3. СТАЦИОНАРНОЕ ЭМАНИРОВАНИЕ ЗА СЧЁТ ДИФФУЗИИ

При использовании 2-го закона Фика для решения задачи эманирования твёрдого тела за счёт диффузии следует учитывать наличие нескольких осложняющих обстоятельств: 1) образование эманации при распаде МИ (наличие источника); 2) радиоактивный распад эманации (сток); 3) размытие концентрационного фронта эманации за счёт эффекта отдачи (или нескольких отдач). Следует учитывать, что концентрационный профиль радона $C_2(x)$ не совпадает с концентрационным профилем радия, $C_1(x)$. Связь между ними определяется уравнением типа свёртки:

$$C_2(x) = \int_{x-R}^{x+R} C_1(\xi) P_{\xi,x} d\xi \qquad (82)$$

где $P_{\xi,x}$ - функция размытия профиля.

4) обеднение приповерхностных слоёв (толщиной R для ЦМГ или 2R для ЦМДГ) образца за счёт эффекта отдачи.

Рассмотрим некоторые примеры.

3.1 Сфера

Сфера, МХ, Ц1 [7] Рассмотрим эманирование за счёт диффузии и отдачи сферы, равномерно меченой радием.

В соответствии с 1-ым законом Фика, поток атомов эманации, выходящих их шара за счёт диффузии:

$$J_D = -D 4\pi r_0^2 \left(\frac{dC_2}{dr}\right)_{r=r_0} \qquad (83)$$

где D – коэффициент диффузии, $\left(\frac{dC_2}{dr}\right)_{r=r_0}$ - градиент концентрации эманации на поверхности сферы.

Скорость образования радона: $G = \frac{4}{3}\pi r_0^3 C_1 \lambda_1$

Здесь и далее индекс 1 относится к радию, индекс 2 – к радону.

Эманирующая способность сферы за счёт диффузии:

$$E_D = -\frac{3D}{C_1 \lambda_1 r_0}\left(\frac{dC_2}{dr}\right)_{r=r_0} \qquad (84)$$

Распределение концентрации радона C(r) найдём из решения дифференциального уравнения 2-го закона Фика:

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = \frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial C_2}{\partial r}\right) + \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1 q(R) \qquad (85)$$

где доля атомов, выделяющихся за счёт отдачи:

$$q(r) = \begin{cases} \dfrac{2Rr - \left(r_0^2 - R^2\right) + r^2}{4Rr}; & r_0 - R \le r \le r_0 \\ 0; & 0 \le r \le r_0 - R \end{cases} \qquad (86)$$

В стационарном состоянии диффузии $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ и для нахождения функции $C_{2\infty}(x)$ необходимо решить уравнение:

$$\frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial C_2}{\partial r}\right) + \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1 q(r) = 0 \qquad (87)$$

при граничных условиях:

$$C_2^{I}(r_0)=0;\ C_2^{I}(r_0-R)=C_2(r_0-R);\ \frac{\partial C_2^{II}(0}{\partial r} = 0;\ \frac{\partial C_2^{I}(r_0 - R)}{\partial r} = \frac{\partial C_2^{II}(r_0 - R)}{\partial r} \qquad (88)$$

Здесь индекс I относится к приповерхностному слою, обеднённому радоном из-за эффекта отдачи, т.е. $r_0 - R \le r \le r_0$, а индекс II – к внутреннему слою, т.е. $0 \le r \le r_0 - R$ (начало координат – в центре сферы).

Распределение концентрации в приповерхностном слое, r_0-R≤r≤r_0.

$$C_2^I = \frac{\lambda_1 C_1}{4\lambda_2 R}\left\{\frac{r_0^2 - R^2}{r} - \frac{2D}{\lambda_2 r} + 2R - r\right\} + \frac{a_1}{r} Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}r + \frac{a_2}{r} Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}r \qquad (89а)$$

Распределение концентрации во внутренней области, 0≤r≤r_0-R.

$$C_2^{II} = \frac{\lambda_1 C_1}{\lambda_2} - \frac{a_0}{r} Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}r \qquad (89б)$$

Константы a_0, a_1 и a_2 найдем из граничных условий, которые можно свести к системе уравнений:

$$a_1 Shar_0 + a_2 Char_0 = \frac{\lambda_1 C_1}{4\lambda_2 R}\left(\frac{2D}{\lambda_2} - 2Rr_0 + R^2\right);$$

$$a_0 Sha(r_0 - R) + a_1 Sha(r_0 - R) + a_2 Cha(r_0 - R) = \frac{\lambda_1 C_1}{\lambda_2}(r_0 - R) - \frac{C_1\lambda_1}{4\lambda_2 R}\left(4Rr_0 - 2R^2 - \frac{2D}{\lambda_2}\right) \qquad (90)$$

$$a_0\left[Sha(r_0 - R) - (r_0 - R)aCha(r_0 - R)\right] = a_1(r_0 - R)aCha(r_0 - R) + a_2(r_0 - R) - Cha(r_0 - R)$$

где $a = \sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}$.

Решив систему (90), найдем $a_0 = \frac{\lambda_1 C_1 r_0}{\lambda_2}$. Тогда распределение концентрации эманации во внутреннем слое зерна ($0 \le r \le r_0$-R):

$$C_2^{II} = \frac{\lambda_1 C_1}{\lambda_2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\frac{Shar}{Shar_0}\right) \qquad (91)$$

Дать формулы для a_1 и a_2, затем – для потока и количества вещества.

Рассчитав градиент $\left(\frac{\partial C_2^{II}}{\partial r}\right)_{r=r_0}$, получим выражение для стационарной эманирующей способности за счет диффузии:

$$E_D = \frac{3}{2\tilde{y}^2}\left\{\frac{1}{\tilde{x}} - \frac{Sh[\tilde{y}(1-\tilde{x})]}{\tilde{x}Sh\tilde{y}} - 1\right\} + \frac{3}{2\tilde{y}}\left\{\left(1 - \frac{\tilde{x}}{2} - \frac{1}{\tilde{x}\tilde{y}}\right)Cth\tilde{y} + \frac{Ch\tilde{y}(1-\tilde{x})}{\tilde{x}\tilde{y}^2 Sh\tilde{y}}\right\} \qquad (92)$$

где $\tilde{x} = \frac{R}{r_0}$; $\tilde{y} = r_0\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}$.

Частные случаи:

Если $\tilde{y}(1-\tilde{x}) >> 0$ и $\tilde{y} >> 1$, то

$$E_D = \frac{3}{2\tilde{y}^2}\left\{(\tilde{y} - 1)\left(1 + \frac{1}{\tilde{x}\tilde{y}} - \frac{e^{-\tilde{x}\tilde{y}}}{\tilde{x}\tilde{y}}\right) - \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{2}\right\} \qquad (93а)$$

Если $\tilde{x} << 1$, то

$$E_D = \frac{3}{\tilde{y}}\left(Cth\tilde{y} - \frac{1}{\tilde{y}}\right) \qquad (93б)$$

Внимание! Уравнение 40б при сравнительно больших D и малых λ не зависит от D! $E_D \equiv 1$!!!! Всё правильно: для стабильных (и долгоживущих) нуклидов эманирование всегда 100% - в стационарном состоянии газ в образце не накапливается.

Если $\tilde{y} > 3$, то

$$E_D = \frac{1 - \frac{1}{\tilde{y}}}{3\tilde{y}} \qquad (93в)$$

Если $\tilde{y} \to \infty$, то

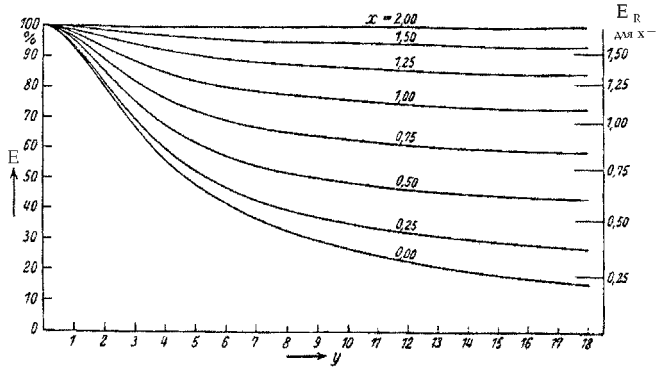
$$E_D = \frac{3}{\tilde{y}} \qquad (93г)$$

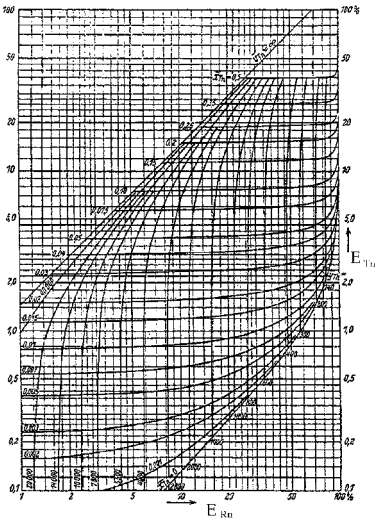
Для больших зерен полная эманирующая способность:

$$E = E_R + E_D = \frac{3\tilde{x}}{4} + \frac{3}{\tilde{y}} \qquad (94)$$

На **Рис. 7а** представлена, зависимость E от $\tilde{y}$ при различных значениях параметра $\tilde{x}$ ($0 \le \tilde{x} \le 2$). Для каждого $\tilde{x}$, E_R - константа, тогда как E_D – функция $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, стремящаяся к нулю при больших $\tilde{y}$. Штрихами на правой оси представлены асимптотические значения E для больших $\tilde{y}$, которые представляют собой эманирующую способность за счет отдачи. Остаток соответствует E_D. При $\tilde{x} = 0$ (большие зерна) $E_R = 0$ и кривая отражает эманирование за счет диффузии; для $\tilde{x} = 2$ (малые зерна) все атомы радона освобождаются за счет отдачи $E_R = 1$ и $E_D = 0$, Экспериментально определить параметры D и R можно путем измерения эманирующей способности вещества по радону и торону. Номограмма для таких расчетов приведена на **рис. 7б** [7].

Рис. 7. Эманирующая способность





а) Зависимость ЭС отдельного зерна от параметров $\tilde{x} = \frac{R}{r_0}$ и $\tilde{y} = r_0\sqrt{\frac{\lambda}{D}}$.

б) Взаимосвязь ЭС по радону с ЭС по торону (номограмма для расчета параметров $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$).

3.2 Пластина

Пластина, МХ, Ц1. Дифференциальное уравнение, описывающее диффузию радона в пластине толщиной H =2L с учетом отдачи имеет вид при равномерном распределении МИ радона по объёму зерна [8, 9]:

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1 q(x) \qquad (95)$$

где $q(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{L-x}{R}\right); & L-R \le x \le L \\ 0; & 0 \le x \le L-R \end{cases}$

Будем искать его решение для стационарного состояния $\frac{\partial C_2}{\partial t} = 0$ при граничных условиях:

$$\left.\frac{dC_2^{II}}{dx}\right|_{x=0} = 0; \quad C_2^I(L-R) = C_2^{II}(L-R); \quad C_2^{II}(L) = 0; \quad \left.\frac{dC_2^I}{dx}\right|_{x=L-R} = \left.\frac{dC_2^{II}}{dx}\right|_{x=L-x} \qquad (96)$$

Имеем двухслойную систему:

$$C_2^I = a_1 Shax + a_2 Chax + \frac{\lambda_1 C_1}{2R\lambda_2}(L+R-x); \quad L-R \le x \le L$$
$$C_2^{II} = a_3 Shax + a_4 Chax + \frac{\lambda_1 C_1}{\lambda_2}; \qquad 0 \le x \le L-R \qquad (97)$$

Константы a_1, a_2, a_3 и a_4 найдём из граничных условий (96), которые сведём к системе уравнений:

$a_3=0$;

$$a_1 ShaL + a_2 ChaL = -\frac{\lambda_1 C_1}{2\lambda_2};$$

$$(a_3 - a_1)Cha(L-R) + (a_4 - a_2)ShaL = -\frac{\lambda_1 C_1}{2\lambda_2 Ra};$$

$$(a_3 - a_1)Sha(L-R) + (a_4 - a_2)Cha(L-R) = 0$$

Откуда:

$$a_1 = \frac{\lambda_1 C_1 Cha(L-R)}{2\lambda_2 Ra}$$

$$a_2 = -\frac{\lambda_1 C_1 Cha(L-R)thaL}{2\lambda_2 Ra} - \frac{\lambda_1 C_1}{2\lambda_2 ChaL}$$

$a_3=0$

$$a_4 = \frac{\lambda_1 C_1}{2\lambda_2 Ra}\frac{ShaR}{ShaL} - \frac{\lambda_1 C_1}{2\lambda_2 ChaL}$$

Распределение концентрации радона во внутренней области при стационарном состоянии диффузии:

$$C_{2,\infty}{}^{II} = \frac{\lambda_1 C_1}{\lambda_2}\left\{1 - \frac{ShaR + aR}{2aR}\frac{ChaR}{ChaL}\right\}; \quad 0 \le x \le L-R \qquad (98a)$$

Распределение концентрации радона в приповерхностном слое:

$$C_{2,\infty}{}^{I} = \frac{\lambda_1 C_1}{2R\lambda_2}(L+R-x) + \frac{\lambda_1 C_1 Cha(L-R)}{2\lambda_2 Ra} Shax - \left[\frac{\lambda_1 C_1}{2\lambda_2 ChaL} + \frac{\lambda_1 C_1}{2\lambda_2 aR} Cha(L-R)thaL\right] Chax \qquad (98б)$$

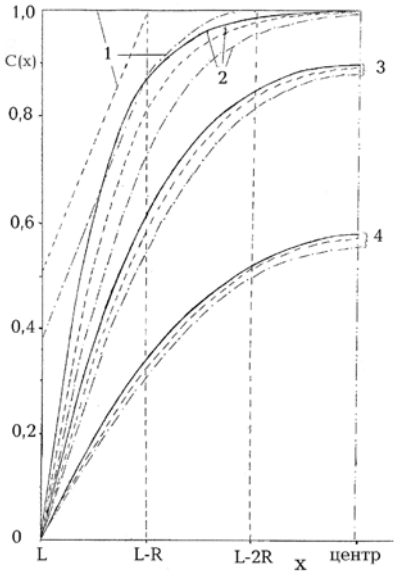
где $a = \sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}$.

Градиент концентрации радона на поверхности пластины:

$$\left.\frac{dC_2^I}{dx}\right|_{x=H} = \frac{\lambda_1 C_1}{2R\lambda_2}\left[ChaL - thaL(Ra + ShaR) - 1\right] \qquad (99)$$

Эманирующая способность пластины за счет диффузии:

$$E_D = -\frac{D}{\lambda_1 C_1 H}\left.\frac{dC_2^{II}}{dx}\right|_{x=L} = \frac{D}{2\lambda_2 RL}\left\{thaL(aR + ShaR) + 1 - ChaR\right\} \qquad (100)$$



Частные случаи:

Если $\tilde{x} = \frac{R}{L} \to 0$, то

$$E_D = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{D}{\lambda_2}} thL\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}} \qquad (100а)$$

Если $\frac{\lambda_2}{D} \to \infty$, то

$$E_D = \frac{1}{\tilde{y}} \qquad (100б)$$

где $\tilde{y} = L\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}$, L - полутолщина пластины.

Рис. 8. Распределение концентрации торона в пластине при равномерном распределении МИ (метод Гана)
(L = 1,5*10^{-5} см, R = 0,5*10^{-5} см, λ = 1,27*10^{-2} с$^{-1}$)
сплошная линия – Ц0; пунктир – Ц1; штрихпунктир – Ц2
1 - $\tilde{y} = \infty$ (D =0)
2 - $\tilde{y}$ = 4 10^{-5}
3 – $\tilde{y}$ =2*10^{-5}
4 – $\tilde{y}$ =1*10^{-5}

Общая эманирующая способность пластины случая ЦМГ (L>>R):

$$E = \frac{\tilde{x}}{2} + \frac{1}{\tilde{y}} \qquad (101)$$

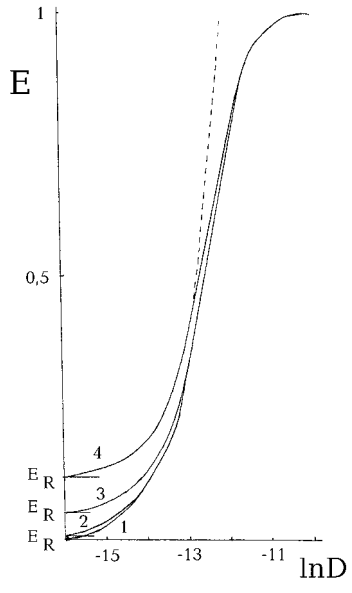


Рис. 9. Эманирующая способность пластины (равномерное распределение радия, Цепочка Ra - Rn)
сплош. линия - уравнение (44); штрихпунктир – Ур. 44а; пунктир – Ур. 44б
1 – R/L = 0
2 – R/L = 2/1000
3 – R/L = 1/10
4 – R/L = 1/4

На **Рис. 9** в качестве примера приведена зависимость E(lnD) для различных значений $\tilde{x}$. Видно, что при малых значениях E приближенная формула (100б) хорошо описывает точные зависимости, однако при больших E из-за «эффекта утомления» [7] следует пользоваться более строгими уравнениями. Влияние отдачи на диффузию, напротив, надо учитывать при малых значениях E.

Пластина. МХ, Ц2. Задача расчета эманирующей способности за счет диффузии пластины, равномерно меченной торием с учетом двух последовательных эффектов отдачи строго решена И.Н.Бекманом [4]. Пусть дана пластина толщиной H=2L, в которой равномерно распределён радий, т.е. здесь $C_0(x)$=Const. Тогда распределение радия:

$$C_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{L}{2R} - \frac{x}{2R} \qquad (102)$$

Для описания распределения концентрации эманации (радона или торона) при стационарных условиях в трёх областях имеем систему дифференциальных уравнений:

I. $D\frac{\partial^2 C_2^I}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^I + \lambda_0 C_0\left(\frac{3}{8} + \frac{L}{2R} - \frac{x}{2L}\right) = 0;\ L - R \le x \le L$ (103а)

II. $D\frac{\partial^2 C_2^{II}}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^{II} + \lambda_0 C_0\left(\frac{1}{2} + \frac{L}{2R} - \frac{Lx}{4R} - \frac{x^2}{8R^2}\right) = 0;\ L - 2R \le x \le L - R$ (103б)

III. $D\frac{\partial^2 C_2^{III}}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^{III} + \lambda_0 C_0 = 0;\quad 0 \le x \le L - R$ (103в)

Решение этих уравнений будем искать в виде:

I. $8RDu'' - 8R\lambda_1 u + \lambda_0 C_0(3R + 4L) - 4\lambda_0 C_0 x = 0$ (104а)

$u = A_1 x + A_0;\quad u' = A_1;\quad u'' = 0$ (104б)

$-8R\lambda(A_1 x + A_0) = 4\lambda_0 C_0 x - \lambda_0 C_0(3R + 4L)$ (104в)

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получим:

$A_0 = \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\frac{3R + 4L}{8R} = \Psi\left(\frac{3R + 4L}{8R}\right);\ A_1 = -\frac{\Psi}{2R}$

Тогда:

$C_2^I = a_1 Shax + a_2 Chax + \Psi\left(\frac{3}{8} + \frac{L}{2R} - \frac{x}{2R}\right)$

II. $8R^2 Du'' - 8R^2\lambda u + \lambda_0 C_0(4R^2 + 4L - L^2 - 4Rx + 2Lx - x^2) = 0$

$u = A_2 x^2 + A_1 x + A_0;\quad u' = 2A_2 + A_1;\quad u'' = 2A_2;$

$16R^2 DA_2 - 8R^2\lambda_2 A_2 x^2 - 8R^2\lambda_2 A_0 = \lambda_0 C_0\left[-4R^2 - 4RL + L^2 + 2(R - L)x + x^2\right]$

$A_0 = \Psi\left(\frac{4R^2 + 4RL - L^2}{8R^2} - \frac{D}{4\lambda R^2}\right);\quad A_1 = -\frac{\Psi(2R - L)}{4R^2};\quad A_2 = -\frac{\Psi}{8R^2}$

$C_2^{II} = a_3 Shax + a_4 Chax + \Psi\left(-\frac{D}{\lambda^2}\frac{1}{4R^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{L}{R} - \frac{L^2}{8R^2} - \frac{x}{2R} + \frac{Lx}{4R^2} - \frac{x^2}{8R^2}\right)$

III. $Du'' - \lambda u + \lambda_0 C_0 = 0;$

$u = A_0 = \Psi;$ u'=0; u''=0;

$C_2^{II} = a_5 Shax + a_6 Chax + \Psi$

Таким образом, нам необходимо решить уравнений:

$C_2^I = a_1 Shax + a_2 Chax + \Psi\left(\frac{3}{8} + \frac{L}{2R} - \frac{x}{2R}\right)$ (105а)

$C_2^{II} = a_3 Shax + a_4 Chax + \Psi\left(-\frac{D}{\lambda_2}\frac{1}{4R^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{L}{R} - \frac{L^2}{8R2} - \frac{Lx}{4R^2} - \frac{x^2}{8R^2}\right)$ (105б)

$C_2^{III} = a_5 Shax + a_6 Chax + \Psi$ (105в)

При краевых условиях:

$C_2^I = 0, x = L;\quad C_2^{II} = C_2^{III}, x = L - x;\quad \frac{\partial C_2^{III}}{\partial x} = 0, \frac{\partial C_2^{II}}{\partial x} = \frac{\partial C_2^{III}}{\partial x}, x = L - R;\quad C_2^I = C_2^{II}, x = L - R;$

$\frac{\partial C_2^I}{\partial x} = \frac{\partial C_2^{II}}{\partial x}, x = L - x.$

Имеем систему уравнений:

$a_5 Ch0 + a_6 Sh0 = 0;$

$a_1 ShaL + a_2 ChaL + \frac{3}{8}\Psi = 0;$

$a_2 Sha(L - R) + a_2 Cha(L - R) = a_3 Sha(L - R) + a_4 Cha(L - R) - \frac{\Psi}{4R^2 a^2}$

$a_1 aCha(L - R) + a_2 aSha(L - R) = a_3 aCha(L - R) + a_4 aSha(L - R) + \frac{\Psi}{4R}$

$$a_3 Sha(L-R) + a_4 Cha(L-R) - \frac{\Psi}{4R^2 a^2} = a_6 Cha(L-R)$$

$$a_3 Cha(L-2R) + a_4 Sha(L-2R) = a_6 Sh(L-2R)$$

$$\alpha_1 = x; \quad a_2 = y; \quad a_3 = z; \quad a_4 = v; \quad a_6 = u; \quad \alpha_1 = ShaR; \quad \alpha_2 = Sha(L-R); \alpha_3 = Sha(L-2R);$$

Обозначим: $L_1 = \frac{3}{8}\Psi; L_2 = \frac{\Psi}{4R^2 a}; \quad L_3 = \frac{\Psi}{4Ra}; \quad \beta_1 = Cha(L-R); \quad \beta_2 = Cha(L-2R)$

Тогда система уравнений перепишется в виде:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = -L_1;$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y - \alpha_2 z - \beta_2 v = -L_2;$$

$$\beta_2 x + \lambda_2 y - \beta_2 z - L_2 v = L_3;$$

$$\beta_3 z + \alpha_3 v - \alpha_3 u = 0$$

Решив эту систему, найдём константы:

$$a_1 = (\alpha_2 - \alpha_3)L_2 + \beta_2 L_2 \qquad (106а)$$

$$a_2 = -\frac{L_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)L_3}{\beta_1} - \frac{\alpha_1\beta_2 L_3}{\beta_1} = -\frac{L_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}a_1 \qquad (106б)$$

$$a_3 = -\alpha_3 L_2 \qquad (106в)$$

$$a_4 = -\frac{L_1}{\beta_1} - \frac{[\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3) - \beta_1\beta_2]L_2}{\beta_1} - \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)L_3}{\beta_1} = \alpha_2 L_3 + \beta_2 L_2 + a_2 \qquad (106г)$$

$$a_5 = 0 \qquad (106е)$$

$$a_6 = -\frac{L_1}{\beta_1} - \frac{[\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3) - \beta_1(\beta_2 - \beta_3)]L_2}{\beta_1} - \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)L_3}{\beta_1} = a_4 - \beta_3 L_2 \qquad (106ж)$$

Подставив коэффициенты a_i в систему (105) получим распределение радона в трёхслойной среде.

Влияние эффекта отдачи и величины коэффициента диффузии на концентрационный профиль радона иллюстрируется **Рис. 10.** Расчеты проводили для случая отсутствия МИ (цепочка Ц0), для случая наличия отдачи: системы радий-радон и радий - торон (Ц1) и системы торий-радий-торон (актинон), Ц2. Видно, что при малых значениях коэффициента диффузии профиль концентрации радона определяется эффектом отдачи, однако при росте роль отдачи падает и кривые C(x) для всех ситуаций практически совпадают. Это позволяет значительно упростить математический аппарат, используемый для обработки результатов диффузионных экспериментов.

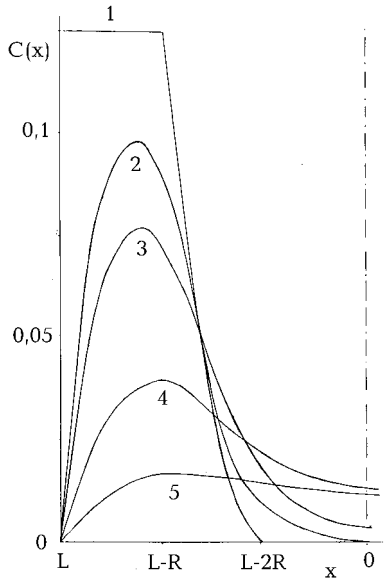


Рис. 10. Распределение концентрации радона в пластине при распределении радия в тонком слое на поверхности образца (метод пропитки, МП) (L = 1,5*10^{-5} см; R= 0,5*10^{-5} см); I — $\tilde{y} = \infty$; 2 – $\tilde{y} = 6*10^{-5}$; 3 -. $\tilde{y} = 2*10^{-5}$; 4 - $\tilde{y} = 10^{-5}$

Поток атомов радона, покидающих пластину по диффузионному механизму, равен:

$$J_D = -\frac{DS\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}(a_1 ChaL + a_2 ShaL) + \frac{DS\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\frac{1}{2R} \qquad (107)$$

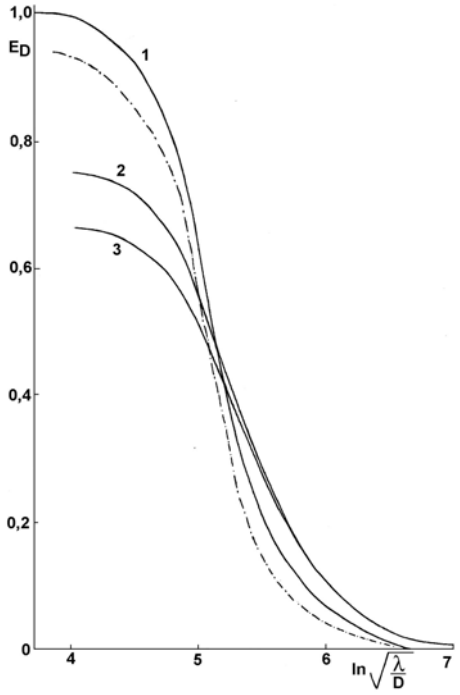
Скорость образования атомов радона в пластине:

$$G = \lambda_0 C_0\left(L - \frac{R}{4}\right) \qquad (108)$$

Эманирующая способность:

$$E_D = \frac{1}{2\left(L - \frac{R}{4}\right)a^2 R} - \frac{a_1\beta_1 + a_2\alpha_1}{a\left(L - \frac{R}{4}\right)} \qquad (109)$$

Примеры расчёта E_D для различных цепочек распада: без отдачи, при наличии одной или двух отдач, приведены на **Рис. 10.** Для сравнения даны кривые для различных методов введения материнских изотопов эманации в вещество. На **Рис. 11** приведена зависимость E от параметра $a = \sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}$. Видно, что отдача играет



существенную роль при малых значениях эманирующей способности. По мере роста D кривые практически совпадают.

Рис. 11. Зависимость эманирующей способности пластины за счёт диффузии от параметра lna при различном начальном распределении радия: 1 равномерное распределение, 2 – введение из тонкого поверхностного слоя (пропитка), 3 – введение из раствора (метод Линднера). Пунктир – равномерное распределение тория-радия.

Пластина, МП, Ц2. Рассмотрим эманирование за счет диффузии пластины, на обеих сторонах которой нанесен слой тория-228 – мечение образца методом пропитки. В стационарном состоянии система исходных диффузионных уравнений имеет вид:

$$D\frac{\partial^2 C_2^I}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^I + \frac{\lambda_0 C_0}{4R} = 0; \quad L - R \le x \le L \qquad (110а)$$

$$D\frac{\partial C_2^{II}}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^{II} + \frac{\lambda_0 C_0}{4R^2}(2R - L + x) = 0; \quad L - 2R \le x \le L - R \qquad (110б)$$

$$D\frac{\partial C_2^{III}}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^{III}; \quad 0 \le x \le L - 2R \qquad (110в)$$

Которую нужно решить при заданных выше краевых условиях).

Приведём некоторые промежуточные выкладки:

$$C_2^I = a_1 Shax + a_2 Chax + \frac{\Psi}{4R}$$

$$C_2^{II} = a_3 Shax + a_4 Chax + \frac{\Psi}{4R^2}(2R - L + x)$$

$$C_2^{III} = a_5 Shax + a_6 Chax$$

С учётом краевых условий:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = -L_1$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y - \alpha_2 z - \beta_2 v = 0$$

$$\beta_2 x + \alpha_2 y - \beta_2 z - \alpha_2 v = h_2$$

$$\alpha_2 z + \beta_3 v - \beta_3 u = 0$$

$$\beta_3 z + \alpha_3 v - \alpha_3 u = -L_2$$

где $L_1 = \frac{\Psi}{4R}; \quad L_2 = \frac{\Psi}{4aR^2}$.

Тогда параметры системы (110):

$$a_1 = L_2(\beta_2 - \beta_3) \qquad (111а)$$

$$a_2 = -\frac{L_1 - \alpha_1 a_1}{\beta_1} \qquad (111б)$$

$$a_3 = a_1 - \beta_2 L_2 \qquad (111в)$$

$$a_4 = \alpha_2 L_2 + a_2 \qquad (111г)$$

$$a_5 = 0 \qquad (111д)$$

$$a_6 = \frac{\alpha_3 a_3}{\beta_3} + a_4. \qquad (111е)$$

При малых D концентрационный профиль торона определяется эффектом отдачи. По мере роста D наблюдается типичное вращение концентрационного профиля (падение C(x)) в сторону выходной поверхности с одновременный проникновением эманации вглубь вещества), а при достаточно больших D профиль концентрации становится похожим на таковой для равномерного распределения материнских изотопов эманации.

Эманирующая способность пластины с нанесённым на её поверхностях смесью торий-228-радий-224:

$$E_D = -\frac{a_1\beta_1 + a_2\alpha_1}{2a} \qquad (112)$$

где a_1 и a_2 берутся из (111а).

Полная эманирующая способность:

$$E = \frac{1}{8} + E_D \qquad (113)$$

Зависимость E(D) приведена на **Рис.11**. Видно, что при мечении пластины методом пропитки, интервал определений D по сравнению с гомогенным мечением значительно сужен.

Пластина, МЛ, Ц2. Пусть пластина некоторое время выдерживалась в растворе тория-228 (метод Линдера), тогда радий был вбит в материал на глубину пробега атомов отдачи радия, а торон – распределён на глубине двух пробегов. Процесс диффузии торона в стационарном состоянии описывается системой уравнений:

$$D\frac{\partial^2 C_2^I}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^I + \frac{\lambda_0 C_0}{8} = 0; \quad L - R \le x \le L \qquad (114а)$$

$$D\frac{\partial^2 C_2^{II}}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^{II} + \lambda_0 C_0\left[\frac{1}{2} - \frac{L}{2R} + \frac{L^2}{8R^2} + \frac{(2R-L)x}{4R^2} + \frac{x^2}{8R^2}\right]; \quad L - 2R \le x \le L - R \qquad (114б)$$

$$D\frac{\partial^2 C_2^{III}}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^{III} = 0. \qquad (114в)$$

Решение ищем в виде:

$$C_2^I = a_1 Shax + a_2 Chax + \frac{\Psi}{8} \qquad (115а)$$

$$C_2^{II} = a_3 Shax + a_4 Chax + \Psi\left(\frac{1}{4a^2R^2} + \frac{1}{2} - \frac{L}{2R} + \frac{L^2}{8R^2} + \frac{(2R-L)x}{4R^2} + \frac{x^2}{8R^2}\right) \qquad (115б)$$

$$C_2^{III} = a_5 Shax + a_6 Chax \qquad (115в)$$

С учётом краевых условий:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = -L_1$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y - \alpha_2 z - \beta_2 v = L_2$$

$$\beta_2 x + \alpha_2 y - \beta_2 z - \alpha_2 v = L_3$$

$$\alpha_3 z + \beta_3 v - \beta_3 u = -L_2$$

$$\beta_3 z + \alpha_3 v - \alpha_3 u = 0$$

где $L_1 = \frac{\Psi}{8}; \quad L_2 = \frac{\Psi}{4a^2R^2}; \quad L_3 = \frac{\Psi}{4Ra}; \quad \Psi = \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}.$

Выражения для констант a_i:

$$a_1 = \beta_2 L_3 - (\alpha_2 - \alpha_3)L_2 \qquad (116а)$$

$$a_2 = \frac{-L_1 - \alpha_1 a_1}{\beta_1} \qquad (116б)$$

$$a_3 = \alpha_3 L_2 \qquad (116в)$$

$$a_4 = a_2 + \alpha_2 L_3 - \beta_2 L_2 \qquad (116г)$$

$$a_5 = 0 \qquad (116д)$$

$$a_6 = a_4 + \beta_3 L_2 \qquad (116е)$$

Пример развития концентрационного профиля при введении радия за счёт отдачи из тория при росте коэффициента диффузии приведен на **Рис. 11**.

Поток атомов эманации (торона), покидающих пластину за счёт диффузии:

$$J_D = -D\frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}(a_1\beta_1 + a_2\alpha_1) \qquad (117)$$

Скорость генерации торона:

$$G = \frac{R}{4}\lambda_0 C_0. \qquad (118)$$

Эманирующая способность за счёт диффузии:

$$E_D = \frac{thaL}{2aR} - \frac{1}{a^2R^2}\frac{Cha(L-R)}{ChaL} + \frac{Sha(L-R) - Sha(L-2R)}{a^3R^3ChaL} \qquad (119)$$

Полная эманирующая способность:

$$E = \frac{1}{3} + E_D \qquad (120)$$

В методе отдачи из раствора [4] зависимость $E_D(a)$ близка к аналогичной кривой для метода пропитки, однако диапазон возможностей определения значений более сужен. Поэтому для повышения информативности эманационного метода следует добиваться как можно более равномерного распределения МИ по объёму зерна.

3.3 Сэндвич

Пластина толщиной H= h_1+h_2, бесконечно тонкий слой материнского изотопа замурован на глубине h_1 от поверхности, Ц1 [8, 9].

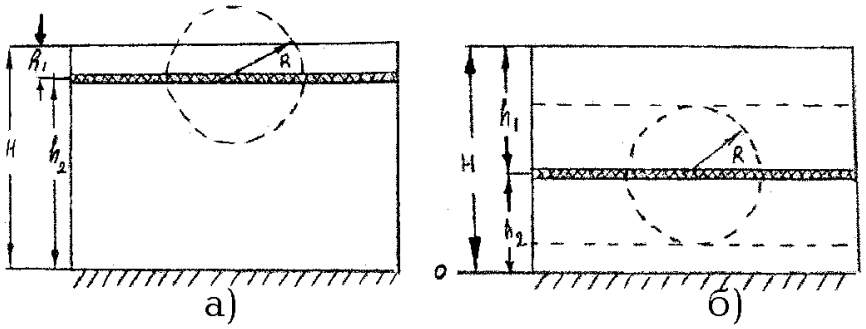


Рис. 12. Геометрия образцов с различным распределением МИ
а) Тонкий слой МИ на глубине h_1 от поверхности ($h_1 \le R$)
б) Тонкий слой МИ на глубине h_1 от поверхности ($h_1 \ge R$)

А) $h_1<R$, **рис.12а**
Распределение концентрации радона по толщине пластины

$$C_2^{\ I} = \frac{\lambda_0 C_0}{2\lambda_2 R}\frac{Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}x}{Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H}\left\{Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\left(H-h_2+R\right)-1\right\};\quad 0\le x\le h_2-R \qquad (121а)$$

$$C_2^{\ II} = \frac{\lambda_0 C_0}{2\lambda_2 R}Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}x-\frac{\lambda_0 C_0 Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}x}{2\lambda_2 RCh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H}\left\{1+Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}HSh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\left(h_2-R\right)\right\}+\frac{\lambda_0 C_0}{2R\lambda_2};\quad h_2-R\le x\le H. \qquad (121б)$$

Эманирующая способность

$$E=E_R+E_D=\frac{1}{2}\left(1-\frac{h_1}{R}\right)+\frac{\sqrt{\frac{D}{\lambda_2}}Ch\left\{\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\frac{H+h_2-R}{2}\right\}Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\frac{R+H-h_2}{2}}{RCh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H} \qquad (122)$$

Данный случай весьма важен, т.к. открывает путь (с помощью суперпозиции множества источников, реализуемым уравнением типа свертки) для нахождения распределения концентрации радона и, следовательно, эманирующей способности, в общем виде: при произвольной монотонной функции распределения МИ.

Б) $h_1>R$**.**

$$C_2^{\ I} = \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\frac{Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\left(H-h_2\right)Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}RCh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}x}{Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H};\quad 0\le x\le h_2-R \qquad (123а)$$

$$C_2^{II} = \frac{\lambda_0 C_0}{2\lambda_2 R}Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}x+\frac{\lambda_0 C_0 Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}x}{2\lambda_2 RCh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H}\left\{Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\left(H-h_2-R\right)-Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}HSh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\left(h_2-R\right)\right\}+\frac{\lambda_0 C_0}{2\lambda_2 R};\ h_2-R\le x\le H-R$$

(123б)

$$C_2^{\ III} = \frac{\lambda_0 C_0}{2\lambda_2 R}Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}h_2 Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}RCh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\left(H-x\right);\quad H-R\le x\le H \qquad (123в)$$

Эманирующая способность

$$E_R=0;\quad E_D=\frac{\sqrt{\frac{D}{\lambda_2}}Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}h_2 Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}R}{RCh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H} \qquad (124)$$

Следствия: если $D>>(\lambda_2/D)^{1/2}R<<1$, то

$$E_D = \frac{Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}h_2}{Ch\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}h} \qquad (124а)$$

1) $h_2=0$; $h_1=H<R$

$$E_D = \frac{\sqrt{\frac{D}{\lambda_2}}th\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H}{2R} \qquad (124б)$$

2) $h_2=0$; $h_1=H>R$

$$E_D = \frac{\sqrt{\frac{D}{\lambda_2}}Sh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}R}{2RCh\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H} \qquad (124в)$$

если $D>>(\lambda_2/D)^{1/2}R$, то

$$E_D = \frac{1}{Ch\sqrt{\frac{\lambda}{D}}H} \qquad (124г)$$

Если инертный газ образуется равномерно по всему объёму односторонней пластины, то

$$E_D = \frac{th\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H}{\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}H} \qquad (125)$$

Плоский сэндвич. Ц1. Рассмотрим эманирование двусторонней пластины, в объёме которой замурован слой, меченый радием, толщиной d (**Рис. 12б**). Эффектом отдачи пренебрежём.

Система исходных уравнений:

$$D\frac{\partial^2 C_2^I}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^I + \lambda_0 C_0 = 0 \qquad (126б)$$

$$D\frac{\partial^2 C_2^{II}}{\partial x^2} - \lambda_2 C_2^{II} = 0 \qquad (126в)$$

решение которой ищем в виде:

$$C_2^I = a_1 Shax + a_2 Chax + \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2} \qquad (127а)$$

$$C_2^{II} = a_3 Shax + a_4 Chax \qquad (127б)$$

при граничных условиях:

$$C_2^{II} = 0 \quad при \quad x = \frac{H}{2}; \quad \frac{dC_2^I}{d\partial x} = \frac{dC_2^{II}}{dx} \quad при \quad x = \frac{d}{2} \qquad (128а)$$

$$\frac{dC_2^I}{dx} = 0 \quad при \quad x = 0; \quad C_2^I = C_2^{II} \quad при \quad x = \frac{d}{2} \qquad (128б)$$

Значение констант:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\frac{Ch\frac{a}{2}(H-d)}{Ch\frac{aH}{2}} \qquad (129)$$

$$a_3 = -\frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2} Sh\frac{ad}{2}$$

$$a_4 = \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2} Sh\frac{ad}{2} th\frac{aH}{2}$$

Распределение концентрации эманации по плоскому сэндвичу:

$$C_2^{II}(x)=\frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\left(\frac{Sh\frac{ad}{2}Sh\frac{aH}{2}Chax}{Ch\frac{aH}{2}}-Sh\frac{ad}{2}Shax\right) \qquad (130)$$

Эманирующая способность за счёт диффузии:

$$E_D=-\frac{D}{\lambda_0 C_0\frac{d}{2}}\left(\frac{dC_2^{II}}{dx}\right)_{x=\frac{H}{2}}=\frac{2}{d}\sqrt{\frac{D}{\lambda_2}}\frac{Sh\frac{ad}{2}}{Ch\frac{aH}{2}} \qquad (131)$$

Следствия:

1) d=H; $E_D=\frac{2}{H}\sqrt{\frac{D}{\lambda_2}}th\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\frac{H}{2}$ (131а)

2) d=0; $E_D=\frac{1}{Ch\frac{aH}{2}}$ (131б)

Сферический сэндвич радиуса R_0 в центре которого находится сфера, меченая радием, радиуса r_0, **Рис. 12**. Ограничимся формулами для распределения концентрации:

$$C_2^I=\frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\left(1-\frac{Cha(R_0-r_0)Char}{Char_0}\right) \qquad (132а)$$

$$C_2^{II}=\frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\frac{Shar_0}{Char_0}Sha(R_0-r) \qquad (132б)$$

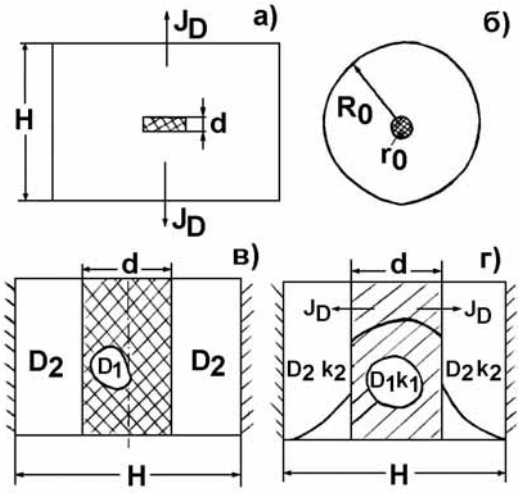


Рис. 13. Схемы разных сэндвичей: а – тонкий слой радия (таблетка) в центре пластины; б – сферическое скопление радия в центре шара; в – меченая радием пластина в камере ограниченного объёма; г – слой меченого радием материала в центре пластины из того же материала.

Следствие: $r_0=0$, $C_2=0$; $C_1=\frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}(1-Char)$ (132в)

Сэндвич с отражающими границами. Пусть в центре пластины (**Рис. 13**) расположен слой (толщина d, коэффициент диффузии D_1), в котором равномерно распределён радий. Параметры окружающих слоёв: толщина H, коэффициент диффузии D_2. Через наружные поверхности сэндвича диффузия невозможна. Рассматриваем цепочку Ц1, отдачей пренебрегаем.

Исходная система уравнений:

$$D_1\frac{\partial^2 C_2^I}{\partial x^2}+\lambda_0 C_0-\lambda_2 C_2^I=0 \qquad (133а)$$

$$D_2\frac{\partial^2 C_2^{II}}{\partial x^2}-\lambda_2 C_2=0 \qquad (133б)$$

Краевые условия:

$$\frac{dC_2^I}{dx}=0 \quad при \quad x=0; \quad D_1\frac{dC_2^I}{dx}=D_2\frac{dC_2^{II}}{dx} \quad при \quad x=\frac{d}{2} \qquad (134а)$$

$$\frac{dC_2^{II}}{dx}=0 \quad при \quad x=\frac{H}{2}; \quad C_1=C_2 \quad при \quad x=\frac{H}{2} \qquad (134б)$$

Распределение концентрации радона:

$$C_1=\frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_1}\left(1-\frac{\sqrt{D_2}Sha_2\frac{H-d}{2}Cha_1 x}{\sqrt{D_2}Cha_1\frac{d}{2}Sha_2\frac{H-d}{2}+\sqrt{D_1}Sha_1\frac{H-d}{2}}\right) \qquad (135а)$$

$$C_2 = \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\left(\frac{\sqrt{D_1}Cha_2\frac{H}{2}Sha_1\frac{d}{2}Cha_2x - \sqrt{D_1}Sha_1\frac{d}{2}Cha_2x - \sqrt{D_1}Sha_1\frac{d}{2}Sha_2\frac{H}{2}Sha_2x}{\sqrt{D_2}Cha_1\frac{d}{2}Sha_2\frac{H-d}{2} + \sqrt{D_1}Sha_1\frac{d}{2}Cha_2\frac{H-d}{2}}\right) \quad (135б)$$

Здесь $a_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{D_1}}; \quad a_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{D_2}}$.

На границе раздела фаз:

$$C \approx C(0)\frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_2}+\sqrt{D_1}} \quad (136)$$

Эта формула хорошо выполняется, если толщина активной зоны сравнима (или превышает) длину диффузионного пробега.

3.4 Эманирование в замкнутый объём

Применим полученные формулы для описания пластины толщиной d в замкнутый сосуд (высота которого L=H-x). Тогда D_1 – коэффициент диффузии эманации в исследуемом веществе, D_2 – в воздухе сосуда.

Эманирующая способность

$$\overline{E}_D = \frac{\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{H}{2}} C_2^{II}dx}{\int_0^{\frac{d}{2}} C_2^{I}(x)dx + \int_0^{\frac{H}{2}} C_2^{II}(x)dx} = \frac{2\sqrt{D_1D_2}}{d\sqrt{\lambda_2}\left(\sqrt{D_2}Cth\sqrt{\frac{\lambda_2}{D_1}}\frac{d}{2} + \sqrt{D_1}Cth\sqrt{\frac{\lambda_2}{D_2}}\frac{H-d}{2}\right)} \quad (137)$$

Учтём теперь различную растворимость эманации в фазах 1 и 2. В этом случае условия на границе раздела фаз записывается в виде:

$$D_1\frac{dC_1^{II}}{dx} = D_2\frac{dC_2^{II}}{dx} \quad при \quad x = \frac{d}{2}; \quad C_1 = kC_2^{II} \quad при \quad x = \frac{d}{2}. \quad (138)$$

где k – локальная растворимость.

Распределение концентрации радона:

$$C_2^I = \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\left(1 - \frac{\sqrt{D_2}Sha_2\frac{H-d}{2}Cha_1x}{\sqrt{D_2}Cha_1\frac{d}{2}Sha_2\frac{H-d}{2} + \sqrt{D_1}kSha_1\frac{d}{2}Cha_2\frac{H-d}{2}}\right) \quad (139а)$$

$$C_2^{II} = \frac{\lambda_0 C_0}{\lambda_2}\left(\frac{\sqrt{D_1}Cha_2\frac{H}{2}Sha_1\frac{d}{2}Cha_2x - \sqrt{D_1}Sha_1\frac{d}{2}Sha_2\frac{H}{2}Sha_2x}{\sqrt{D_2}Cha_1\frac{d}{2}Sha_2\frac{H-d}{2} + \sqrt{D_1}kSha_1\frac{d}{2}Cha_2\frac{H-d}{2}}\right) \quad (139б)$$

Коэффициент распределения радона между образцом и газовой фазой:

$$\eta = \frac{\int_0^{\frac{d}{2}} C_2^I(x)dx}{\int_0^{\frac{H}{2}} C_2^{II}(x)dx} = \frac{d}{2}a_1Ctha_1\frac{d}{2} + \frac{d}{2}a_2Ctha_2\frac{H-d}{2} - 1 \quad (140)$$

Эманирующая способность пластины в замкнутый объём:

$$\overline{E}_D = \frac{2\sqrt{D_1D_2}}{d\sqrt{\lambda_2}\left(\sqrt{D_2}Cth\sqrt{\frac{\lambda_2}{D}}\frac{d}{2} + \sqrt{D_1}kCth\sqrt{\frac{\lambda_2}{D_2}}\frac{H-d}{2}\right)} \quad (141)$$

3.5 Цилиндр

Цилиндр (радиальная диффузия, МХ, Ц1. Рассмотрим эманирование цилиндра, равномерно меченного радием. Если нас интересует только распределение концентрации вдоль радиального направления r, а диффузией радона вдоль оси цилиндра можно пренебречь, то в стационарном состоянии:

$$D\left(\frac{d^2C}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dC}{dr}\right)-\lambda C+\lambda_0 C_0-\lambda_0 C_0 q(r)=0 \qquad (142)$$

где

$$q(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{8Rr}\left(4Rr+R^2-r_0^2-2r_0r+3r^2\right); & r_0-R\le r\le r_0\\ 0; \qquad 0\le r\le r_0-R\end{cases}$$

Эманирующая способность:

$$E_D=-\frac{D2\pi r_0(r_0+h)}{\pi r_0^2 h\lambda_0 C_0}\frac{dC}{dr}\bigg|_{r=r_0}=-\frac{2D(r_0+h)}{r_0 h\lambda_0 C_0}\frac{dC}{dr}\bigg|_{r=r_0} \qquad (143)$$

$$E_D=\frac{1+v}{4zy^2v}\{\left\{5-\frac{6}{y^2}-2z^2+\left[2y(1-z^2)-y(1-4z)\right]-\frac{6}{y}\right\}\frac{I'_0(y)}{I_0(y)}+$$
$$+\left\{I'_0\,y(1-z)\left[6-y^2(1-z^2)\right]+I_0\left[y(1-z)\left[\frac{6}{y(1-z)}-y(5-z)\right]\left[\frac{I'_0(y)}{I_0(y)}K_0(y)-K'_0(y)\right]\right]\right\}\} \qquad (144)$$

где $z=\dfrac{R}{r_0}$; $y=ar_0$; $v=\dfrac{h}{r_0}$, I_0 – гиперболическая функция Бесселя.

При $y(1-z)>>1$ и y>>1 (большие зёрна) используя асимптотические разложения функций Бесселя, получим:

$$E_D=\frac{1+v}{yv} \qquad (145)$$

Общая эманирующая способность:

$$E=E_R+E_D=\frac{v+1}{v}\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{y}\right) \qquad (146)$$

Решение задачи по эманированию конечного цилиндра (таблетки) можно найти в работе [22].