Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Химический факультет

Междисциплинарный университет Бекмана

Профессор, д.х.н.
Бекман Игорь Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ ФРАКТАЛОВ

Курс лекций

Москва, 2010

Аннотация

Конспект лекций для студентов обучающихся в рамках программы междисциплинарного образования, посвящен основам фрактальной геометрии, и её применению в искусстве, науке, технике и экологии. Основное внимание уделено идеи самоподобия - наиболее важной симметрии из встречающихся в природе. В первой части курса рассмотрен математический аппарат фрактальной геометрии и способы построения фракталов различного типа. Затем приведены иллюстрации применения фракталов в искусстве (в музыке, в живописи, скульптуре и дизайне). Дан краткий анализ генерации фракталов в сфере математической физики, в частности, их роль в дифференциальных уравнениях в частных производных с дробными степенями. Приведено описание фликкер- спектроскопии, включая исследование эффекта интермиттанса. Во второй части курса описано применение фракталов для моделирования различного рода объектов (деревья, коллоидные частицы и аэрозоли, дендриты, береговая линия моря, плазма и т.п.) и процессов (броуновское движение, миграция, диффузия, перколяция, адсорбция, турбулентность и т.п.). Третья часть курса посвящена применению геометрии фракталов в математике, физике, химии, материаловедении, биологии, географии, геологии, экологии, экономике, а также для анализа текстов и временных рядов (на примере, цены акций и флуктуации радиационного фона).

Содержание

Оглавление

Предисловие

Окружающий нас мир состоит из предметов различной формы и процессов, как периодических, так и случайных. Далеко не все из них способна описать современная математика. Хотя определённый прогресс наметился - помимо трёх старых геометрий (геометрия Эвклида, Римана и Лобачевского) появилась геометрия фракталов, вовлекшая в количественных анализ целый ряд объектов исследования, которые одновременно характеризуются ломаной линией и самоподобны).

Евклидова геометрия (или **элементарная геометрия**) — геометрическая теория, основанная на системе аксиом, впервые изложенной в "Началах" Евклида (III век до н.э.). Аксиомы Евклида носят очевидный характер: от всякой точки до всякой точки можно провести прямую; ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой; из всякого центра всяким раствором может быть описан круг; прямые углы равны между собой; параллельные прямые не пересекаются и т.п. Важно, что геометрия Евклида реализуется на поверхностях с нулевой кривизной.

Геометрия Римана реализуется на поверхностях с постоянной положительной кривизной - на выпуклых объектах (на сферах). Как известно, на глобусе меридианы (параллельные линии) пересекаются, причём в двух точках: на северном и южном полюсах.

Геометрия Лобачевского реализуется на поверхностях с постоянной отрицательной кривизной - на вогнутых объектах. В пиале параллельные сходятся в одном полюсе (на дне пиалы) и расходятся на бесконечные расстояния при движении в противоположную сторону.

Все эти геометрии имеют дело с объектами или физическими процессами, которые можно описать гладкими законами или функциями, которые непрерывны и могут быть продифференцированы в любой точке. Но в природе множество объектов ломаной формы. В этом легко убедиться, взглянув на облака, морозные узоры на стекле, берег моря (особенно в Норвегии) и т.п. Упомянутые математики хорошо пригодны для описания периодических процессов. Но в природе много хаотических явлений, например, возникновение под действием порыва ветра волн на гладкой поверхности озера.

Предложенная Бенуа Мандельбротом в 1975 году геометрия фракталов позволила существенно расширить объекты исследования, распространив математические методы на объекты с чрезвычайно тонкой структурой. Конечно не на все объекты с разрывными (не дифференцируемыми) функциями, а только самоподобные, инвариантные относительно изменения масштаба (т.е. выглядящие одинаково при любой степени увеличения).

Теперь четыре геометрии охватывают широкий набор объектов, то далеко не все. Остальные ждут очередного гения.

Фрактал *(fractus - состоящий из фрагментов, ломаный, разбитый) - структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.*

Фрактал - геометрическая фигура с интересными особенностями. Она, например, состоит из частей, представляющих собой уменьшенную (необязательно точную) копию целого. В свою очередь каждая часть разбивается на ещё меньшие копии до бесконечности. Математики говорят: "Бесконечно самоподобная фигура". А самое удивительное - это фигура с дробным числом измерений, то есть не двухмерная и не трёхмерная, а, скажем, 2,76-мерная.

Предлагаемый курс лекций посвящён самоподобию - наиболее важной симметрии из встречающихся в природе. Сначала мы рассмотрим основные идеи фрактальной геометрии и способы построения фракталов различного типа. Затем перейдём к иллюстрации применения фракталов в искусстве (в музыке, но в основном - в живописи, скульптуре и дизайне). Дадим краткий анализ генерации фракталов в сфере математической физики, в частности, их роль в дифференциальных уравнениях в частных производных с дробными степенями. Некоторое внимание уделим фликкер- спектроскопии, включая исследование эффекта интермиттанса. После чего займёмся применением фракталов для моделирования различного рода объектов (деревья, коллоидные частицы и аэрозоли, дендриты, береговая линия моря, плазма и т.п.) и процессов (броуновское движение, миграция, диффузия, перколяция, адсорбция, турбулентность и т.п.). Основная часть курса будет посвящена применению геометрии фракталов в математике, физике, химии, материаловедении, биологии, географии, геологии, экологии, экономике, а также для анализа текстов и временных рядов (на примере, цены акций и флутуации радиационного фона). Закончим мы анализом перспектив развития идейных основ и использования фрактальной геометрии в науке, технике и искусстве.

Конспект подготовлен для магистров МГУ, выбирающих курсы лекций в рамках междисциплинарного образования.

Лекция 1. ГЕОМЕТРИЯ ФРАКТАЛОВ

Данная лекция направлена на введение слушателей курса в мир фракталов и самооподобных объектов. Рассмотрены основные идеи фрактальной геометрии, способы построения фракталов различного типа и некоторые их практические применения.

Геометрия Эвклида имеет дело с "гладкими" объектами: шар, яйцо, цилиндр, кубик и т.п. Такие объекты можно найти в природе, но они редки. Обычно контуры, поверхности и объёмы окружающих нас предметов не ровны, не гладки и не совершенны. Они неровны, шершавы, изъязвлены множеством отверстий самой причудливой формы, пронизаны трещинами и порами, покрыты сетью морщин и царапин. Можно ли их как-то количественно описать? Геометрия фракталов говорит: не все, но многие можно. Если они самоподобны. Геометрии, общей для всех объектов, пока не существует.

Начнём с геометрии Эвклида. Дан шар радиуса r. Площадь сечения по экватору $S=\pi r^2$, длина экватора $l=2\pi r$, периметра к площади

$$\frac{l}{S} = 2\frac{1}{r} = 2 \cdot r^{-D} \text{, где } D=1. \qquad (1)$$

Площадь поверхности шара $S=4\pi r^2$, объём $V=(4/3)\pi r^3$, отношение

$$\frac{S}{V} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \pi r^2}{4\pi r^3} = 3\frac{1}{r} = 3 \cdot r^{-D} \text{, где } D=1 \qquad (2)$$

Отношение

$$\frac{l}{V} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi r}{4\pi r^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r^2} = 1{,}5 \cdot r^{-D} \text{, где } D=2. \qquad (3)$$

Имеем показательные функции с некоторым множителем (на него не обращаем внимания - он нас в дальнейшем интересовать не будет) с показателем степени D, который имеет ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ значения: здесь или 1 или 2. Важно, что это не только свойство сферы, но свойство любых геометрических тел, свойство геометрии Эвклида.

Если я возьму яблоко, то в пределах ошибки измерения у меня получатся те же зависимости. А если я откушу гнилыми зубами кусок яблока, то что произойдет с геометрическими характеристиками осадка?

Эксперимент будем проводить так: утопим огрызок в стакане воды, и по количеству вытесненной воды определим его объём V, затем покрасим огрызок и по количеству затраченной краски (зная сколько краски идёт на 1 см^2) найдём величину поверхности огрызка. Введя некоторый масштабированный параметр r, получим

$$S/V \sim r^{-D}, \qquad (4)$$

где D - дробное число, в зависимости от развитости рельефа и размерности пространства лежащее где-то между 0 и 3.

Далее мы будем называть D учёным словом ПОКАЗАТЕЛЬ ФРАКТАЛОВ. Но является ли огрызок яблока фрактальной структурой? Нет, не является. Колобок дифференцируем в любой точке, и потому попадает под геометрию Эвклида, ёжик не дифференцируем ни в одной точке, D у него дробное, но фракталом он не является.

Чтобы объект отнести к фракталам мало иметь дробное значение D (хотя иметь, конечно, надо обязательно), нужно, чтобы структура была самоподобна, масштабно инвариантна (обладать скейлингом). Грубо говоря, картина при любой степени увеличения в своих основных чертах должна оставаться неизменной (т.е. с каким бы шагом (большим или самым мелким) не измерял бы я длину, величина D должна оставаться постоянной. Ни с Колобком, ни с огрызком яблока, ни с ежом такого не получится, а вот с облаками, горами, дельтой реки может получиться (хотя и не всегда). Существуют чисто математические объекты, к которым дробность и самоподобие применимы на 100%.

Сказанное выше - вольная интерпретация красивой идеи. Займёмся теперь грамотным обоснованием фрактальной геометрии.

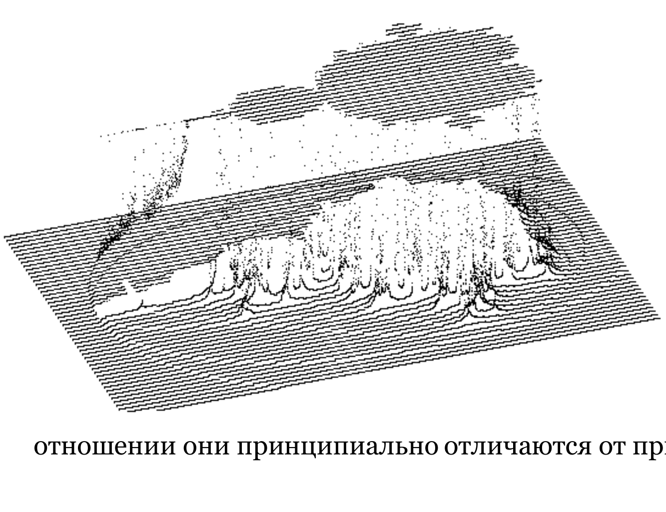


Рис. 1. Трёхмерное множество Мандельброта и его проекция.

Фракталы — язык геометрии. Однако их главные элементы недоступны непосредственному наблюдению. В этом отношении они принципиально отличаются от привычных объектов евклидовой геометрии, таких, как прямая линия или окружность. Фракталы выражаются не в первичных геометрических формах, а в алгоритмах, наборах математических процедур. Эти алгоритмы трансформируются в геометрические формы с помощью компьютера. Репертуар алгоритмических элементов неисчерпаем. Овладев языком фракталов, можно описать форму облака так же чётко и просто, как архитектор описывает здание с помощью чертежей, в которых применяется язык традиционной геометрии.

С математической точки зрения фрактал (*fraction, fractional* - дробь, дробный) - это прежде всего множество с дробной размерностью. В геометрии Эвклида точка имеет размерность 0, отрезок и окружность - размерность 1, круг и сфера - размерность 2. Феликс Хаусдорф (1868-1942) в 1919 г. первым нашёл в математике множества с дробной размерностью (канторово множество, кривая Коха и др.). Это направление развивал Абрам Самойлович Безикович (1891-1970), размерность Хаусфорда-Безиковича нашла применение в некоторых разделах математики, но громадный интерес к ней возник после публикации в 1975 году Бенуа Мандельбротом (1924-2010) книги (наиболее известное издание *Benoit B. Mandelbrot//The Fractal Geometry of Nature Henry//Holt and Company*, 1983, P. 468), в которой он привёл яркие примеры применения фракталов к объяснению некоторых природных явлений. Он выделил те математические множества и объекты, которые можно разбить на сколь угодно малые части, причём каждая часть окажется просто уменьшенной копией целого: если мы будем смотреть на фрактал в микроскоп, то увидим ту же самую картинку, что и без микроскопа. Успех фракталов связан с тем, что он воспользовался удобной количественной мерой неидеальности объектов - извилистости, морщинистости, трещиноватости, пористости объёма - размерностью Хаусфорда-Безиковича.

***Фрактал** (fractus — дроблёный, состоящий из фрагментов) — термин, введённый Б.Мандельбротом в 1975 году для обозначения множеств с дробной размерностью Хаусдорфа-Безуковича (HB). Для самоподобных множеств, типа канторовского множества, HB-размерность совпадает с размерностью подобия*.

Применительно к идеальным объектам классической евклидовой геометрии она давала те же численные значения, что и известная топологическая размерность (иначе говоря, была равна нулю для точки, единице - для гладкой плавной линии, двум - для фигуры и поверхности, трем - для тела и пространства). Но совпадая со старой, топологической, размерностью на идеальных объектах, новая размерность обладала более тонкой чувствительностью к несовершенствам реальных объектов, позволяя различать и индивидуализировать то, что прежде было безлико и неразличимо. Так, отрезок прямой, отрезок синусоиды и самый причудливый меандр неразличимы с точки зрения топологической размерности - все они имеют топологическую размерность, равную единице, тогда как их размерность Хаусдорфа - Безиковича различна и позволяет числом измерять степень извилистости. Но самое важное в этой размерности, что она способна принимать не только целые, как топологическая размерность, но и дробные значения.

Равная единице для прямой (бесконечной, полубесконечной или для конечного отрезка), размерность Хаусдорфа - Безиковича увеличивается по мере возрастания извилистости, тогда как топологическая размерность упорно игнорирует все изменения, происходящие с линией, если только они не сопровождаются разрывом или склеиванием каких-то точек. При этом, увеличивая свое значение, размерность Хаусдорфа - Безиковича не меняет его скачком, как сделала бы на ее месте топологическая размерность; она принимает дробные значения: равная единице для прямой, она становится равной 1,02 для слегка извилистой линии, 1,15 - для более извилистой, 1,53 - для очень извилистой и т.д. Для того чтобы особо подчеркнуть способность размерности Хаусдорфа - Безиковича принимать дробные, нецелые, значения, Мандельброт и придумал свой неологизм, назвав ее фрактальной размерностью. Итак, фрактальная размерность (не только Хаусдорфа - Безиковича, но и любая другая) - это размерность, способная принимать не обязательно целые значения, фрактал - объект с фрактальной, размерностью, а фрактальность - свойство объекта быть фракталом или размерности быть фрактальной.

Многие объекты, построенные математиками, оказались фракталами, т. е. объектами с дробной, или фрактальной, размерностью Хаусдорфа - Безиковича. Все они очень красивы и часто носят поэтические названия: канторовская пыль, кривая Пеано, снежинка фон Коха, ковер Серпинского и т.д. И все они обладают одним очень важным свойством, которое роднит их с самой обыкновенной прямой. Это свойство называется самоподобием: все эти фигуры подобны любому своему фрагменту. Если вам дадут исходный снимок какого-то фрактального объекта, и снимок, его же, но увеличенный в какое-то число раз, то вы не сможете найти между ними какой-либо разницы.

Так как фрактал состоит из бесконечного числа повторяющихся элементов, невозможно точно измерить его длину. Это означает, что чем более точным инструментом мы будем его измерять, тем большей окажется его длина. В то время как гладкая евклидова линия заполняет в точности одномерное пространство, фрактальная линия выходит за пределы одномерного пространства, вторгаясь в двумерное. Поэтому фрактальная размерность кривой Коха или «колбасы» Минковского находится между 1 и 2.

Фрактальное самоподобие (скейлинг) *повторение фракталом самое себя на разных масштабных уровнях, т. е. неизменность закона построения фрактала.*
Самоподобный объект *— объект, в точности или приближённо совпадающий с частью себя самого (то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей). Многие объекты реального мира, например, береговые линии, обладают свойством статистического самоподобия: их части статистически однородны в разных шкалах измерения. Самоподобие есть характеристическое свойство фрактала. Инвариантность относительно изменения шкалы является одной из форм самоподобия, при которой при любом приближении найдётся по крайней мере одна часть основной фигуры, подобная целой фигуре.*

Самоподобный объект выглядит неизменным и после увеличения и после уменьшения его размеров. Многие законы не зависят от масштаба. Тем не менее скейлинг имеет предел: постоянную Планка, когда объекты становятся слишком малыми, или скорость света - когда объекты движутся слишком скоро. В некотором смысле самоподобие - это тоже периодичность, только в логарифмической шкале.

Все фракталы, обладающие хотя бы какой-нибудь симметрией, самоподобны.

Самоподобие означает, что у объекта нет характерного масштаба: будь у него такой масштаб, вы сразу бы отличили увеличенную копию фрагмента от исходного снимка. Самоподобные объекты обладают бесконечно многими масштабами на все вкусы. Разумеется, далеко не все фракталы обладают столь правильной, бесконечно повторяющейся структурой, как объекты рождённые фантазией математиков и художников. Многие фракталы, встречающиеся в природе (поверхности разлома горных пород и металлов, облака, турбулентные потоки, пена, гели, контуры частиц сажи и т.д.), лишены геометрического подобия, но упорно воспроизводят в каждом фрагменте статистические свойства целого. Такое статистическое самоподобие, или самоподобие в среднем, выделяет фракталы среди множества природных объектов. Даже простейшие из фракталов - геометрически самоподобные фракталы - обладают непривычными свойствами. Например, снежинка фон Коха обладает периметром бесконечной длины, хотя ограничивает конечную площадь. Кроме того, она такая колючая, что ни в одной точке контура к ней нельзя провести касательную (снежинка фон Коха нигде не дифференцируема).

Не менее необычна и физика фракталов. Фрактальные среды обладают настолько сложной геометрией, что многие процессы протекают в них не так, как в обычных сплошных средах. Изучая их фракталы, мы учимся различать и предсказывать важные особенности окружающих нас предметов и явлений, которые прежде, если и не игнорировались полностью, то оценивались лишь приблизительно, качественно, на глаз. Например, сравнивая фрактальные размерности сложных сигналов, энцефалограмм или шумов в сердце, медики могут диагностировать некоторые тяжелые заболевания на ранней стадии, когда больному еще можно помочь. Барабан, натянутый на гладкий или фрактальный контур, звучит по-разному, и это различие можно использовать для диагностики характера контура и определения его фрактальной размерности. Метеорологи научились определять по фрактальной размерности изображения на экране радара скорость восходящих потоков в облаках, что позволяет с большим упреждением выдавать морякам и летчикам штормовые предупреждения. Такого рода применений фракталов уже сейчас существует великое множество, и число их все увеличивается.

Свойство самоподобия коренным образом отличает фракталы от объектов геометрии Эвклида. Действительно, возьмём такой объект, как график дифференцируемой функции. Если мы направим микроскоп в какую-то точку этого графика, то при увеличении изображения увидим прямую линию - касательную в этой точке. Классические объекты упрощаются при увеличении изображения, в "малом" они линейны (прямая, плоскость и т.д.). Фракталам же присуща "внутренняя бесконечность" - производные в каждой точке обращаются в бесконечность.

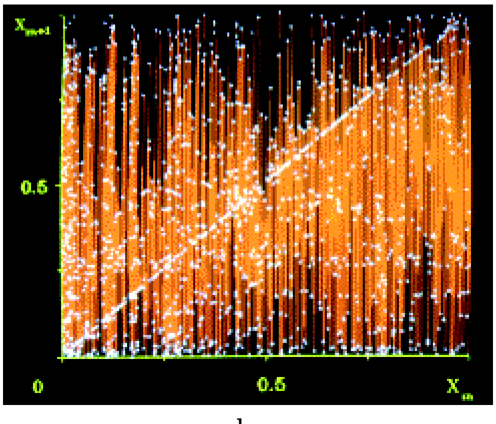


Рис. 2. Функция Вейерштрасса. Всюду непрерывная, нигде не дифференцируемая: производные в каждой точке обращаются в бесконечность.

У фракталов есть одно важное общее свойство: степень изрезанности или сложности их структуры может быть измерена неким характеристическим числом — фрактальной размерностью *D*.

Фракталы бывают одномерными, двумерными и трёхмерными. Типичным примером одномерного фрактала является канторово множество, на основе которого стоится фрактал - канторова пыль.

Канторово множество *— один из простейших фракталов, подмножество единичного отрезка вещественной прямой. Описано в 1883 г. Кантором.*

Рис. 3. Построение канторова множества.

Канторово множество имеет топологическую размерность 0, промежуточную, т.е. не целую) Хаусдорфову размерность равную ln2/ln3≈0,63, нулевую меру Лебега.

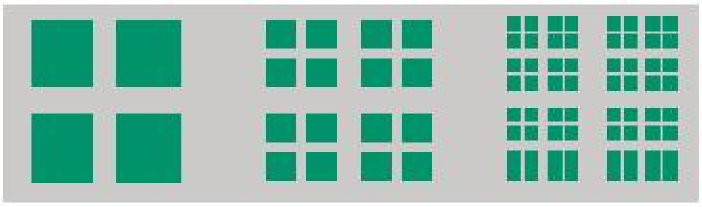


Рис. 4. Построение канторовой пыли на квадрате.

Канторовая пыль относится к фрактальному множеству с $D<1$. В математике его основой является уравнение Ферхьюста и логистическое уравнение, описывающее рост популяции животных. Построение канторовской пыли аналогично кривой Коха, с тем отличием, что на n-м шаге осуществляется не добавление, а удаление n интервалов длиной $L_n = (2/3)n$, в соответствии с этим длина оставшегося множества составляет D=Ln2/ln3=0,631 а каждое звено l_n остается тем же, что и в фигуре Коха. "Канторова пыль" представляет образование, промежуточное между точкой и линией. Процедура построения канторовского множества может быть представлена иерархическим деревом Кейли (рис.).

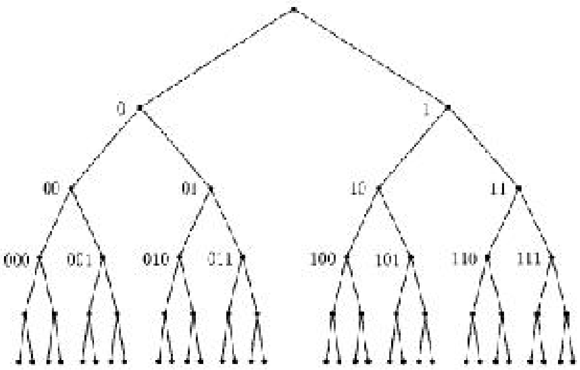


Рис. 5. Дерево Кейли.

Для рассматриваемой в данном курсе лекций идеологии, важно, что удвоение периода роста является сценарием перехода от порядка к хаосу.

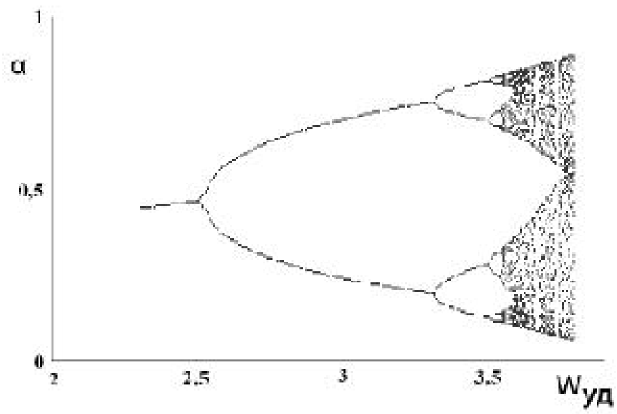


Рис. 6. Образование канторовой пыли (хаоса) совместно с бинарным лексиокографическим деревом.

Рассмотрение фрактальной размерности начнём с примера регулярных, самоподобных фракталов. Рассмотрим сначала отрезок единичной длины, который разбит на N равных кусков длиной b, так что $N = 1/b$. По мере уменьшения b значение N растёт линейно, что и следовало ожидать для одномерной кривой. Аналогично, если мы разделим квадрат единичной площади на N равных квадратиков со стороной b, то получим $N= 1/b^2$ - ожидаемый для двумерного объекта результат. Можно утверждать, что в общем случае $N=1/b^D$, где D размерность объекта. Логарифмируя обе части этого равенства, выразим размерность в виде

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{b}\right)}, \qquad (5)$$

которая не зависит от основания логарифма.

Теперь применим эти соображения к **кривой Коха**. На каждой стадии формирования этой кривой замена средней трети каждого сегмента производится в направлении, которое увеличивает площадь под кривой. Можно увидеть, что при каждом уменьшении длины b в три раза число сегментов увеличивается в четыре раза. Таким образом имеем $N = 4$ и $b = 1/3$, и фрактальная размерность треугольной кривой Коха равна $D = \ln 4/\ln 3 = 1{,}2618...$

В триадной кривой Коха (предложена Хельге фон Кохом в 1940 г.) ни в одной точке нельзя подвести касательную. Построение кривой начинается с отрезка единичной длины (рис.1) - это 0-е поколение кривой Коха. Далее каждое звено (в нулевом поколении один отрезок) заменяется на образующий элемент, обозначенный на рис. 6 через n=1. В результате такой замены получается следующее поколение кривой Коха. В 1-ом поколении - это кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по 1/3. Для получения 3-го поколения проделываются те же действия - каждое звено заменяется на уменьшенный образующий элемент. Итак, для получения каждого последующего поколения, все звенья предыдущего поколения необходимо заменить уменьшенным образующим элементом. Кривая n-го поколения при любом конечном n называется предфракталом. На рис. 7 представлены пять поколений кривой. При n стремящемся к бесконечности, кривая Коха становится фрактальным объектом.

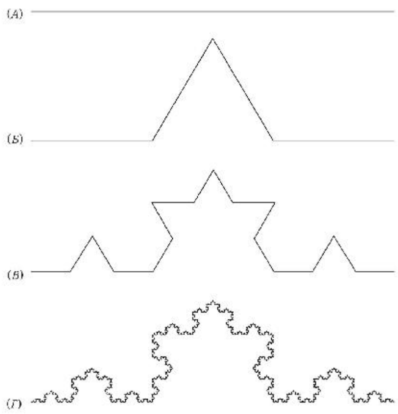


Рис. 7. Построение кривой Коха.

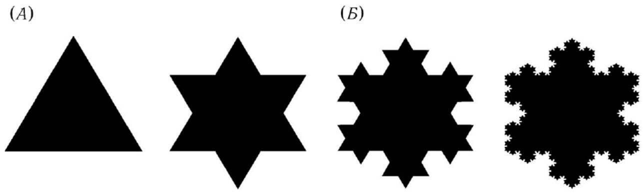


Рис. 8. Инициатор и генератор для снежинки Коха (А) и промежуточные стадии построения снежинки фон Коха.

Применив генератор фон Коха к равностороннему треугольнику и закрасив внутренность построенной фигуры в чёрный цвет, получим сплошную звезду Давида (рис. 8А). Бесконечная итерация такого построения приводит к снежинке фон Коха (рис. 8Б). После n итераций периметр снежинки становится в $(4/3)^n$ раз больше периметра исходного треугольника. При n, стремящемся к бесконечности, периметр снежинки становится бесконечно большим. Следовательно, длина перестаёт быть удобной величиной для количественной характеристики периметра. Необходимо ввести какую-то новую меру, которая позволила бы различать фракталы, порождаемые различными генераторами.

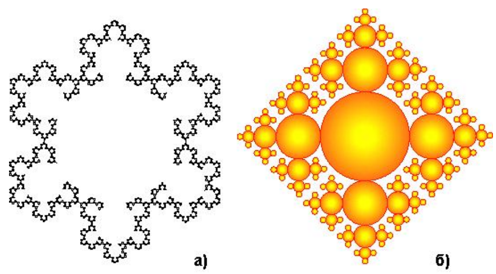
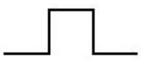
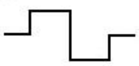
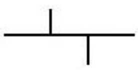
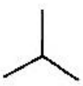


Рис. 9 Фигуры Коха, построенные из шестиугольников и окружностей.

Табл.1. Конструкции производящих фрактальных форм.

1)Кривая Коха(треугольная)		D_G =log4/log3 = 1.2618... N=4, b=1/3
2) Видоизменённая кривая Коха (прямоугольная)		Единичный сегмент имеет три отрезка длиной 1/3. два отрезка длиной 1/4. Из соотношения $3(1/3)^D + 2(1/4)^D = 1$ D_G= 1.34.
3)>Видоизменённая кривая Коха (меандр)		D_G =log8/log4 = 3/2 N=8, b=1/4
4)Канторовская пыль		D_G =log2/log3 = 0,6309... N=2, b=1/3
5)Дерево		D_G =log5/log3 = 1,465... N=5, b=1/3
6) Снежинка		D_G =log3/log$(3)^{1/2}$ = 2 N=3, b=$1/(3)^{1/2}$
7) Прокладка Серпинского		D_G =log3/log2 = 1,585... N=3, b=1/2

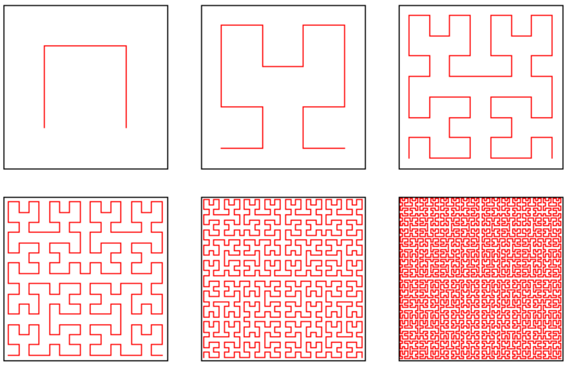


Рис. 10. Пример кривой Пеано, построенный Гильбертом. Здесь показан порядок обхода квадратиков 1-6 уровня.

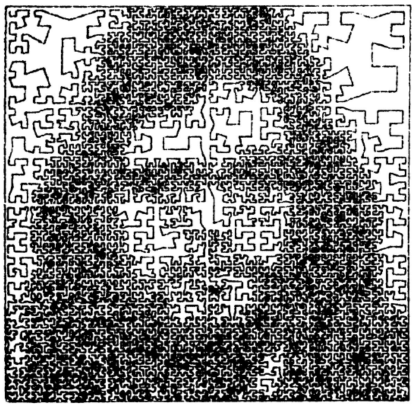
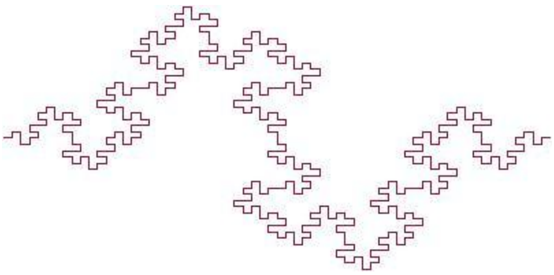


Рис. 11. Деформированная кривая Гильберта: точка зрения художника.

В Табл. 1 производящих форм в п.6 представлена треугольная снежинка. Формообразование шестиугольной снежинки Кеплера строится продолжением трёх лучей исходной треугольной снежинки. Следует обратить внимание, что при этом все пушинки этой снежинки от центра направлены наружу, как иголки на еловой ветке. Это свидетельствует о том, что формообразующая сила сосредоточена в центре снежинки и действует оттуда одинаково по всем направлениям. Фрактальная размерность снежинки Кеплера: $\frac{\log 6}{\sqrt{\log 3}} = 3{,}262$.

Интересно, что при D_H=2 мы не обязательно получим двумерную фигуру: вполне достаточно оказывается топологически одномерного объекта – линии. Известным примером может служить асимптотически самоподобная кривая Гильберта (рис. 10), проходящая сколь угодно близко от любой точки единичного квадрата. Она строится на кривой Пиано.

Кривая Пеано *— общее название для параметрических кривых, образ которых содержит квадрат (или, в более общем смысле, открытые области пространства)*.



Окончательный результат самоподобен: раздув любой подквадрат в 2^n раз, мы получим кривую в точности похожую на всю кривую.

Поскольку n-поколение кривой Гильберта состоит из 2^{2n}-1 звеньев длиной $1/2^n$, её размерность Хаусфорда равна 2, как и подобает кривой, заполняющей плоскую фигуру. На рис. 9 представлен вариант кривой Гильберта, рожденный фантазией художника.

Рис. 12. Кривая Минковского.

Классическим геометрическим фракталом является **кривая** (колбаса) Минковского. Инициатором является отрезок, а генератором - ломаная из восьми звеньев (два равных звена продолжают друг друга) — см. рис. 10. Кривая Минковского нигде не дифференцируема и не спрямляема, не имеет самопересечений, имеет Хаусдорфову размерность ln8/ln4=3/2=1,5 (поскольку она состоит из восьми равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия 1/4). В частности, кривая Минковского имеет нулевую меру Лебега.

Интересным примером автоподобной кривой является “кривая дракона”, придуманная Э.Хейуэем. Для ее построения возьмем отрезок, повернем его на 90° вокруг одной из вершин и добавим полученный отрезок к исходному. Получим угол из двух отрезков. Повторим описанную процедуру. Повернем угол на 90° вокруг вершины и добавим полученную ломаную к исходной (рис. 11). При построении следующих поколений выполняется правило: самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, а при замене следующих звеньев, направления смещения середин отрезков должны чередоваться. На рис. представлены несколько первых поколений и 11-е поколение кривой, построенной по вышеописанному принципу. Предельная фрактальная кривая (при n стремящемся к бесконечности) называется **драконом Хартера-Хейтуэя**.

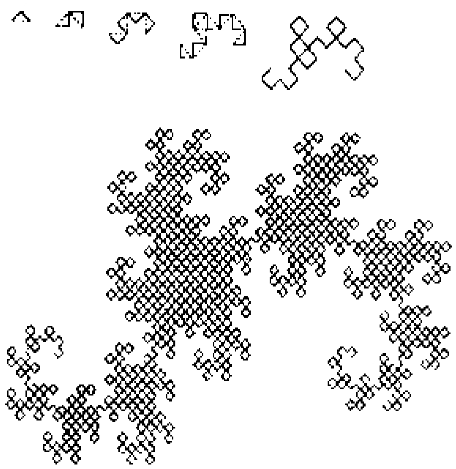


Рис. 13. Построение "дракона" Хартера-Хейтуэя

Линейный алгоритм построения фрактала можно представить в виде копировальной машины со многими редукторами, способными многократно уменьшать исходное изображение. Эта машина действует так же, как и обыкновенная копировальная машина, обладающая возможностью уменьшать или увеличивать изображение, но отличается тем, что имеет несколько уменьшающих линз, каждая из которых может копировать вводимое в машину изображение. Линзы могут настраиваться на различную степень уменьшения, и уменьшенные изображения могут помещаться в любое место. Таким образом, изображение может перемещаться, сжиматься, отражаться, вращаться и трансформироваться произвольным образом при условии, что прямые линии на изображении остаются прямыми после преобразования.

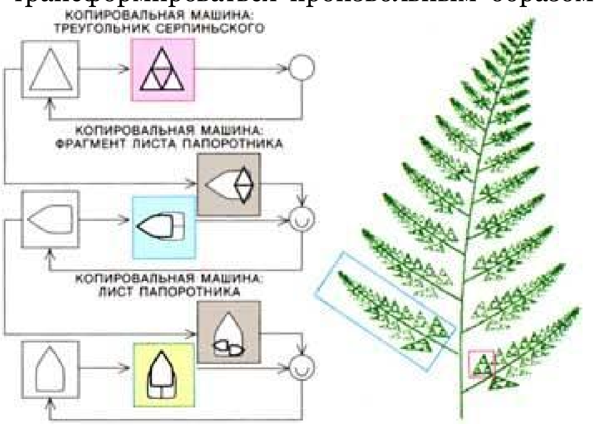
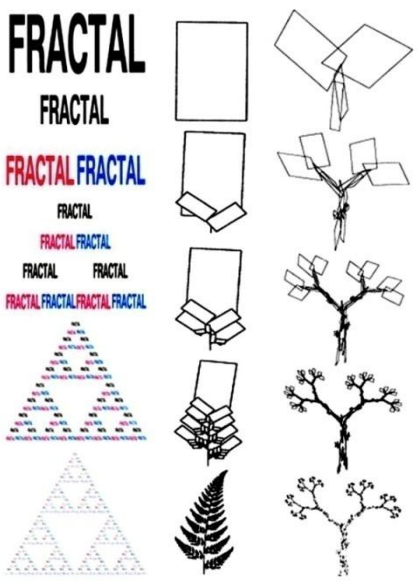


Рис. 14. Сетевая копировальная машина может строить составные фрактальные изображения, такие, как папоротник, состоящий из треугольников Серпинского. Несколько машин соединены в систему и работают параллельно: первая создаёт треугольники Серпинского, вторая располагает треугольники в листья, а третья строит общую форму папоротника (*слева*). Отметим, что листья попеременно ответвляются от главного стебля то влево, то вправо; треугольники на листьях ориентированы в противоположных направлениях (*справа*).

Способ, которым изображение перемещается и сжимается, определён алгоритмом. С помощью механизма обратной связи изображение подвергается многократной обработке, в процессе которой постепенно возникает фрактальная форма.

Одним из примеров фрактала, полученного при помощи такого алгоритма с обратной связью (рекурсивного алгоритма), является треугольник Вацлава Серпинского (1916 г.), который обладает свойством самоподобия: каждая часть фигуры, сколь бы малой она ни была, содержит изображение, которое в увеличенном виде воспроизводит целый треугольник Серпинского.

Треугольник Серпинского строится копировальной машиной со многими редукторами следующим образом. Изображение помещается в машину, уменьшается наполовину и копируется три раза, по одной копии в каждой вершине равностороннего треугольника. В результате получается триада. При повторении описанной процедуры триада, полученная на предыдущем шаге, снова уменьшается наполовину и копируется три раза и т.д. Уже после шести копирований, или итераций, начинает проступать окончательная форма, которая называется предельным изображением, поскольку оно является окончательным результатом бесконечно повторяющегося цикла копировальной машины. Предельное изображение можно довольно быстро определить путем оценки, но его невозможно достичь в рамках самого процесса.



Предельное изображение не зависит от исходного изображения. Например, в качестве исходного изображения можно взять слово FRACTAL. После шести шагов копирования исходное изображение станет уже практически невидимым, но зато в явном виде начнёт обнаруживаться форма треугольника Серпинского. С каждым новым циклом копирования первоначальное слово FRACTAL будет всё более неразборчивым.

Рис. 15. Фрактальные изображения, генерируемые многократно копировальной машиной с обратной связью, зависят лишь от запрограммированной процедуры копирования.

Слово *FRACTAL* (рис.15) трансформируется программой, которая уменьшает изображение вдвое и копирует его три раза: по одной копии в каждой вершине равностороннего треугольника. Результирующее изображение представляет собой треугольник Серпинского (*слева*). Несколько более замысловатые преобразования такого же рода порождают фрактал в форме листа папоротника (*в центре*) или фрактального дерева (*справа*). Любое исходное изображение, пропущенное через копировальную машину, даст один и тот же результат. Достаточно нескольких чисел, определяющих правила копирования (*вверху*), чтобы описать изображение, которое потребовало бы сотен тысяч чисел для его представления обычно применяющимися средствами.

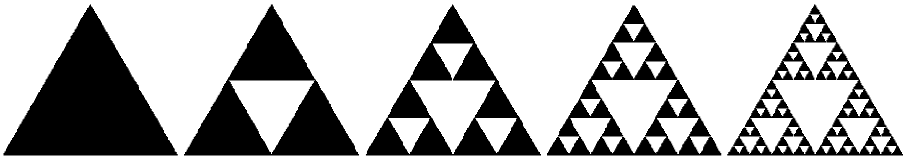


Рис. 16. Этапы построения треугольника Серпинского.

Известным примером фрактала является Ковёр Серпинского (квадрат Серпинского) — один из двумерных аналогов множества Кантора, который имеет топологическую размерность =1, промежуточную (т. е. не целую) Хаусфордову размерность ln8/ln3≈1,89 и нулевую меру Лебега.

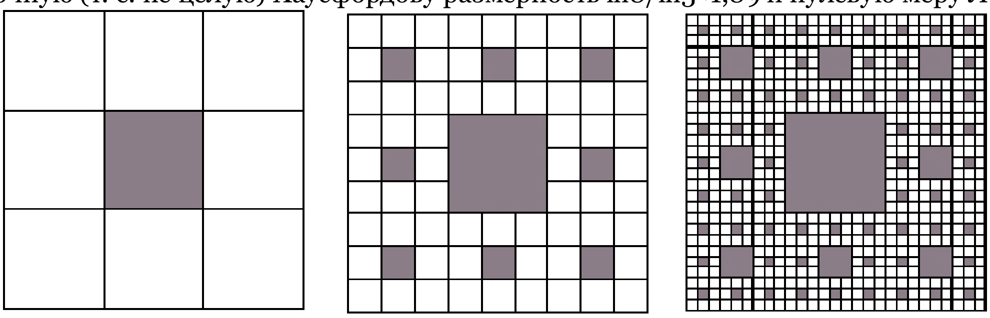


Рис. 17. Построение ковра Серпинского.

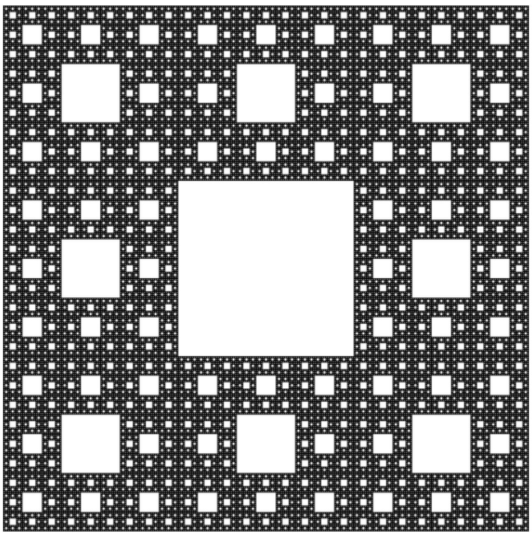


Рис. 18. Ковёр Серпинского.

Самоподобная фигура Серпинского получается из квадрата последовательным вырезанием серединных квадратов. А именно, разделим данный квадрат на девять равных квадратов и серединный квадрат вырежем. Получим квадрат с дыркой (рис. 17). Для оставшихся восьми квадратов повторим указанную процедуру. Разделим каждый из них на девять равных квадратов и серединные квадраты вырежем. Повторяя эту процедуру, будем получать все более дырявую фигуру. То, что остаётся после всех вырезаний, и будет искомым ковром Серпинского (рис. 18).

Отметим, что поскольку вырезаемые квадраты располагаются все более часто, то в результате на ковре Серпиского не будет ни одного, даже самого маленького, квадрата без дырки.

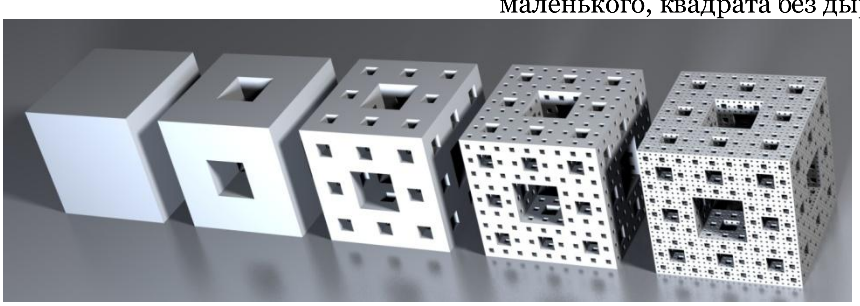
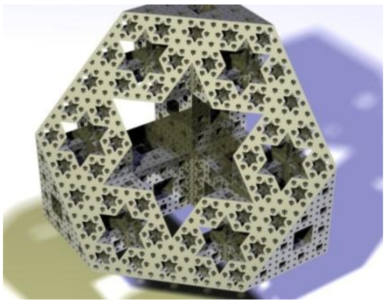


Рис. 19. Построение на основе ковра Серпинского (размерность *D*≈1,8928) строится губка Менгера (D-2,7268).

Вычислим площадь ковра Серпинского, считая исходный квадрат единичным. Для этого достаточно вычислить площадь вырезаемых квадратов. На первом шаге вырезается квадрат площади 1/9. На втором шаге вырезается восемь квадратов, каждый из которых имеет площадь 1/81. На каждом следующем шаге число вырезаемых квадратов увеличивается в восемь раз, а площадь каждого из них уменьшается в девять раз. Таким образом, общая площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальном членом 1/9 и знаменателем 8/9. По формуле суммы геометрической прогрессии находим, что это число равно единице, т.е. площадь ковра Серпинского равна нулю.



Если рассечь губку Менгера под одним интересным углом, то неожиданно получается фрактальная гексаграмма (звезда Давида, рис. 18).

Рис. 20. Одно из сечений губки Менгера.

Салфетка Серпинского также может быть обобщена на трёхмерное пространство (рис. 19).

Теперь обратимся к другому семейству фрактальных языков, их нелинейным диалектам. Один их них, так называемый квадратичный диалект порождает большое разнообразие геометрических форм с помощью довольно простого алгоритма, тесно связанного с современной теорией хаоса. Теория, лежащая в основе квадратичного диалекта, впервые была описана в 1918 году французским математиком Гастоном Жюлиа. Он занимался изучением комплексных чисел; как известно, комплексное число состоит из действительного числа и мнимой части, содержащей в качестве множителя мнимую единицу $i=\sqrt{-1}$. Комплексные числа обычно отображаются на плоскости с перпендикулярными координатными осями, одна из которых представляет действительные числа, а другая мнимые. Жулюа интересовал вопрос, что будет с последовательностью точек z_k, на комплексной плоскости, если они порождаются преобразованием $q(z)=z^2+c$. Каждая новая точка z_{k+1} получается подставлением предыдущей точки z_k в приведённую формулу преобразования. Комплексное число c является управляющим параметром, который можно выбирать произвольным образом. Этот несложный процесс с обратной связью порождает потрясающее многообразие форм.

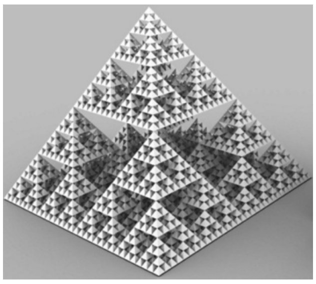


Рис. 21. Обобщение треугольника Серпинского в трёхмерное пространство.

Когда исходная точка z_0 подвергается преобразованию, то получающаяся последовательность демонстрирует поведение двух типов. Она либо свободно путешествует по плоскости, постепенно уходя в бесконечность, либо оказывается замкнутой в определённой области комплексной плоскости. Первые из них образуют множество «беглецов», те же, что остаются в замкнутом пространстве, принадлежат множеству «пленников». Исходная точка z_0, выбранная из множества пленников, генерирует последовательность, которая остаётся в численной неволе, независимо от того, сколько поколений этой последовательности вычисляется. Форма этой «тюрьмы» зависит от выбранного значения параметра c. Для точки z_0, лежащей вне замкнутой области, последовательность z_k удаляется от центра плоскости и уходит в бесконечность. Множество пленников и множество беглецов отделены друг от друга бесконечно тонкой границей, известной как множество Жюлиа (см. рис. 5).

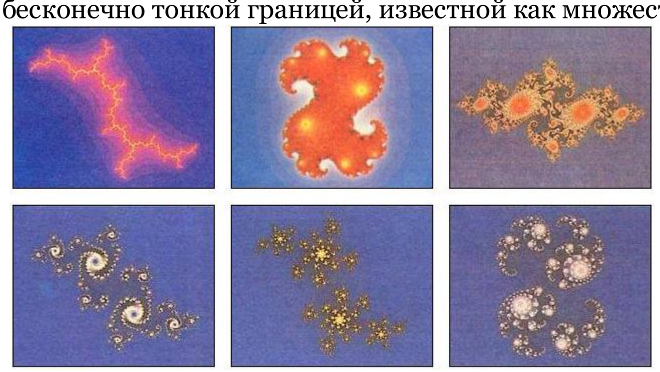


Рис. 22. Множества Жюлиа — это фрактальные границы, возникающие в результате итерирования квадратичного преобразования z^2+c. Они принимают разнообразные и удивительные формы, которые зависят только от числа c, называемого управляющим параметром. Некоторые значения c порождают множества Жюлиа, имеющие одно связное тело (*вверху*), при других значениях c эти множества распадаются на фрагменты и рассыпаются подобно пылинкам (*внизу*). Множество Мандельброта состоит из всех точек c, которые ассоциируются со связными множествами Жюлиа; оно служит также «оглавлением» для множеств Жюлиа.

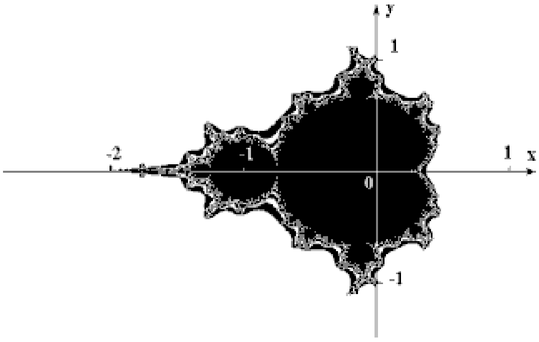


Рис. 23. Множество Мандельброта.

Алгоритм построения множества Мандельброта (относится к алгебраической группе) достаточно прост и основан на простом итеративном выражении:

$$\mathbf{Z}[i+1] = \mathbf{Z}[i] \cdot \mathbf{Z}[i] + \mathbf{C}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{Z}i$ и $\mathbf{C}$ - комплексные переменные. Итерации выполняются для каждой стартовой точки $\mathbf{C}$ прямоугольной или квадратной области - подмножестве комплексной плоскости. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $\mathbf{Z}[i]$ не выйдет за пределы окружности радиуса 2, центр которой лежит в точке (0,0), (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности), или после достаточно большого числа итераций (например, 200-500) $\mathbf{Z}[i]$ сойдется к какой-нибудь точке окружности.

Рис. 24. Участок границы множества Мандельброта, увеличенный в 200 раз.

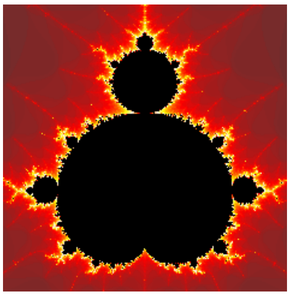


Рис. 25. Множество Мандельброта - классический образец алгебраического фрактала.

Каждая часть множества Мандельброта характеризует соответствующее семейство множеств Жюлиа. Например, основное сердцевидное тело множества Мандельброта характеризует множества Жюлиа, которые выглядят как смятые окружности. Хотя множество Мандельброта, строго говоря, не является самоподобным, как треугольник Серпиньского и фрактальный папоротник, оно обладает сходным свойством: увеличение границы области обнаруживает бесконечное число крошечных копий множества (рис. 26). Всё богатство форм и структур множества Мандельброта проявляется лишь при таком детальном его исследовании.

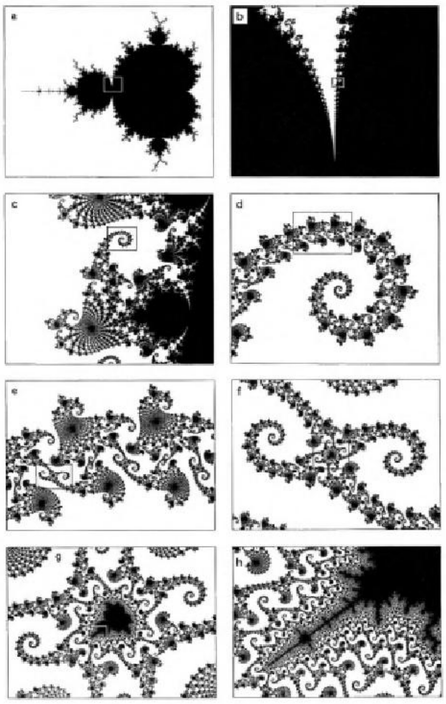


Рис. 26. Множество Мандельброта на нескольких масштабах.

Все рассмотренные выше фракталы можно считать детерминированными. Хотя случайные процессы (такие, как бросание игральной кости) иногда и помогают генерировать фрактальные изображения, они не оказывают никакого влияния на окончательную форму фрактала. Совершенно иная ситуация имеет место в отношении другого класса фракталов, а именно так называемых случайных фракталов. Стохастические фракталы получаются, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

Один из фракталов такого типа может начинаться с треугольника, лежащего в произвольной плоскости. Средние точки сторон треугольника соединены между собой, так что треугольник оказывается разделённым на четыре меньших треугольника. Затем каждая средняя точка сдвигается вверх или вниз на определённую, случайно выбираемую величину. Тот же процесс применяется к каждому из меньших треугольников, затем к ещё меньшим и так далее до бесконечности. После достаточно большого количества итераций начинает возникать всё более детализированная поверхность.

В этом методе смещения средних точек случайные величины для перемещения средних точек вверх или вниз управляются определённым законом распределения, который тщательно подбирается, чтобы получить близкую аппроксимацию желаемой поверхности. Для того чтобы поверхность была относительно гладкой, в преобразования следует встроить правило, согласно которому величина смещения средних точек должна становиться очень малой уже после нескольких первых итераций. Такое правило позволяет добавлять лишь небольшие «кочки» к общим очертаниям ландшафта. Для представления изрезанной поверхности, характерной, скажем, для горного хребта или береговой линии, более подходящим будет правило медленного уменьшения смещений после каждого шага итерационного процесса.

Рис. 27. Трёхмерное представление множества Мандельброта: электрический потенциал, окружающий заряженное множество Мандельброта. Может использоваться как иллюстрация бухты со скалистыми берегами.

Рис. 28. Множество Мандельброта отражает порядок, лежащий в основе бесконечного многообразия множеств Жюлиа. Каждая точка множества Мандельброта представляет значение параметра с, порождающего связное множество Жюлиа. Если точка *с* лежит вне множества Мандельброта, то ассоциированное с ней множество Жюлиа несвязно. Множество Мандельброта содержит в себе невероятное богатство мельчайших деталей. Три последовательных увеличения фрагментов (отмечены квадратиками) позволяют увидеть подобные повторяющиеся структуры множества Мандельброта с добавлением многих новых и прежде не повторяющихся элементов. Если всё множество изобразить в масштабе, в котором представлен фрагмент на крайнем правом рисунке, то оно заняло бы площадь, на которой уместилось бы 100 футбольных полей.

У данного метода построения поверхностей существует много приложений. Он применялся, в частности, в качестве модели эрозии почвы, для анализа сейсмических явлений, чтобы лучше понять характер изменений в зоне разломов, для построения изображениё планет, спутников, облаков и горных хребтов, которые выглядят весьма реалистично (см. рис. 8).

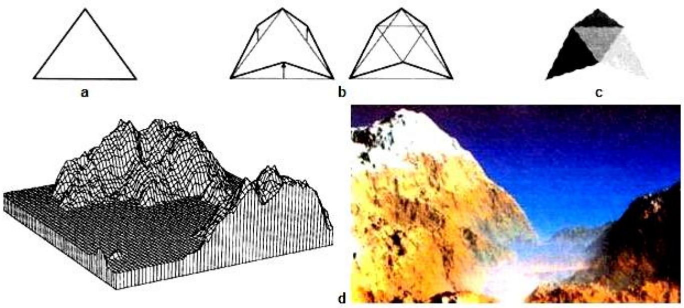


Рис. 29. Фрактальные ландшафты могут создаваться из фракталов методом случайного смещения средней точки. Средние точки сторон треугольника (*a*) смещаются вверх или вниз от плоскости изображения и соединяются с вершинами (*b*). При этом возникает четыре меньших треугольника, к которым повторно применяется та же процедура. Функция распределения вероятности определяет величину смещения и, следовательно, степень гладкости фрактального ландшафта. Затем графическая программа компьютера закрашивает треугольники, создавая различные оттенки (*c*). В результате получается весьма реалистичная картина (*d*).

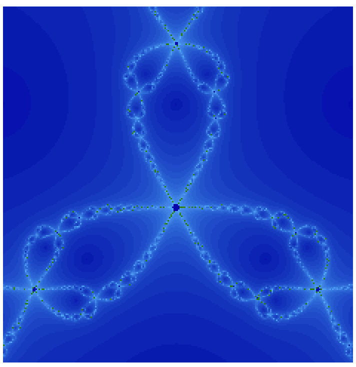


Рис. 30. Бассейны Ньютона.

Бассейны Ньютона также являются примерами алгебраических фракталов. Области с фрактальными границами появляются при приближенном нахождении корней нелинейного уравнения алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости (для функции действительной переменной метод Ньютона называют *методом касательных*, который обобщается для комплексной плоскости).

Огромный интерес к фракталам связан с тем, что они внешне сильно напоминают природные объекты (см., например, рис. 31).

Рис. 31а. Растения

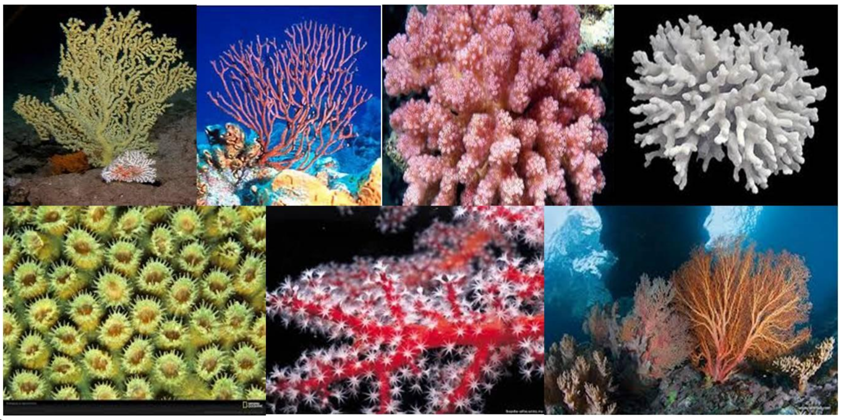


Рис. 31б. Кораллы

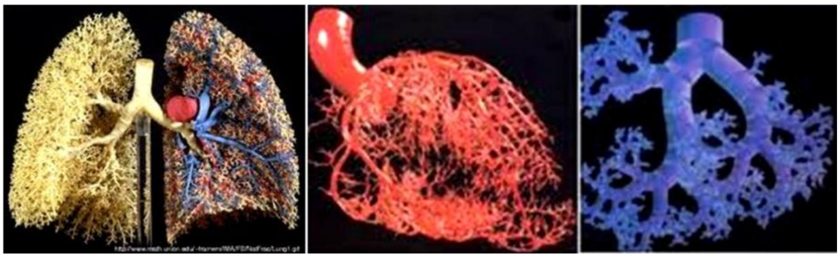


Рис. 31в. Некоторые органы человека.

Рис. 31г. Узоры на стекле.

Рис. 31д. Дендриты.

Рис. 31е. Молнии.

Рис. 31ж. Волны.

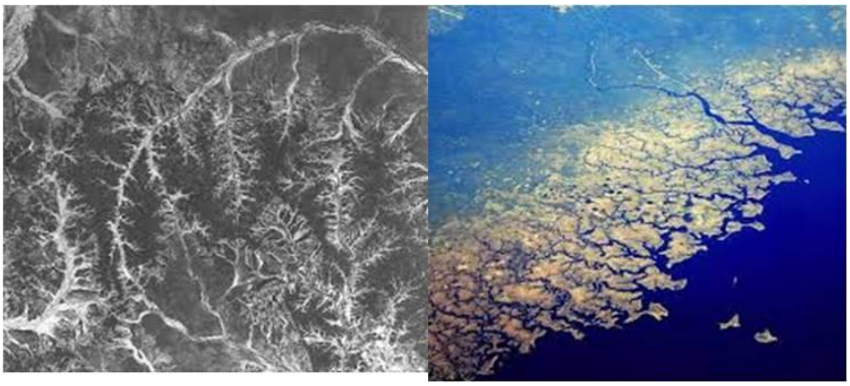


Рис. 31з. Долина реки и побережье.

Рис. 31и. Горы.

Рис. 31к. Облака.

Интересно сравнить эти фото и картинами, получаемыми расчётами на компьютере в использованием геометрии фракталов (рис. 32). Сходство довольно очевидно. Поэтому можно ожидать, что фракталы позволят дать математическое описание намного более широкого класса природных объектов, чем это позволяют геометрии Эвклида, Римана и Лобачевского. Действительно, примеров применения фракталов уже сейчас довольно много. Мы остановимся только на нескольких примеров

Рассмотрим проблему анализа извилистости береговой линии (рис. 33). Линия раздела двух взаимодействующих сред (моря и суши) крайне изломана. Её иногда называют лезвием хаоса. На рис. представлено побережье Норвегии, а на рис. 34 - способ измерения степени гладкости побережья. Прямолинейность графика чётко доказывает, что изучаемый объект - фрактал. По тангенсу угла наклона находим показатель фрактала *D*.

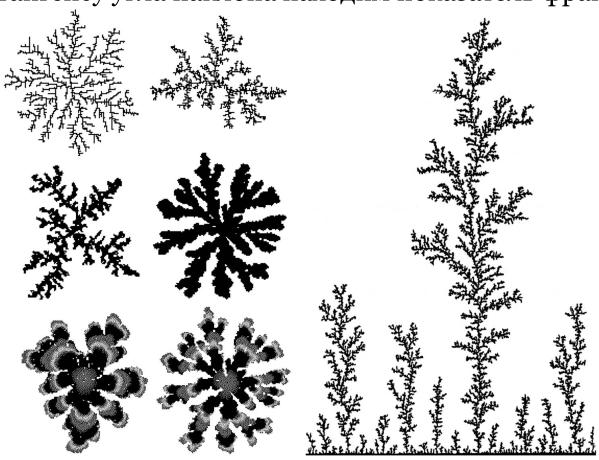


Рис. 32а. Модель дендритов.

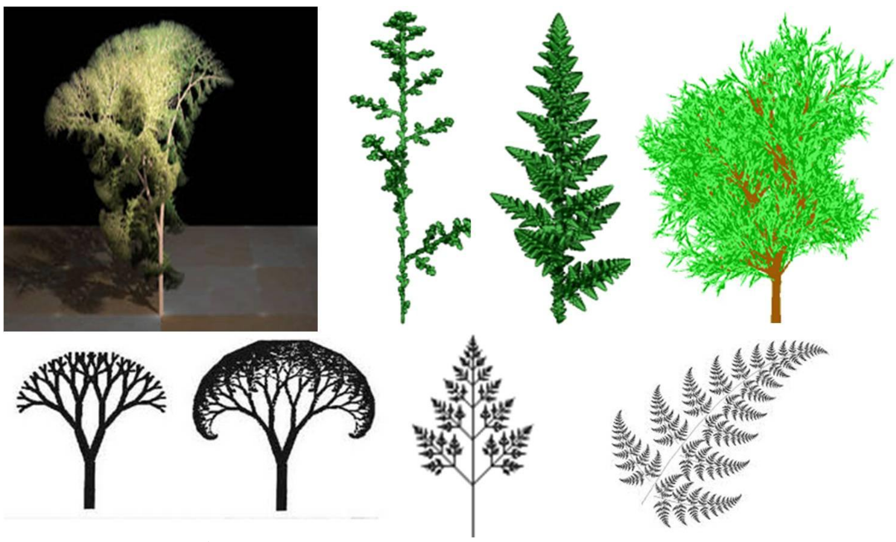


Рис. 32б. Фрактальные деревья.

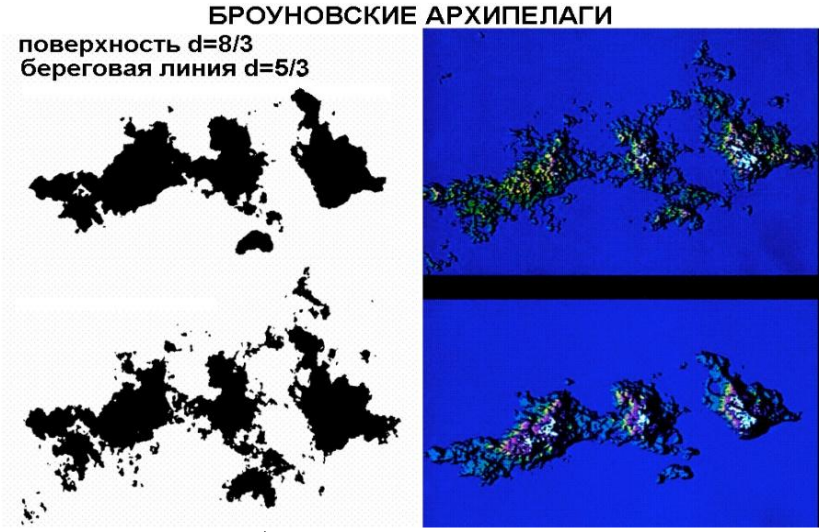


Рис. 32в. Моделирование броуновского движения.

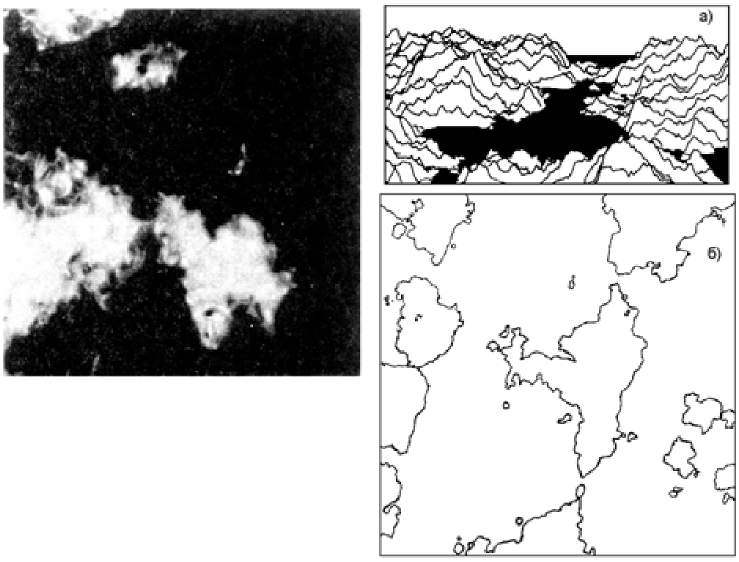


Рис. 32г. Облака и горы с озёрами.

Рис. 32д. Горные пейзажи.

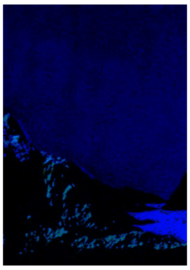


Рис. 32е. Фрактальное моделирование гор и озёр.

Аналогичным образом можно описать побережье и других морей (рис.). Не все они фрактальны, но обычно можно выбрать участки, в которых фрактальность более-менее соблюдается (прямолинейный участок на графиках). По величине показателя фрактала можно судить о наличии бухт, в которых можно укрыться в непогоду (в Белом море их много, а на Каспийском море практически нет). Это важно для безопасности мореходства. Поэтому сейчас во всех лоция указаны фрактальные размерности побережий озер, морей и океанов.

Рис. 33. Карта побережья южной части Норвегии. Береговая линия представлена в цифровом виде с помощью растра, состоящего примерно из 1800*1200. Изображенная вверху квадратная решетка имеет шаг δ=50 км.

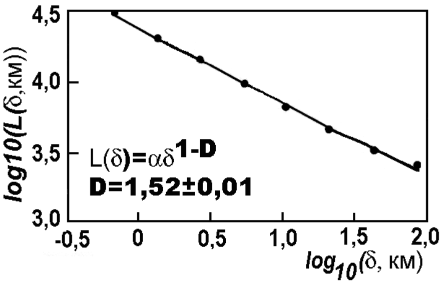


Рис. 34. Измеренная длина береговой линии, изображенной, как функция шага δ (км) – длины стороны δxδ квадратных ячеек, образующих покрытие береговой линии на карте. Прямая на графике в дважды логарифмическом масштабе соответствует зависимости $L(\delta)=\alpha\delta^{1-D}$, где D=1,52.

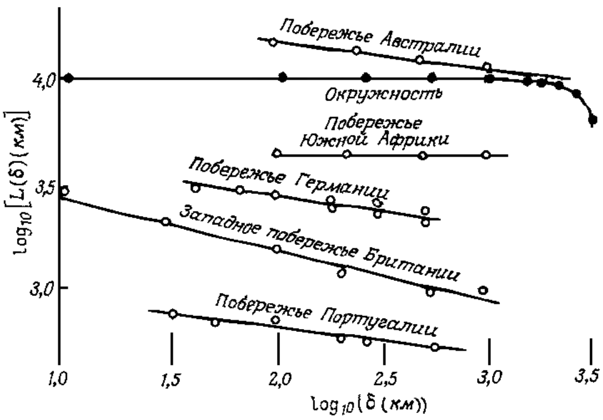


Рис. 35. Длина береговых линий морей как функция выбранного шага δ (км).

Другой сферой широкого применения геометрии фракталов является информатика, сеть Интернет и компьютерные науки. Например, Интернет может быть представлен как масштабная (network) или деревоподобная решётка. В этом пространстве точки являются коастерами, которые в свою очередь представляют из себя масштабно-инвариантные сети (например, сеть Интернет). Кстати, аббревеатура WWW - "всемирная паутина" имеет также смысл Worlds Within Worlds - "миры внутри миров".

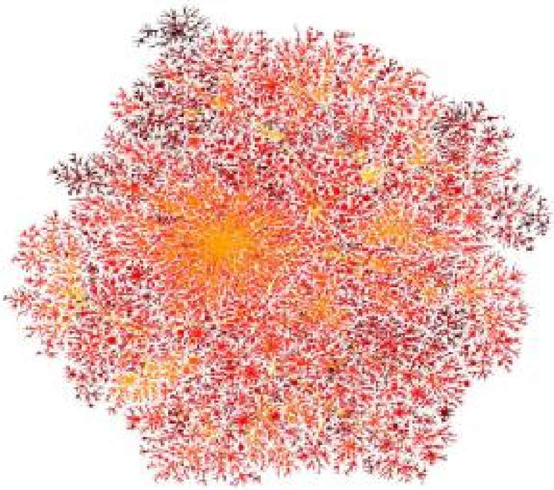


Рис. 36. Масштабно инвариантная сеть.

Применения геометрии фракталов весьма обширны. Их мы обсудим в следующих лекциях.

Лекция 2. КРАСОТА ФРАКТАЛОВ

Там, где окружающий нас мир перестаёт быть ареной личных надежд и желаний, где мы как свободные существа, сомневаясь и размышляя, созерцаем его в изумлении, там мы вступаем в царство искусства и науки. Если мы описываем увиденное и известное по опыту на языке логики – это наука; если же представляем в формах, внутренние взаимосвязи которых недоступны нашему сознанию, но которые интуитивно воспринимаются как осмысленные – это искусство. И для искусства и для науки общим является увлечение чем-то стоящим выше личного, свободным от условного.
А. Эйнштейн

Искусство - это ложь, позволяющая узнать истину.
Пабло Пикассо.

Наука и искусство - два дополняющих друг друга способа познания природы, аналитический и интуитивный. Долгое время мыслители пытались свести сложность природных явлений к небольшому числу фундаментальных законов. Однако, в конце концов обнаружилось, что недостаточно открыть основные законы и понять, как работает мир "в принципе". Важно выяснить каким способом эти принципы проявляют себя в реальности, понять, как именно фундаментальные законы действуют не в идеальном, а в реальном мире. А в реальности любой нелинейный процесс приводит к ветвлению, к развилке на пути, в которой система может выбрать ту или иную ветвь. Предсказать последствия выбора решений невозможно (см. курс лекций И.Н. Бекмана "Риск"), поскольку для каждого из этих решений характерно усиление. Самые незначительные неточности раздуваются и имеют далеко идущие последствия. В каждый отдельный момент причинная связь сохраняется, но после нескольких ветвлений она не видна. Рано или поздно начальная информация о состоянии системы становится бесполезной. В ходе эволюции любого процесса информация генерируется и запоминается. Законы природы допускают для событий множество различных исходов, но наш мир имеет одну единственную историю.

Компьютер - новое средство познания - позволил увидеть связи и значения, которые до сих пор были скрыты от исследователей. Компьютерная графика резко обогатила наши возможности, подарила фантастические миры, окружила нас искусственными пейзажами, заставляя забыть действительность. Но она же позволила глубже проникнуть в тайны природы. Если раньше учёные были вынуждены упрощать уравнения или вообще отказываться от них, то теперь их суть демонстрируется на экране дисплея. Естественные процессы, представленные графически, можно постичь во всей их сложности, опираясь на нашу интуицию. При этом стимулируются новые идеи, новые ассоциации и у каждого, кто мыслит в образах, пробуждается творческий потенциал.

Фракталы – объекты с дробной размерностью и самоподобием составляют интересный и важный раздел современной математики. Но у них есть ещё одно важное достоинство: они красивы, пропорциональны и "натуральны". Деятелей искусства они привлекают сложностью, возникающей из простоты, а также иррационализмом. Они производят впечатление и своей причудливой формой, цветом и красочностью. Не удивительно, что фракталы довольно быстро вошли в дизайн, живопись, скульптуру, архитектуру и в музыку.

Важно понимать, что фрактальное искусство не является результатом только компьютерной программы; фрактальные образы не являются случайными (в их основе лежат математические правила); не любой фрактальный образ, созданный любителем на компьютере, является произведением искусства; фрактальное искусство является выразительным, творческим, требующим серьезного труда и интеллекта.

В этой лекции мы приведём некоторые примеры использования комплексных динамических систем в музыке, дизайне и живописи.

2.1 Музыка

Изучение художественного, выразимого числом, - важная проблема искусства, в том числе - музыки.

Отношения музыки и математики изучались великими математиками и музыкантами ещё со времён Пифагора. Сегодня этот союза искусства и науки воплотился как в новом музыкальном инструменте – компьютере, так и в компьютерной музыке, основанной на теории алгоритмов. Непосредственными родоначальниками с компьютерной музыки на основе алгоритмов являются композиторы второй половины XX века, пользовавшиеся серийной техникой в композиции (Янис Ксенакис, Леджарен Хиллер и Пьер Булез и др.). Алгоритмом называют строго определенную последовательность действий, приводящую к искомому результату решением любых однородных задач или действий посредством разложения их на точно установленные предписания и последовательность конечного числа элементарных операций. На основе алгоритмов были построены такие музыкальные программы, как *Music 4, C-Sound, Supercollider, MAX/MSP* и т.п. В алгоритмической музыке в качестве отправной точки часто используется колебание некоторой величины в определенном диапазоне по случайному закону. Компьютерная композиция в качестве «темы» опирается на конструктивный алгоритм, который всегда индивидуализирован в композиторском сознании, а специально созданная программа в определенной ситуации может быть приравнена к прототипу произведения.

Алгоритмическая композиция позволяют композиторам максимально точно передать свою идею в будущем произведении, разработать неповторимый никем и зачастую единственный в творчестве самого автора тип композиции, структуру, элементы музыкального языка. Она включает в себя действия, применяемые к различным параметрам композиционного процесса – от выработки определенных закономерностей произведения на этапе его подготовки, генерации последовательности звуковысот, длительностей, ритмических групп – до созданных с помощью компьютерных программ полностью автоматизированных алгоритмических произведений (в последнем случае акт творчества имеет место только при составлении такой программы самим композитором).

Существуют детерминированный и стохастический способы создания алгоритмической композиции. Стохастический частично связан с понятием «хаотичность», а своеобразным ответвлением его является применение теории хаоса, использующей различные нелинейные динамические уравнения, выведенные на основе природных процессов и таких хаотических структур, как, например, фракталы.

Возможны четыре типа алгоритмической композиции:

- композиция, основанная на применении математических функций: стохастических, теории хаоса, фракталах;
- композиция, основанная на применении комбинаторных методов (например, марковских цепей, ассоциативных сетей переходов, стохастических матриц);
- композиция, основанная на применении природных процессов: клеточных автоматов, генетических алгоритмов, нейронных сетей;
- композиция, построенная с помощью процессов, основанных на правилах.

Если рассматривать музыку как передачу информации от композитора и музыканта к слушателю, то можно анализировать информационное содержание музыкального произведения с помощью энтропии Шеннона (см. курс лекций И.Н. Бекмана "Информатика").

Многие алгоритмы, используемые в музыке, стоятся на идеях фрактальной геометрии.

Ради простоты, в этом разделе под фракталом будем понимать структуру, состоящую из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Напомним, что в основе формирования фрактала лежит процедура, в которой последующие значения (состояния) получают из предыдущих. Фракталы сочетают в себе детерминированные (подчиняются определенному алгоритму формирования) и стохастические (в процессе развития не принимают повторяющихся состояний) свойства. К тому же фракталам присуща симметрия, а их форма воспроизводится в различных масштабах.

После того, как фрактальная геометрия достигла определённой степени развития под солнцем, искусствоведы обнаружили, что некоторые композиторы, сами того не подозревая, использовали идеи фракталов в своём творчестве. В последнее время вместо традиционных композиторов появились увлечённые музыкой математики, которые разрабатывают программы генерации произведений на основе фрактальных объектов, и увлечённые математикой композиторы, которые применяют компьютерные программы в своём творчестве.

Как ни странно, но существенный вклад в развитие фрактальной музыки внёс венгерский биолог и ботаник Аристид Линдермайер, который в 1968 г. предложил математическую модель для изучения простых многоклеточных организмов, которая нашла применение в моделировании сложных ветвящихся структур: деревья, цветы и др. Линденмайер обнаружил, что поведение клеток растений подчиняется математическим законам самоподобия, и на основе своего открытия разработал математический аппарат – *L*-системы. В их основе лежит фрактальный принцип: каждая часть предмета похожа на весь предмет целиком. Изначально *L*-системы применяли при изучении формальных языков и в селекции. С помощью *L*-систем можно строить многие известные самоподобные фракталы: снежинку Коха, «ковер Серпинского», разнообразные новые фракталы. *L*-системы широко используют в компьютерной графике и гейм-девелопменте. Большая часть современной фрактальной музыки написана с использованием именно *L*-систем.

В музыке приложение элементов фрактальной геометрии используют в трёх областях: композиция, синтез звука, аналитические исследования. Популярным является использование систем нелинейных динамических уравнений в алгоритмической композиции - метод фрактальной композиции. Считается, что в музыкальном плане наиболее интересными являются алгебраические и стохастические фракталы, в которых лучше проявляются такие свойства фрактальных множеств, как нерегулярность и самоподобность Стохастическими фракталы (фракталы, при построении которых в итеративной системе случайным образом изменяются какие-либо параметры) позволяют осуществить естественный переход в музыкальном произведении от некоторого порядка к детерминированному хаосу.

Исследователи фракталов и крупномасштабной временной структуры акустической речи и музыки выявили, что любая музыка (точнее её ритмическая сторона) имеет фрактальную природу. Это открытие стимулировало направленное создание фрактальных форм в новой музыке.

Итак, любой звук имеет фрактальные свойства. Обычно выделяют три категории звука, основанные на математических элементах:
- белый шум (случайный шум – определяется как тревожащий слушателя);
- розовый шум (занимает промежуточное положение, более структурированный, нежели белый – является самым приятным для восприятия слушателя);
- коричневый шум (структурированный шум – определяется как механический для слушателя).

Используя фрактальную природу розового шума, можно генерировать приятные для слуха мелодии, так как розовый шум является балансом между полной хаотичностью и чрезвычайной структурированностью. Например, существует связь треугольника Серпинского с формой рондо, а на основе треугольника снежинки Коха удаётся генерировать полифонические произведения. Путём анализа спектральной плотности, розовый шум обнаружен в Бранденбургском концерте Баха и регтаймах Джоплина.

Основным способом получения звуковых материалов с помощью фрактальной методики является генерация изображений с их дальнейшим переводом в звуковую область по некоторым правилам, например, с помощью привязки фигуры к условной сетке координат, одним из измерений которой будет высота звука, а другим – длительность нот. Такая процедура носит название сонификации. Существуют программы), способные переводить фрактальные изображения непосредственно в звуковой спектр.

Фрактальная композиция развивается, создавая новый музыкальный материал, систематически преобразовывая предыдущий. Траектория хаотической орбиты определяет некоторый диапазон значений, который позволяет системе блуждать и возвращаться к подобному, но не тому же значению. Когда подобные процессы интерпретируются музыкально, это может сравниться с развитием музыкальной темы. Эта похожесть – то, что делает хаотические орбиты привлекательными для генерации музыкального материала. Производный, таким образом, материал имеет высокую степень схожести с предыдущим. Однако полученный материал является музыкой лишь в потенциале и требует серьезной работы с ним композитора.

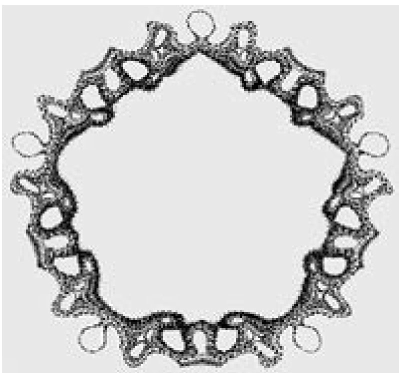


Рис. 1. Фрактал Иванова.

Внедрение энтропийных процессов в электронную музыку сделало её более разнообразной, гармоничной, более близкой к природе, ибо природа есть совокупность строгих правил и случайных процессов. Влияние случайности очень велико при создании каких-либо композиций, поэтому генеративный фрактальный подход к синтезу звука и построению музыкальных произведений позволил композиторам создавать произведения, которые при каждом проигрывании изменялись, трансформировались. Теперь один и тот же трек можно слушать часами.

Фрактальные композиции можно создать несколькими способами: 1) графическое изображение фрактала конвертируется в двумерную партитуру (координаты графика высота и время), причём учитывается графическое расположение точек и их цвет, что соответствует тембровым изменениям; 2) арифметическими расчётами по фрактальным формулам определяются высоты и длительности звуков; 3) трансформация музыкального параметра с целью предания ему фрактального характера - ассоциативный уровень использования фрактальности; 4) фрактальная композиция через игровое поведение (перформанс), через структуры, в которых исполнители взаимодействуют на основе некоторых правил, создавая на протяжении пьесы модель поведения на основе определенных правил, соответствующих моделям сложных фрактальных систем.

Способ 1 даёт не очень интересный результат (в музыке не столь очевидна гармония пропорций, которая так хорошо схватывается зрительно) Существуют компьютерные программы перевода фракталов в звук, одна из известных – «Хорошо темперированный фрактал» Р.Гринхауза в основе которой – фрактал Иванова (рис.1). В ней конвертация 10 различных типов фракталов даёт ряд из 21-го варианта звукоряда; звуковой результат варьируется по динамике, артикуляции, октавному расположению. Результат используется как сырой материал для будущей композиции.

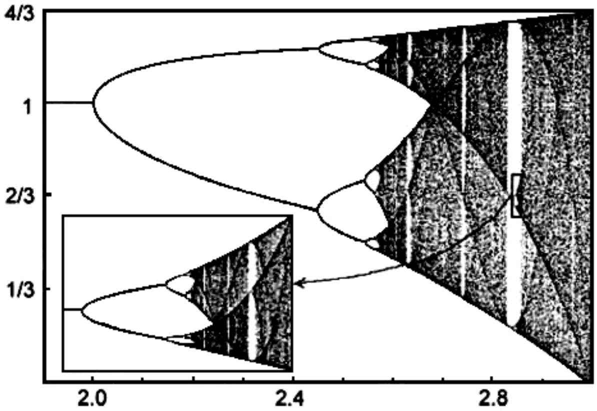
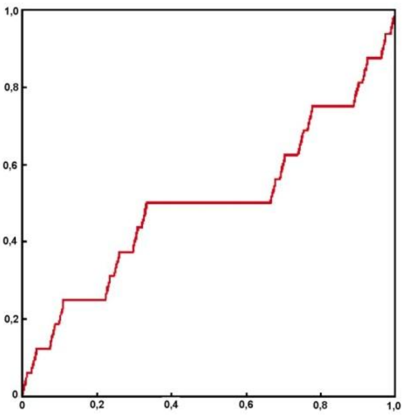


Рис. 2. Сценарий проникновения в хаос: переход от бифуркаций к хаосу.

Примером способа 2 (расчёт по формуле) является композиция Гарри Ли Нельсона (композитор специализируется в алгоритмической композиции с помощью компьютера, интерактивной композиции в реальном времени и в создании видеоинсталяций) «Путешествие галеры Йота**»** – пьеса посвящена предполагаемому некоторыми историками путешествие финикийцев на галере Йота (малая величина) от Средиземноморья до Южной Америки. В основе композиции лежит «сценарий перехода к хаосу» математика Ферхюльста (рис. 2), предложившего теорию роста популяции насекомых. Если коэффициент прироста Р<2,5 – то имеет место быстрая стабилизация вокруг одного аттрактора; при увеличении Р возникают бифуркации вокруг двух, четырех, восьми аттракторов и т.д., пока, при увеличении коэффициента Р>4, не наступает хаос, в котором тем не менее наблюдается самоподобие стремления к мельчайшим аттракторам. В композиции формула Ферхюльста использована на двух уровнях: 1) макро-: как огибающая всего сочинения: распределение количества событий (значение Р возрастает до 4 в точке золотого сечения пьесы и затем убывает до нуля); 2) микро-: для производства событий в микротоновом звукоряде: значения функции распределены в диапазоне семи октав (192 тона в октаве). Здесь не только микротоновая, но и микроритмическая техника: техника звуковых микрочастиц, – «гранул», продолжительностью менее 50 мсек.

В гранулярном синтезе большое количество микрозвуков собрано в массивы (это напоминает живопись художников- пуантилистов, создающих изображение из маленьких цветных точек). Сложение «гранул» происходит на столь мельчайшем уровне, что это никак нельзя отнести к области ритма. Создаваемая при помощи электронной аппаратуры (применяется "гиперинструмент", который предполагает наличие целой системы, состоящей из компьютера, набора цифровых синтезаторов, исполнительского интерфейса и программного обеспечения для их связи) высокая плотность «гранул» (до нескольких тысяч в секунду) порождает необычный эффект в виде многосоставного звукового комплекса с богатым, динамически изменяющимся во времени спектром, не связанным напрямую со звучанием какой-либо одной «гранулы». Благодаря распределению зерен с их частотами, амплитудами, тембрами возникают большие звуковые структуры. В "хаосе" используется простая повторяющаяся и рекурсивная функции, чтобы создать музыкальные образцы, в которых изменяется материал от отдельных повторяющихся событий до последовательностей большой сложности с изменением отдельных параметров. Эти характеристики становятся своеобразным метафорическим остовом сочинения.



***Рекурсивная функция** - функция, которая в своем определении содержит обращение к самой себе.*

Рис. 3. Чёртова лестница (канторова лестница — пример непрерывной монотонной функции [0,1]→[0,1], которая не является константой, но при этом имеет производную, равную нулю в почти всех точках). Она имеет «неравные ступени», почти везде вертикальную крутизну, и уходит в бесконечность.

В сочинении («Горный фрактал») Нельсон применил рекурсивное12 разделение времени, высоты и амплитуды на основе фрактального алгоритма. Он интегрировал фрактальную технику в интерактивный перформанс и композицию. Для создания формальной структуры в сочинении Летняя песня» композитором была использована символическая грамматика замены, имеющая графическое описание в виде кривой Гилберта.

По способу 3 написана композиция "*Profile*" (Ч. Додж) представляет собой синтез речевых и вокальных звуков. Трехголосный полифонический склад, в котором каждая мелодическая линия получена стохастическим методом (генератор фрактального шума). Генерация нот прекращается после появления определенного количества звуковых классов. Голоса не идентичны, но самоподобны - как различные уровни измерений во фрактале, например, в кривой Коха). Звуковой результат - ощущение общей взаимосвязанности и статики.

Другим примером из инструментальной музыки считается фортепианный этюд Д.Лигети «Чёртова лестница». Название этюда имеет прямое отношение к математике: «чертова лестница» – феномен, связанный с канторовским множеством (рис. 4). Однако Лигети никогда не использовал в своей музыке фрактальные формулы напрямую, предпочитая их общеассоциативное воздействие. Он выстраивает свою «музыкальную лестницу» – восхождение, воплотив отношения «двойственности» и «тройственности» через по-особому организованное чередование ритмических ячеек – 2/8 и 3/8. Бесконечность подъемов означает невозможность достижения вершины.

Примером способа 4 является своеобразная «партитура» и свод правил для исполнителей в произведении Д.К.Литтла «*Brain Wave*» (волна мозга, иногда переводят как озарение»). Здесь принцип фрактальности реализован как игровой метод в перформансе). Композитор стремится создать «интерактивную ситуацию не только как модель природных процессов», но и как аналогию с работой человеческого мозга. Все музыканты импровизируют не только согласно заданным правилам, но и в зависимости от действий впереди и сзади сидящих других музыкантов (т.е. некое коллективное бессознательное, саморегулирующая музыкальная ситуация). Исполнитель, сидящий впереди музыканта, оказывает положительное влияние на его действия, сидящий сзади – отрицательное. Композитор приводит таблицу возможных реакций перформера (игрока) на эти влияния. Так, если играет впереди сидящий исполнитель, перформер может начать играть, играть громче, играть больше повторных проведений, пытаться подражать стилю другого исполнителя, пробовать соответствовать темпу игры впереди сидящего. Если же играет позади сидящий блок-флейтист, перформер может: остановить игру, прервать более мягкое исполнение или «двигаться» сразу к следующему звуковому событию, пытаться играть в стиле, противоположном стилю сидящего сзади» игрока»; играть в противоположном ему темпе и т.д. При этом все исполнители периодически оказываются в разных ролях и перемещаются по залу. Цель состоит не в том, чтобы синхронизировать точно действия перформера с другими исполнителями, но коррелировать действия его и остальных. Так как никакого проводника не существует, каждый музыкант, внимательно следя за звучанием ансамбля, должен частично взять инициативу ведения звука на себя, предполагая возможное звучание.

Метод фрактальной композиции сложился в рамках творчества композиторов Ч. Додж, Г. Ли Нельсон, М. МакНабб, Б. Эванс, Л. Остин, Ч. Вуоринен, Д. Лигети, Д.Кл .Литтл, Том Джонсон. Для генерации и организации музыкального материала на основе фрактальной модели созданы компьютерные программы, Р. Гринхауза, Т. Джонсона, Г. Ли Нельсона, Д.Кл. Литтла, Ч. Доджа и др. Программы FractMus 2000 (Г. Диас-Херес), MusiNum 2.0 (Л. Киндерман, Fractal Musician Program (Ф. Томпсон), Quasi Fractal Music (П. Вэлли), Omar's Fractal (Ч. Невилл), Mandelbrot32 (Йо Кобута), Orchaos (Р. Ватсон), LMUSe (Д. Шарп), Oblivion(«Cynique»), Symbolic Composer (Э. Тобенфельд) и другие.

Для генерации «фрактального музыкального материала» создаются специальные компьютерные программы. Одна из первых таких программ – *Xcomposer* использует главное качество фракталов – метод самоподобия. При этом необходимо, чтобы сегмент, предшествующий главному событию, а также следующий за ним, содержал равномерный ритм. Носителем главного события может оказаться любой элемент на любом иерархическом уровне. Среди последних программ, разработанных для генерации музыкального материала на основе фрактальной модели можно выделить программы *FractMus 2000*, *MusiNum* 2.0, *Fractal Music Program*, *Quasi Fractal Music*, *Oblivion* и другие. Все эти программы позволяют «увидеть» сочиненную музыку, так как генерируют графическое изображение параллельно созданию музыки. Главная особенность *MusiNum* 2.0 заключается в том, что пользователь не должен обладать знаниями в области информатики и теории музыки.

Программа - *MusiNum,* разработанная Ларсем Киндерманном, генерирует последовательность целых чисел, на их основе формирует фракталы, которые и преобразует в музыку. Специальный модуль позволяет выбрать 16 параметров голосов. Одновременно для всех голосов может быть установлен темп композиции. С помощью диалогового окна задаётся сценарий, который позволяет изменять параметры синтеза музыки в процессе исполнения композиции, что делает её более динамичной. В результате получается бесконечная непериодическая последовательность. Она обладает двумя свойствами самоподобия: 1) последовательность самопорождающаяся и может быть получена из нуля; 2) выборка каждого второго элемента из последовательности даёт ту же последовательность. Сформированная таким образом последовательность обладает свойствами фрактала. Это означает, что каждый отдельно взятый фрагмент музыки будет с одной стороны неповторимым, а другой - чем-то похожим на остальные фрагменты.

Фрактальная геометрия – пример получения сложности с помощью простых манипуляций простым материалом. Она позволяет естественным образом включить в музыку природные формы (звуки дождя, текущей воды, пение цикад и др.) и их аналоги, созданные воображением композитора. В простейшем варианте играется мелодия на каком-то инструменте, каждая нота этого инструмента - тоже эта мелодия, бас - это тоже быстрое проигрывание этой мелодии, уровень партии меняется не хаотично, а по ритму той же мелодии. Но хаотичность, точнее неровность, всё же присутствует.

Современные музыковеды пытаются осознать музыку как абстрактное искусство, а также выявить некие универсальные законы создания музыкального произведения. Фрактальная музыка объединяет искусство и науку. Готовое произведение состоит из формулы, изображения и искусства, оно представляет собой единение музыкальной, музыкально-логический и абстрактной мысли. Применение в композиции теории нелинейной динамики, хаоса, фрактальности позволяет восполнить пробелы в знании связи точных наук и музыки. Сейчас фрактальная музыка реально существует, развивается, а не является областью игры интеллекта.

2.2 Фракталы в дизайне, скульптуре и архитектуре

Фрактальное искусство - составной компонент компьютерного искусства.

Компьютерное искусство (цифровое искусство, дигитальное искусство) *— творческая деятельность, основанная на использовании информационных (компьютерных) технологий, результатом которой являются художественные произведения в цифрой форме*.

Своими необычными и яркими формами фракталы быстро нашли воплощение в дизайне мебели, паркета, столешниц, подносов, витражей, ваз и даже носков (рис. 4). Фракталами увлеклись и скульпторы (рис. 5), архитекторы (рис. 6) и садово-парковом дизайне (рис. 7).

2.3 Фракталы в живописи

Цель, стоящая перед искусством, состоит в живописной выразительности и точности изображения окружающего нас мира. Компьютеры обеспечили возможность создания трёхмерных изображений фантастических пейзажей и других картин с фотографической точностью. А вместе с картинами появилась возможность не ловить отдельные мгновения, а охватывать действительность в движении и измерениях. Время на этих картинах не зафиксировано и можно построить плоские или трёхмерные движущиеся изображения даже с тех точек зрения, которые недоступны человеческому глазу или камере.

Компьютерная графика - графические изображения, созданные компьютером.

Фрактальная графика, также как векторная и трёхмерная, является вычисляемой. Её главное отличие в том, что изображение строится по уравнению или системе уравнений. Изменяя и комбинирую окраску фрактальных фигур, можно моделировать образы живой и неживой природы, а также, составлять из полученных фигур различные композиции.

Рис. 4. Фракталы в дизайне.

Рис. 5. Фракталы в скульптуре.

Рис. 6. Фракталы в архитектуре

Рис. 7. Фрактал в садово-парковом дизайне.

Фрактальные картины отражают хаос и порядок, их конкуренцию и сосуществование. Они показывают переход от одного к другому и то, какой сложной является область перехода. Зависимость структуры границ от определённых параметров приводит к границам другого уровня и открывает закономерности, о существовании которых ещё недавно никто не подозревал. На картине происходит конкуренция нескольких центров за доминирование на плоскости, при этом происходит нескончаемое филигранное переплетение и непрекращающаяся борьба даже за самые малые участки. Именно в этой пограничной области происходит переход от одной формы существования к другой: от порядка к беспорядку. Пограничные области замысловато зависят от условий, характеризующих изучаемый процесс. Порой возникает третий конкурент, который пользуется разногласиями двух других и насаждает свою область влияния. Может случиться, что один центр захватит всю плоскость, но и его власть имеет границы в виде изолированных точек, которые неподвластны его притяжению.

Рисунки представляют собой процессы, являющиеся весьма упрощенной идеализацией действительности. Они преувеличивают некоторые свойства, чтобы сделать их более ясными. Например, нет ни одной реальной структуры, которую можно было бы последовательно увеличивать бесконечное число раз, и которая выглядела бы при этом неизменной. Тем не менее, принцип самоподобия в приближённом виде имеются в природе (линии морей и рек, облака и деревья, турбулентный поток жидкости, иерархическая организация живых существ и т.п.).

Как только компьютерная графика получила широкое распространение, немедленно выяснилось, что художники уже использовали идеи фрактальной геометрии, причём неоднократно. Примером является гравюра на дереве японского художника Кацухи Зокусая «Большая волна в Канагаве» (1932 г.), на которой изображена огромная волна, нависшая над лодкой близ префектуры Канагава (рис.8). Гора Фудзи виднеется вдалеке и является фоном к основному действию на картине. Вода изображена в движении. Пена волн здесь похожа на когти, которые готовы вцепиться в лодку. Лодка и волна как бы переплетены друг с другом – в то же время, между ними огромное пространство. Это придает напряжение сюжету: мы видим людей на крошечной лодке, скользящих по горам воды только для того, чтобы выжить. Считается, что Хокусай интуитивно стремился изобразить явления этого мира с помощью неких закономерных и самоподобных структур. В его творчестве явно видно, как художник использует образы фракталов — это и пятна деревьев, и завитки морских волн, и горы, и тени туч на земле, и многое другое. Он чётко осознавал, что природа полна самоподобными объектами, и старался это изобразить.

Рис. 8. Картина Кацухи Зокусая «Большая волна в Канагаве».

В работах художника Маурица Эшера (1898-1972) явно присутствуют признаки, характерные для фракталов: самоподобие и рекурсия («Рисующие руки» в этом отношении можно назвать простейшей рекурсивной картиной). А в работе «Предел круга III» затрагивается тема бесконечности (самоподобные рыбоподобные фигуры уменьшаются при удалении от центра круга, плотно заполняя при этом поверхность; подобное уменьшение может быть бесконечным). Здесь представлен один из двух видов неевклидового пространства, описанных французским математиком Пуанкаре.

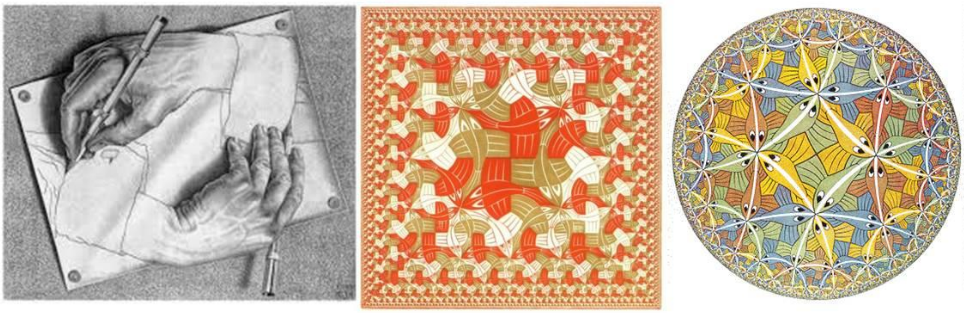


Рис. 9. Картины М. Эшера: Рисующие руки;. Ограничение площадью; Предел круга III.

Осознанно элементы фракталов стали проявляться в работах художников, работающих в стиле оп-арт (оптические иллюзии), в котором используются различные оптические иллюзии, основанные на особенностях восприятия плоских и пространственных фигур. Одним из ярких представителей оп-арта является Виктор Вазарели. Две его работы приведены на рис. 10.

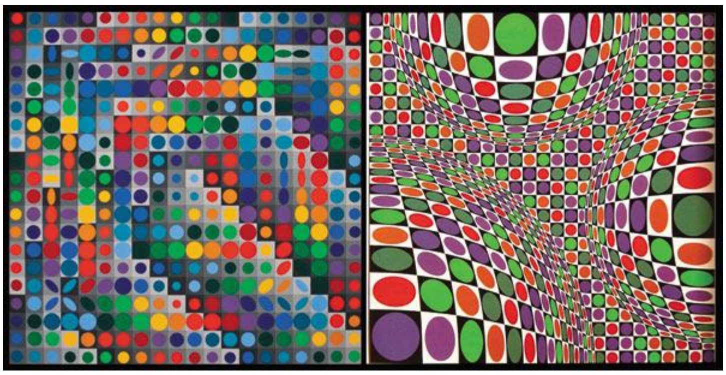


Рис. 10. Примеры работ В. Вазарели в стиле оп-арт.

Сейчас фрактальная живопись представлена десятками тысяч людей по всему миру, рисующих фракталы. Уже накоплено огромное количество фрактальных работ, некоторые из них вполне можно признать шедеврами геометрического абстракционизма. Многие художники стали признанными мастерами в этой области, их работы печатаются в серьезных изданиях, многие работают в крупных и солидных дизайнерских фирмах. Представителями этого направления искусства являются Линда Эллисон, Дэмиен М. Джонс, Керри Митчелл, Сильви Галле, Дэвид Эприл, Рауль Декель, Надя Крингельс, Хизер Ламб, Дэмиен Гиродон, Чара Б. Сильвия Кордедда и многие другие.

Например, итальянская художница Сильвия Кордедда создаёт картины, которые являются результатом расчётов фрактальных объектов, повторяющих очертания цветов, с последующим визуальным отображением. Используя компьютерные программы она «выращивает» растения, которые не встретишь в реальном мире, но которые по-своему прекрасны (рис. 11).

Рис. 11. Картины Сильвиия Кордедда.

Из отечественных авторов можно назвать Алексея Ермушева, Дмитрия Шахова и Андрея Лёушкина (Примеры их работ представлены на рис. 12).

Постепенно понятие «фрактальное искусство» вышло далеко за рамки математического, алгоритмического, цифрового искусства. Концепции фрактальности обязаны своим возникновением такие новые формы живописи и медийного искусства как фрактальный экспрессионизм (аналоговая фрактальная живопись), фрактальные монотипии, фрактальная абстракция, фрактальный реализм Вячеслава Усеинова (рис. 14а), фрактальный супрематизм (рис. 14б).

Рис. 13. Картины российских художников: а) Алексей Ермушев «*Life Generator*», б) Дмитрий Шахов «*the wind of Andromeda*», в) Андрей Лёушкин «*the Eagles colors*», г) *SBDstroitel «Caleidoscope*», д) *AquaLena «Dragons line*», е) *Italija — «fractal angel*»

Рис. 14. В.Усеинов, Тень несуществующего дома и Виктор Рибас, Composition N1.