. Фрактальной может оказаться не вся система, а только некоторая её часть при некотором значении управляющего параметра, но часто странный аттрактор никаким самоподобием не обладает, и никаких признаков фрактальности в нем нет.

Помимо фрактальной размерности, количественным критерием хаоса является показатель Ляпунова. При этом положительный показатель Ляпунова указывает на хаотическую динамику, а фрактальная структура орбиты в фазовом пространстве указывает на присутствие странного аттрактора. Проверка с применением показателя Ляпунова может использоваться в как в диссипативных, так и консервативных системах, а фрактальные размерности имеют смысл только в диссипативных системах. Максимальная экспонента Ляпунова характеризует степень с которой соседние фазовые траектории расходятся и число положительных экспонент Ляпунова определяет число нестабильных направлений.

Табл. 2. Некоторые характеристики аттракторов.

Тип аттрактора	Размерность фазового пространства	Знаки показателей Ляпунова
Неподвижная точка	1	(-)
Неподвижная точка	2	(- , -)
Предельный цикл	2	(0 , -)
Неподвижная точка	3	(- , - , -)
Предельный цикл	3	(0 , - , -)
Двумерный тор	3	(0, 0 , -)
Странный аттрактор	3	(+ , 0 , -)

Характеристические показатели Ляпунова аттрактора определяются соотношениями:

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln a_i(k,x), \quad i=\overline{1,n} \qquad (11)$$

где $a_i(k,\boldsymbol{x})$ – модуль i-го собственного значения матрицы Якоби (матрица $n*n$ частных производных F^k, вычисленных в точке x) $DF^k(\boldsymbol{x})$.

Упорядоченная по убыванию последовательность чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \lambda_n$ образует спектр показателей Ляпунова и дает полезную классификацию аттракторов. В табл. 2 приведена классификация аттракторов динамических систем, заданных системой дифференциальных уравнений.

Максимальная экспонента Ляпунова определяется формулой

$$\lambda = \lim_{\substack{t\to\infty \\ d\to 0}} \ln \frac{d(t)}{d(0)}, \qquad (12)$$

где $d(t)$ – расстояние между двумя соседними фазовыми траекториями. Прямой расчет по этой формуле практически невозможен т.к. даже для очень малого $d(0)$, $d(t)$ увеличивается бесконечно при увеличении t. Есть другой алгоритм расчёта показателя Ляпунова.

Сумма показателей Ляпунова траектории $\boldsymbol{x}^0(t)$ характеризует скорость изменения фазового объема в её окрестности. Режим странного аттрактора реализуется только в диссипативных системах и характеризуется наличием в спектре положительных показателей. Сумма показателей Ляпунова для диссипативных систем отрицательна. Если сумма показателей Ляпунова равна нулю, то фазовый объем системы во времени не изменяется – система консервативна и аттракторов не содержит. В случае положительной суммы показателей Ляпунова фазовый объем во времени нарастает. С физической точки зрения такой режим как стационарный нереалён.

Показатели Ляпунова, являясь усредненными характеристиками аттрактора, описывают его свойства независимо от начальных условий из области притяжения. Исключение представляют лишь начальные условия, соответствующие нетипичным траекториям, имеющим меру нуль. Установлена количественная взаимосвязь показателей Ляпунова с энтропией Колмогорова. Доказано, что энтропия положительна в том и только в том случае, когда фазовая траектория в среднем экспоненциально неустойчива на аттракторе. Спектр показателей Ляпунова такой траектории содержит положительный показатель. Выражение, связывающее энтропию Колмогорова с положительными показателями Ляпунова имеет вид:

$$K_1 = \sum_{\lambda_i > 1} \lambda_i \qquad (13)$$

т.е. энтропия равна сумме положительных показателей Ляпунова.

$$d_L = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{\left|\lambda_{j_0+1}\right|}, \quad j_0 = \max_j \left\{ j : \lambda_1 + ... + \lambda_j \geq 0 \right\} \qquad (14)$$

Показатели Ляпунова упорядочены по убыванию $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \lambda_n$. Ляпуновская размерность – верхняя граница информационной размерности: $d_1 \leq d_I$.

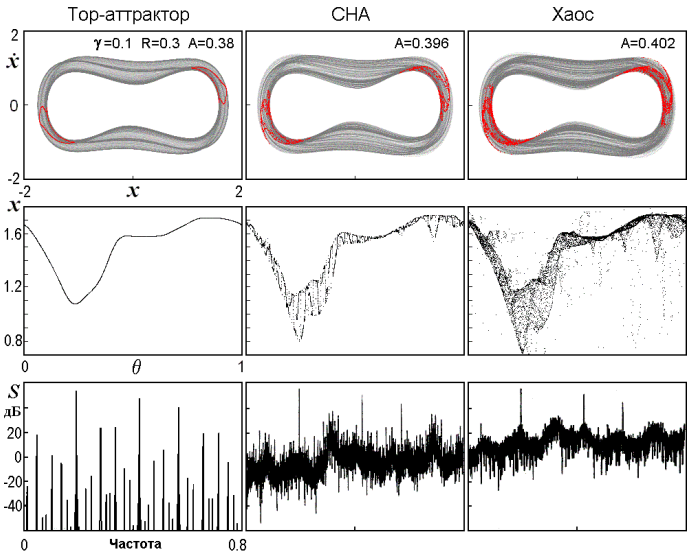
22.8 Странные нехаотические аттракторы

Странный нехаотический аттрактор (СНА) введен применительно к классу диссипативных систем с квазипериодическим внешним воздействием. В отличие от тора-аттрактора, СНА характеризуется фрактальной структурой ("странный"), но в отличие от хаотического аттрактора не имеет экспоненциальной неустойчивости траекторий.

Странный нехаотический аттрактор – аттрактор имеют фрактальную структуру, но система с таким аттрактором не обладает хаосом ни в каком смысле.

Эпитет "странный" противопоставляет СНА аттрактору в виде тора, имеющего гладкую зависимость координатных переменных от фазовых. Эпитет "нехаотический" противопоставляет его странному хаотическому аттрактору, который характеризуется присутствием экспоненциальной неустойчивости траекторий. Оказалось, что в области между порядком и хаосом СНА типичны в системах с квазипериодическим воздействием.

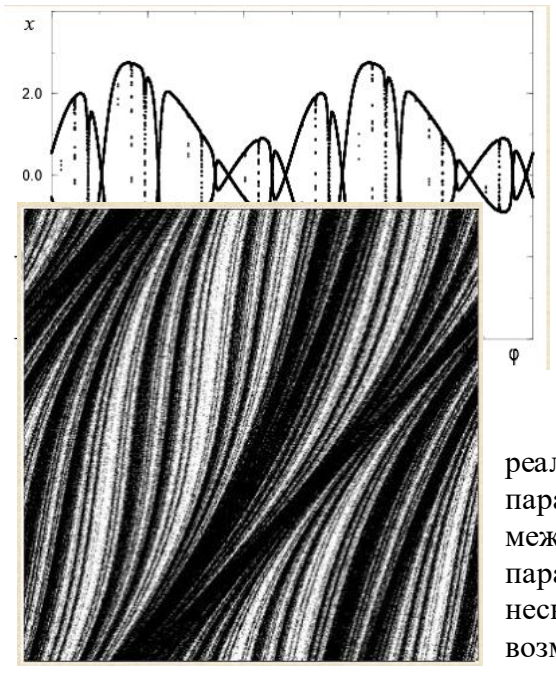
Можно сказать, что при переходе от простой динамики к сложной в этих системах сначала возникает "странность", а уже потом хаос.



Нелинейные системы, динамика которых протекает в присутствии зависящего от времени периодического внешнего воздействия проявляют интересное поведение, сопровождаемое разнообразными нетривиальными эффектами, включая переходы от периодической динамики к хаотической и наоборот. Если воздействие более сложное, например, квазипериодическое (суперпозиция двух гармонических сигналов с иррациональным соотношением частот), то появляются такие режимы динамики, как странные нехаотические аттракторы (СНА). СНА устойчивы к возмущениям (нет положительных показателей Ляпунова), однако структура аттрактора обладает фрактальными свойствами.

Рис. 14. Положение СНА среди других типов аттракторов *(нелинейный осциллятор Дуффинга).* Показаны фазовые портреты аттракторов в проекции на плоскость (x, $y=dx/dt$), где красные точки отвечают стробоскопическому сечению Ф=0, а также фазовые портреты на плоскости ($\theta=\Theta/2\pi$, x) в сечении Пуанкаре Ф=0, и спектры Фурье для режимов, соответствующих тору-аттрактору, СНА и хаосу. В данной системе реализуются многие из феноменов, в том числе последовательности удвоения торов, переходы к СНА, перемежаемость.

Рис. 15. Зависимость x_n от φ_n для странного нехаотического аттрактора (15).



Нет гарантии, что такой аттрактор является странным, т. е. сохраняет фрактальную структуру в сколь угодно малых масштабах. СНА крайне чувствительна к вариации параметров, т. к. располагается у границы между регулярными и хаотическими режимами. Соответствующие области в пространстве параметров имеют сложное устройство, и при небольших изменениях управляющего параметра может иметь место трансформация СНА в аттрактор в виде гладкого тора или в странный хаотический аттрактор.

Рис. 16. Фазовый портрет **системы со странным нехаотическим аттрактором**.

В системах с квазипериодическим воздействием СНА реализуется на множестве положительной меры в пространстве параметров, и рассматривается как феномен, характерный для области между порядком и хаосом. В каких-то точках пространства параметров автономной системы, совершающей движение с несколькими независимыми колебательными составляющими, возможна реализация СНА, но насколько заметную часть пространства параметров может занимать множество этих точек, и имеет ли оно отличную от нуля меру, сказать трудно.

Странный нехаотический аттрактор впервые был обнаружен в отображении

$$x_{n+1}=\lambda\tan(x_n)\cos(2\pi\varphi_n),\ \varphi_{n+1}=\omega+\varphi_n \bmod 1 \quad \left(\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad \lambda=1{,}5\right) \qquad (15)$$

Пример динамической системы с нестранным хаотическим аттрактором – модифицированное отображение Арнольда

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + \delta\cos(2\pi y_n) \bmod 1, \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \bmod 1. \end{cases} \quad (16)$$

Точка при $n\to\infty$ посещает любой элемент единичного квадрата. Несмотря на сжатие площади, движение изображающей точки является эргодическим.

22.9 Сингулярные аттракторы

Теория динамического хаоса в нелинейных диссипативных системах обыкновенных дифференциальных уравнений - это теория сингулярных аттракторов нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Сингулярность (особенность) – точка, в которой математическая функция стремится к бесконечности или не определена или имеет нерегулярное поведение (например, точка, в которой функция имеет разрыв или недифференцируема).

Сингулярная точка функции – точка, в любой окрестности которой функция неограниченна.

Особая точка векторного поля (дифференциального уравнения) – точка, в которой векторное поле равно нулю. Она является положением равновесия (в особой точке скорости изменения переменных равны нулю) или точкой покоя динамической системы; фазовая траектория с началом в особой точке состоит в точности из этой особой точки, а соответствующая ей интегральная кривая представляет собой прямую, параллельную оси времени. В любой малой окрестности фазового пространства, не содержащей особых точек, векторное поле можно выпрямить подходящей заменой координат — тем самым, поведение системы вне особых точек устроено одинаково и очень просто. Напротив, в окрестности особой точки система может обладать очень сложной динамикой.

Сингулярное множество – множество особых (сингулярных) точек функции. Примеры сингулярных гиперболических множеств: аттрактор Лоренца, отображение Эно и подкова Смейла.

Сингулярный цикл - цикл, в котором хотя бы один из его критических элементов является неподвижной особой (сингулярной) точкой (пример, отображение подковы).

Сингулярный аттрактор – нерегулярный аттрактор нелинейной диссипативной системы дифференциальных уравнений представляющий собой особое компактное подмногообразие фазового пространства, являющееся пределом каскадов бифуркаций удвоения периода и гомоклинических (гетероклинических) каскадов различных регулярных аттракторов. Простейшим сингулярным аттрактором нелинейной системы дифференциальных уравнений является аттрактор Фейгенбаума трехмерной автономной системы. Это непериодическая почти устойчивая траектория системы, являющаяся пределом каскада бифуркаций удвоения периодов устойчивых циклов. Любой простой сингулярный аттрактор не имеет положительного показателя Ляпунова, т. е. является почти устойчивой непериодической траекторией, а хаотическая динамика в автономной трехмерной системе возникает благодаря сдвигу фаз между траекториями, образующими сепаратриспую поверхность исходного сингулярного седлового цикла.

Сингулярный странный аттрактор векторного поля *X* - транзитивный инвариант множества *A* со следующими свойствами:

– *A* содержит плотное множество периодических орбит *X*

– *A* имеет место, чтобы одна особенность *X*

– экспонирует положительно плотную орбиту с положительным показателем Ляпунова

– существует окрестность *U* множества *A* (изолирующий блок), удовлетворяющий $A=\cap_{t\ge 0}X[t,U]$ где *X*[*t*,.] означает поток, порожденный *X*. Бассейн *A* – это множество точек, *w*-предельное множество которых принадлежит *A*. Мы говорим, что *A* является постоянным, если Y является сингулярным странным аттрактором для любого потока *Y*, близкого к *X*.

Сингулярно-гиперболический аттрактор – основной элемент эргодической теории равномерно гиперболических аттракторов для потоков.

Как следует из теоремы Пуанкаре-Бендиксона, в двумерном случае (на плоскости) автономная система нелинейных дифференциальных уравнений может иметь только простейшие регулярные аттракторы – устойчивые особые точки и простые предельные циклы. Сложные регулярные аттракторы (торы и сложные предельные циклы удвоенного и более периодов) и сингулярные аттракторы автономная система нелинейных дифференциальных уравнений может иметь только в случае размерности фазового пространства $n>3$. Трехмерные автономные системы имеют устойчивые предельные циклы любого периода, циклические сингулярные аттракторы любой сложности и простые устойчивые двумерные торы. Четырехмерные автономные системы имеют устойчивые двумерные торы любого периода, тороидальные сингулярные двумерные аттракторы любой сложности и простые устойчивые трехмерные торы и т.д.

Так как более сложный регулярный аттрактор рождается в результате бифуркации (Андронова—Хопфа или удвоения периода) из более простого регулярного аттрактора, то все нерегулярные аттракторы являются сингулярными (компактные подмногообразия фазового пространства – пределы каскадов бифуркаций удвоения периода или гомоклинических (гетероклипических) каскадов бифуркаций различных регулярных аттракторов). Никаких других аттракторов в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений не существует.

Различают простые сингулярные аттракторы – пределы каскадов бифуркаций удвоения периода различных регулярных аттракторов, и сложные сингулярные аттракторы – пределы гомоклинических (гетероклинических) каскадов бифуркаций регулярных аттракторов. Простой сингулярный аттрактор – почти устойчивая непериодическая траектория с кратным нулевым старшим характеристическим показателем. Сложный сингулярный аттрактор - семейство траекторий, среди которых нет устойчивых траекторий, но есть гомоклинический или гетероклипический сепаратрисный контур, бесконечное число неустойчивых седловых периодических траекторий и бесконечное число непериодических неустойчивых траекторий с кратным нулевым старшим характеристическим показателем.

Бифуркация удвоения периода цикла играет основополагающую роль в процессе формирования сингулярных аттракторов и хаотической динамики в нелинейных системах дифференциальных уравнений. Она начинает бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода, ведущий к возникновению простейшего нерегулярного (сингулярного) аттрактора – аттрактора Фейгенбаума. Ее можно наблюдать во всех классических трехмерных хаотических системах нелинейных дифференциальных уравнений (системы Лоренца, Рёсслера, Чуа, Магницкого и т.п.). Она обнаружена также во всех нелинейных автономных и неавтономных, диссипативных и консервативных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными и с запаздывающим аргументом.

В нелинейных системах ОДУ не существует никаких других нерегулярных аттракторов, кроме сингулярных. Сингулярные аттракторы – это негрубые образования, рождающиеся в результате каскадов бифуркаций удвоения периода и гомоклинических и гетероклинических каскадов бифуркаций регулярных аттракторов. Так как в любой окрестности точки существования сингулярного аттрактора в пространстве параметров существует бесконечное число точек существования различных регулярных аттракторов, а в процессе каскадов бифуркаций сложность сингулярных аттракторов возрастает, то их типичными бифуркациями являются следующие бифуркации. Простейший сингулярный аттрактор – аттрактор Фейгенбаума.

Все происходящее в нелинейных системах дифференциальных уравнений должно описываться бифуркациями траекторий в фазовом пространстве системы. Поэтому, все аттракторы нелинейных диссипативных систем можно разбить на два класса: простые

(регулярные) и сложные (нерегулярные) аттракторы. К регулярным аттракторам относятся гладкие подмногообразия фазового пространства. Это - особые точки, предельные циклы и инвариантные торы произвольной размерности и произвольного конечного периода. Заметим, что каждый более сложный регулярный аттрактор рождается в результате бифуркации (Андронова-Хопфа или удвоения периода) из более простого регулярного аттрактора. Все нерегулярные аттракторы являются сингулярными, то есть это особые компактные подмногообразия фазового пространства, являющиеся пределами каскадов бифуркаций удвоения периода или гомоклинических (гетероклиииических) каскадов бифуркаций различных регулярных аттракторов. Никаких других аттракторов в нелинейных диссипативиых системах дифференциальных уравнений не существует.
Как следует из теоремы Пуанкаре-Бендиксона, в двумерном случае (на плоскости) автономная система нелинейных дифференциальных уравнений может иметь только простейшие регулярные аттракторы устойчивые особые точки и простые предельные циклы. Следовательно, сложные регулярные аттракторы (торы и сложные предельные циклы удвоенного и более периодов) и сингулярные аттракторы автономная система нелинейных дифференциальных уравнений.

Различают простые сингулярные аттракторы, являющиеся пределами каскадов бифуркаций удвоения периода различных регулярных аттракторов, и сложные сингулярные аттракторы, являющиеся пределами гомоклинических (гетероклинических) каскадов бифуркаций регулярных аттракторов. Простой сингулярный аттрактор является почти устойчивой непериодической траекторией с кратным нулевым старшим характеристическим показателем. Сложный сингулярный аттрактор – семейство траекторий, среди которых нет устойчивых траекторий, но есть гомоклинический или гетероклиииический сепаратрисный контур, бесконечное число неустойчивых седловых периодических траекторий и бесконечное число непериодических неустойчивых траекторий с кратным нулевым старшим характеристическим показателем.

В трёхмерном случае любой простой сингулярный аттрактор (почти устойчивая непериодическая траектория) имеет нулевой старший характеристический показатель. В пространстве большей размерности траектория, лежащая на простом сингулярном аттракторе, также имеет нулевой старший характеристический показатель.

Рассмотрим гладкое семейство нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x,\mu), \quad x \in M \subset R^3, \quad \mu \in I \subset R, \quad F \in C^\infty, \qquad (17)$$

заданных в трехмерном фазовом пространстве M гладкими векторными полями F, зависящими от значений скалярного системного параметра μ, лежащих в интервале I вещественной прямой R.

Простейшим из простых сингулярных аттракторов является аттрактор Фейгенбаума – первый непериодический аттрактор, существующий в семействе систем (17) при $\mu=\mu_\infty$, где значение μ_∞ соответствует пределу последовательности значений параметра μ, при которых происходят бифуркации удвоения периода исходного цикла. Простой сингулярный аттрактор является почти устойчивой непериодической траекторией, проходящей через концы ветвей какого-либо бесконечного дерева Фейгенбаума. Существует бесконечное множество интервалов значений параметра μ, при которых семейство систем (17) имеет регулярные аттракторы (асимптотически орбитально устойчивые периодические траектории пусть даже очень большого периода). Семейство систем (17) имеет простые сингулярные аттракторы (непериодические почти устойчивые траектории) в бесконечном числе точек накопления различных бесконечных субкаскадов бифуркаций удвоения периода различных циклов из субгармонического и следующим за ним каскадов бифуркаций. Любой простой сингулярный аттрактор

семейства автономных трехмерных систем (17) имеет один отрицательный и два нулевых показателя Ляпунова и является почти устойчивой непериодической траекторией.

Каскады бифуркаций регулярных аттракторов, а также простые и сложные сингулярные аттракторы существуют уже в итерациях нелинейных одномерных унимодальных отображений. Простейшим примером такого простого сингулярного аттрактора является аттрактор Фейгенбаума одномерного унимодального логистического отображения

$$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n),\ x\in[1;1] \qquad (18)$$

при некотором $\mu=\mu_\infty$. Наиболее сложным примером сложного сингулярного аттрактора является аттрактор того же логистического отображения (18) при $\mu=4$.

Нелинейная система ОДУ имеет обычно бесконечное число сингулярных аттракторов различной сложности, занимающих различные по плотности области фазового пространства, которые обладают геометрической (масштабной) инвариантностью; увеличенная часть аттрактора подобна всему аттрактору. В этом случае множество - фрактал (есть фрактальная структура и фрактальная размерность).

Как уже упоминалось, фрактальная размерность регулярных аттракторов диссипативных систем дифференциальных уравнений равна целому числу и совпадает с их обычной топологической размерностью. Фрактальная размерность устойчивого предельного цикла конечного периода равна единице, а устойчивого инвариантного тора конечного периода — двум. Для множеств, обладающих масштабно-инвариантной структурой, фрактальная размерность может иметь дробное значение. Пример: канторово множество. Однако процесс построения сингулярных аттракторов существенно отличается от процесса построения канторова множества. В то время как при построении канторова множества происходит уменьшение размерности исходного множества (единичного отрезка) при сохранении его мощности на каждом шаге, то при построении аттрактора Фейгенбаума отображения (18) в результате каскада бифуркаций удвоения периода происходит процесс увеличения мощности множества при сохранении его нулевой размерности на каждом шаге. Фрактальная размерность любого простого сингулярного аттрактора семейства трехмерных автономных систем (17) не может быть больше двух

Согласно теории Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого (ФШМ-теория) переход к хаотической динамике во всех без исключения автономных и неавтономных, диссипативных и консервативных нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и с запаздывающим аргументом происходит в соответствии с одним универсальным бифуркационным сценарием, начинающимся каскадом бифуркаций удвоения периода Фейгеибаума и продолжающимся субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского и гомоклиническим каскадом бифуркаций Магницкого устойчивых циклов или торов. Внутри субгармонического и гомоклинического каскадов в результате седло-узловых бифуркаций происходит рождение циклов (торов) любого периода, с которыми затем происходят каскады бифуркаций удвоения периода Фейгеибаума и гомоклинические (гетероклинические) каскады вплоть до образования при некоторых значениях параметров сингулярных непериодических аттракторов. Поэтому в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений не существует никаких других нерегулярных аттракторов, кроме сингулярных.

По ФШМ-теории во всех сложных нелинейных системах дифференциальных уравнений, описывающих многочисленные природные физические, химические, биологические, экологические, а также экономические и социальные процессы и явления макромира, включая диссипативные и консервативные, автономные и неавтономные системы, системы ОДУ, уравнений с частными производными и запаздывающим аргументом, осуществляется единый универсальный бифуркационный сценарий усложнения динамики решений.

22.10 Многомерные нерегулярные аттракторы

Многомерные странные аттракторы часто обнаруживаются в системах с большим числом степеней свободы. Среди возможных механизмов, объясняющих существование многомерных странных аттракторов выделяются следующие: 1) в многомерном фазовом пространстве в докритической ситуации существуют непритягивающее стохастическое множество и маломерный странный аттрактор. В момент бифуркации маломерный аттрактор перестаёт быть таковым, а бывшее непритягивающим стохастическое множество высокой размерности вливается в возникший скачком многомерный аттрактор; 2) при изменении параметров в аттракторе происходит постепенная непрерывная перестройка его структуры, при которой размерность аттрактора монотонно увеличивается. Здесь можно выделить два случая: а) при изменении параметра в аттракторе рождаются седловые траектории со всё большим числом неустойчивых направлений; б) число неустойчивых направлений сохраняется, но возрастает скорость разбегания траекторий вдоль этих направлений.

Гиперболические и псевдогиперболические аттракторы многомерных отображений, являются настоящими странными аттракторами, однако, допускают существование гомоклинических касаний.

22.11 Дикие аттракторы

В пространстве $n \geq 4$ существует класс динамических систем, содержащих дикое гиперболическое множество (дикий аттрактор).

Дикие гиперболические множества (Ньюхаус) – равномерно гиперболические множества, устойчивое и неустойчивое многообразия которых имеют квадратичное касание, неустранимое посредством малых гладких возмущений. Индивидуальные гомоклинические касания исчезают при слабых шевелениях системы, но в целом избавиться от них таким образом нельзя, поскольку неизбежно возникают новые касания.

Дикий гиперболический аттрактор (*wild attractor*) – аттрактор, допускающий гомоклинические касания, но не содержат устойчивых периодических траекторий, которые не появляются также и при возмущениях. Дикие гиперболические аттракторы относят к "настоящим" странным аттракторам, к которым ранее приписывали лишь гиперболические и квазигиперболические (Лоренц) аттракторы.

Дикий аттрактор содержит нетривиальное базисное гиперболическое множество вместе с его неустойчивым многообразием, которое при этом имеет точки нетрансверсального пересечения с устойчивым многообразием. Наличие дикого множества обуславливает весьма нетривиальное поведение траекторий. Дикий аттрактор может содержать периодические траектории с негрубыми гомоклиническими кривыми, причём порядок касания устойчивого и неустойчивого многообразия вдоль гомоклинической кривой может быть произвольно велик. Полное описание динамики и бифуркаций такого аттрактора невозможно ни в каком конечно-параметрическом семействе. Он может содержать негрубые периодические траектории произвольно высоких порядков вырождения; в нём могут одновременно существовать периодические траектории с различными размерностями неустойчивых многообразий.

Теория дикого аттрактора близка к геометрической модели аттрактора Лоренца с той разницей, что она существенно нетрёхмерна и здесь состояние равновесия не седло, а седло-фокус.